Distribuciones continuas

Distribución uniforme, exponencial, gamma y normal.
Teorema del Límite Central

Sebastián Ruiz-Blais, I-2024

Contenidos

- Función de densidad de probabilidad
- Distribución uniforme
- Distribución normal
- Distribución gamma
- Distribución exponencial
- Distribución Chi-cuadrada
- Teorema del Límite Central

Función de densidad de probabilidad

- La **función de densidad de probabilidad** es la distribución de probabilidad de una variable continua.
- Para el caso continuo, la probabilidad de que la variable aleatoria X se encuentre entre a y b corresponde al **área bajo la curva** de la función de densidad de probabilidad entre a y b.

Problema

- Suponga que el tiempo máximo que se puede reservar una sala de conferencias grande de cierta empresa son cuatro horas. Las conferencias duran como mínimo 10 minutos y se puede asumir que la duración de las conferencias tiene la misma probabilidad.
  - a) ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad? Grafique esta función.
  - b) ¿Cuál es la probabilidad de que una conferencia determinada dure al menos 3 horas?

Función de distribución uniforme

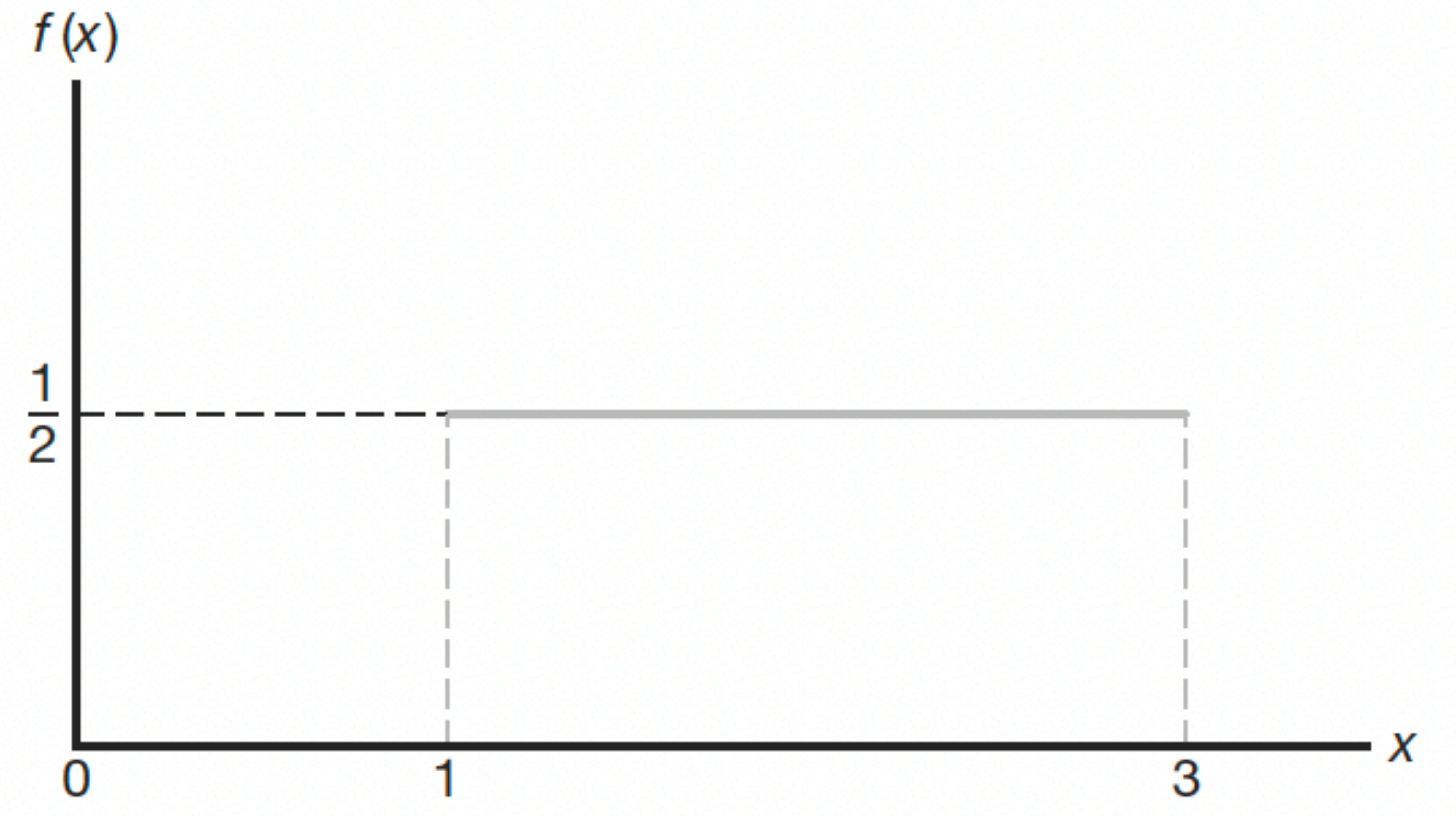


Figura 6.1: Función de densidad para una variable aleatoria en el intervalo [1, 3].

