Conceptos de Probabilidad

Segunda parte

Sebastián Ruiz Blais, II-2023

Contenidos

- Probabilidad condicional
- Independencia
- Regla del producto
- Teorema de la probabilidad total
- Regla de Bayes

Problema

- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de la muestra sea diagnosticada con Alzheimer dado que su ingesta diaria de carbohidratos refinados es mayor a 250 gramos? ¿Influye la ingesta de carbohidratos en el diagnóstico?

- **Muestra**:

Persona	Ingesta diaria Carbohidratos	Ingesta diaria Proteínas	Diagnóstico Alzheimer	Intensidad
1	300	100	V	Leve
2	240	150	F	N/A
3	200	170	F	N/A
4	500	150	V	Moderada
5	400	100	F	N/A
6	340	120	V	Alta

Nota: Datos ficticios

Solución

- A: Persona diagnosticada con Alzheimer
- B: Persona con ingesta diaria de carbohidratos de más de 250 g

- Personas con ingesta diaria de carbohidratos de más de 250 g: {1, 4, 5, 6}, n=4
- Personas con Alzheimer, entre los que tienen ingesta de más de 250 g: {1, 4, 6}, n=3

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = 3/4$$

Solución

- En esta muestra, ¿influye la ingesta diaria de carbohidratos en el diagnóstico?
  - Para ello, debemos determinar si la probabilidad de tener un diagnóstico de Alzheimer es igual que la probabilidad de tener un diagnóstico de Alzheimer sabiendo que la persona tiene una ingesta diaria de carbohidratos mayor a 250 g.
  - De la pregunta anterior, tenemos que:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = 3/4$$

  - Ahora:
    - $P(A) = 3/6$=**1/2**
    - Por lo tanto, se dice que **los eventos A y B no son independientes**.

Probabilidad condicional

- **Definición**: La probabilidad condicional de B dado A se define como:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

siempre que $P(A) > 0$

Problema

- Se cuenta con un mazo de naipes y los siguientes eventos:
  - A: obtener una reina
  - B: obtener un diamante
  - C: obtener un 7
- ¿Son estos eventos independientes entre sí?

Solución

- $P(A)=4/52=1/13$
- $P(B)=13/52=1/4$
- $P(C)=4/52=1/13$
- $P(A|B)=1/13$, porque se tiene 1 sola reina de diamantes entre 13 cartas diamante
  - Por lo tanto A y B son independientes
- $P(A|C)=0/4=0$, porque se tiene 0 reinas que también son un 7
  - Por lo tanto A y C son dependientes (sabiendo que uno ocurre la probabilidad del otro cambia)
- Por razones similares B y C son independientes

Independencia

- **Definición**: Dos eventos son independientes si y sólo si:

$$P(A \mid B) = P(A) \text{ o } P(B \mid A) = P(B)$$

Regla del producto (1)

- De la regla de la probabilidad condicional, tenemos que:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(B|A) \times P(A) = P(A \cap B),$$

multiplicando por P(A) a ambos lados, siempre que P(A)>0

Regla del producto (2)

- De manera similar, se tiene que:

$$P(A \mid B) \times P(B) = P(A \cap B)$$

Regla del producto (3)

- Dos eventos son independientes sí y solo sí:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Problema

- Se sacan 3 cartas seguidas de una baraja ordinaria, sin reemplazo. Encuentre la probabilidad de que la primera carta sea un as rojo (A_1), la segunda carta un 10 o una jota (A_2) y la tercera carta esté entre 3 y 7, inclusive (A_3).

