Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg
Studiengänge Informatik und Wirtschaftsinformatik
Dr. G. Tapken WiSe 2021/22

3. Wiederholungsblatt zur Mathematik 2

Lösung zu Aufgabe W 3.1

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot(\sin(n))^8+n^4}{n^6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{n^2\cdot(\sin(n))^8}{n^4}+\frac{n^4}{n^4}}{\frac{n^6}{n^4}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(\sin(n))^8}{n^2}+1}{n^2}\overset{\star}{\leq}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+1}{n^2}=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$\star$ da der Sinus nur Werte zwischen -1 und 1 annehmen kann.

Die letzte Summe ist eine verallgemeinerte harmonische Reihe mit $\alpha=2>1$ und damit konvergent. Damit ist nach dem Majorantenkriterium auch die ursprüngliche Reihe konvergent.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!\cdot n!}$

Majorantenkriterium
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!\cdot n!}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=e^2<\infty$$

Damit ist $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!\cdot n!}$ konvergent

Quotientenkriterium $\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{2^n}{n!\cdot n!}}_{=A_n}$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right|\\&=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)!\cdot(n+1)!}\frac{n!\cdot n!}{2^n}\right|\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n+1)\cdot(n+1)}=0<1\end{aligned}$$

Damit ist $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!\cdot n!}$ konvergent.

c) Die folgenden 3 Reihen sind alle konvergent, sortieren Sie sie aufsteigend nach ihrem Wert (also ① für den kleinsten, ② für den mittleren und ③ für den größten Wert) und begründen Sie Ihre Wahl.

Ordnungsrang	Reihe	
②	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$
③	$\sum\limits_{n=0}^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^n$	$\geq 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} = 1 + \frac{10}{9} > 2$
①	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$	$= \ln(2) \approx 0.7$ Alternativ kann man abschätzen, denn bei einer konvergenten alternierenden Reihe bekommt man abwechselnd Abschätzungen nach unten bzw. oben. Da wir hier mit einem positiven Summanden beginnen, erhalten wir zunächst eine Abschätzung nach oben $\leq \frac{(-1)^2}{1} = 1$

Lösung zu Aufgabe W 3.2

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^3}+1} = \lim_{x\to 0}\frac{x+x^3}{1+x^3} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} x+x^3}{\lim\limits_{x\to 0} 1+x^3} = \frac{0}{1} = 0$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^2+x}{\mathrm{e}^x-1}} = \sqrt{\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{\mathrm{e}^x-1}} \overset{\text{L'H}}{=} \sqrt{\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{\mathrm{e}^x}} = \sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to 0} 2x+1}{\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^x}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1$$

c) gesucht ist die Lösungsmenge von $\dfrac{2x+3}{x-4} \leq 0$

Fall: $x > 4$

$$\begin{aligned}
& \frac{2x+3}{x-4} \leq 0 \\
\iff\quad & 2x+3 \leq 0 \\
\iff\quad & 2x \leq -3 \\
\iff\quad & x \leq -\frac{3}{2} \\
\implies\quad & \mathbb{L}_1 =]4,\infty[\cap \left]-\infty,-\frac{3}{2}\right] = \emptyset
\end{aligned}$$

Fall: $x < 4$

$$\begin{aligned}
& \frac{2x+3}{x-4} \leq 0 \\
\iff\quad & 2x+3 \geq 0 \\
\iff\quad & 2x \geq -3 \\
\iff\quad & x \geq -\frac{3}{2} \\
\implies\quad & \mathbb{L}_2 =]-\infty,4[\cap \left[-\frac{3}{2},\infty\right[= \left[-\frac{3}{2},4\right[
\end{aligned}$$

Damit ist die Gesamte Lösung

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \left[-\frac{3}{2}, 4\right[$$

