Übungsblatt 2 - Aufgabe 2

1. $13 + 37 + 4 = O(1)$

↳ Wahr, Alles konstanten → $O(1)$

2. $2n^3 + 4n^2 + 8n + 3 = \Omega(n^3)$

↳ Wahr, dominierender Term „n^3", ist nach unten durch n^3 beschränkt

3. $6^{-5} n^{1,25} = \Theta(\sqrt{n})$

↳ Falsch, $n^{1,25}$ wächst schneller als $\sqrt{n}$, denn $\sqrt{n} = n^{0,5}$

4. $4^{n+1} = O(4^n)$

↳ Wahr, gleiches Verhalten, da beide 4^n und linker Term noch ein vielfaches Konstantes hat (hier 4)

5. $4^{2n} = O(4^n)$

↳ Falsch, $4^{2n} = (4^n)^2$ → wächst quadratisch schneller als 4^n

6. $2 \log(n!) = \Theta(n \cdot \log n)$

↳ Wahr, $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ $\Leftrightarrow$ $\log(n!) \approx \log(\sqrt{2\pi n}) + \log\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$

$\frac{1}{2}\log(2\pi n)$

$n \cdot \log\left(\frac{n}{e}\right) = n \cdot (\log n - 1)$

$\log(n!) \approx \frac{1}{2}\log(2\pi n) + n \cdot (\log n - 1)$

$\rightarrow \log(n!) \approx n \cdot \log n - n$

$\log(n!) = \Theta(n \cdot \log n)$

7. $2^n = O(n!)$

↳ Wahr, für $n \geq 1$ gilt: $n! > 2^n$

8. $n! = O(n^n)$

↳ Wahr, n^n wächst schneller

Aufgabe 4

1. Wahr, die Reihe konvergiert $\left(\lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{2^k} = 0\right)$, Summenwert = feste, endliche Zahl

2. $n^m = O(a^n)$: exponentielle Funktion schneller als Polynom

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{a^n} = 0$, da a^n schneller wächst

$\Rightarrow$ Wahr, für $a > 1$ und $m \in \mathbb{N}$

3. $n \ln n = O(n^{\frac{3}{2}})$

„$n^{\frac{3}{2}}$" wächst schneller als „$n \cdot \ln n$"

$\frac{n \cdot \ln n}{n^{3/2}} = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$

$\Longrightarrow$ Wahr, $\ln n$ langsam wachsenste Funktion

4) $5^{\log_3 \cdot n} = O(n^2)$ $\qquad$ $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

$$5^{\log_3 \cdot n} = n^{\log_3 \cdot 5}$$

$$\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} \frac{\approx 0{,}69}{\approx 0{,}47} \approx 1{,}465$$

$$n^{1{,}465} < n^2$$

$\Rightarrow$ Wahr, denn n^2 wächst schneller als $5^{\log_3 n}$