Función de distribución uniforme

Distribución uniforme La función de densidad de la variable aleatoria uniforme continua X en el intervalo $[A, B]$ es

$$f(x; A, B) = \begin{cases} \frac{1}{B-A}, & A \leq x \leq B, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Media y varianza de la función de distribución uniforme

- **Reflexione** unos momentos:
  - ¿Cuál es la **media** de la **distribución uniforme** definida entre a y b?
  - ¿Cuál es su **varianza**?

Media y varianza de la distribución uniforme

La media y la varianza de la distribución uniforme son

$$\mu = \frac{A + B}{2} \text{ y } \sigma^2 = \frac{(B - A)^2}{12}.$$

Función de distribución normal

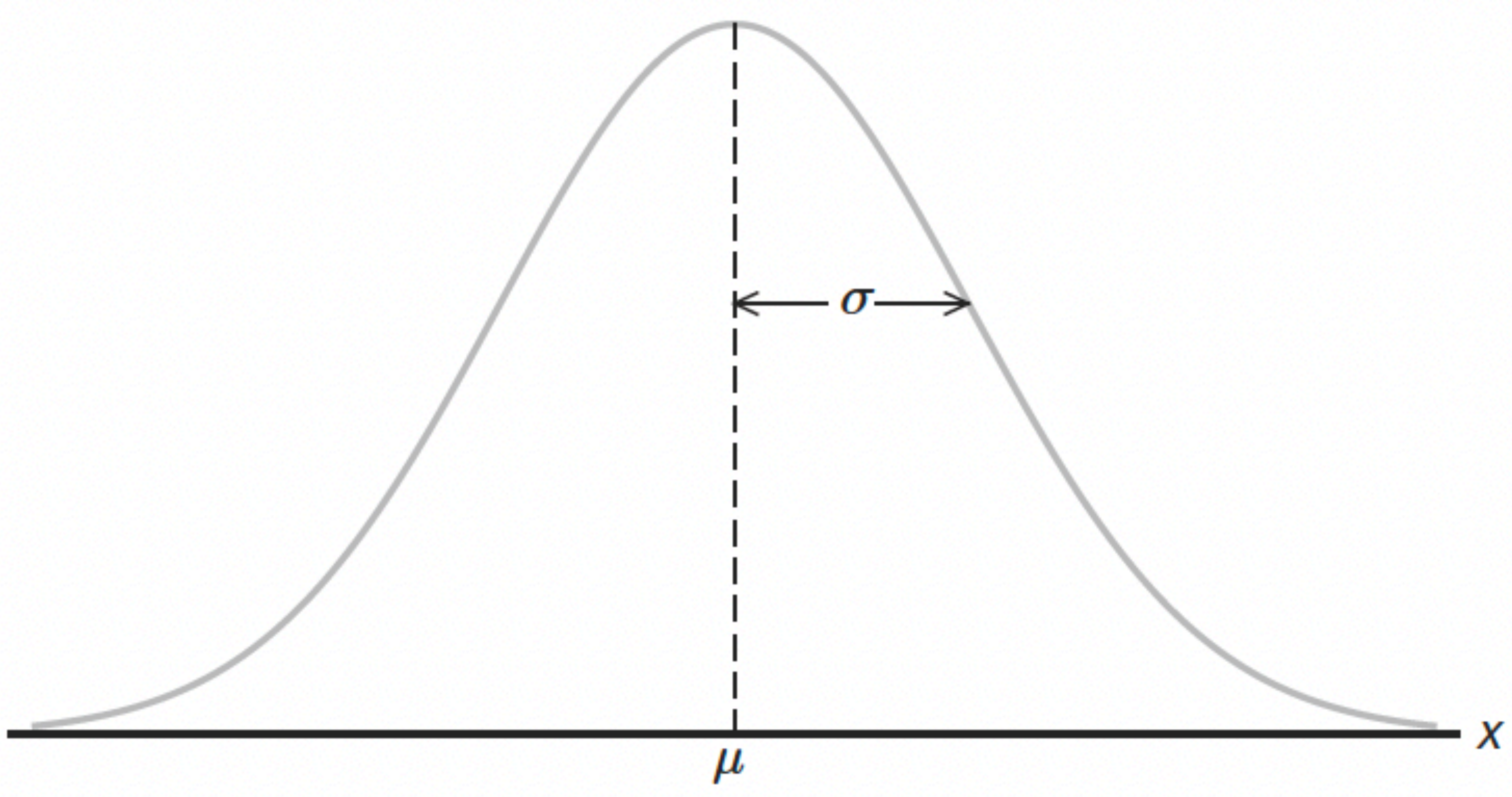


Figura 6.2: La curva normal.

