

2. Wiederholungsblatt zur Mathematik 2

Aufgabe W 2.1

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwort an und begründen Sie Ihre Wahl.

a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n^2}$ ist

☐ konvergent

☐ divergent

b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!}$ ist

☐ konvergent

☐ divergent

c) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ habe den Konvergenzradius $r = 2$. Dann hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \left(\frac{x-5}{3}\right)^n$ den Konvergenzradius r_0 gleich

☐ 0

☐ $\frac{2}{3}$

☐ $\frac{10}{3}$

☐ 6

☐ ∞

Aufgabe W 2.2

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte und begründen Sie Ihre Wahl.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2+3x}} =$

☐ 1

☐ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

☐ nicht definiert

Begründung:

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x-1|}{|x|-1} =$

☐ 1

☐ -1

☐ 0

☐ nicht definiert

Begründung:

Aufgabe W 2.3

Gegeben sei die folgende Folge:

$$a_1 := 1$$
$$a_{n+1} := \frac{1}{1+a_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

a) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist für geeignete Schranken.

- b) Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton?
- c) Was kann man über die Konvergenz von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. den potentiellen Grenzwert aussagen?

Aufgabe W 2.4

Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- a) Zeigen Sie, dass der Satz von der Umkehrfunktion auf diese Funktion anwendbar ist.
- b) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion dieser Funktion an zwei Stellen (welchen bleibt Ihnen überlassen)

Aufgabe W 2.5

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wird einer Person ein Medikament verabreicht. Die folgende Funktion mit dem Parameter $c > 0$ beschreibt modellhaft den Verlauf der Konzentration des Wirkstoffes im Blut nach Einnahme (in geeigneten Maßeinheiten):

$$k(t) = c \cdot t \cdot e^{-c \cdot t} \quad \text{für } t \geq 0$$

- a) Wie hoch ist jeweils die Konzentration zu den Zeitpunkten $t_0 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = \frac{1}{c}$?
- b) Wie verhält sich die Konzentration, wenn man „sehr lange wartet“?
- c) Zu welchem Zeitpunkt ist die Konzentration maximal? Welchen Wert hat die maximale Konzentration und wie ändert sich dieser Wert in Abhängigkeit vom Parameter c ?

Aufgabe W 2.6

Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$|\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$$