Generalización de la regla del producto

Teorema 2.12: Si, en un experimento, pueden ocurrir los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, entonces

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$$
$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1}).$$

Si los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son independientes, entonces

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_k)$$

Walpole (2012), p.68

Problema

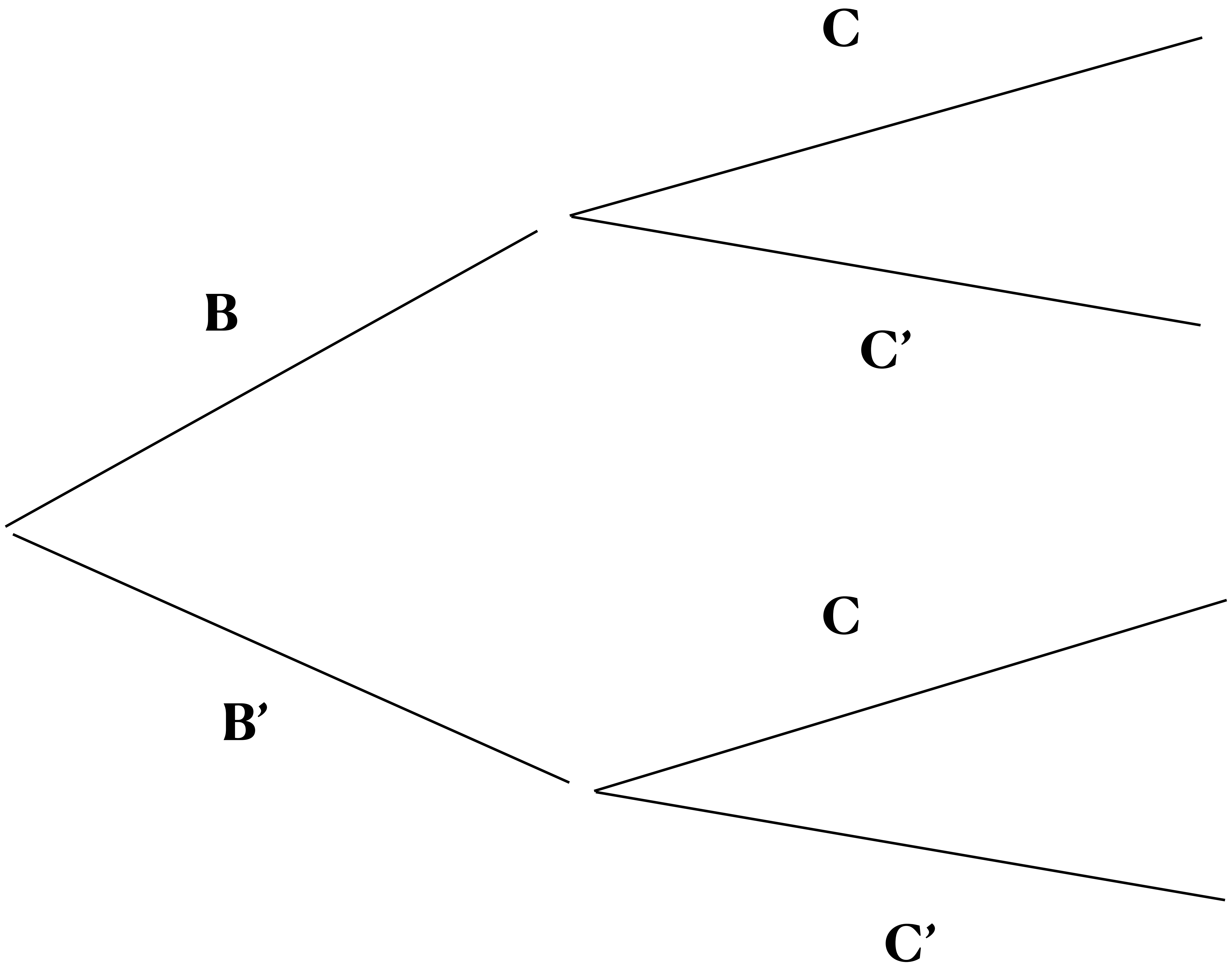
- En cierta región del país se sabe por experiencia que la probabilidad de seleccionar un adulto mayor de 40 años de edad con cáncer es 0.05. Si la probabilidad de que un doctor diagnostique de forma correcta que un adulto mayor de 40 años con cáncer tiene la enfermedad es 0.78, y la probabilidad de que diagnostique de forma incorrecta que un adulto mayor de 40 años sin cáncer tiene la enfermedad es 0.06, ¿cuál es la probabilidad de que a un adulto mayor de 40 años se le diagnostique cáncer?

