

Projeto 1 - Tópicos em Controle e Automação - Processos de Otimização Aplicada

Braully Rocha da Silva

Resumo—Relatório do desenvolvimento do primeiro projeto da disciplina de processos de otimização, que consiste em três problemas a serem otimizados com métodos determinísticos com o uso do matlab e suas ferramentas auxiliares descrevendo as soluções encontradas.

Palavras-Chaves—processos de otimização, matlab, otimização

I. INTRODUÇÃO

Encontrar soluções ótimas para um problema nem sempre é uma tarefa fácil, uma importante ferramenta para esse fim são os processos de otimização utilizando métodos determinísticos. Neste relatório pretende-se apresentar uma análise de um conjunto de problemas de otimização e suas soluções ótimas, usando métodos de busca determinísticos guiados por funções de avaliações específicas para cada problema - em suma, aplicando processos de otimização.

II. METODOLOGIA

Para cada problema apresentado foi desenvolvido uma função de avaliação que implementada no Matlab[1], permitiu a aplicação de métodos de busca determinísticos, auxiliando assim a identificação de uma solução ótima para o problema originário. Para alguns casos especiais foi necessário a análise gráfica do comportamento dos valores das equações diferenciais, assim identificando um bom ponto de partida na busca da solução. Neste trabalho o Matlab foi utilizado como ferramenta principal para executar os métodos de otimização e as funções de avaliação, juntamente com o ele o seu Toolbox de otimização (Optimization toolbox), e o pplane8[2] para auxiliar na visualização dos sistemas de equações diferenciais.

III. PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Na seguinte seção, iremos explorar 3 problemas de otimização, alguns contendo subdivisões em problemas menores.

A. Equação do Segundo Grau - Problema 1

O problema de encontrar as raízes de uma equação do segundo grau pode ser facilmente enfrentado como um problema de otimização, a priori uma boa escolha de função de avaliação para otimizar o problema (encontrar as raízes) é dada pela função 1.

$$F_{aval}(x_1, x_2) = |ax_1 + bx_1 + c| + |ax_2 + bx_2 + c| \quad (1)$$

Trata-se de uma função de avaliação válida, visto que tenderá a zero quando seus argumentos forem raízes da equação,

porém ela não prioriza que esses valores sejam diferentes, aceitando como solução apenas uma das raízes.

TABELA I
SOLUÇÕES ÓTIMAS ENCONTRADAS

Parâmetros de entrada		Solução encontrada		
Método utilizado	Ponto inicial	x_1	x_2	F_{aval}
fminsearch/ simplex	(0.5, 0.1)	1	1	1.0530e-04
fminsearch/ simplex	(2.5, 2.5)	4	4	1.4843e-04

Para resolver esse pequeno problema, este trabalho propõe uma melhoria na função de avaliação, de modo que a nova função de avaliação qualifique melhor a solução quando as raízes forem valores distintos, ao passo que qualifique pior quando as raízes forem iguais.

Ele propõe uma função de avaliação conforme descrito em 2, de modo que raízes iguais tenham um resultado pior que raízes distintas, elevando o resultado da avaliação próximo ao infinito quando nestes casos.

$$F_{aval}(x_1, x_2) = \frac{|ax_1 + bx_1 + c| + |ax_2 + bx_2 + c|}{|x_1 - x_2|} \quad (2)$$

TABELA II
SOLUÇÕES ÓTIMAS ENCONTRADAS APÓS MELHORIA DA F_{aval}

Parâmetros de entrada		Solução encontrada		
Método utilizado	Ponto inicial	x_1	x_2	F_{aval}
fminsearch/ simplex	(0.5, 0.1)	4	1	5.5369e-05
fminsearch/ simplex	(2.5, 2.5)	1	4	6.9378e-05

B. Problema 2

Desenvolver a função de avaliação e encontrar os valores ótimos, utilizando de métodos determinísticos.

1) *Corte do Barbante - Problema 2.1*: Problema: Dado um fio de barbante de 10m de comprimento, cortando em dois pedaços, com esses pedaços é possível construir um quadrado e um círculo respectivamente. Determine o valor de corte para que o quadrado e o círculo juntos produzam a menor área possível.

