Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg
Studiengänge Informatik und Wirtschaftsinformatik
Dr. G. Tapken WiSe 2021/22

7. Übungsblatt zur Mathematik 2

Lösung zu Aufgabe Ü 7.1

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[k]{k}}}_{=A_k}$ konvergent/divergent?

Notwendiges Kriterium

$\lim\limits_{k\to\infty} A_k = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}} = 1 \neq 0$, damit ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}}$ divergent.

Minoranten-Kriterium

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Die Summe auf der rechten Seite ist die harmonische Reihe, also divergent. Damit ist auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}}$ divergent.

Quotientenkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{A_{k+1}}{A_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{\sqrt[k+1]{k+1}} \cdot \sqrt[k]{k} \right| = \frac{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k+1]{k+1}} = \frac{1}{1} = 1$$

D.h. dieses Kriterium hilft nichts, um zu entscheiden, ob die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}}$ konvergiert.

Wurzelkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|A_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left| \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \right|} = \star$$

Abschätzung nach oben

$$\star \leq \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{\sqrt[k]{1}}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{1} = 1$$

Abschätzung nach unten

$$\star \geq \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{\sqrt[k]{k^k}}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 1$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|A_k|} = 1$$

D.h. dieses Kriterium hilft nichts, um zu entscheiden, ob die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}}$ konvergiert.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin(n)}{n^2}}_{=A_n}$ konvergent/divergent?

Notwendiges Kriterium

$0 \leq \lim_{n\to\infty} |A_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, damit hilft das Kriterium nichts.

Majoranten-Kriterium

$$0 \leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Die rechte Reihe ist eine verallgemeinerte harmonische Reihe mit $\alpha = 2$ und damit konvergent. Daher ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$ konvergent.

Quotientenkriterium

$$\left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| = \left| \frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{\sin(n)} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \left| \frac{\sin(n+1)}{\sin(n)} \right|$$

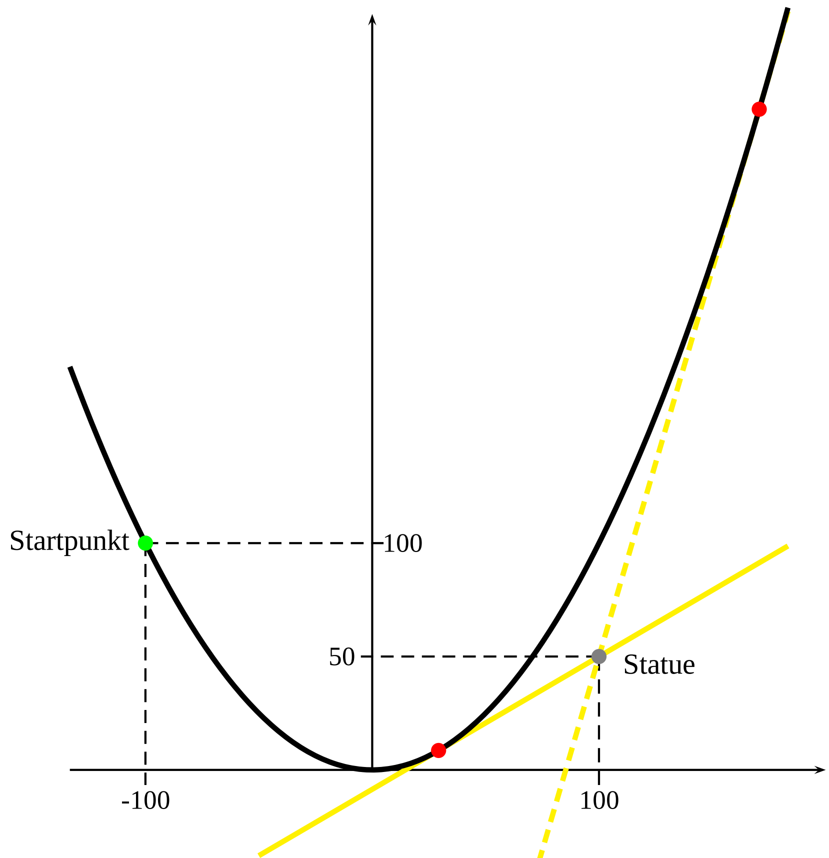
Dieser Quotient hat keinen Limes, denn $\sin(n)$ kann gegenüber $\sin(n+1)$ immer wieder beliebig klein werden,... Damit ergibt sich aus diesem Kriterium keine Information über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$.

Wurzelkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|A_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right|} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right)^2 = 1^2 = 1$$

Da es keine bessere Abschätzung geben kann, ergibt sich aus diesem Kriterium keine Information über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$.

Lösung zu Aufgabe Ü 7.2



Eine Parabel hat die Form

$$p(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

Für die hier gegebenen Parabel gilt:

(1) $p(0) = 0$ da $(0,0)$ der Scheitel und damit auf alle Fälle auch ein Punkt auf der Parabel
(2) $p(-100) = 100$ da $(-100, 100)$ ein Punkt auf der Parabel
(3) $p'(0) = 0$ da in $(0,0)$ der Scheitel ist.

Durch (1)-(3) haben wir also 3 Gleichungen gegeben und wir suchen die 3 Variablen a_0, a_1, a_2.

Aus (1) folgt $p(0) = a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0$
Aus (3) folgt $p'(0) = 2 \cdot a_2 \cdot 0 + a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0$

Dies setzen wir nun in die (2) ein und erhalten:
$p(-100) = a_2 \cdot (-100)^2 + a_1 \cdot (-100) + a_0 = a_2 \cdot (-100)^2 \stackrel{!}{=} 100 \quad \Leftrightarrow \quad a_2 = \frac{1}{100}$

Die Parabel hat also die Funktion $p(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2$

Die Tangente an p im Punkt x_0 hat die Form:

$$\begin{aligned} t_{x_0}(x) &= p(x_0) + p'(x_0) \cdot (x - x_0) = a_2 \cdot x_0^2 + 2 \cdot a_2 \cdot x_0 \cdot (x - x_0) \\ &= a_2 \cdot x_0^2 + 2 \cdot a_2 \cdot x_0 \cdot x - 2 \cdot a_2 \cdot x_0^2 = 2 \cdot a_2 \cdot x_0 \cdot x - a_2 \cdot x_0^2 \end{aligned}$$

Wir suchen nun das x_0, für welches t_{x_0} durch den Punkt $(100,50)$ läuft, d.h

$$
\begin{aligned}
t_{x_0}(100) &\overset{!}{=} 50 \\
\Leftrightarrow \qquad 2\cdot a_2 \cdot x_0 \cdot 100 - a_2 \cdot x_0^2 &= 50 \\
\Leftrightarrow \qquad -\frac{1}{100}\cdot x_0^2 + 2\cdot x_0 - 50 &= 0 \\
\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{100}\cdot x_0^2 - 2\cdot x_0 + 50 &= 0 \\
\Leftrightarrow \qquad \left(x_0\right)_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot \frac{1}{100}\cdot 50}}{2\cdot \frac{1}{100}} = 100 \pm 100 \cdot \frac{\sqrt{4-2}}{\frac{1}{50}} \\
&= 100 \pm 50 \cdot \sqrt{2} = \begin{cases} 29,289 \\ 170,711 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Da das Auto von Westen kommt (negativer x-Achse) und die Scheinwerfer vorne am Auto sind, muss das Auto westlicher (kleinere x-Werte) sein also die Statue $x = 100$ Meter, wenn diese von den Scheinwerfern erfasst werden. Damit ist die einzige Lösung für den Standpunkt des Autos $(29.3; \, p(29.3)) = (29.3; \, 8.6)$ Meter.