Esperanza matemática

Sebastián Ruiz-Blais I-2024

Contenidos

- Esperanza matemática
- Varianza
- Covarianza
- Coeficiente de correlación
- Desigualdad de Chebyshev

Problema

- Cierto día un vendedor de una empresa de aparatos médicos tiene dos citas. Considera que en la primera cita tiene 70 por ciento de probabilidades de cerrar una venta, por la cual podría obtener una comisión de $1000. Por otro lado, cree que en la segunda cita sólo tiene 40 por ciento de probabilidades de cerrar el trato, del cual obtendría $1500 de comisión. ¿Cuál es su comisión esperada con base en dichas probabilidades? Suponga que los resultados de las citas son independientes.

Solución

En primer lugar sabemos que el vendedor, en las dos citas, puede obtener 4 comisiones totales: \$0, \$1000, \$1500 y \$2500. Necesitamos calcular sus probabilidades asociadas. Mediante la independencia obtenemos

$$f(\$0) = (1 - 0.7)(1 - 0.4) = 0.18, \quad f(\$2500) = (0.7)(0.4) = 0.28,$$
$$f(\$1000) = (0.7)(1 - 0.4) = 0.42, \text{ y } \quad f(\$1500) = (1 - 0.7)(0.4) = 0.12.$$

Por lo tanto, la comisión esperada para el vendedor es

$$\begin{aligned} E(X) &= (\$0)(0.18) + (\$1000)(0.42) + (\$1500)(0.12) + (\$2500)(0.28) \\ &= \$1300. \end{aligned}$$

Esperanza matemática

Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$. La **media** o **valor esperado** de X es

$$\mu = E(X) = \sum_x x f(x)$$

si X es discreta, y

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

si X es continua.

Problema

Sea X la variable aleatoria que denota la vida en horas de cierto dispositivo electrónico. La función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20{,}000}{x^3}, & x > 100, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule la vida esperada para esta clase de dispositivo.

Solución

$$\mu = E(X) = \int_{100}^{\infty} x \frac{20,000}{x^3}\, dx = \int_{100}^{\infty} \frac{20,000}{x^2}\, dx = 200.$$

Por lo tanto, esperamos que este tipo de dispositivo dure *en promedio* 200 horas.

Problema

Suponga que el número de automóviles X que pasa por un local de lavado de autos entre las 4:00 P.M. y las 5:00 P.M. de cualquier viernes soleado tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x	4	5	6	7	8	9
$P(X = x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Sea $g(X) = 2X - 1$ la cantidad de dinero en dólares que el administrador paga al operador. Calcule las ganancias esperadas del operador en este periodo específico.

Solución

$$E[g(X)] = E(2X - 1) = \sum_{x=4}^{9}(2x - 1)f(x)$$

$$= (7)\left(\frac{1}{12}\right) + (9)\left(\frac{1}{12}\right) + (11)\left(\frac{1}{4}\right) + (13)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$+ (15)\left(\frac{1}{6}\right) + (17)\left(\frac{1}{6}\right) = \$12.67.$$

Valor esperado de g(x)

Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$. El valor esperado de la variable aleatoria $g(X)$ es

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \sum_x g(x)f(x)$$

si X es discreta, y

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx$$

si X es continua.

Problema

Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule el valor esperado de $g(X) = 4X + 3$.

Solución

$$E(4X+3) = \int_{-1}^{2} \frac{(4x+3)x^2}{3}\, dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} (4x^3+3x^2)\, dx = 8.$$

Valor esperado de dos variables aleatorias

Sean X y Y variables aleatorias con distribución de probabilidad conjunta $f(x, y)$. La media o valor esperado de la variable aleatoria $g(X, Y)$ es

$$\mu_{g(X, Y)} = E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y) f(x, y)$$

si X y Y son discretas, y

$$\mu_{g(X, Y)} = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) \, dx \, dy$$

si X y Y son continuas.

Varianza de una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$ y media μ. La varianza de X es

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 f(x), \quad \text{si } X \text{ es discreta, y}$$

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx, \quad \text{si } X \text{ es continua.}$$

La raíz cuadrada positiva de la varianza, σ, se llama **desviación estándar** de X.

Problema

Suponga que la variable aleatoria X representa el número de automóviles que se utilizan con propósitos de negocios oficiales en un día de trabajo dado. La distribución de probabilidad para la empresa A [figura 4.1(a)] es

x	1	2	3
$f(x)$	0.3	0.4	0.3

y para la empresa B [figura 4.1(b)] es

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

Demuestre que la varianza de la distribución de probabilidad para la empresa B es mayor que la de la empresa A.

Solución

Para la empresa A encontramos que

$$\mu_A = E(X) = (1)(0.3) + (2)(0.4) + (3)(0.3) = 2.0,$$

y entonces

$$\sigma_A^2 = \sum_{x=1}^{3} (x-2)^2 = (1-2)^2(0.3) + (2-2)^2(0.4) + (3-2)^2(0.3) = 0.6.$$

Para la empresa B tenemos

$$\mu_B = E(X) = (0)(0.2) + (1)(0.1) + (2)(0.3) + (3)(0.3) + (4)(0.1) = 2.0,$$

y entonces

$$\begin{aligned}\sigma_B^2 &= \sum_{x=0}^{4}(x-2)^2 f(x) \\ &= (0-2)^2(0.2) + (1-2)^2(0.1) + (2-2)^2(0.3) \\ &\quad + (3-2)^2(0.3) + (4-2)^2(0.1) = 1.6.\end{aligned}$$

Varianza de una variable aleatoria

Versión simplificada

La varianza de una variable aleatoria X es

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

Varianza de g(x)

Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$. La varianza de la variable aleatoria $g(X)$ es

$$\sigma^2_{g(X)} = E\{[g(X) - \mu_{g(X)}]^2\} = \sum_x [g(x) - \mu_{g(X)}]^2 f(x)$$

si X es discreta, y

$$\sigma^2_{g(X)} = E\{[g(X) - \mu_{g(X)}]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) - \mu_{g(X)}]^2 f(x)\, dx$$

si X es continua.