Solução: Supondo o corte de tamanho y em um fio de barbante de 10m, usando o pedaço y para construir um quadrado e $10m - y$ para construir uma circunferência, podemos otimizar esse corte y para que a área total do quadrado e da circunferência seja a menor possível, para tanto, supomos x_1

o tamanho da base do quadrado e x_2 o raio da circunferência. A área do quadrado é calculada pela base multiplicada pela altura, como em um quadrado temos a base igual a altura, podemos inferir a área do quadrado baseada no valor de x_1 : $A_{quadrado} = x_1 \cdot x_1 = (x_1)^2$. A área da circunferência é calculada pela multiplicação do raio ao quadrado por π , aplicando a fórmula da área, temos $A_{circunferencia} = \pi(x_2)^2$.

A área total dada pela fórmula 3 deve ser minimizada, para tanto construímos um sistema de equações com a seguinte restrição.

$$A_{total} = A_{quadrado}(x_1) + A_{circunferencia}(x_2) \quad (3)$$

$$F_{aval}(x_1, x_2) = A_{total} = (x_1)^2 + \pi \cdot (x_2)^2 \quad (4)$$

TABELA III
VALORES ÓTIMOS ENCONTRADOS NA SIMULAÇÃO

Parâmetros de entrada	Solução encontrada	
Método utilizado	x_1	x_2
fmincon/ Quasi-Newton	1.3999m	0.7003m

Encontrado os valores da base do quadrado (x_1) e o raio da circunferência (x_2) é possível deduzirmos o ponto de corte do barbante em 5,5997m, e construir o quadrado com 5,5997m e a circunferência com 4,4003m - que é a solução ótima para esse problema.

2) *Perímetro de Retângulo - Problema 2.2:* Problema: Encontrar as dimensões de um retângulo com o perímetro de 100m que tenha a maior área possível.

Solução: O perímetro de um retângulo de base x_1 e altura x_2 , é dado pela relação $p = 2x_1 + 2x_2$, e a área deste mesmo retângulo é dado pela relação $A_{retangulo} = x_1 \cdot x_2$. Uma vez que o perímetro do retângulo para o problema analisado é fixado em 100m ($p = 100m$), uma função de avaliação que pode ser usada para encontrar as dimensões de x_1 e x_2 com a maior área possível é:

$$F_{aval}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 \cdot x_2}$$

Executando a simulação, otimizando o problema através da minimização da função de avaliação, chegamos aos valores ótimos para obter a maior área possível com a base de valor 25m ($x_1 = 25$), e de altura também 25m ($x_2 = 25$).

TABELA IV
VALORES ÓTIMOS ENCONTRADOS NA SIMULAÇÃO

Parâmetros de entrada	Solução encontrada	
Método utilizado	x_1	x_2
fmincon/ Quasi-Newton	25m	25m

3) *Ponto de Equilíbrio Sistema de Equações - Problema 2.3:* Problema: Encontrar o ponto de equilíbrio para o sistema de equações com duas variáveis.

```
x1(1) = 0.2; % Condições iniciais
x2(1) = 0.8; % Condições iniciais
t = 0:1:100; % Instantes a considerar
for ia = 1:size(t,2)-1
    x1(ia+1)=0.9*x2(ia);
    x2(ia+1)=-x1(ia)-0.1*x2(ia);
end
```

Solução: A função de avaliação 5 é uma opção para otimizar o sistema para o seu ponto de equilíbrio.

$$F_{aval}(x_1, x_2) = (max(x_1) - min(x_1)) + (max(x_2) - min(x_2)) \quad (5)$$

Executando a otimização temos os seguintes valores ótimos.