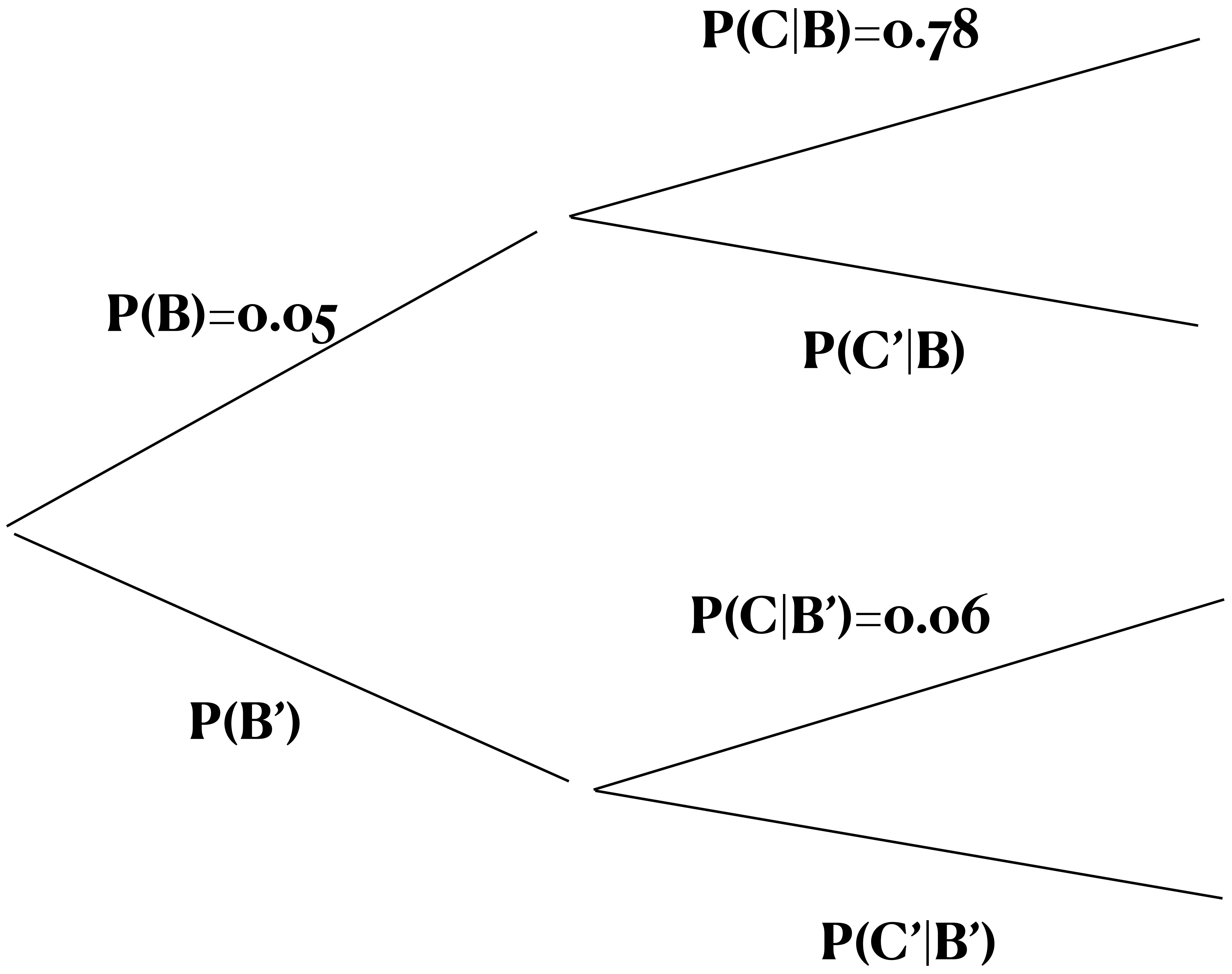
Solución

- B: Persona tiene cáncer
- C: Persona es diagnosticada con cáncer

- $P(B) = 0.05$
- $P(C|B)=0.78$
- $P(C|B')=0.06$
- $P(C)$?

