Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg
Studiengänge Informatik und Wirtschaftsinformatik
Dr. G. Tapken
Dr. D. Gröger
WiSe 2024/25

4. Wiederholungsblatt zur Mathematik 2

Lösung zu Aufgabe W 4.1

$A(\ell,h) = \ell \cdot h \qquad$ mit $\quad \ell \in [6,10], h \in [0,2]$

Nun müssen wir eine der beiden Variablen eliminieren. Da wir in der linken unteren Ecke bzw. rechten unteren Ecke ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck haben gilt: $\ell = 10-2h$ (bzw. daraus $h = 5-\frac{1}{2}\ell$)

Variante 1

$$\begin{aligned}
A(h) &= h\cdot(10-2h) = 10h-2h^2\\
A'(h) &= 10-4h\\
A'(h) &\stackrel{!}{=} 0\\
\iff \quad 10-4h &= 0\\
\iff \quad 10 &= 4h\\
\iff \quad 2,5 &= h
\end{aligned}$$

Da $2,5$ nicht im möglichen Bereich für h liegt kommt dieser Ort als Extremalstelle nicht in Frage, daher bleiben nur die beiden Randpunkte von $[0,2]$ als Extremalstellen übrig.

$$\begin{aligned}
A(0) &= 0\\
A(2) &= 2\cdot(10-2\cdot 2) = 12 > 0
\end{aligned}$$

Daher ist die gesuchte Länge $\ell = 6\,\text{cm}$ $\;(\ell = 10-2h = 10-2\cdot 2 = 6)$.

Variante 2

$$\begin{aligned}
A(\ell) &= \ell\cdot\left(5-\frac{1}{2}\cdot\ell\right) = 5\cdot\ell-\frac{1}{2}\cdot\ell^2\\
A'(\ell) &= 5-\ell\\
A'(\ell) &\stackrel{!}{=} 0\\
\iff \quad 5-\ell &= 0\\
\iff \quad 5 &= \ell
\end{aligned}$$

Da 5 nicht im möglichen Bereich für ℓ liegt kommt dieser Ort als Extremalstelle nicht in Frage, daher bleiben nur die beiden Randpunkte von $[6,10]$ als Extremalstellen übrig.

$$\begin{aligned}
A(6) &= 5\cdot 6-\frac{1}{2}\cdot 6^2 = 30-18 = 12 > 0\\
A(10) &= 0
\end{aligned}$$

Daher ist die gesuchte Länge $\ell = 6\,\text{cm}$.

Lösung zu Aufgabe W 4.2

a)

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{3} (2\overset{\downarrow}{x}+1)\cdot \overset{\uparrow}{e^{2x}}\,\mathrm{d}x &= \left[(2x+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{2x}\right]_{-1}^{3} - \int_{-1}^{3} 2\cdot\frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[(2x+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{2x}\right]_{-1}^{3} - \left[\frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{2x}\right]_{-1}^{3} \\
&= \left((6+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{6}\right) - \left((-2+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{-2}\right) - \left(\left(\frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{6}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{-2}\right)\right) \\
&= \frac{7}{2}\cdot \mathrm{e}^{6} + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{6} + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{-2} \\
&= 3\cdot \mathrm{e}^{6} + \mathrm{e}^{-2}
\end{aligned}
$$

b) **Mit evidenter innerer Ableitung**

$$
\int_{a}^{b} (3x-5)^{11}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\int_{a}^{b} \underbrace{3}_{=g'(x)}\cdot(\underbrace{3x-5}_{=g(x)})^{11}\,\mathrm{d}x
$$

Mit $g(x) = 3x-5, \quad f(t) = t^{11}$ erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\cdot\int_{g(a)}^{g(b)} t^{11}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{12}t^{12}\right]_{g(a)}^{g(b)} \\
&= \frac{1}{36}\cdot\left(g(b)^{12} - g(a)^{12}\right) = \frac{1}{36}\cdot\left((3b-5)^{12} - (3a-5)^{12}\right)
\end{aligned}
$$

Ohne evidente innere Ableitung

Wir substituieren mit $t(x) = 3x-5 \;\Leftrightarrow\; x(t) = \frac{t(x)+5}{3} \quad \Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\mathrm{d}t$

$$
\begin{aligned}
\int_{a}^{b} (3x-5)^{11}\,\mathrm{d}x = \int_{t(a)}^{t(b)} t^{11}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{16}t^{12}\right]_{3a-5}^{3b-5} \\
&= \frac{1}{36}\cdot\left((3b-5)^{12} - (3a-5)^{12}\right)
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe W 4.3

a) Zu bestimmen ist: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int\limits_x^0 \left(1-t^2\right)^4 \,\mathrm{d}t$.