TABELA V
SOLUÇÕES ÓTIMAS ENCONTRADAS

Parâmetros de entrada	Solução encontrada			
Método utilizado	ponto inicial	x_1	x_2	F_{aval}
fminsearch/ simplex	(0.2, 0.8)	1.0e-04*-0.174	-0.1069	6.989e-05
fminunc/ Quasi-Newton	(0.2, 0.8)	1.0e-06*0.1083	0.1425	5.035597e-07

A execução no simulador, partindo do ponto inicial $x_1 = 0.2$ e $x_2 = 0.8$ tem o comportamento gráfico representado inicialmente pela figura 1 e ao fim da simulação a convergência do sistema para o ponto de equilíbrio por 2. Mesmo embora tenha sido usado dois métodos determinísticos diferentes, a solução final dos dois são muito próximas, sendo assim nos próximos casos usaremos prioritariamente o fminsearch/simplex, pois ele apresentou um melhor tempo de resposta.

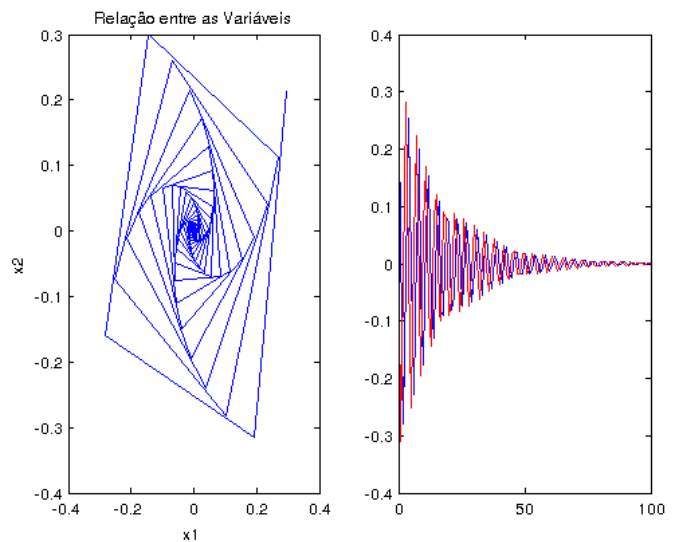


FIGURA 1. Início da simulação do problema 2.3.

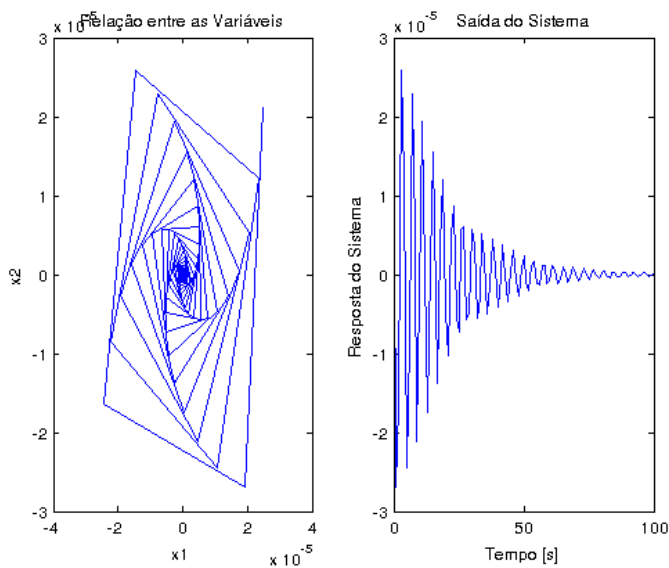


FIGURA 2. Fim da simulação do problema 2.3.

4) *Ponto de Equilíbrio Sistema de Equações - parte 2 - Problema 2.4:* Problema: Encontrar o ponto de equilíbrio para o sistema de equações com três variáveis.

```
x_dot(1) = -x(2) + x(1)*x(3);
x_dot(2) = x(1) + x(2)*x(3);
x_dot(3) = -x(3) - x(1)^2 + x(3)^2;
```

Solução: A função de avaliação 6 é uma opção para otimizar o sistema para o seu ponto de equilíbrio.

$$F_{aval}(x_1, x_2, x_3) = (\max(x_1) - \min(x_1)) + (\max(x_2) - \min(x_2)) + (\max(x_3) - \min(x_3)) \quad (6)$$

TABELA VI
SOLUÇÕES ÓTIMAS ENCONTRADAS

Parâmetros de entrada		Solução encontrada		
Método utilizado	ponto inicial	x_1	x_2	x_3
fminsearch/ simplex	(0.5, -2, -2)	0	0	0.1541

Valores ótimos encontrados na simulação - A execução no simulador, partindo do ponto inicial $x_1 = 0.5$, $x_2 = -2$ e $x_3 = -2$, temos o comportamento gráfico representado inicialmente pela figura 3 e ao fim da simulação por 4.

