Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg WiSe 2024/25
Studiengänge Informatik ([A-K]) und Wirtschaftsinformatik

Dr. G. Tapken

Tutorium zur Mathematik 2

Lösung zu Aufgabe 18

a)

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x \cdot \ln(x) \\ f_1'(x) &= 2 \cdot \ln(x) + 2x \cdot \frac{1}{x} \\ &= 2 \cdot (\ln(x) + 1) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f_2(x) &= e^x \cdot \cos(x) \\ f_2'(x) &= e^x \cdot \cos(x) + e^x \cdot \big(-\sin(x) \big) \\ &= e^x \cdot \big(\cos(x) - \sin(x) \big) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f_3(x) &= 2x \cdot e^x \cdot \sin(x) \\ f_3'(x) &= 2 \cdot e^x \cdot \sin(x) + 2x \cdot e^x \cdot \sin(x) + 2x \cdot e^x \cdot \cos(x) \\ &= 2 \cdot e^x \cdot \big(\sin(x) + x\sin(x) + x\cos(x) \big) \end{aligned}$$

d)

$$f_4(x) = \big(\tan(x) \big)^2$$

Variante 1: Man kennt die Ableitung des Tangens:

$$f_4'(x) = 2 \cdot \tan(x) \cdot \left(1 + (\tan(x))^2 \right)$$

Variante 2: Man kennt die Ableitung des Tangens nicht

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= 2 \cdot \tan(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan(x) \\ &= 2 \cdot \tan(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) \\ &= 2 \cdot \tan(x) \cdot \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} \\ &= 2 \cdot \tan(x) \cdot \left(1 + (\tan(x))^2 \right) \end{aligned}$$

e)

$$
\begin{aligned}
f_5(x) &= \frac{5x^4 - x^2 - 3x + 2}{x^3 - 7x^2 + x} \\
f_5'(x) &= \frac{(20x^3 - 2x - 3) \cdot (x^3 - 7x^2 + x) - (5x^4 - x^2 - 3x + 2) \cdot (3x^2 - 14x + 1)}{(x^3 - 7x^2 + x)^2}
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
f_6(x) &= \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\
f_6'(x) &= \frac{-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)\cos(x)}{\big(\sin(x)\big)^2} \\
&= -\frac{\big(\sin(x)\big)^2 + \big(\cos(x)\big)^2}{\big(\sin(x)\big)^2} = -\frac{1}{\big(\sin(x)\big)^2} \\
&= -1 - \big(\cot(x)\big)^2
\end{aligned}
$$

g)

$$
\begin{aligned}
f_7(x) &= (\sin(2x-4))^2 \\
f_7'(x) &= 2 \cdot \sin(2x-4) \cdot \cos(2x-4) \cdot 2 \\
&= 4 \cdot \sin(2x-4) \cdot \cos(2x-4)
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
f_8(x) &= e^{x^2 - 2x + 5} \\
f_8'(x) &= e^{x^2 - 2x + 5} \cdot \big(2x - 2\big) = 2(x-1) \cdot e^{x^2 - 2x + 5}
\end{aligned}
$$

i)

$$
\begin{aligned}
f_9(x) &= \ln(x^3 - 2x) \\
f_9'(x) &= \frac{1}{x^3 - 2x} \cdot (3x^2 - 2) = \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x}
\end{aligned}
$$

j)

$$
f_{10}(x) = \ln\left(\left(\frac{3x-2}{x^2}\right)^3\right)
$$

Variante 1: Direkte Rechnung

$$
\begin{aligned}
f_{10}'(x) &= \left(\frac{3x-2}{x^2}\right)^{-3} \cdot 3 \cdot \left(\frac{3x-2}{x^2}\right)^2 \cdot \frac{3x^2 - (3x-2) \cdot 2x}{x^4} \\
&= \frac{3x^2}{3x-2} \cdot \frac{3x^2 - 6x^2 + 4x}{x^4} \\
&= \frac{-3(3x-4)}{x(3x-2)}
\end{aligned}
$$

Variante 2: Vereinfachung des Logarithmus

$$\begin{aligned}
f_{10}(x) &= \ln\left(\left(\frac{3x-2}{x^2}\right)^3\right) \\
&= 3 \cdot \ln\left(\frac{3x-2}{x^2}\right) \\
&= 3 \cdot \big(\ln(3x-2) - \ln(x^2)\big) \\
&= 3 \cdot (\ln(3x-2) - 2\ln(x)) \\
f_{10}'(x) &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3x-2} \cdot 3 - \frac{2}{x}\right) \\
&= \frac{3(3x-2(3x-2))}{x(3x-2)} = \frac{-3(3x-4)}{x(3x-2)}
\end{aligned}$$