Función de distribución normal

Distribución normal La densidad de la variable aleatoria normal X, con media μ y varianza σ^2, es

$$n(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \qquad -\infty < x < \infty,$$

donde $\pi = 3.14159\ldots$ y $e = 2.71828\ldots$

Distribuciones normales con $\mu_1 < \mu_2$

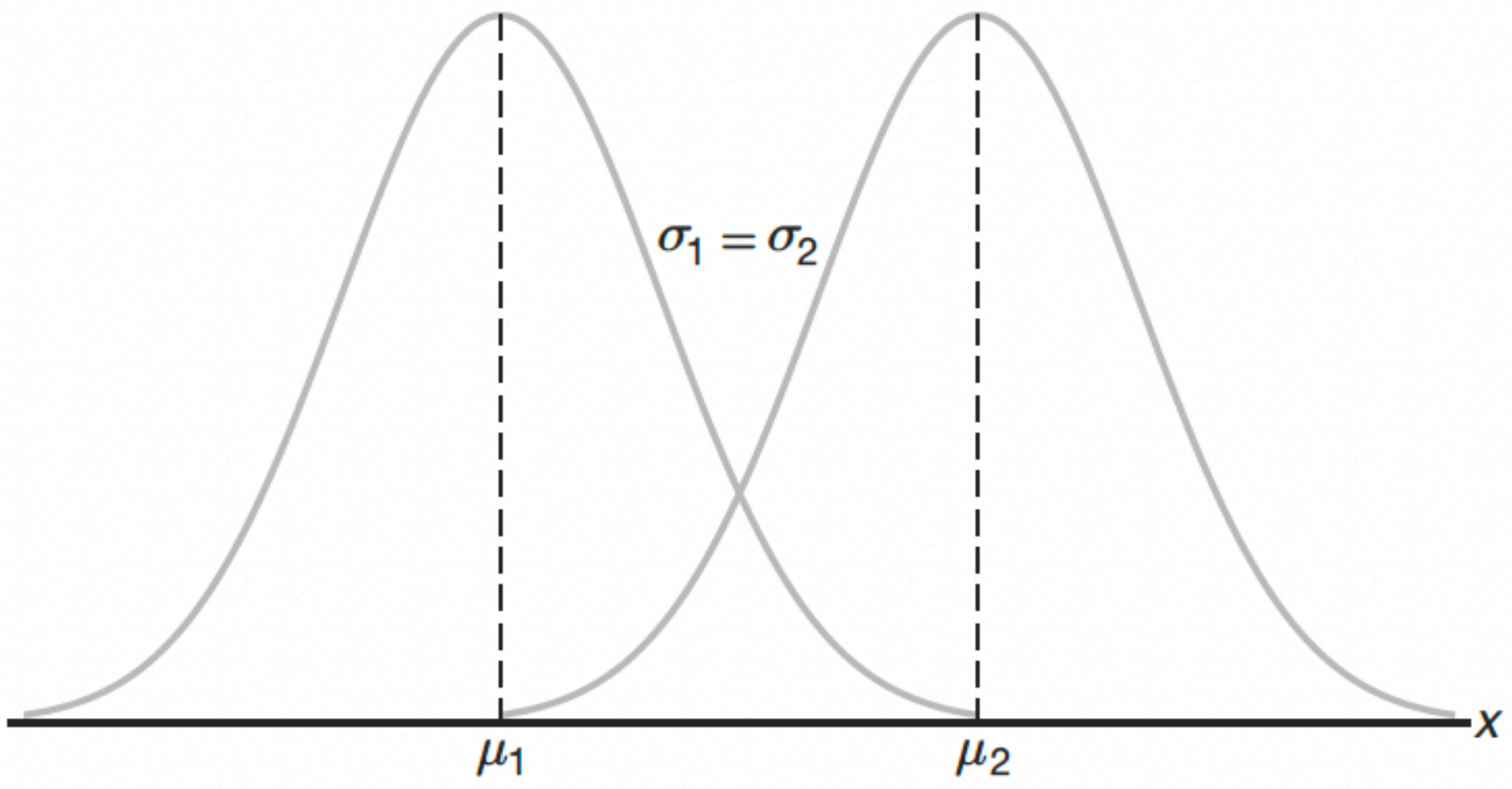


Figura 6.3: Curvas normales con $\mu_1 < \mu_2$ y $\sigma_1 = \sigma_2$.