Solución




P(C|B)=0.78
P(B)=0.05
P(C'|B)
P(C|B')=0.06
P(B')
P(C'|B')

Solución

- $P(C) = P(C \cap B) + P(C \cap B')$
- $P(C) = P(B) \times P(C \mid B) + P(B') \times P(C \mid B')$
- $P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.05 = 0.95$

- $P(C) = 0.05 \times 0.78 + 0.95 \times 0.06 = 0.096$
  - Por lo tanto, la probabilidad de que una persona sea diagnosticada con cáncer es mayor que la de que tenga realmente cáncer (0.05)

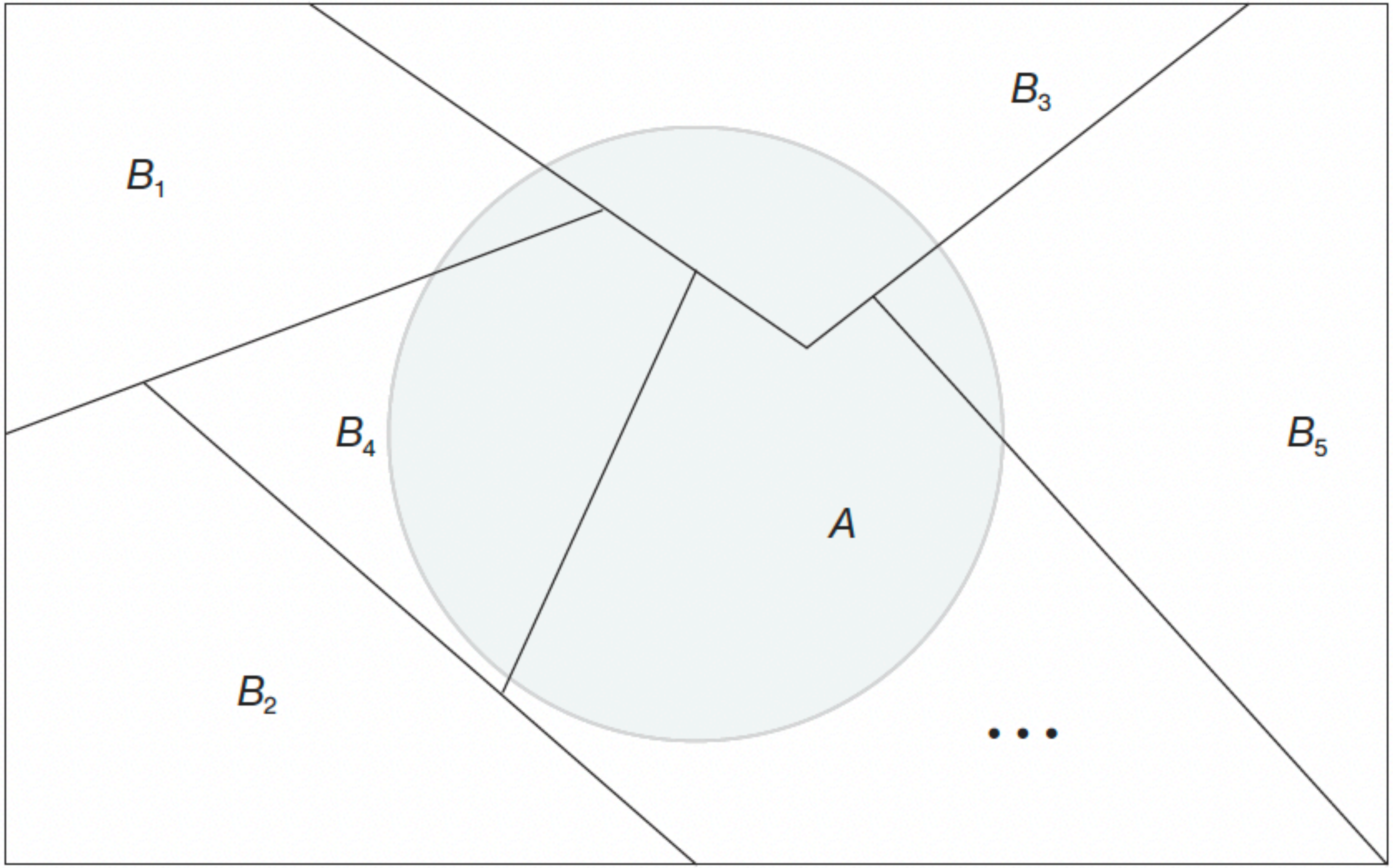
Teorema de probabilidad total

Teorema 2.13: Si los eventos B_1, B_2,... B_k constituyen una partición del espacio muestral S, tal que $P(B_i) \neq 0$ para $i = 1, 2,..., k$, entonces, para cualquier evento A de S,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i).$$

