

# Projeto 2 - Tópicos em Controle e Automação - Processos de Otimização Aplicada

Braully Rocha da Silva

**Resumo**—Relatório do desenvolvimento do primeiro projeto da disciplina de processos de otimização, que consiste em três problemas a serem otimizados com métodos heurísticos com o uso do matlab e suas ferramentas auxiliares descrevendo as soluções encontradas.

**Palavras-Chaves**—processos de otimização, matlab, otimização, algoritmo genético

## I. INTRODUÇÃO

Encontrar soluções ótimas para um problema nem sempre é uma tarefa fácil, uma importante ferramenta para esse fim são os processos de otimização utilizando métodos heurísticos. Neste relatório pretende-se apresentar uma análise de um conjunto de problemas de otimização e suas soluções ótimas, usando algoritmo genético, um método de busca heurístico, guiado por funções de avaliações específicas para cada problema - em suma, aplicando processos de otimização.

## II. METODOLOGIA

Para cada problema apresentado foi desenvolvido uma função de avaliação que implementada no Matlab[1], permitiu a aplicação do algoritmo genético, auxiliando assim a identificação de uma solução ótima para o problema originário. Neste trabalho o Matlab foi utilizado como ferramenta principal para executar a otimização, juntamente com o ele o seu Toolbox de otimização (Optimization toolbox). Também uma implementação simples de um algoritmo genético, com seleção e mutação estocástica, foi utilizado para atacar a otimização da maioria dos problemas propostos.

## III. ALGORITMO GENÉTICO

Neste artigo foi utilizada uma implementação simplificada de um algoritmo genético com seleção e mutação estocásticas. Algoritmos genéticos são simulações computacionais análogas ao comportamento evolucionário de espécies na natureza. Em ambos os casos gerações sucessivas vão sendo aprimoradas através da seleção, cruzamento e mutação dos genes dos indivíduos da população.

Em uma definição formal mais consolidada de acordo com [4] temos que: “Um Algoritmo Genético é um processo iterativo que mantém uma população de estruturas que são soluções candidatas no domínio especificado. Durante cada incremento temporal (chamado de geração), a estrutura na população atual é qualificada por sua efetividade como solução dominante, e com base nestas qualificações, uma nova população de soluções candidatas é formada usando operadores genéticos específicos como reprodução (seleção), cruzamento (recombinação) e mutação”.

### A. Parametros do Algoritmo Genético

Na implementação utilizada neste trabalho, foi utilizado como parâmetros de entrada para o algoritmo genético os seguintes elementos:

- Função de avaliação do problema;
- Tamanho da população;
- Numero de gerações;
- Limite estocástico da mutação;
- Limite do espaço de busca.

### B. Algoritmo Genético

A seguir uma descrição algoritma em alto nível, do processo de otimização feito pelo algoritmo genético.

**Entrada:** Função de avaliação

**Saída:** Solução otimizada

**início**

Gerar população inicial;

**repita**

    Avaliar os indivíduos da população;

    Seleção dos pais da próxima geração;

    Cruzamento dos pais e geração de novos indivíduos;

    Mutação dos novos indivíduos;

    Colocar melhor indivíduo da geração anterior na população;

**if entendeu then**

        vá para o próximo;

        próximo se torna o atual;

**else**

        volte ao início da seção;

**end**

**até** Melhor indivíduo da população ser uma solução ótima OU geração máxima atingida;

**fin**

**Algoritmo 1:** Visão geral da implementação do algoritmo genético utilizado.

## IV. PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Na seguinte seção, iremos explorar 3 problemas de otimização, alguns contendo subdivisões em problemas menores.

### A. Equação do Segundo Grau - Problema 1

O problema de encontrar as raízes de uma equação do segundo grau pode ser facilmente enfrentado como um problema

de otimização, uma boa escolha de função de avaliação para otimizar o problema (encontrar as raízes) é dada pela função 1, a função de avaliação qualificará melhor a solução quando as raízes forem valores distintos, ao passo que qualificará pior quando as raízes forem iguais.

$$F_{aval}(x_1, x_2) = \frac{|ax_1 + bx_1 + c| + |ax_2 + bx_2 + c|}{|x_1 - x_2|} \quad (1)$$