C. Ponto de Equilíbrio Sistema de Equações - Problema 3

No problema 3, temos um conjunto de sistemas de equações para encontrar o ponto de equilíbrio, para tanto foi utilizado a mesma função de avaliação 5, usado para a solução do problema III-B3.

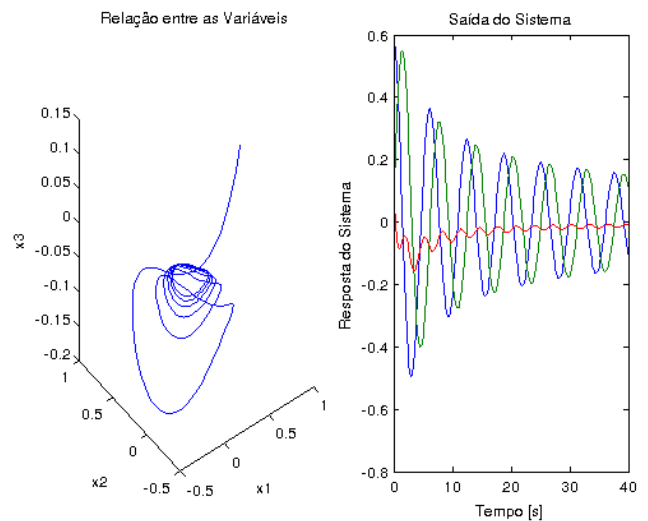


FIGURA 3. Início da simulação do problema 2.4.

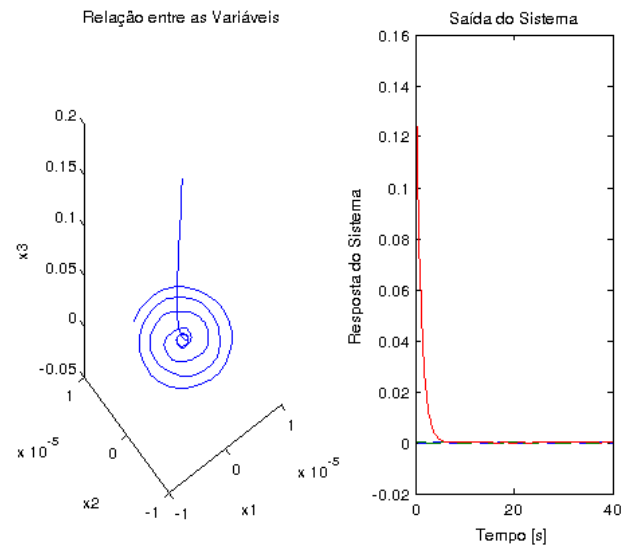


FIGURA 4. Fim da simulação do problema 2.4.

1) *Ponto de Equilíbrio Sistema de Equações - Problema 3.1:* Desenvolver a função de avaliação e encontrar o ponto de equilíbrio da seguinte equação.

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 \\ \dot{u}_2 = -\frac{L}{g} \sin(u_1) - \frac{k}{m} u_1 \end{cases} \quad (7)$$

Analisando o gráfico do sistema no pplane8 visto na figura 5, é possível identificar um possível ponto de equilíbrio nas proximidades do ponto onde $y = 0$ e $x = 0$.

Aplicando esse ponto como ponto de partida na otimização do sistema para encontrar os pontos de equilíbrios, temos o seguinte resultado.