Lösung zu Aufgabe W 3.3

Das Haus habe die Seitenlänge x und die Höhe h. Wobei $x, h \in (0, \infty)$.
Das Volumen beträgt $V = x^2 \cdot h = 12000$ (die Einheiten lassen wir vorerst weg). $\Rightarrow h = \frac{V}{x^2}$
Wir sollen die Wärmeabstrahlung minimiern. Die Abstrahlung pro m^2 sei c, damit ergibt sich.

$$\begin{aligned}
&& W &= x^2 \cdot 3 \cdot c + 4 \cdot x \cdot h \cdot c \\
&& W(x) &= 3x^2 \cdot c + 4\frac{V}{x} \cdot c \\
&& W'(x) &= 6xc + 4\frac{-V}{x^2} \cdot c = 6xc - \frac{4Vc}{x^2} \\
\Longleftrightarrow && W'(x) &\stackrel{!}{=} 0 \\
\Longleftrightarrow && 6xc &= \frac{4Vc}{x^2} \\
\Longleftrightarrow && x^3 &= \frac{4V}{6} = \frac{48000}{6} = 8000 \\
\Longleftrightarrow && x &= 20
\end{aligned}$$

Nun muss man noch prüfen, ob an der Stelle $x = 20$ auch wirklich ein Minimum liegt.

Variante 1: 2. Ableitung

$W''(x) = 6c + \frac{8V}{x^3} > 0$ damit ist an der Stelle $x = 20$ ein lokales Minimum und da an dieser Stelle auch der einzige stationäre Punkt ist, handelt es sich auch um das globale Maximum.

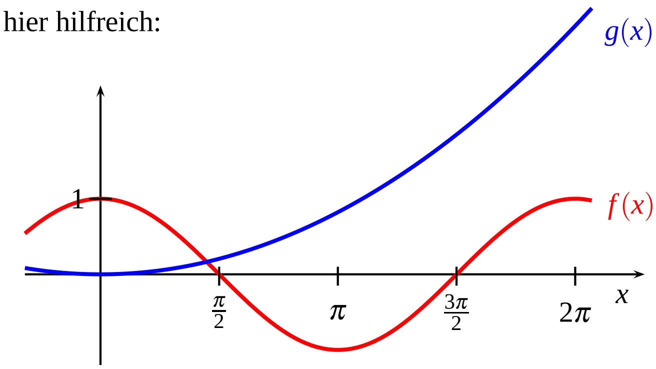
Variante 2: Grenzwerte

$\lim\limits_{x\to 0} W(x) = \infty, \lim\limits_{x\to\infty} W(x) = \infty$ und $W(20) = 3 \cdot 400 \cdot c + \frac{12000}{20} \cdot c = 1200 \cdot c + 600 \cdot c = 1800 \cdot c < \infty$
Damit liegt in $x = 20$ das globale Minimum in $x = 20$.

Die ideale Gebäudelänge ist also 20 Meter und die zugehörige Höhe ($\frac{12000}{(20)^2} = 30$) 30 Meter.

Lösung zu Aufgabe W 3.4

Eine passende Skizze ist hier hilfreich:



a) Wir sollen zeigen, dass sich die beiden Funktionen $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = \frac{1}{12} \cdot x^2$ in genau einem Punk in $[0, 2\pi]$ schneiden.
Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass $h(x) := f(x) - g(x)$ im Intervall $[0, 2\pi]$ genau eine Nullstelle hat.

Intervall: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$h(0) = f(0) - g(0) = \cos(0) - \frac{1}{12} \cdot 0^2 = 1 - 0 = 1 > 0$$
$$h(\pi) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0 - \frac{1}{48} \cdot \pi^2 < 0$$

damit hat h nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = -\underbrace{\sin(x)}_{>0} - \frac{1}{6} \cdot x < 0 \qquad \text{für alle } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Damit ist die Funktion in $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton fallend und kann daher in diesem Bereich höchstens eine Nullstelle haben.
Damit ergibt sich, dass h in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ genau eine Nullstelle hat.
Intervall: $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$:

$$f(x) = \cos(x) < 0$$
$$g(x) = \frac{1}{12}x^2 > 0$$

gibt es dort sicher keinen Schnittpunkt der beiden Funktionen f und g.
Intervall: $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$:

$$f(x) = \cos(x) \leq 1$$
$$g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 = \frac{3^2 \cdot \pi^2}{3 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{3\pi^2}{16} > 1$$
$$g'(x) = \frac{1}{6}x > 0$$