TABELA I  
SOLUÇÕES ÓTIMAS ENCONTRADAS

Parâmetros de entrada		
Método utilizado	Algoritmo Genético	
Seleção	estocástica	
Cruzamento	estocástica	
Mutação	estocástica	
Tamanho da População	20	
Número Máximo de Gerações	50	
Solução encontrada		
$x_1$	$x_2$	$F_{aval}$
3.96651555104485	1.0075614196697	0.041217

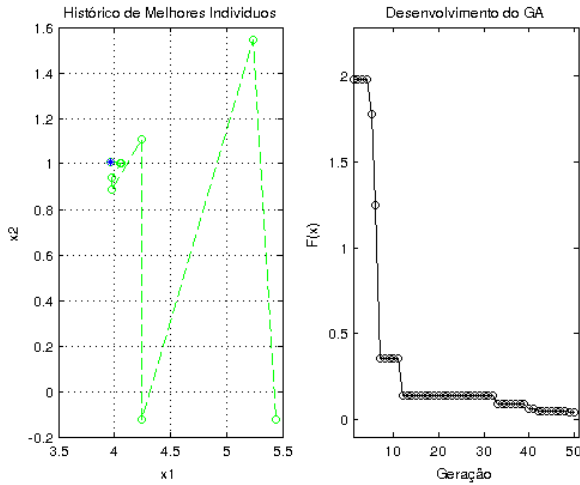


FIGURA 1. Comportamento da otimização do problema.

## B. Problema 2

Desenvolver a função de avaliação e encontrar os valores ótimos, utilizando de métodos heurísticos.

1) *Corte do Barbante - Problema 2.1:* Problema: Dado um fio de barbante de 10m de comprimento, cortando em dois pedaços, com esses pedaços é possível construir um quadrado e um círculo respectivamente. Determine o valor de corte para que o quadrado e o círculo juntos produzam a menor área possível.

Solução: Supondo o corte de tamanho  $y$  em um fio de barbante de 10m, usando o pedaço  $y$  para construir um quadrado e  $10m - y$  para construir uma circunferência, podemos otimizar esse corte  $y$  para que a área total do quadrado e da circunferência seja a menor possível, para tanto, supomos  $x_1$

o tamanho da base do quadrado e  $x_2$  o raio da circunferência. A área do quadrado é calculada pela base multiplicada pela altura, como em um quadrado temos a base igual a altura, podemos inferir a área do quadrado baseada no valor de  $x_1$ :  $A_{quadrado} = x_1 \cdot x_1 = (x_1)^2$ . A área da circunferência é calculada pela multiplicação do raio ao quadrado por  $\pi$ , aplicando a fórmula da área, temos  $A_{circunferencia} = \pi(x_2)^2$ .

A área total dada pela fórmula 2 deve ser minimizada, para tanto construímos um sistema de equações com a seguinte restrição.

$$A_{total} = A_{quadrado}(x_1) + A_{circunferencia}(x_2) \quad (2)$$

$$F_{aval}(x_1, x_2) = A_{total} = (x_1)^2 + \pi \cdot (x_2)^2 \quad (3)$$

TABELA II  
SOLUÇÕES ÓTIMAS ENCONTRADAS

Parâmetros de entrada		
Método utilizado	Algoritmo Genético	
Tamanho da População	20	
Número Máximo de Gerações	50	
Solução encontrada		
$x_1$	$x_2$	$F_{aval}$
1.3998	0.7002	3.499139e+00

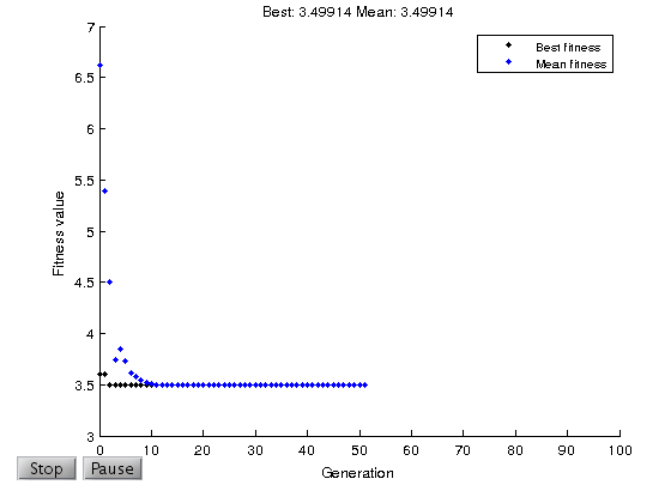


FIGURA 2. Comportamento da função de avaliação aplicada ao melhor indivíduos ao longo das gerações.

