OTH Regensburg

Studiengang
IN, IT B. Sc.
Prof. Dr. Martin Weiß
Wintersemester 2024/25

Computerarithmetik und Rechenverfahren

2. Übungsblatt: Eigenschaften von Aufgaben, Verfahren, Algorithmen

2.1. Kondition 1

Berechnen Sie die Kondition $\kappa(x)$ der Funktionen

$f : \mathbb{R}_{+,0} \to \mathbb{R}$	$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$g(x) = \sin(x)$	$h(x) = 3 \cdot x + 1$

wiederum als Funktion von x.

Für welche Argumente x sind die Funktionen gut bzw. schlecht konditioniert? Erklärung anschaulich und anhand $\kappa(x)$!

2.2. Kondition 2

Berechnen Sie die Kondition der trigonometrischen Umkehrfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arcsin(x)$, $x \mapsto \arccos(x)$, $x \mapsto \arctan(x)$. Verwenden Sie die Tabelle für Ableitungen aus dem Skript.

Welche Umkehrfunktion sollten Sie also verwenden, wenn Sie wissen: Der gesuchte Winkel φ ist etwas kleiner als $\frac{\pi}{2}$?

2.3. Kondition 3

Die Nullstellen des quadratischen Polynoms $x^2 - 20x + 98$ (allgemeiner: $x^2 - 2px + q$) sollen bestimmt werden, das führt über die bekannte Lösungsformel auf die Funktionen

$$x_{1,2} = 10 \pm \sqrt{2} \qquad \text{(allgemeiner: } x_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - q}\text{)}$$

Bestimmen Sie die Kondition der Funktionen

$$f_1(p,q) \equiv x_1 = p + \sqrt{p^2 - q},$$

$$f_2(p,q) \equiv x_2 = p - \sqrt{p^2 - q}$$

in den Parametern, $(p,q)^\star = (10,98)$ und $(p,q)^\star = (10,99.99)$.

2.4. Kondition 4

Der Zeiger einer Uhr, mit bekannter Länge r, dreht sich wie üblich im Uhrzeigersinn, der Winkel gegen 12 Uhr sei φ. Allerdings wird die Uhr nicht wie üblich von oben abgelesen, sondern von der Seite, von 6 Uhr gesehen. Aus der so ermittelten (skalaren) Position der Zeigerspitze soll die Uhrzeit ermittelt werden. Dabei liege der Mittelpunkt der Uhr an der Position 0 der Projektionsachse.

Erklären Sie: Abgelesen wird $x = r\sin(\varphi)$. Die Umkehrung $x \mapsto \varphi$ ist nicht eindeutig. Beschränkt man sich auf den Quadranten von $12 \equiv 0$ Uhr bis 3 Uhr, ist die Umkehrung möglich. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch $\varphi = \arcsin(\frac{x}{r})$. Geben Sie die Kondition dieser Abbildung als Funktion von x an, und interpretieren Sie.

2.5. Abstrakter: Konditionen umrechnen

- Zeigen Sie: Ein Wechsel von Einheiten im Sinn einer Umskalierung $x \mapsto c \cdot x$ ändert die relative Kondition **nicht**.
- Geben Sie eine Formel an, die den Zusammenhang der Kondition f und der Kondition von $\frac{1}{f}$ zeigt (d.h. die Kondition von $\frac{1}{f}$ durch die Kondition von f ausdrückt).
- Geben Sie eine Formel an, die den Zusammenhang der Kondition f und der Kondition von n f und f^{-1} zeigt (d.h. die Kondition von f^{-1} durch die Kondition von f ausdrückt).

  Erinnerung: Ableitung Umkehrfunktion $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$, dabei $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

2.6. Kondition bei nicht-multiplikativem Einheitenwechsel

Ein Einheitenwechsel, der den Nullpunkt verändert, ändert dagegen die Kondition: Wir betrachten den Wechsel zwischen Grad Celsius °C und Grad Fahrenheit °F (in den Formeln ohne Gradsymbol):

$$\begin{aligned} C = C(F) &= (F - 32) \cdot \frac{5}{9} \\ F = F(C) &= C \cdot \frac{9}{5} + 32 \end{aligned}$$

Also: 0° C=32° F. Das wirkt nicht besonders kompliziert, liefert aber eine nicht-konstante Kondition.
Ein Temperaturunterschied von 1°C entspricht einem Temperaturunterschied von $\frac{9}{5}$°F.
Ein Temperaturunterschied von 1°F entspricht einem Temperaturunterschied von $\frac{5}{9}$°C.