Covarianza de dos variables aleatorias

Sean X y Y variables aleatorias con distribución de probabilidad conjunta $f(x, y)$. La covarianza de X y Y es

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_y) f(x, y)$$

si X y Y son discretas, y

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_y) f(x, y)\, dx\, dy$$

si X y Y son continuas.

Covarianza de X y Y

Versión simplificada

La covarianza de dos variables aleatorias X y Y, con medias μ_X y μ_Y, respectivamente, está dada por

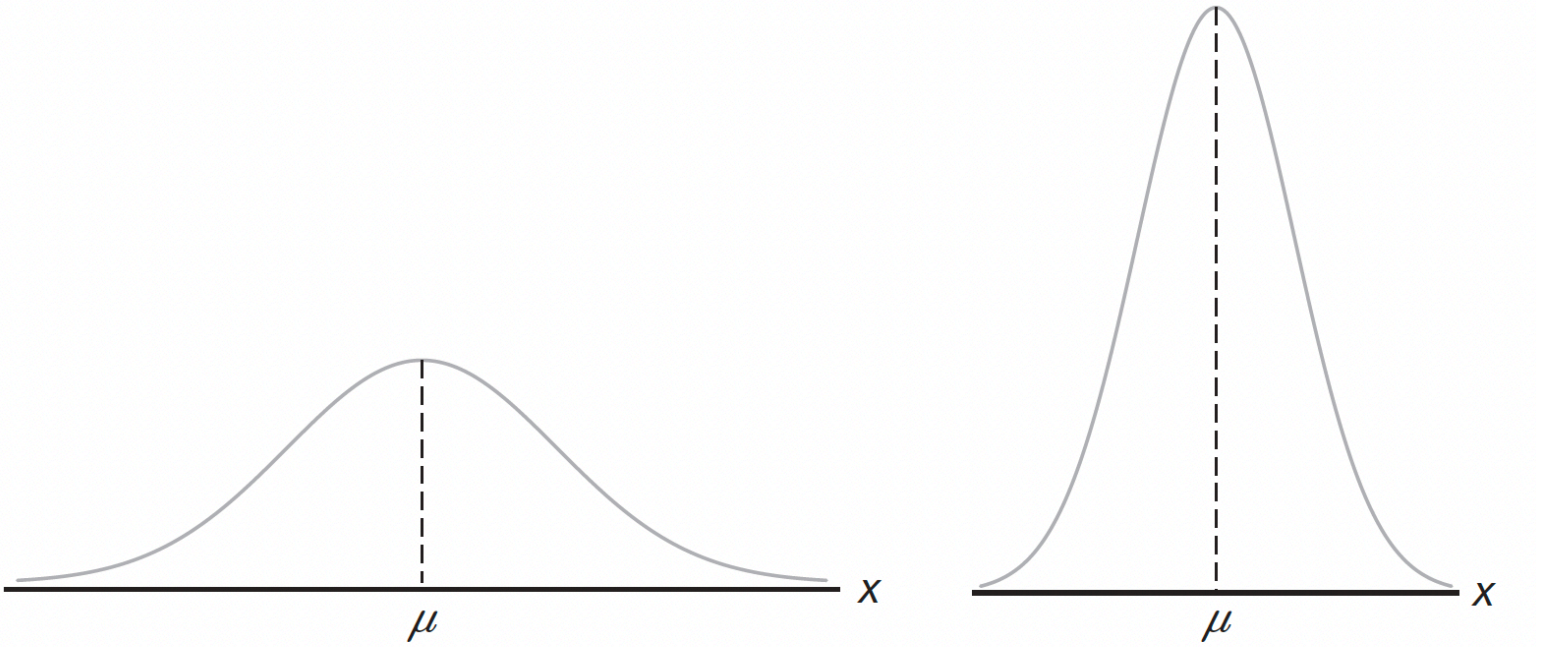
$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y .$$

Coeficiente de correlación

Sean X y Y variables aleatorias con covarianza σ_{XY} y desviaciones estándar σ_X y σ_Y, respectivamente. El coeficiente de correlación de X y Y es

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Teorema de Chebyshev



(a) (b)

Teorema de Chebyshev

(**Teorema de Chebyshev**) La probabilidad de que cualquier variable aleatoria X tome un valor dentro de k desviaciones estándar de la media es de al menos $1 - 1/k^2$. Es decir,

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Ejercicio

Una variable aleatoria X tiene una media $\mu = 8$, una varianza $\sigma^2 = 9$ y una distribución de probabilidad desconocida. Calcule

a) $P(-4 < X < 20)$,

b) $P(|X - 8| \geq 6)$.

Solución

$a)$ $P(-4 < X < 20) = P[8 - (4)(3) < X < 8 + (4)(3)] \geq \frac{15}{16}.$

$b)$ $P(|X - 8| \geq 6) = 1 - P(|X - 8| < 6) = 1 - P(-6 < X - 8 < 6)$

$$= 1 - P[8 - (2)(3) < X < 8 + (2)(3)] \leq \frac{1}{4}.$$