Encontrado os valores da base do quadrado ( $x_1$ ) e o raio da circunferência ( $x_2$ ) é possível deduzirmos o ponto de corte do barbante em 5,5994m, e construir o quadrado com 5,5994m e a circunferência com 4,4006m - que é uma solução ótima para esse problema.

2) *Perímetro de Retângulo - Problema 2.2:* Problema: Encontrar as dimensões de um retângulo com o perímetro de 100m que tenha a maior área possível.

Solução: O perímetro de um retângulo de base  $x_1$  e altura  $x_2$ , é dado pela relação  $p = 2x_1 + 2x_2$ , e a área deste mesmo

retângulo é dado pela relação  $A_{retangulo} = x_1 \cdot x_2$ . Uma vez que o perímetro do retângulo para o problema analisado é fixado em  $100m$  ( $p = 100m$ ), uma função de avaliação que pode ser usada para encontrar as dimensões de  $x_1$  e  $x_2$  com a maior área possível é:

$$F_{aval}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 \cdot x_2}$$

Executando a simulação, otimizando o problema através da minimização da função de avaliação, chegamos muito próximo aos valores ótimos para obter a maior área possível com a base de valor  $25,008m$  ( $x_1 \approx 25$ ), e de altura também  $24,991m$  ( $x_2 \approx 25$ ).

TABELA III  
SOLUÇÕES ÓTIMAS ENCONTRADAS

Parâmetros de entrada		
Método utilizado	Algoritmo Genético	
Tamanho da População	20	
Número Máximo de Gerações	50	
Solução encontrada		
$x_1$	$x_2$	$F_{aval}$
2.500853e+01	2.499197e+01	1.599968e-01

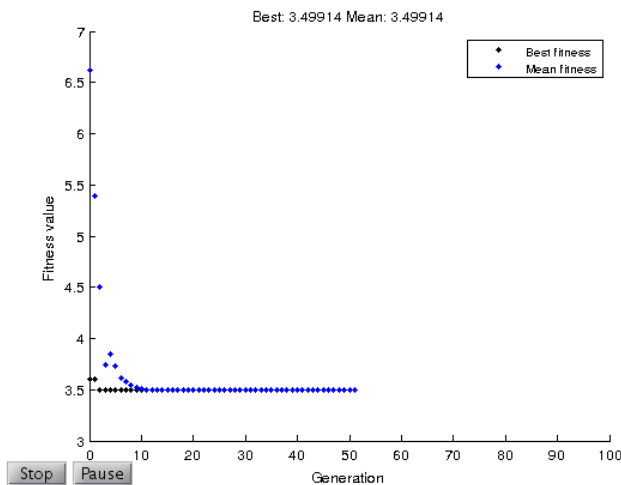


FIGURA 3. Comportamento da otimização do problema.

3) *Ponto de Equilíbrio Sistema de Equações - Problema 2.3*: Problema: Encontrar o ponto de equilíbrio para o sistema de equações com duas variáveis.

```
x1(1) = 0.2; % Condições iniciais
x2(1) = 0.8; % Condições iniciais
t = 0:1:100; % Instantes a considerar
for ia = 1:size(t,2)-1
    x1(ia+1)=0.9*x2(ia);
    x2(ia+1)=-x1(ia)-0.1*x2(ia);
end
```

Solução: A função de avaliação 4 é uma opção para otimizar o sistema para o seu ponto de equilíbrio.

$$F_{aval}(x_1, x_2) = (max(x_1) - min(x_1)) + (max(x_2) - min(x_2)) \quad (4)$$

Executando a otimização temos os seguintes valores ótimos.

TABELA IV  
SOLUÇÕES ÓTIMAS ENCONTRADAS

Parâmetros de entrada		
Método utilizado		Algoritmo Genético
Seleção		estocástica
Cruzamento		estocástica
Mutação		estocástica
Tamanho da População		20
Número Máximo de Gerações		50
Solução encontrada		
$x_1$	$x_2$	$F_{aval}$
0.00944864730401968	0.00620176526146104	0.038099

A execução no simulador, tem o comportamento gráfico representado pela figura 4.