Distribuciones normales con $\sigma_1 < \sigma_2$

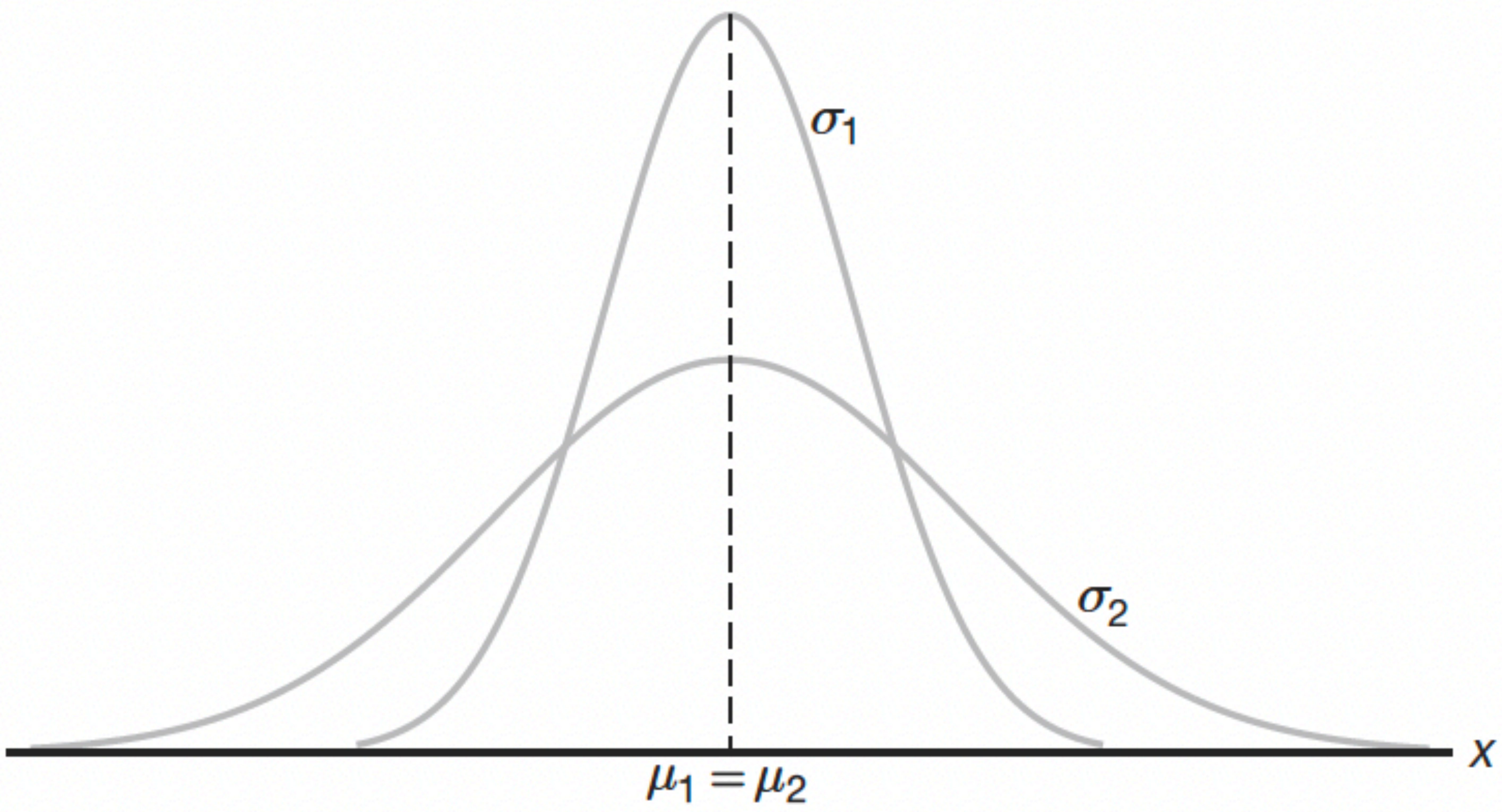


Figura 6.4: Curvas normales con $\mu_1 = \mu_2$ y $\sigma_1 < \sigma_2$.

Media y varianza de distribución normal

Teorema 6.2: La media y la varianza de $n(x; \mu, \sigma)$ son μ y σ^2, respectivamente. Por lo tanto, la desviación estándar es σ.

