Aufgabe 1

1

$T(1)=1,\ T(n)=4T(\frac{n}{2})+n$

$T(n)=4T(\frac{n}{2})+n$
$= 4(4T(\frac{n}{4})+\frac{n}{2})+n = 16T(\frac{n}{4})+3n$
$= 4(16T(\frac{n}{4})+3n)+n = 64T(\frac{n}{8})+13n$ Verstärkte Annahme,
$\Rightarrow$ Verm.: $T(n)\in O(n^2) \Rightarrow T(n)\le c\cdot n^2 - d\cdot n$ damit $+n$ weg fällt

IA: $T(1)=1\le c\cdot n^2 - dn$ OK für beliebige d und dementsprechend große c
IS: $T(n) = 4T(\frac{n}{2})+n \le 4(c\frac{n^2}{4}-d\cdot\frac{n}{2})+n$
$= cn^2-2dn+n \underset{\forall d\ge 1}{\le} cn^2-dn$ ✓

$T(n)\in\Omega(n^2) \Rightarrow T(n)\ge c\cdot n^2$

IA: gleich zu oben
IS. $T(n)=4T(\frac{n}{2})+n \ge 4\cdot c\cdot\frac{n^2}{4}+n = cn^2+n > cn^2$ ✓

$\Rightarrow T(n)\in\Theta(n)$

2

$T(1)=1;\ T(n)=2T(\frac{n}{4})+\sqrt{n}$

Verm.: $T(n)\in O(\sqrt{n}\log n)$
$\Rightarrow T(n)\le c\cdot\sqrt{n}\log n$
IA: $T(4)=2T(1)+\sqrt{4}=4\le c\cdot 4$
IS: $T(n)=2T(\frac{n}{4})+\sqrt{n}\le 2\cdot c(\sqrt{\frac{n}{4}}\log\frac{n}{4})+\sqrt{n}$
$= c\sqrt{n}\log n - 4c\sqrt{n}+\sqrt{n}\le c\sqrt{n}\log n$ ✓

Verm: $T(n)\in\Omega(\sqrt{n}\log n)$
$\Rightarrow T(n)\ge c\cdot\sqrt{n}\log n$
IA: $T(1)=1\ge c\cdot 0$
IS: $T(n)=2T(\frac{n}{4})+\sqrt{n}\ge 2\cdot c(\sqrt{\frac{n}{4}}\log\frac{n}{4})+\sqrt{n}$
$= c\sqrt{n}\log n \underbrace{-4c\sqrt{n}+\sqrt{n}}_{\ge 0\ \Rightarrow\ c\le\frac{1}{4}\ ✓}\ge c\sqrt{n}\log n$ ✓

$\Rightarrow T(n)\in\Omega(\sqrt{n}\log n)$

3

$T(1)=T(2)=T(3)=1;\ T(n)=2T(n-1)+n^2$

$T(n)=n^2+2(n-1)^2+4(n-2)^2+8(n-3)^2+\dots$

$T(n)\in O(n^x) \Rightarrow T(n)\le c\cdot n^x - d\cdot n^2$
$T(n)=2T(n-1)+n^2\le 2(c\cdot n^x - d\cdot n^2)+n^2$
$= 2\cdot c\cdot n^x - d\cdot n^2+n^2\le 2\cdot c\cdot n^x$ ↯

$T(n)\in O(2^n) \Rightarrow T(n)\le c\cdot 2^n - d\cdot(n+1)^2$
$T(n)=2T(n-1)+n^2\le 2(c\cdot 2^{n-1}-d\cdot n^2)+n^2=$
$= c\cdot 2^n - d\cdot n^2+n^2\le c\cdot 2^n$ ✓

$T(n)\in\Omega(2^n) \Rightarrow T(n)\ge c\cdot 2^n$
$T(n)=2T(n-1)+n^2\ge 2\cdot c\cdot 2^{n-1}+n^2=$
$= c\cdot 2^n+n^2 > c\cdot 2^n$ ✓

$\Rightarrow T(n)\in\Theta(2^n)$

Aufgabe 2

1

IA:
$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1=f(1)$ ✓

$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}-\frac{(1-\sqrt{5})^2}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}-\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)=1=f(2)$ ✓