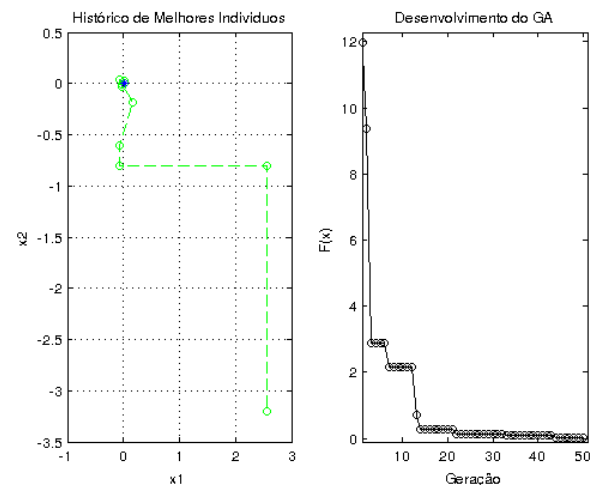


FIGURA 4. Início da simulação do problema 2.3.

4) *Ponto de Equilíbrio Sistema de Equações - parte 2 - Problema 2.4*: Problema: Encontrar o ponto de equilíbrio para o sistema de equações com três variáveis.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1 \cdot x_3; \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \cdot x_3; \\ \dot{x}_3 &= -x_3 - x_1^2 + x_3^2; \end{aligned}$$

Solução: A função de avaliação 5 é uma opção proposta para otimizar o sistema para o seu ponto de equilíbrio.

$$F_{aval}(x_1, x_2, x_3) = (max(x_1) - min(x_1)) + (max(x_2) - min(x_2)) + (max(x_3) - min(x_3)) \quad (5)$$

Valores ótimos encontrados na simulação, temos o comportamento gráfico representado inicialmente pela figura 5.

TABELA V  
SOLUÇÕES ÓTIMAS ENCONTRADAS

Parâmetros de entrada			
Método utilizado		Algoritmo Genético	
Seleção		estocástica	
Cruzamento		estocástica	
Mutação		estocástica	
Tamanho da População		20	
Número Máximo de Gerações		50	
Solução encontrada			
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$F$
-0.00135743180023529	-0.0057915641962103	-0.510276518200303	52

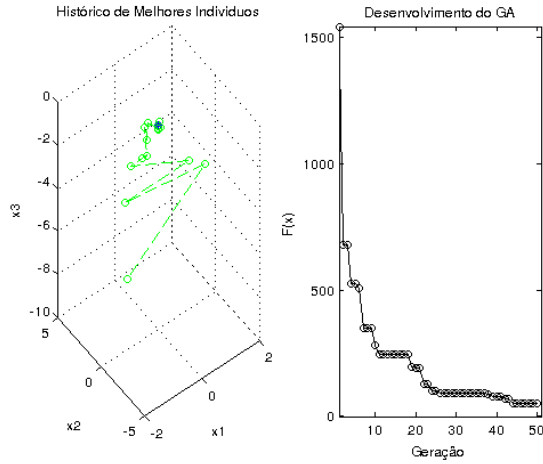


FIGURA 5. Início da simulação do problema 2.4.

### C. Ponto de Equilíbrio Sistema de Equações - Problema 3

No problema 3, temos um conjunto de sistemas de equações para encontrar o ponto de equilíbrio, para tanto foi utilizado a mesma função de avaliação 4, usada para alcançar a solução do problema IV-B3.

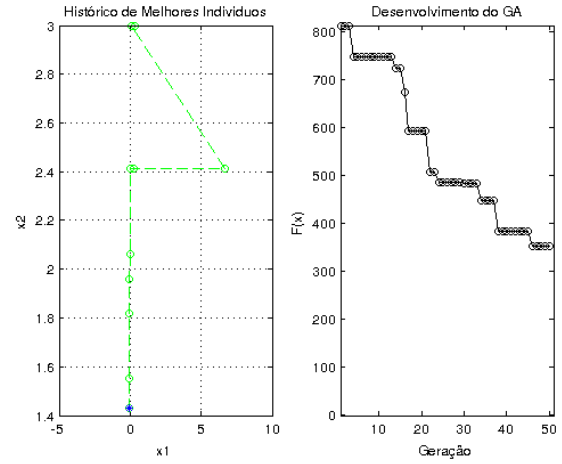
1) *Ponto de Equilíbrio Sistema de Equações - Problema 3.1:* Desenvolver a função de avaliação e encontrar o ponto de equilíbrio da seguinte equação.