Área bajo la curva

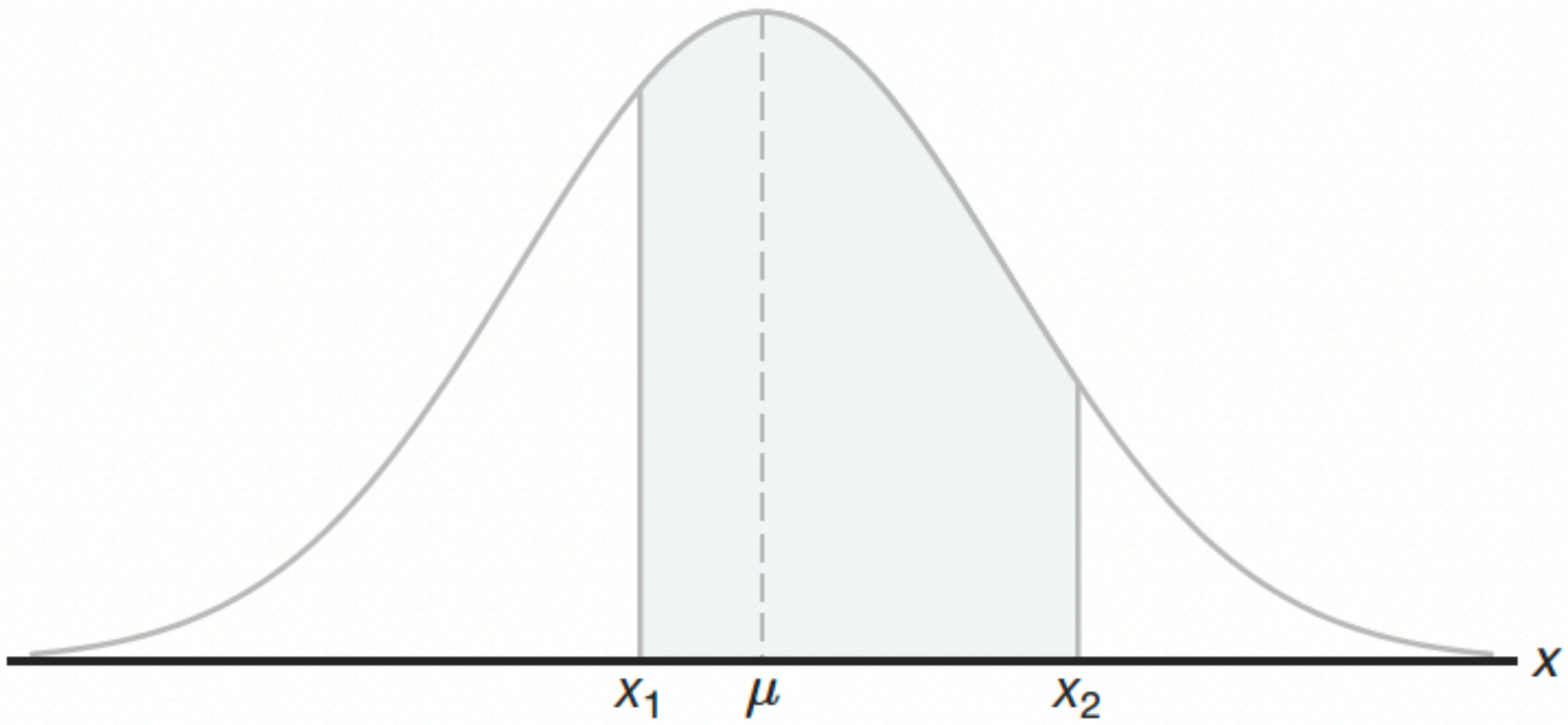


Figura 6.6: $P(x_1 < X < x_2)$ = área de la región sombreada.

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} n(x;\mu,\sigma)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\,dx,$$

Distribución normal estándar

Definición 6.1: La distribución de una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 1 se llama **distribución normal estándar**.

Tablas para consulta del área bajo la curva

- Para evitar calcular estas integrales cada vez, se cuenta con una tabla que permite consultar directamente el área bajo la curva para la **distribución normal estándar**.
- Para utilizar esta tabla, primero se debe realizar una transformación de X:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