Walpole (2012), p.73

Teorema de probabilidad total



Walpole (2012), p.73

Ejercicio

- La policía planea hacer respetar los límites de velocidad usando un sistema de radar en 4 diferentes puntos a las orillas de la ciudad. Las trampas de radar en cada uno de los sitios L1, L2, L3 y L4 operarán 40%, 30 %, 20% y 30% del tiempo. Si una persona que excede el límite de velocidad cuando va a su trabajo tiene probabilidades de 0.2, 0.1, 0.5 y 0.2, respectivamente, de pasar por esos lugares, ¿cuál es la probabilidad de que reciba una multa por conducir con exceso de velocidad?

Problema

- Tres máquinas de cierta planta de ensamble, **B1**, **B2** y **B3**, montan **30%**, **45%** y **25%** de los productos, respectivamente. Se sabe por experiencia que **2%**, **3%** y **2%** de los productos ensamblados por cada máquina, respectivamente, tienen defectos. Si se elige al azar un producto y se encuentra que está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido ensamblado con la máquina B3?

Solución

- $P(B_1)=0.3$, $P(B_2)=0.45$, $P(B_3)=0.25$
- $P(D|B_1)=0.02$, $P(D|B_2)=0.03$, $P(D|B_3)=0.02$

- **Queremos encontrar $P(B_3|D)$**

Solución

- $P(B3 \mid D) = \dfrac{P(B3 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(D \mid B3) \times P(B3)}{P(D)}$

- Por el teorema de la probabilidad total, como B1, B2 y B3 conforman una partición del espacio muestral, podemos calcular:
  - $P(D) = P(D \cap B1) + P(D \cap B2) + P(D \cap B3) = P(D \mid B1) \times P(B1) + P(D \mid B2) \times P(B2) + P(D \mid B3) \times P(B3)$
  - $P(D) = 0.02 \times 0.3 + 0.03 \times 0.45 + 0.02 \times 0.25 = 0.0245$

- $P(B3 \mid D) = \dfrac{0.02 \times 0.25}{0.0245} \approx 0.204$

Regla de Bayes

Teorema 2.14: (**Regla de Bayes**) Si los eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ constituyen una partición del espacio muestral S, donde $P(B_i) \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces, para cualquier evento A en S, tal que $P(A) \neq 0$,

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)} \quad \text{para} \quad r = 1, 2, \ldots, k.$$

Walpole (2012), p.75

Ejercicio

- Suponga que los cuatro inspectores de una fábrica de chocolates colocan la fecha de caducidad en cada chocolate al final de la línea de montaje. Juan, quien coloca la fecha de caducidad en 20% de los paquetes, no logra ponerla en uno de cada 200 paquetes; Tomás, quien la coloca en 60% de los paquetes, no logra ponerla en uno de cada 100 paquetes; José, quien la coloca en 15% de los paquetes, no lo hace una vez en cada 90 paquetes; y Patricia, que fecha 5% de los paquetes, falla en uno de cada 200 paquetes. Si un cliente se queja de que su chocolate no muestra la fecha de caducidad, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido inspeccionado por Juan?

Ejercicio

- Denote como A, B y C a los eventos de que un gran premio se encuentra detrás de las puertas A, B y C, respectivamente. Suponga que elige al azar una puerta, por ejemplo la A. El presentador del juego, quién sabe en donde se encuentra el premio, abre una de las puertas restantes y muestra que no hay un premio detrás de ella. Ahora, el presentador le da la opción de conservar la puerta que eligió (A) o de cambiarla por la puerta que queda. Utilice la probabilidad para explicar si debe o no hacer el cambio.