Wir setzen $g(t) := \left(1-t^2\right)^4$, g ist stetig und damit integrierbar auf einem abgeschlossenen Intervall und hat die Stammfunktion G, damit ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int\limits_x^0 \left(1-t^2\right)^4 \,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int\limits_x^0 G'(t) \,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[G(t)\right]_x^0$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(G(0) - G(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(0) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(x) = 0 - g(x) = -\left(1-x^2\right)^4$$

b) Es gilt $\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+e^x} \,\mathrm{d}x = F(x) + c$

Wir bestimmen nun eine konkrete Stammfunktion F. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt:

$$F(x) = \int_a^x \frac{\mathrm{e}^{2s}}{1+e^s} \,\mathrm{d}s$$

Wir substituieren mit $t(s) := e^s \quad \Leftrightarrow \quad s(t) = \ln(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}s = \frac{1}{t} \cdot \mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t(a)}^{t(x)} \frac{t^2}{1+t} \cdot \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathrm{e}^a}^{\mathrm{e}^x} \frac{t}{1+^t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathrm{e}^a}^{\mathrm{e}^x} \frac{t+1-1}{1+t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathrm{e}^a}^{\mathrm{e}^x} \frac{t+1}{1+t} \,\mathrm{d}t - \int_{\mathrm{e}^a}^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{1+t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathrm{e}^a}^{\mathrm{e}^x} 1 \,\mathrm{d}t - \int_{\mathrm{e}^a}^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{1+t} \,\mathrm{d}t \\
&= \Big[t\Big]_{\mathrm{e}^a}^{\mathrm{e}^x} - \Big[\ln(1+t)\Big]_{\mathrm{e}^a}^{\mathrm{e}^x} \\
&= \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^a - \left(\ln(1+\mathrm{e}^x) - \ln(1+\mathrm{e}^x)\right) \\
&= \mathrm{e}^x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + \left(\ln(1+\mathrm{e}^a) - \mathrm{e}^a\right)
\end{aligned}$$

Da der Term mit dem a nur eine Konstante ist, ergibt sich:

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+e^x} \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + c$$

Weitere Lösungsmöglichkeit über Polynomdivision und dann Substitution mit evidenter innerer Ableitung.

Lösung zu Aufgabe W 4.4

a) Die richtige Lösung ist F_3. Es gibt verschiedene Möglichkeiten zu argumentieren, weswegen die anderen Funktionen nicht in Frage kommen

- Da das Integral $\int_2^x f(s)\,\mathrm{d}s$ bei 2 beginnt, muss $\lim_{x\nearrow 2} F(x) = \lim_{x\searrow 2} F(x) = 0$ sein. Damit scheiden F_1, F_2 und F_4 aus. (Würde also als alleinige Begründung reichen)
- Da f im ganzen betrachteten Bereich nicht negativ ist, muss $F(x) = \int_2^x f(s)\,\mathrm{d}s$ monoton wachsend sein. Damit scheiden F_2 und F_4 aus.
- Da f insbesondere im Intervall $[0,2]$ nicht negativ ist, kann $F(x) = \int_2^x f(s)\,\mathrm{d}s$ für $x \leq 2$ nicht grösser 0 sein. Damit scheiden F_1 und F_4 aus.
- Die Stammfunktion einer beschränkten Funktion ist immer stetig. Damit scheiden F_1 und F_4 aus.

b)

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty} \int_1^R \overbrace{\frac{1}{x^3}}^{\uparrow} \cdot \overbrace{\ln(x)}^{\downarrow}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\left[\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot \ln(x) \right]_1^R - \int_1^R \frac{1}{-2}\cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}}_{=\frac{1}{x^3}}\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\left[\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot \ln(x) \right]_1^R - \left[\left(\frac{1}{-2}\right)^2 \cdot \frac{1}{x^2} \right]_1^R \right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\ln(x) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2} \right]_1^R \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{R^2}\cdot\ln(R) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{R^2} \right) - \left(-\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe W 4.5

Das Fässchen hat die Form eines Zylinders mit Radius $r \in]0,\infty[$ und Höhe $h \in]0,\infty[$ (eigentlich gehört an diese Stelle noch eine kleine Skizze, die diesen Sachverhalt veranschaulicht).