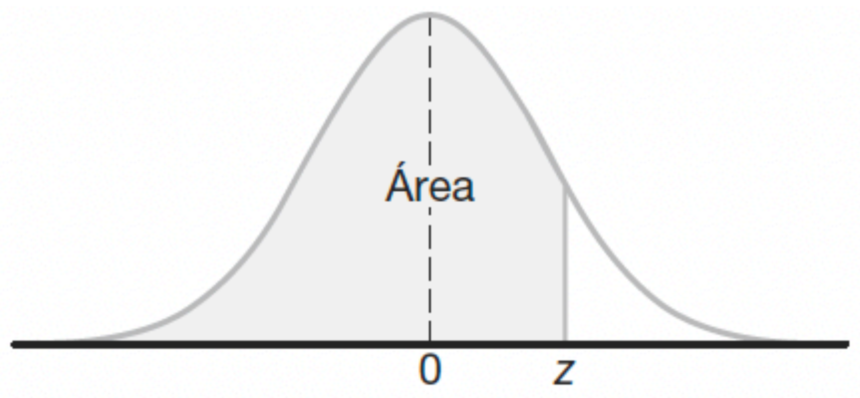


Tabla A.3 Áreas bajo la curva normal

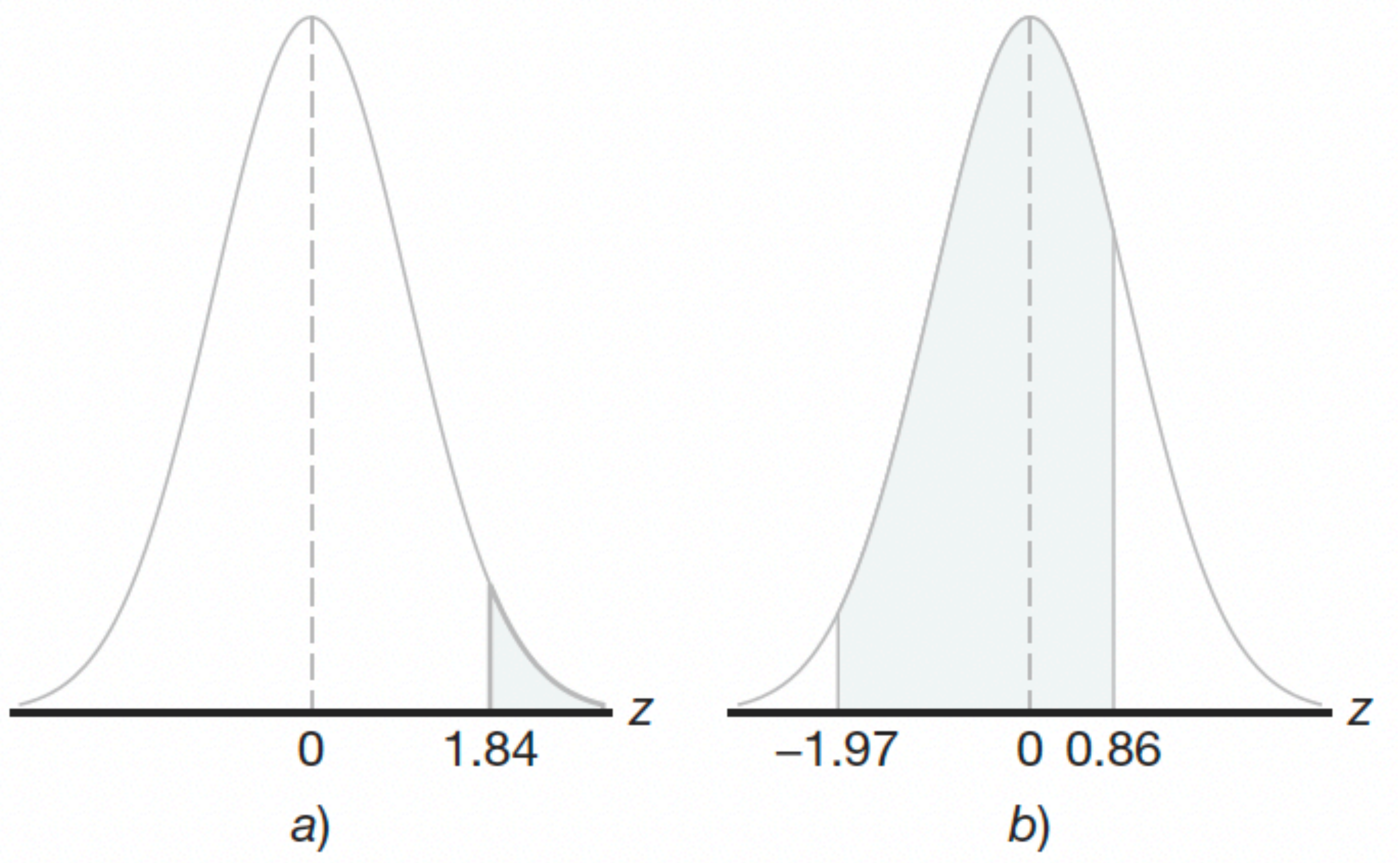
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Tabla A.3 (*continuación*) Áreas bajo la curva normal

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Problema

- Dada una **distribución normal estándar** (con media 0 y desviación estándar 1), **calcule el área bajo la curva** que se localiza
- a) a la derecha de $z = 1.84$, y
- b) entre $z = -1.97$ y $z = 0.86$



Solución

a) El área en la figura 6.9*a* a la derecha de $z = 1.84$ es igual a 1 menos el área en la tabla A.3 a la izquierda de $z = 1.84$, a saber, $1 - 0.9671 = 0.0329$.

b) El área en la figura 6.9*b* entre $z = -1.97$ y $z = 0.86$ es igual al área a la izquierda de $z = 0.86$ menos el área a la izquierda de $z = -1.97$. A partir de la tabla A.3 encontramos que el área que se desea es $0.8051 - 0.0244 = 0.7807$.

Problema

- Dada una variable aleatoria X que tiene una distribución normal con $\mu = 50$ y $\sigma = 10$, calcule la probabilidad de que X tome un valor entre 45 y 62.