IS:
Annahme sei für $f(n')\ \forall n'<n$ bereits bewiesen. Dann gilt:

$f(n)=f(n-1)+f(n-2)=\frac{\phi^{n-1}-\hat\phi^{n-1}}{\sqrt{5}}+\frac{\phi^{n-2}-\hat\phi^{n-2}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^{n-1}+\phi^{n+2}-\hat\phi^{n-1}-\hat\phi^{n-2}\right)=\frac{\phi^n-\hat\phi^n}{\sqrt{5}}$
$\Rightarrow \phi^{n-1}+\phi^{n+2}-\hat\phi^{n-1}-\hat\phi^{n-2}=\phi^n-\hat\phi^{n-1}$
$\frac{(1+\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{(1+\sqrt{5})^{n-2}}{2^{n-2}}-\frac{(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}}-\frac{(1-\sqrt{5})^{n-2}}{2^{n-2}}=\frac{(1+\sqrt{5})^n}{2^n}-\frac{(1-\sqrt{5})^n}{2^n}\quad |\cdot 2^n$
$2(1+\sqrt{5})^{n-1}+4(1+\sqrt{5})^{n-2}-2(1-\sqrt{5})^{n-1}-4(1-\sqrt{5})^{n-2}=(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n$
$(2(1+\sqrt{5})+4-(1+\sqrt{5})^2)(1+\sqrt{5})^{n-2}=(2(1-\sqrt{5})+4-(1-\sqrt{5})^2)(1-\sqrt{5})^{n-2}$
$(2+2\sqrt{5}+4-1-2\sqrt{5}-6)(1+\sqrt{5})^{n-2}=(2-2\sqrt{5}+4-1+2\sqrt{5}-5)(1-\sqrt{5})^{n-2}$
$0=0$ ✓

$f(n')=c\cdot\phi^n\ \forall n'<n$
$\Rightarrow f(n)=f(n-1)+f(n-2)=c\ (\phi^{n-1}+\phi^{n+2})$
$=c\cdot\phi^n$ (Letzer Schritt folgt aus Rechnung oben)
$\Rightarrow f(n)\in\Theta(\phi^n)$

Aufgabe 3

1

$a=1;\ b=2;\ \log_b a=0$
$f(n)=1\in\Theta(n^0)$
$\Rightarrow T(n)\in\Theta(n^{\log_b a}\cdot\log n)=\Theta(\log n)$

2

$a=3;\ b=4;\ \log_b a=\log_4 3\approx 0{,}8$
$f(n)=n\log n\ \in\Omega(n^{\log_4 3+\varepsilon})\quad \varepsilon:=1-\log_4 3>0$
$\Rightarrow \log n\ge 0$ ✓
$\Rightarrow T(n)\in\Theta(f(n))=\Theta(n\log n)$

3

$a=7;\ b=2;\ \log_b a=\log_2 7\approx 2{,}81$
$f(n^2)\in O(n^{2{,}81-\varepsilon})\quad \varepsilon:=\log_2 7-2>0$
$\Rightarrow n^2\le c\cdot n^2$ ✓
$\Rightarrow T(n)\in\Theta(n^{\log_b a})\approx\Theta(n^{2{,}81})$

Aufgabe 4

		m				
		0	1	2	3	4
	0	1	2	3	4	5
	1	2	3	4	5	/
n	2	3	5	/	/	/
	3	5	/	/		
	4	/	/			

IA (n):
$n=0$: $f(n,m)=m+1$ ✓

IS:
Vor.: $f(n',m)$ definiert $\forall n'<n$ und bel. m
IA (m):
$m=0$: $f(n,m)=f(n-1,m)$ ✓ OK nach Vor.
IS (m):
Vor. 2: $f(n',m')$ def. $\forall m'<m,\ n'=n$
$x=f(n,m-1)$ ✓ OK nach Vor. 2
$f(n-1,x)$ ✓ OK nach Vor.

$\Rightarrow f(n,m)$ existiert $\forall n,m$