Berechnen Sie die Konditionen der Umrechnung von Grad Celsius °C und Grad Fahrenheit und umgekehrt.

2.7. In Europa wird der Kraftstoffverbrauch von Kraftfahrzeugen in $\frac{\text{Liter}}{100\,\text{km}}$ angegeben, d.h. $\frac{\text{Verbrauch}}{\text{Strecke}}$. In den USA verwendet man $\frac{\text{Meilen}}{\text{Gallone}}$, also $\frac{\text{Strecke}}{\text{Verbrauch}}$. In beiden Fällen keine SI-Einheiten.

Begründen Sie mit möglichst wenig Rechnen (unter Verwendung der vorigen Aufgaben): Die Verbrauchsumrechnung ändert nicht die Kondition.

2.8. partielle Ableitungen

Berechnen Sie für $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 5x^2y^3 + 2x$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

2.9. partielle Ableitungen

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktionen

$$f(x_1,x_2) = x_1 \cdot x_2^2, \qquad g(x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_2^2}, \qquad a(s,t) = \frac{s}{t^2},$$

Geben Sie den Gradienten an.

2.10. Höhe des Sammelgebäudes mit dem Smartphone ermitteln, Teil 2

Ein Smartphone wird vom Dach des Sammelgebäudes in Höhe h fallengelassen; Ausgangsschätzung $h_0 = 25$ [m]. Wir modellieren die Flugphase als reibungsfrei (ohne Luftwiderstand) mit Erdbeschleunigung $g = 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. In der Physik lernt man: Bei konstant beschleunigter Bewegung aus Ruhe mit Beschleunigung $a \equiv g$ gilt

$$h = h(t) = \frac{1}{2}at^2,$$

daher schlägt das Smartphone nach $t = \sqrt{2\frac{h}{a}}$ auf dem Boden auf.

a) Versuch 1: Der Experimentator steht am Boden (in sicherer Entfernung von der erwarteten Aufschlagstelle). Loslassen des Smartphones und Aufschlag werden optisch beobachtet; die Reaktionszeit und die optische Erkennung (mit Lichtgeschwindigkeit) werden vernachlässigt. Gemessen wird die Fallzeit. Ermitteln Sie die relative Kondition $\kappa_1(t_0)$ von $h_1(t) = \frac{1}{2}at^2$ in t_0 entsprechend h_0. Ermitteln Sie die absolute Kondition. Interpretieren Sie die Formeln für absolute und relative Kondition, insb.: Veranschaulichen Sie sich, für welche Höhen die Kondition gut oder schlecht ist.

b) Versuch 2: Der Experimentator steht auf dem Dach des Sammelgebäudes. Das Loslassen wird wiederum optisch beobachtet; die Reaktionszeit und die optische Erkennung (mit Lichtgeschwindigkeit) werden vernachlässigt. Das akustische Signal des Aufschlag breitet sich mit Schallgeschwindigkeit zum Dach des Sammelgebäudes aus. Die Schallgeschwindigkeit c_S in trockener Luft von 20°C beträgt $c_S = 343.2\mathrm{ms}$ (wikipedia). Die Messung besteht aus der Summe der Fallzeit und der Signallaufzeit für den Schall:

$$t(h) = \sqrt{2\frac{h}{a}} + \frac{h}{c_S}$$

Um $h = h(t)$ als Funktion von t auszudrücken, brauchen Sie die Umkehrfunktion (warum existiert diese?). Vorschlag zur Herleitung von $h(t)$: Ersetzen Sie $\tilde{h} := \sqrt{h}$. Nach $\tilde{h}$ können Sie einfacher auflösen. Machen Sie die Substitution wieder rückgängig.

Gehen Sie die Kondition von $h(t)$ als Funktion von t und konkret in t_0 an.

c) Schlagen Sie jeweils eine Meßvorrichtung vor, geben Sie einen plausiblen Meßfehler an und ermitteln Sie absoluten und relativen Fehler.