Der Funktionswert von g im Punkt $\frac{3\pi}{2}$ ist grösser als die Funktion f jemals werden kann. Da g zudem (streng) monoton wachsend ist, kann sie auch nie mehr unter die Schranke 1 fallen. Daher gibt es in diesem Intervall ebenfalls keinen Schnittpunkt der beiden Funktionen.

b) Da der Cosinus eine Darstellung als Potenszreihe hat, entspricht das Taylorpolynom 4.Grades einfach den Summanden bis zur 4.Potenz von x, also

$$\begin{aligned}
T_4(\cos(x), x_0 = 0, x) &= \sum_{k=0}^{2} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \\
T_4 &\overset{!}{=} g(x) \\
1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 &= \frac{1}{12} \cdot x^2 \\
1 - \frac{7}{12}x^2 + \frac{1}{24}x^4 &= 0 \\
x^4 - 14x^2 + 24 &= 0 \\
y^2 - 14y + 24 &= 0 \\
y_{1,2} &= \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 24}}{2} = 7 \pm \frac{2}{2} \cdot \sqrt{49 - 24} = 7 \pm 5 = \begin{cases} 2 \\ 9 \end{cases} \\
x_{1,2,3,4} &= \begin{cases} \pm\sqrt{2} \\ \pm 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Da wir nur das Intervall $[0, 2\pi]$ betrachten, kommen die negativen Lösungen nicht in Frage. Da wir zudem wissen, dass die Nullstelle in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ liegt, muss die Nullstelle näherungsweise in $x = \sqrt{2}$ liegen.

Lösung zu Aufgabe W 3.5

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 4. Grades der Funktion $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^x$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Variante 1: Unter Verwendung der Reihe der Exponentialfunktion

$$f(x) = x \cdot \mathrm{e}^x = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k!} \approx \sum_{k=0}^{4} \frac{x^{k+1}}{k!} = \frac{x}{0!} + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} = x + x^2 + \frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{1}{6} \cdot x^4$$

Variante 2: Direkte Rechnung

Wir bilden zunächst alle benötigten Ableitungen

$$\begin{aligned}
f(x) &= x \cdot \mathrm{e}^x & &\Rightarrow & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x & &\Rightarrow & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x = 2 \cdot \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x & &\Rightarrow & f''(0) &= 2 \\
f^{(3)}(x) &= 2 \cdot \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x = 3 \cdot \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x & &\Rightarrow & f^{(3)}(0) &= 3 \\
f^{(4)}(x) &= 3 \cdot \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x = 4 \cdot \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x & &\Rightarrow & f^{(3)}(0) &= 4 \\
f^{(k)}(x) &= k \cdot \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x & &\Rightarrow & f^{(k)}(0) &= k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}$$

Wir setzten nun in das Taylorpolynom ein

$$\begin{aligned}
T_4(x\cdot \mathrm{e}^x, x_0=0, x) &= \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot (x-0)^k \\
&= \sum_{k=0}^{4} \frac{k}{k!}\cdot x^k = \sum_{k=1}^{4} \frac{k}{k!}\cdot x^k \\
&= \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{(k-1)!}\cdot x^k = \frac{x}{0!}+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!} \\
&= x+x^2+\frac{1}{2}\cdot x^3+\frac{1}{6}\cdot x^4
\end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 2. Grades der Funktion $g(x)=\frac{1}{f(x)+1}$ mit Entwicklungspunkt $x_0=0$.