2) *Ponto de Equilíbrio Sistema de Equações - Problema 3.2:* Desenvolver a função de avaliação e encontrar o ponto

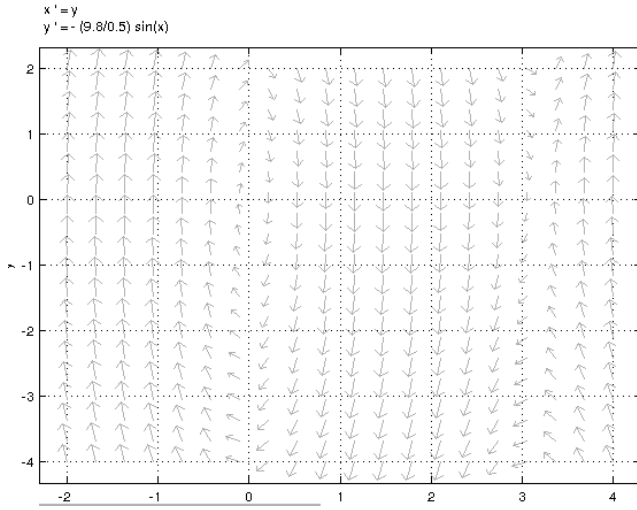


FIGURA 5. Gráfico do sistema no pplane8.

TABELA VII
PONTO DE EQUÍLBRIO

Parâmetros de entrada		Solução encontrada		
Método utilizado	ponto inicial	u_1	u_2	F_{aval}
fminsearch/ simplex	(0, 0)	0	0	0

de equilíbrio da seguinte equação:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \mu u_1 + u_2 - (u_1)^3 \\ \dot{u}_2 = -u_1 \end{cases} \quad (8)$$

Analisando o gráfico do sistema no pplane8 visto na figura 6, é possível identificar um possível ponto de equilíbrio nas proximidades do ponto onde $y = 0$ e $x = 0$.

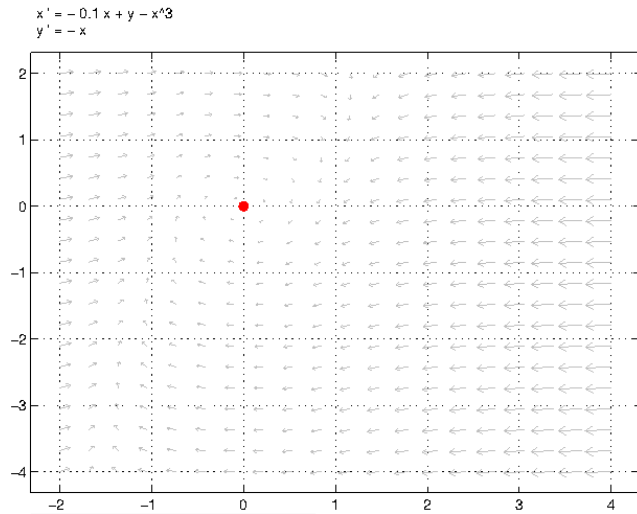


FIGURA 6. Gráfico do sistema no pplane8.

Aplicando esse ponto como ponto de partida na otimização

do sistema para encontrar os pontos de equilíbrio, temos o seguinte resultado.

TABELA VIII
PONTO DE EQUÍLBRIO

Parâmetros de entrada		Solução encontrada		
Método utilizado	ponto inicial	u_1	u_2	F_{aval}
fminsearch/ simplex	(0, 0)	0	0	0

3) *Ponto de Equilíbrio Sistema de Equações - Problema 3.3:* Desenvolver a função de avaliação e encontrar o ponto de equilíbrio da seguinte equação.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + 3(x_1^2 - x_2^2) + 2x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 3x_2 - 3(x_1^2 - x_2^2) + 3x_1x_2 \end{cases} \quad (9)$$

Analisando o gráfico do sistema no pplane8 visto na figura 7, é possível identificar um possível ponto de equilíbrio nas proximidades do ponto onde $x = -0.47$ e $y = -0.22$.