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 \\ \dot{u}_2 = -\frac{L}{g} \sin(u_1) - \frac{k}{m} u_1 \end{cases} \quad (6)$$

Aplicando a otimização com o algoritmo genético temos o seguinte resultado.

TABELA VI  
PONTO DE EQUILÍBRIO

Parâmetros de entrada		
Método utilizado	Algoritmo Genético	
Seleção	estocástica	
Cruzamento	estocástica	
Mutação	estocástica	
Tamanho da População	20	
Número Máximo de Gerações	50	
Solução encontrada		
$u_1$	$u_2$	$F_{aval}$
-0.0313873490376896	1.42854420819172	352.1879



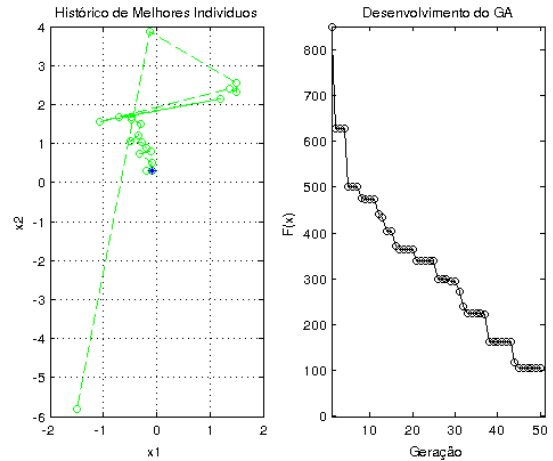
2) *Ponto de Equilíbrio Sistema de Equações - Problema 3.2:* Desenvolver a função de avaliação e encontrar o ponto de equilíbrio da seguinte equação:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \mu u_1 + u_2 - (u_1)^3 \\ \dot{u}_2 = -u_1 \end{cases} \quad (7)$$

Aplicando a otimização com o algoritmo genético temos o seguinte resultado.

TABELA VII  
PONTO DE EQUILÍBRIO

Parâmetros de entrada		
Método utilizado		Algoritmo Genético
Seleção		estocástica
Cruzamento		estocástica
Mutação		estocástica
Tamanho da População		20
Número Máximo de Gerações		50
Solução encontrada		
$u_1$	$u_2$	$F_{aval}$
-0.0838163697309344	0.30166131703578	105.4876



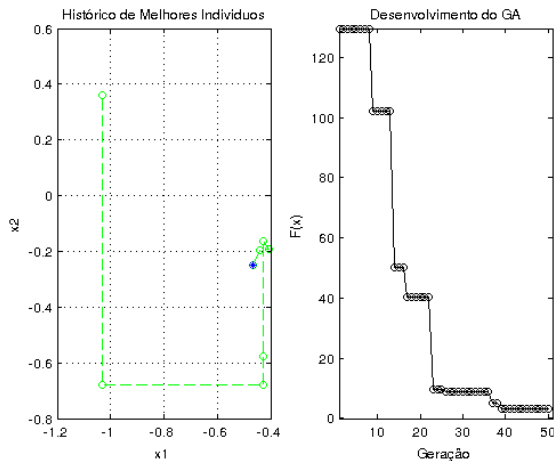
3) *Ponto de Equilíbrio Sistema de Equações - Problema 3.3*: Desenvolver a função de avaliação e encontrar o ponto de equilíbrio da seguinte equação.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + 3(x_1^2 - x_2^2) + 2x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 3x_2 - 3(x_1^2 - x_2^2) + 3x_1x_2 \end{cases} \quad (8)$$

Aplicando a otimização com o algoritmo genético temos o seguinte resultado.

TABELA VIII  
PONTO DE EQUILÍBRIO

Parâmetros de entrada		
Método utilizado		Algoritmo Genético
Seleção		estocástica
Cruzamento		estocástica
Mutação		estocástica
Tamanho da População		20
Número Máximo de Gerações		50
Solução encontrada		
$x_1$	$x_2$	$F_{aval}$
-0.467640522548516	-0.24863511439077	3.0368



4) *Ponto de Equilíbrio Sistema de Equações - Problema 3.4*: Desenvolver a função de avaliação e encontrar o ponto de equilíbrio da seguinte equação.