2.11. Alte Klausuraufgaben

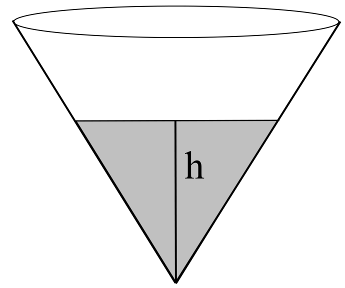
a) Warum ist die Auswertung der folgenden Formel für $|x| \ll 1$ numerisch instabil? Formen Sie in einen äquivalenten, numerisch stabilen Ausdruck um!

$$\frac{6}{2+3x} - \frac{3-x}{1+x}$$

b) Bei Meßvorrichtungen für Niederschläge wird ein auf der Spitze stehender Kegel wie in der Abbildung verwendet. Für einen bestimmten Regensammler gibt der Hersteller an, dass die Niederschlagsmenge V in Litern aus der Füllhöhe h in Zentimetern über die Formel

$$V = \frac{h^3}{3000}$$

errechnet werden kann. Mit welcher relativen Genauigkeit muss die Höhe h abgelesen werden, damit die Niederschlagsmenge V mit 10% relativer Genauigkeit bestimmt werden kann? Geben Sie eine Abschätzung mit Hilfe der Kondition an!



c) Berechnen Sie die relative Kondition der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{y}{1+x^2}$ bzgl. der ∞-Norm im Punkt $(x^*, y^*) = (2,3)$.

2.12. Kondition 4

Berechnen Sie die Ableitung und damit die Kondition der Funktion

$$f(x) = \frac{6}{2+3x} - \frac{3-x}{1+x}.$$

Das wird hässlich, verwenden Sie lieber MAPLE oder eine anderes CAS = computer algebra system.

Vergleich zur vorigen Aufabge: Was ergibt sich für $|x| \ll 1$?

2.13. Partielle Ableitungen

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung und, mit einem CAS, alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung für die Funktionen

$E = E(m,c) = m \cdot c^2$ $\qquad$ $t = t(h,a) = \sqrt{2\frac{h}{a}}$ $\qquad$ $c = c(a,b) = \sqrt{a^2+b^2}$

2.14. Vektornormen

Veranschaulichen Sie folgende Abschätzungen für $n = 2$ alle $v \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \|v\|_\infty &\leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|v\|_\infty \\ \frac{1}{\sqrt{n}}\|v\|_1 &\leq \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \end{aligned}$$

2.15. Bestimmen Sie $\inf, \min, \max, \sup$ der Mengen bzw. geben Sie an, wieso der Wert nicht existiert!

	inf	min	max	sup
$\{1,2,3\}$				
$\left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$				
$\left\{\frac{1}{x} : x \in [1,\infty\right\}$				

2.16. Alte Klausuraufgabe

a) Warum ist die Auswertung der folgenden Formel für $|x| \ll 1$ numerisch instabil? Formen Sie in einen äquivalenten, numerisch stabilen Ausdruck um!

$$\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$$

b) Berechnen Sie die relative Kondition der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x \cdot \cos(y \cdot x)$ im Punkt $(x^*, y^*) = (\pi, 2)$.

c) $\tilde{x}$ sei ein Näherungswert für $x = 2$ mit relativem Fehler von maximal 5 %. Wie lässt sich der relative Fehler für $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ mit Hilfe der Kondition abschätzen?

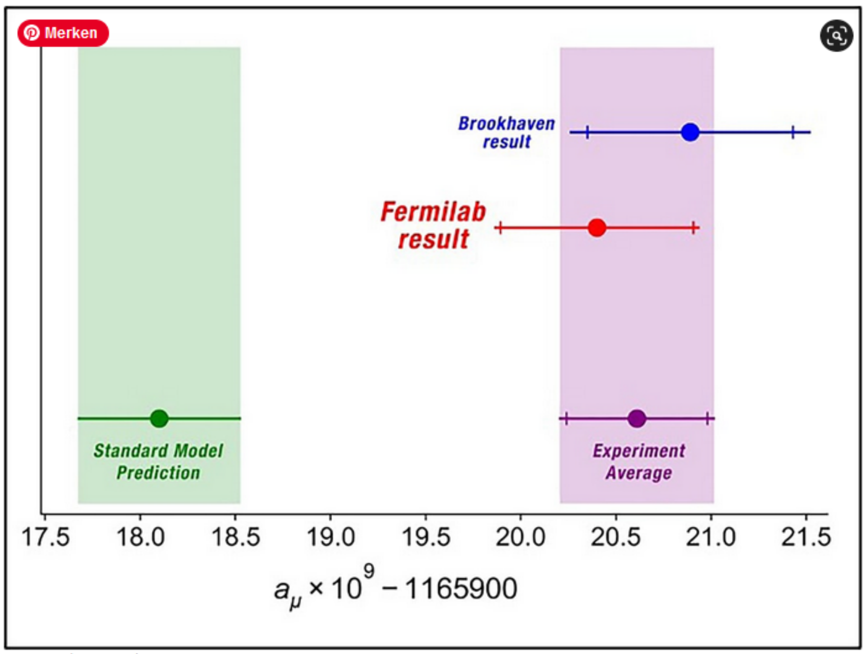
2.17. *** Geschichte: Der Freiherr von Vega

Im ELO finden Sie einen Seite aus dem Tafelwerk des Freiherrn von Vega. Ermitteln Sie damit die folgenden "gemeinen" Logarithmen, d.h. den Logarithmus zur Basis 10: $\log_{10}(23), \log_{10}(42.23)$. Wie bestimmen Sie Werte, die nicht exakt tabelliert sind?