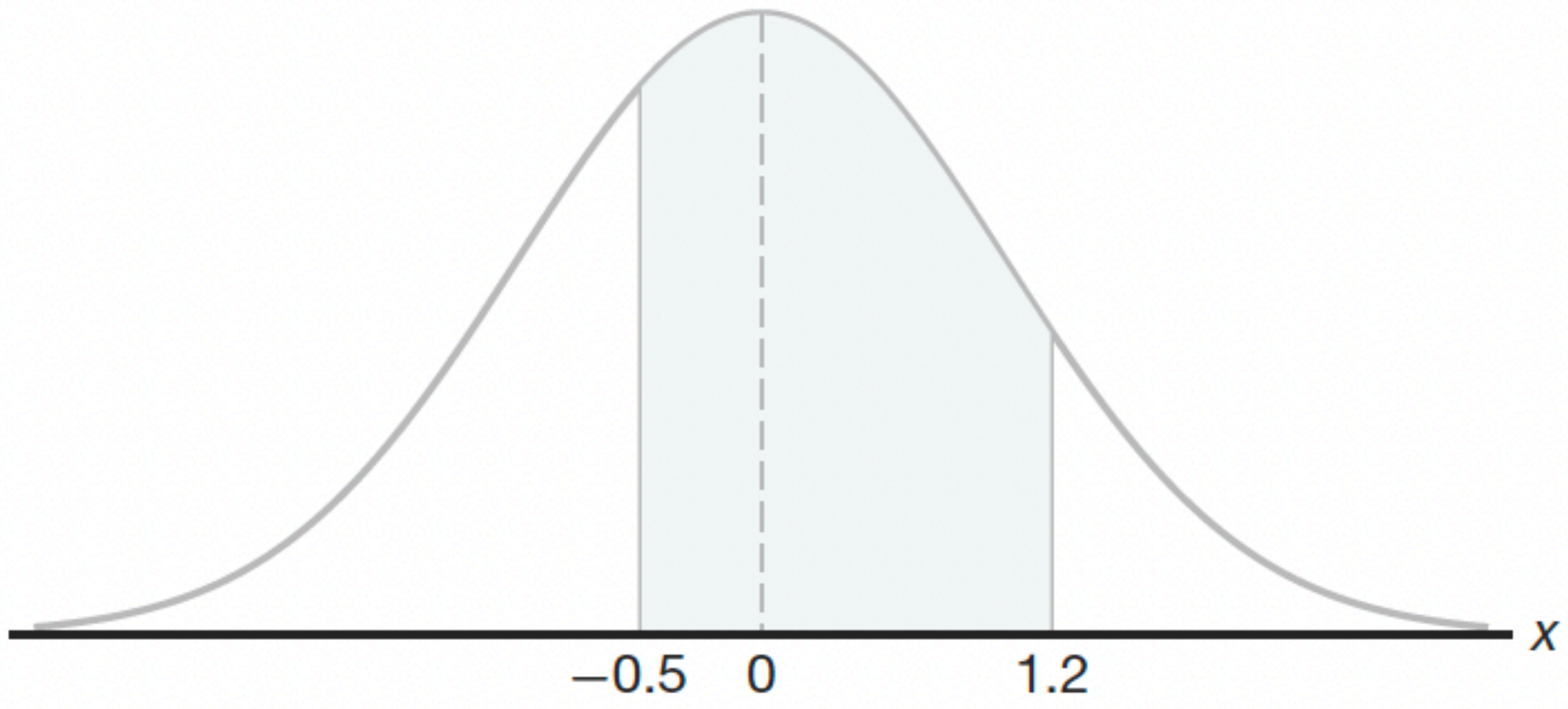


Figura 6.11: Área para el ejemplo 6.4.

Solución

Solución: Los valores z que corresponden a $x_1 = 45$ y $x_2 = 62$ son

$$z_1 = \frac{45 - 50}{10} = -0.5 \text{ y } z_2 = \frac{62 - 50}{10} = 1.2.$$

Por lo tanto,

$$P(45 < X < 62) = P(-0.5 < Z < 1.2).$$

$P(-0.5 < Z < 1.2)$ se muestra mediante el área de la región sombreada de la figura 6.11. Esta área se puede calcular restando el área a la izquierda de la ordenada $z = -0.5$ de toda el área a la izquierda de $z = 1.2$. Si usamos la tabla A.3, tenemos

$$P(45 < X < 62) = P(-0.5 < Z < 1.2) = P(Z < 1.2) - P(Z < -0.5)$$
$$= 0.8849 - 0.3085 = 0.5764.$$

Función gamma

La **función gamma** se define como

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx, \quad \text{para} \quad \alpha > 0.$$

Propiedades de la función gamma

- Algunas propiedades de la función gamma son:
  - $\Gamma(n) = (n - 1)(n - 2) \ldots (1)\, \Gamma(1)$ para una integral positiva *n*
  - $\Gamma(n) = (n - 1)!$ para enteros positivos *n*
  - $\Gamma(1) = 1$
  - $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Distribución gamma

Distribución gamma La variable aleatoria continua X tiene una **distribución gamma**, con parámetros α y β, si su función de densidad está dada por