V sei das Volumen und A die Oberfläche des Fässchens

$$
\begin{aligned}
V &= r^2\cdot\pi\cdot h = 2\,\text{Liter} \quad \Rightarrow \quad h(r) = \frac{V}{r^2\cdot\pi} = \frac{2}{r^2\cdot\pi} \\
A(r,h) &= 2\cdot r^2\cdot\pi + 2\cdot r\cdot\pi\cdot h
\end{aligned}
$$

wir setzten die oben bestimmte Höhe (in Abhängigkeit von r) ein, so dass unsere (Haupt-)Funktion nur noch von einer Variablen abhängt

$$
\begin{aligned}
A(r) &= 2\cdot r^2\cdot\pi + 2\cdot r\cdot\pi\cdot\frac{2}{r^2\cdot\pi} = 2\cdot r^2\cdot\pi + \frac{4}{r} \\
A'(r) &= 4r\cdot\pi - \frac{4}{r^2}
\end{aligned}
$$

Wir suchen nun die kritischen Stellen der Funktion A, also die Stellen in denen die Ableitung 0 wird.

$$\begin{aligned} && A'(r) &\overset{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow && 4r\cdot\pi &= \frac{4}{r^2} \\ \Leftrightarrow && r^3 &= \frac{1}{\pi} \\ \Leftrightarrow && r_0 &= \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \end{aligned}$$

In $r = r_0$ ist also eine kritische Stelle, es bleibt noch zu überprüfen, ob dort auch wirklich das globale Minimum für die Oberfläche ist. Dafür betrachten wir die zweite Ableitung:

$$A''(r) = 4\pi + \frac{8}{r^3} > 0$$

diese Ableitungen ist für alle echt positiven Radien positiv, d.h. also, die Funktion ist positiv gekrümmt, d.h. in $r_0 > 0$ (der einzigen Stelle mit $A'(r) = 0$) liegt also das globale Minimum.

Gesucht ist das Verhältnis

$$\frac{h(r_0)}{2\cdot r_0} = \frac{2}{r_0^2\cdot\pi\cdot 2r_0} = \frac{1}{r_0^3\cdot\pi} = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

Das Verhältnis Höhe zu Durchmesser des Fässchens muss also 1 sein, damit die Oberfläche minimal wird.

Lösung zu Aufgabe W 4.6

a) Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} P(x) &= \lim_{x\to-\infty} \left(x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e\right) = -\infty \\ \lim_{x\to\infty} P(x) &= \lim_{x\to\infty} \left(x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e\right) = \infty \end{aligned}$$

Damit gibt es sicher ein $m \in \mathbb{R}$, mit $|m|$ genügend groß mit $P(m) < 0$ und es git sicher ein $M \in \mathbb{R}$, M genügend groß mit $P(M) > 0$.
Da die Funktion P als Polynom sicher stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in]m,M[$ mit $P(\xi) = 0$.

b) Bestimmen Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für die gilt: $f(1) = 6, f(2) = 12$ und $f''(x) = 6$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6 \\ f'(x) &= \left(\int_a^x f''(t)\,\mathrm{d}t\right) + c = \left(\int_a^x 6\,\mathrm{d}t\right) + c = 6x + c \\ f(x) &= \left(\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right) + d = \left(\int_a^x 6t + c\,\mathrm{d}t\right) + d = 3x^2 + cx + d \end{aligned}$$

nun müssen wir noch die beiden Funktionswerte von f verwenden, um die Konstanten c und d zu bestimmen:

$$f(1) = 3\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d = 3 + c + d \overset{!}{=} 6 \qquad \Leftrightarrow \qquad c + d = 3$$
$$f(2) = 3\cdot 2^2 + c\cdot 2 + d = 12 + 2c + d \overset{!}{=} 12 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2c + d = 0$$

wir haben also ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten, das wir z.B. mit dem Gauß-Verfahren lösen können

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II:=II-2}\cdot\text{ I}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II:=I+II}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II:=}(-1)\cdot\text{ II}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} c &= -3 \\ d &= 6 \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion ist damit $f(x) = 3x^2 - 3x + 6$