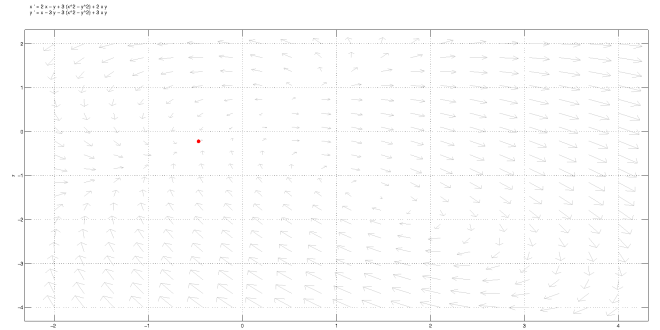


FIGURA 7. Gráfico do sistema no pplane8.

Aplicando esse ponto como ponto de partida na otimização do sistema para encontrar os pontos de equilíbrios, temos o seguinte resultado.

TABELA IX
PONTO DE EQUÍLBRIO

Parâmetros de entrada		Solução encontrada		
Método utilizado	ponto inicial	x_1	x_2	F_{aval}
fminsearch/ simplex	(-0.47, -0.22)	-0.4661	-0.2209	0.0301

4) *Ponto de Equilíbrio Sistema de Equações - Problema 3.4:* Desenvolver a função de avaliação e encontrar o ponto de equilíbrio da seguinte equação.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a \sin(x_1) - bx_2 + \mu \end{cases} \quad (10)$$

Analisando o gráfico do sistema no pplane8 visto na figura 8, é possível perceber que não existe um ponto de equilíbrio aparente, mesmo aumentando o intervalo (de -50 até 50) a ser considerado na análise.

O melhor candidato possível para ter um ponto de equilíbrio está situado sobre a reta $y = 0$, aplicando um ponto qualquer

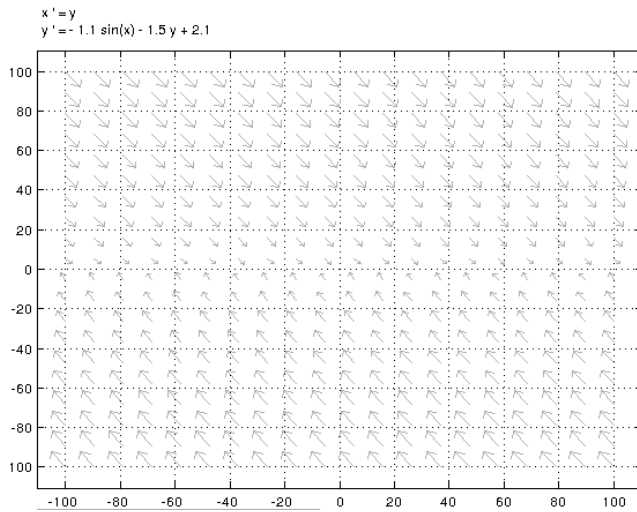


FIGURA 8. Gráfico do sistema no pplane8.

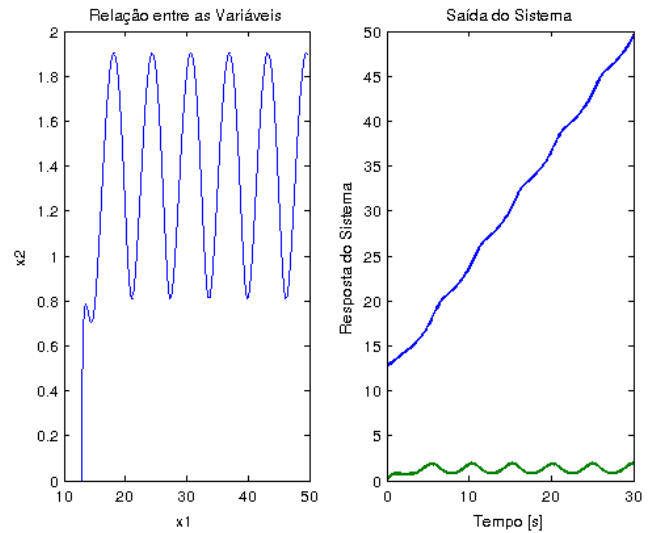


FIGURA 9. Fim da simulação do problema 3.4.

dessa reta como ponto de partida na otimização do sistema para encontrar o possível ponto de equilíbrio temos o seguinte resultado.