Variante 1: Unter Verwendung von Teilaufgabe a)

$$g(x) = (f(x)+1)^{-1}$$
$$g(0) = (f(0)+1)^{-1} = 1$$

$$g'(x) = (-1)\cdot(f(x)+1)^{-2}\cdot f'(x)$$
$$g'(0) = (-1)\cdot(\underbrace{f(0)+1}_{=1})^{-2}\cdot f'(0) = 1$$

$$g''(x) = (-1)\cdot(-2)\cdot(f(x)+1)^{-3}\cdot\left(f'(x)\right)^2+(-1)\cdot(f(x)+1)^{-2}\cdot f''(x)$$
$$g''(0) = (-1)\cdot(-2)\cdot(\underbrace{f(0)+1}_{=1})^{-3}\cdot\left(f'(0)\right)^2+(-1)\cdot(\underbrace{f(0)+1}_{=1})^{-2}\cdot f''(0) = 2\cdot 1\cdot 1^2-1\cdot 2=0$$

$$T_2(g(x),x_0=0,x) = \sum_{k=0}^{2}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}\cdot(x-0)^k = \frac{g(0)}{1}+\frac{g'(0)}{1}\cdot x+\frac{g''(0)}{2}\cdot x^2 = 1-x$$

Variante 2: Direkte Rechnung

$$g(x) = (x\cdot \mathrm{e}^x)^{-1}$$
$$g(0) = 1$$

$$g'(x) = (-1)\cdot(x\cdot\mathrm{e}^x+1)^{-2}\cdot(\mathrm{e}^x+x\cdot\mathrm{e}^x)$$
$$g'(0) = (-1)\cdot(0+1)^{-2}\cdot(1+0) = -1$$

$$g''(x) = (-1)\cdot(-2)\cdot(x\cdot\mathrm{e}^x+1)^{-3}\cdot(\mathrm{e}^x+x\cdot\mathrm{e}^x)^2+(-1)\cdot(x\cdot\mathrm{e}^x+1)^{-2}\cdot(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x+x\cdot\mathrm{e}^x)$$
$$g''(0) = 2\cdot(0+1)^{-3}\cdot(1+0)^2-(0+1)^{-2}\cdot(1+1+0) = 2-2=0$$

$$T_2(g(x),x_0=0,x) = \sum_{k=0}^{2}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}\cdot(x-0)^k = \frac{g(0)}{1}+\frac{g'(0)}{1}\cdot x+\frac{g''(0)}{2}\cdot x^2 = 1-x$$

Lösung zu Aufgabe W 3.6

a) Um zu zeigen, dass f streng monoton fallend ist, reicht es zu zeigen, dass die erste Ableitung von f immer echt kleiner als 0 ist. Dafür berechnen wir also zunächst die erste Ableitung der Funktion f

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{2}\cdot x^3+\frac{3}{2}\cdot x^2-2x+2\right) = -\frac{3}{2}x^2+3x-2$$

Bei der Ableitung handelt es sich um eine nach unten geöffnete Parabel (nach unten geöffnet, da der Vorfaktor vor dem x^2 negativ ist).

Mit Hilfe der Mitternachtsformel kann man sehen, dass diese Parabel keine Nullstellen hat, denn die Diskriminante (der Wert unter der Wurzel) ist negativ.

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-2)}}{2 \cdot -\frac{3}{2}} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-12}}{-3}$$

Daher kann die Ableitung ihr Vorzeichen nicht ändern. Da die Parabel nch unten geöffnet ist, sind aber beliebig große negative Werte möglich. D.h. f' nimmt nur negative Werte an.

b) $f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^3 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = -4 + 6 - 4 + 2 = 0.$
D.h. die Nullstelle von f ist in $x = 2$.

c) Der Wendepunkt der Funktion f ist die Stelle, an der die zweite Ableitung von f den Wert 0 hat.
Wir berechnen also erst die zweite Ableitung von f.

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{3}{2}x^2 + 3x - 2\right) = -\frac{3}{2} \cdot 2 \cdot x + 3 = -3x + 3$$

$$f''(x) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -3x + 3 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3 = 3x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1$$

f hat ihren Wendepunkt also in $x = 1$.