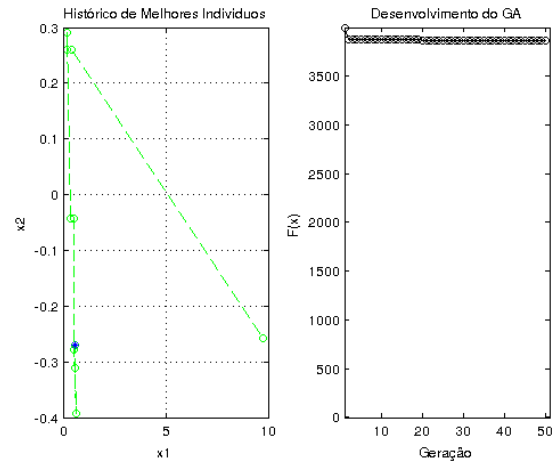
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a \sin(x_1) - bx_2 + \mu \end{cases} \quad (9)$$

Aplicando a otimização com o algoritmo genético temos o seguinte resultado.

O que não é um ponto de equilíbrio, dado o gráfico do resultado da simulação visto na figura IV-C4, esse não é um sistema que é possível ser otimizado para o ponto de equilíbrio, apenas com as informações levantadas, um estudo mais aprofundado seria necessário para concluir seu ponto de equilíbrio, ou da impossibilidade de existir tal ponto.

TABELA IX  
PONTO DE EQUILÍBRIO

Parâmetros de entrada		
Método utilizado		Algoritmo Genético
Seleção		estocástica
Cruzamento		estocástica
Mutação		estocástica
Tamanho da População		20
Número Máximo de Gerações		50
Solução encontrada		
$x_1$	$x_2$	$F_{aval}$
0.596049587441946	-0.27027865026085	3864.3274



5) *Ponto de Equilíbrio Sistema de Equações - Problema 3.5*: Desenvolver a função de avaliação e encontrar o ponto de equilíbrio da seguinte equação.

$$\begin{cases} \dot{Y}_1 = -0.1Y_2 \\ \dot{Y}_2 = -0.064Y_1 \end{cases} \quad (10)$$

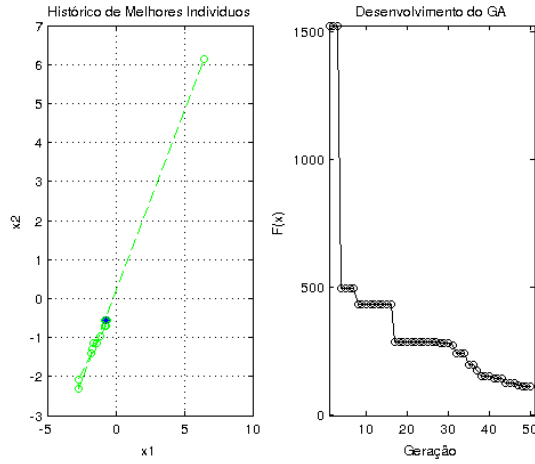
Aplicando a otimização com o algoritmo genético temos o seguinte resultado.

TABELA X  
PONTO DE EQUILÍBRIO

Parâmetros de entrada		
Método utilizado	Algoritmo Genético	
Seleção	estocástica	
Cruzamento	estocástica	
Mutação	estocástica	
Tamanho da População	20	
Número Máximo de Gerações	50	
Solução encontrada		
$Y_1$	$Y_2$	$F_{aval}$
-0.675527946002184	-0.547360344590547	112.1431

6) *Ponto de Equilíbrio Sistema de Equações - Problema 3.6*: Desenvolver a função de avaliação e encontrar o ponto de equilíbrio da seguinte equação.