TABELA X
PONTO DE EQUILÍBRIO

Parâmetros de entrada		Solução encontrada		
Método utilizado	ponto inicial	x_1	x_2	F_{aval}
fminsearch/ simplex	(10, 0)	12.8854	0.0005	3.8649e+03

O que não é um ponto de equilíbrio, dado o gráfico do resultado da simulação visto na figura 9, esse não é um sistema que é possível ser otimizado para o ponto de equilíbrio, apenas com as informações levantadas, um estudo mais aprofundado seria necessário para concluir seu ponto de equilíbrio, ou da impossibilidade de existir tal ponto.

5) *Ponto de Equilíbrio Sistema de Equações - Problema 3.5:* Desenvolver a função de avaliação e encontrar o ponto de equilíbrio da seguinte equação.

$$\begin{cases} \dot{Y}_1 = -0.1Y_2 \\ \dot{Y}_2 = -0.064Y_1 \end{cases} \quad (11)$$

Analisando o gráfico do sistema no pplane8 visto na figura 10, é possível identificar um possível ponto de equilíbrio nas proximidades do ponto onde $y = 0$ e $x = 0$.

Aplicando esse ponto como ponto de partida na otimização do sistema para encontrar os pontos de equilíbrios, temos o seguinte resultado.

TABELA XI
PONTO DE EQUILÍBRIO

Parâmetros de entrada		Solução encontrada		
Método utilizado	ponto inicial	Y_1	Y_2	F_{aval}
fminsearch/ simplex	(0, 0)	0	0	0

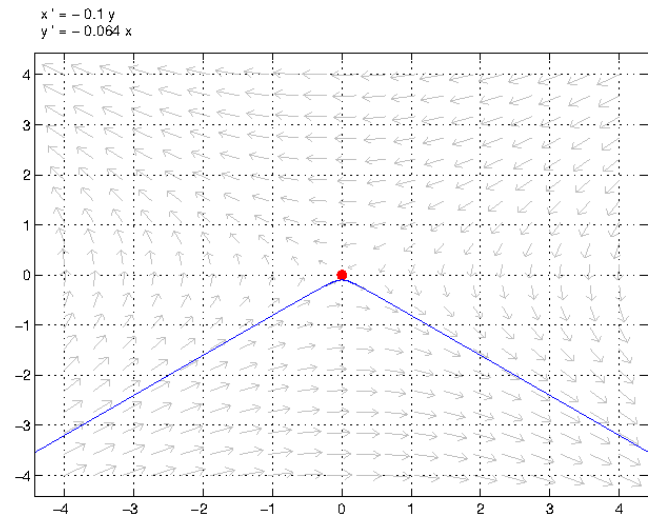


FIGURA 10. Gráfico do sistema no pplane8.

6) *Ponto de Equilíbrio Sistema de Equações - Problema 3.6:* Desenvolver a função de avaliação e encontrar o ponto de equilíbrio da seguinte equação.

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_1 + e^{-\xi_2} \\ \dot{\xi}_2 = -\xi_2 \end{cases} \quad (12)$$

Analisando o gráfico do sistema no pplane8 visto na figura 11, é possível identificar um possível ponto de equilíbrio nas proximidades do ponto onde $y = 0$ e $x = -1$.

Aplicando esse ponto como ponto de partida na otimização do sistema para encontrar os pontos de equilíbrios, temos o seguinte resultado.

