Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg
Studiengänge Informatik und Wirtschaftsinformatik
Dr. G. Tapken
Dr. D. Gröger
WiSe 2024/25

3. Übungsblatt zur Mathematik 2

Lösung zu Aufgabe Ü 3.1

Variante 1:

$$\left|\frac{3-2x}{1+x}\right| \leq 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad -4 \leq \frac{3-2x}{1+x} \leq 4$$

Fall 1: $x > -1$

$$\begin{array}{lccc}
 & -4 \leq \dfrac{3-2x}{1+x} \leq 4 & & \\
\Leftrightarrow & -4\cdot(1+x) \leq 3-2x \leq 4\cdot(1+x) & & \\
\Leftrightarrow & -4-4x \leq 3-2x \leq 4+4x & & \\
\Leftrightarrow & -4-4x \leq 3-2x & \wedge & 3-2x \leq 4+4x \\
\Leftrightarrow & -7 \leq 2x & \wedge & -1 \leq 6x \\
\Leftrightarrow & -\dfrac{7}{2} \leq x & \wedge & -\dfrac{1}{6} \leq x \\
\Leftrightarrow & x \geq -\dfrac{1}{6} & & \\
\Rightarrow & \mathbb{L}_1 = \left]-1,\infty\right[\cap \left[-\frac{1}{6},\infty\right[= \left[-\frac{1}{6},\infty\right[& &
\end{array}$$

Fall 2: $x < -1$

$$\begin{array}{lccc}
 & -4 \leq \dfrac{3-2x}{1+x} \leq 4 & & \\
\Leftrightarrow & -4\cdot(1+x) \geq 3-2x \geq 4\cdot(1+x) & & \\
\Leftrightarrow & -4-4x \geq 3-2x \geq 4+4x & & \\
\Leftrightarrow & -4-4x \geq 3-2x & \wedge & 3-2x \geq 4+4x \\
\Leftrightarrow & -7 \geq 2x & \wedge & -1 \geq 6x \\
\Leftrightarrow & -\dfrac{7}{2} \geq x & \wedge & -\dfrac{1}{6} \geq x \\
\Leftrightarrow & x \leq -\dfrac{7}{2} & & \\
\Rightarrow & \mathbb{L}_2 = \left]-\infty,-1\right[\cap \left]-\infty,-\frac{7}{2}\right] = \left]-\infty,-\frac{7}{2}\right] & &
\end{array}$$

Damit ergibt sich als gesamte Lösung

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \left[-\tfrac{1}{6},\infty\right[\cup \left]-\infty,-\tfrac{7}{2}\right] = \mathbb{R} \setminus \left]-\tfrac{7}{2},-\tfrac{1}{6}\right[$$

Die beiden letzten Darstellungen sind gleichwertig (also es ist keine offensichtlich schöner als die andere)

Variante 2:

$$\left|\frac{3-2x}{1+x}\right| \leq 4$$

Man schaut nun zunächst, wann Zähler bzw. Nenner des im Betrag vorhandenen Bruches ihr Vorzeichen ändern. das ist bei $3-2x$ in $x=\frac{3}{2}$ und bei $1+x$ in $x=-1$ der Fall. Dies sind nun die Punkte an denen in die einzelnen Fälle zerlegt wird.

Fall 1: $x<-1$ d.h. $|3-2x| = 3-2x$ und $|1+x| = -(1+x) = -1-x$

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{3-2x}{1+x}\right| \leq 4 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{3-2x}{-1-x} \leq 4 \\
\Leftrightarrow\quad & 3-2x \leq 4(-1-x) \\
\Leftrightarrow\quad & 3-2x \leq -4-4x \\
\Leftrightarrow\quad & 2x \leq -7 \\
\Leftrightarrow\quad & x \leq -\frac{7}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & \mathbb{L}_1 = \left]-\infty,-\tfrac{7}{2}\right] \cap \Big] -\infty,-1\Big[\;=\; \left]-\infty,-\tfrac{7}{2}\right]
\end{aligned}$$

Fall 2: $-1<x<\frac{3}{2}$ d.h. $|3-2x| = 3-2x$ und $|1+x| = 1+x$

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{3-2x}{1+x}\right| \leq 4 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{3-2x}{1+x} \leq 4 \\
\Leftrightarrow\quad & 3-2x \leq 4(1+x) \\
\Leftrightarrow\quad & 3-2x \leq 4+4x \\
\Leftrightarrow\quad & -1 \leq 6x \\
\Leftrightarrow\quad & -\frac{1}{6} \leq x \\
\Leftrightarrow\quad & \mathbb{L}_1 = \left[-\tfrac{1}{6},\infty\right[\cap \left]-1,\tfrac{3}{2}\right[\;=\; \left[-\tfrac{1}{6},\tfrac{3}{2}\right[
\end{aligned}$$

Fall 3: $\frac{3}{2}<x$ d.h. $|3-2x| = -(3-2x) = -3+2x$ und $|1+x| = 1+x$

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{3-2x}{1+x}\right| \leq 4 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{-3+2x}{1+x} \leq 4 \\
\Leftrightarrow\quad & -3+2x \leq 4(1+x) \\
\Leftrightarrow\quad & -3+2x \leq 4+4x \\
\Leftrightarrow\quad & -7 \leq 2x \\
\Leftrightarrow\quad & -\frac{7}{2} \leq x \\
\Leftrightarrow\quad & \left[-\tfrac{7}{2},\infty\right[\cap \left[\tfrac{3}{2},\infty\right[\;=\; \left[\tfrac{3}{2},\infty\right[
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbb{L} &= \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 \\
&= \left]-\infty, -\tfrac{7}{2}\right] \cup \left[-\tfrac{1}{6}, \frac{3}{2}\right[\cup \left[\tfrac{3}{2}, \infty\right[\\
&= \left]-\infty, -\tfrac{7}{2}\right] \cup \left[-\tfrac{1}{6}, \infty\right[
\end{aligned}$$