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

Distribución gamma

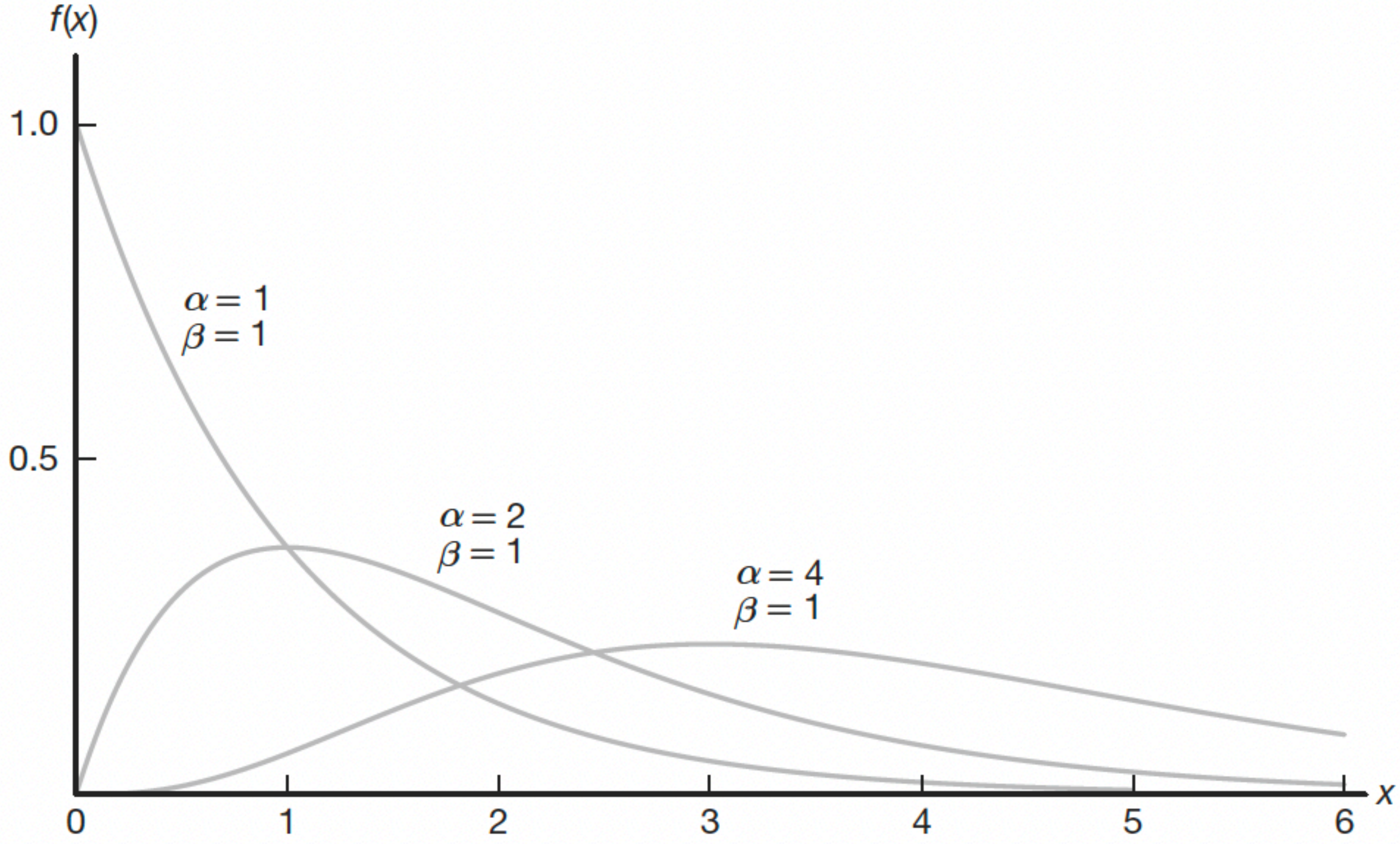


Figura 6.28: Distribuciones gamma.

Relación de la distribución Gamma con Poisson

- Si se tiene un proceso de Poisson que describe una cantidad de eventos en una unidad de tiempo, el tiempo necesario para obtener cierto número de eventos se modelar usando la distribución gamma, donde β es el promedio de tiempo entre dos eventos y α es el número de eventos

Distribución exponencial

Distribución exponencial

La variable aleatoria continua X tiene una **distribución exponencial**, con parámetro β, si su función de densidad es dada por

$$f(x;\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\beta > 0$.

Media y varianza

Teorema 6.4: La media y la varianza de la distribución gamma son

$$\mu = \alpha\beta \text{ y } \sigma^2 = \alpha\beta^2.$$

Corolario 6.1: La media y la varianza de la distribución exponencial son

$$\mu = \beta \text{ y } \sigma^2 = \beta^2.$$

Problema

- Suponga que un sistema contiene cierto tipo de componente cuyo tiempo de operación antes de fallar, en años, está dado por T. La variable aleatoria T se modela bien mediante la distribución exponencial con tiempo medio de operación antes de fallar $\beta = 5$. Si se instalan 5 de estos componentes en diferentes sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que al final de 8 años al menos dos aún funcionen?

Solución

La probabilidad de que un componente determinado siga funcionando después de 8 años es dada por

$$P(T > 8) = \frac{1}{5}\int_{8}^{\infty} e^{-t/5}\, dt = e^{-8/5} \approx 0.2.$$

Representemos con X el número de componentes que todavía funcionan después de 8 años. Entonces, utilizando la distribución binomial tenemos

$$P(X \geq 2) = \sum_{x=2}^{5} b(x; 5, 0.2) = 1 - \sum_{x=0}^{1} b(x; 5, 0.2) = 1 - 0.7373 = 0.2627.$$

Repaso: Integración por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

un día vi una vaca vestida de uniforme

Problema

- Suponga que las llamadas telefónicas que llegan a un conmutador particular siguen un proceso de Poisson con un promedio de 5 llamadas entrantes por minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que transcurra menos de un minuto en el momento en que han entrado 2 llamadas al conmutador?
  - *Usar la distribución gamma*

Solución

Se aplica el proceso de Poisson, con un lapso de tiempo hasta que ocurren 2 eventos de Poisson que sigue una distribución gamma con $\beta = 1/5$ y $\alpha = 2$. Denote con X el tiempo en minutos que transcurre antes de que lleguen 2 llamadas. La probabilidad que se requiere está dada por

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 \frac{1}{\beta^2} x e^{-x/\beta}\, dx = 25 \int_0^1 x e^{-5x}\, dx = 1 - e^{-5}(1 + 5) = 0.96.$$

Distribución Chi-cuadrada

Distribución chi cuadrada

La variable aleatoria continua X tiene una **distribución chi cuadrada**, con v **grados de libertad**, si su función de densidad es dada por

$$f(x;v) = \begin{cases} \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} x^{v/2-1} e^{-x/2}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde v es un entero positivo.

Media y varianza de la distribución chi cuadrada

Teorema 6.5: La media y la varianza de la distribución chi cuadrada son

$$\mu = v \text{ y } \sigma^2 = 2v.$$