7) *Ponto de Equilíbrio Sistema de Equações - Problema 3.7:* Desenvolver a função de avaliação e encontrar o ponto

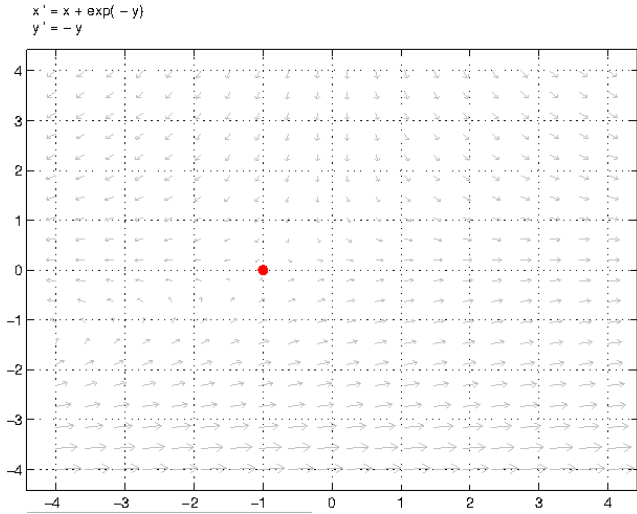


FIGURA 11. Gráfico do sistema no pplane8.

TABELA XII
PONTO DE EQUILÍBRIO

Parâmetros de entrada		Solução encontrada		
Método utilizado	ponto inicial	ξ_1	ξ_2	F_{aval}
fminsearch/ simplex	(-1, 0)	-1	0	0

de equilíbrio da seguinte equação.

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2^2 \\ x_2 = -x_1^2 \end{cases} \quad (13)$$

Analisando o gráfico do sistema no pplane8 visto na figura 12, é possível identificar um possível ponto de equilíbrio nas proximidades do ponto onde $y = -1$ e $x = 0$.

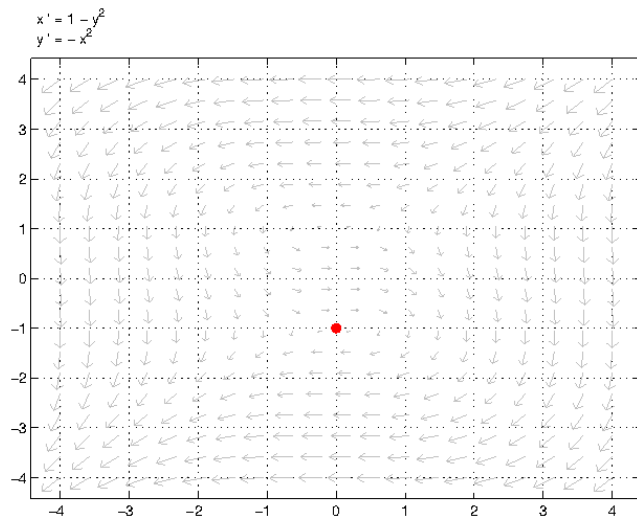


FIGURA 12. Gráfico do sistema no pplane8.

Aplicando esse ponto como ponto de partida na otimização

do sistema para encontrar os pontos de equilíbrios, temos o seguinte resultado.

TABELA XIII
PONTO DE EQUILÍBRIO

Parâmetros de entrada		Solução encontrada		
Método utilizado	ponto inicial	x_1	x_2	F_{aval}
fminsearch/ simplex	(0, -1)	0	-1	0

IV. CONCLUSÃO

Os resultados encontrados para os problemas são valores ótimos, mesmo que locais, consistem em boas soluções para os problemas propostos. O uso das implementações do métodos de otimização do Matlab e do Toolbox de otimização se mostraram eficazes tanto para problemas simplórios de otimização, como para sistemas de equações mais complexas. A ferramenta pplane8 também se mostrou muito importante para auxiliar e compreender o comportamento de determinados sistemas de equações, guiando assim um caminho inicial para as buscas determinísticas, quando se tratar de problemas mais complexos. Podemos concluir então que o conjunto Matlab, Toolbox e Pplane8 são ferramentas satisfatórias no processo de otimização, podendo ser usado em diferentes gamas de problemas, aplicando diferentes tipos de métodos, sempre com o objetivo de encontrar uma solução ótima para o problema estudado.

REFERÊNCIAS

- [1] MATLAB, "The Language of Technical Computing." (Versão R2012a).
- [2] POLKING J. C. , "PPLANE: Phase Plane of an Ordinary Differential Equation." *Rice Universit*, (Versão 8).