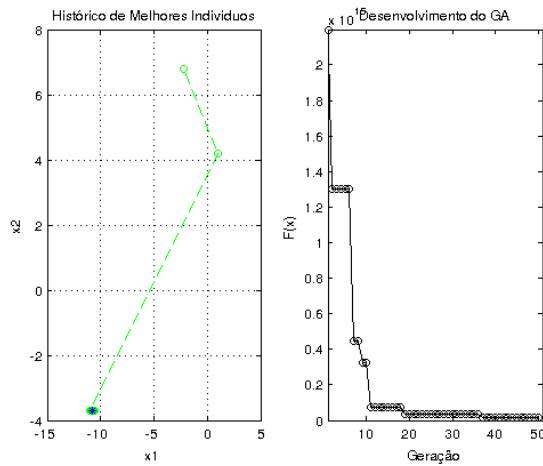
$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_1 + e^{-\xi_2} \\ \dot{\xi}_2 = -\xi_2 \end{cases} \quad (11)$$



Aplicando a otimização com o algoritmo genético temos o seguinte resultado.

TABELA XI  
PONTO DE EQUILÍBRIO

Parâmetros de entrada		
Método utilizado		Algoritmo Genético
Seleção		estocástica
Cruzamento		estocástica
Mutação		estocástica
Tamanho da População		20
Número Máximo de Gerações		50
Solução encontrada		
$\xi_1$	$\xi_2$	$F_{aval}$
-10.7303545055715	-3.71049378670856	16722606413607.25



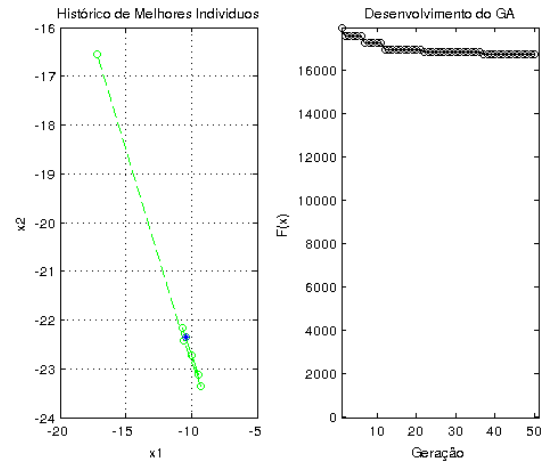
7) Ponto de Equilíbrio Sistema de Equações - Problema 3.7: Desenvolver a função de avaliação e encontrar o ponto de equilíbrio da seguinte equação.

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2^2 \\ x_2 = -x_1^2 \end{cases} \quad (12)$$

Aplicando a otimização com o algoritmo genético temos o seguinte resultado.

TABELA XII  
PONTO DE EQUILÍBRIO

Parâmetros de entrada		
Método utilizado	Algoritmo Genético	
Seleção	estocástica	
Cruzamento	estocástica	
Mutação	estocástica	
Tamanho da População	20	
Número Máximo de Gerações	50	
Solução encontrada		
$x_1$	$xi_2$	$F_{aval}$
-10.3922432769679	-22.3502695242756	16753.033



## V. CONCLUSÃO

Embora o algoritmo genético empregado neste trabalho seja uma implementação simples, mesmo assim apresentou bons resultados para os diferentes tipos de problemas apresentados, demonstrando a versatilidade e a robustez desse método heurístico aplicado a diferentes tipos de problema.

Os resultados encontrados para os problemas são valores ótimos, ou muito próximos destes, consistem em boas soluções para os problemas propostos. Assim como os algoritmos determinísticos, os algoritmos genéticos também são ferramentas eficazes tanto para problemas simplórios de otimização, como para sistemas de equações mais complexas, podendo ser usado em diferentes gamas de problemas.

Grandes variações no comportamento e melhoramento do algoritmo ainda pode ser alcançado aplicando diferentes estratégias na seleção, no cruzamento e na mutação, sempre com o objetivo de encontrar uma solução ótima para o problema estudado.

Por mais, os algoritmos genéticos constituem uma excelente ferramenta de otimização.

## REFERÊNCIAS

[1] MATLAB, "The Language of Technical Computing." (Versão R2012a).

- [2] POLKING J. C. , “PPLANE: Phase Plane of an Ordinary Differential Equation.” *Rice Universit*, (Versão 8).
- [3] MIRANDA M. N. , “Algoritmos Genéticos: Fundamentos e Aplicações.” *UFRJ*, (<http://www.nce.ufrj.br/GINAPE/VIDA/alggenet.htm>).
- [4] GREFENSTETTE J. , “Genesis.” *Navy Center for Applied Research In Artificial Intelligence*, (1993).