Laden Sie sich von der Sächsischen Landesbibliothek `http://www.slub-dresden.de` das Tafelwerk des Freiherrn von Vega. Ermitteln Sie $\sin(23^o 42')$ (20 Grad, 42 Bogenminuten), und $\sin(0.2)$, dabei 0.2 im Bogenmaß.

2.18. *** Aktuell: Myon und Standardmodell der Physik

`https://www.spektrum.de/news/magnetsinn-der-myonen-der-riss-im-weltmodell/1856296`

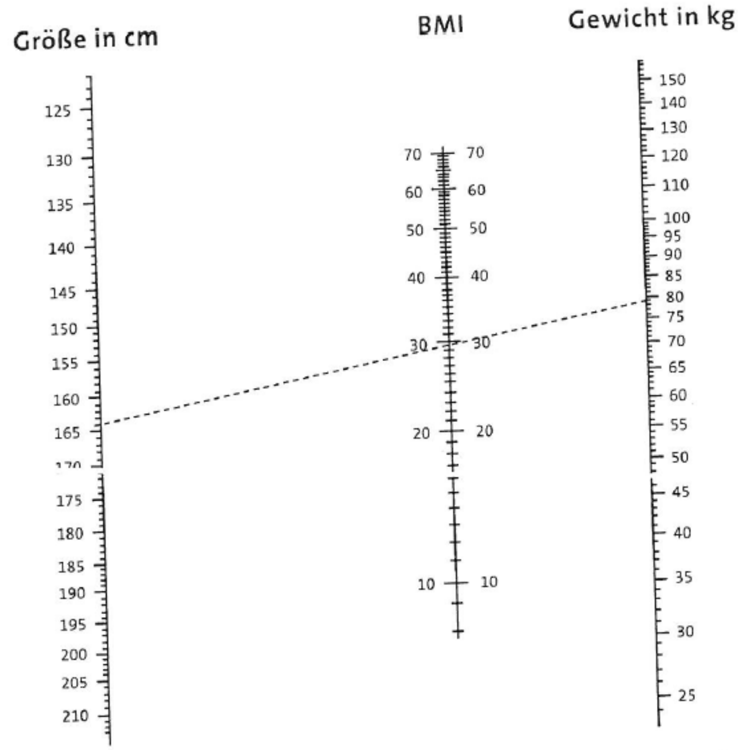


Übersicht der Messwerte | Der neue Wert für das anomale magnetische Moment des Myons (rot) stimmt in etwa mit dem 20 Jahre alten Ergebnis aus Brookhaven überein (blau). Weit weg, selbst wenn man die Messunsicherheit beachtet (horizontale Linien): die Vorhersage des Standardmodells (grün).

Vergleichen Sie mit der von Rupert Sheldrake dargestellten Entwicklung der Lichtgeschwindigkeit in den letzten Jahrhunderten:

2.19. ***

Aus einem Kochbuch hat mir jemand folgende Seite kopiert:



Wie bestimme ich meinen BMI?

Nehmen Sie ein Lineal und einen Stift. Suchen Sie auf der linken Achse Ihre Größe und auf der rechten Achse Ihr momentanes Gewicht. Nun verbinden Sie beide Punkte mit einer Linie. Wo diese Linie die BMI-Achse schneidet, liegt Ihr BMI.

Quelle: aid

Welcher BMI-Wert ist für Erwachsene der richtige?

Alter	BMI Normalgewichtsbereich	Wünschenswerter BMI Männer	Frauen
19 bis 24 Jahre	19–24	21,4	19,5
25 bis 34 Jahre	20–25	21,6	23,2
35 bis 44 Jahre	21–26	22,9	23,4
45 bis 54 Jahre	22–27	25,8	25,2
55 bis 64 Jahre	23–28	26,0	26,0
ab 65 Jahre	24–29	26,6	27,3

Quelle: National Research Council