1. $T(1) = 1$, $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$

Iterationsmethode:

$$T(n) = 4T(\tfrac{n}{2})+n = 4\cdot\left(4T(\tfrac{n}{4})+\tfrac{n}{2}\right)+n = 4\cdot\left(4\cdot\left(4T(\tfrac{n}{8})+\tfrac{n}{4}\right)+\tfrac{n}{2}\right)+n = 4^3\cdot T(\tfrac{n}{2^3}) + \sum_{k=0}^{\overset{3-1}{2}} n\cdot(2)^k$$

Struktur: $4^i \cdot T(\frac{n}{2^i}) + n\sum_{k=0}^{i-1} 2^k$, Rekursionsbasis: $\frac{n}{2^i} = 1 \Rightarrow i = \log_2(n)$

$$\Rightarrow T(n) = 4^{\log_2(n)}\cdot T(1) + n\cdot\sum_{k=0}^{\log_2(n)-1} 2^k = 2^{2\log_2 n} + n\cdot\frac{2^{\log_2(n)\cancel{=n}}-1}{2-1}$$

$$= n^2 + n\cdot(n-1) = n^2+n^2-n = 2n^2-n \in O(n^2).$$

Substitutionsmethode:

Behauptung: $T(n) = O(n^2)$

$T(2n) \to T(n)$

IA: $T(1) = O(1^2) \Leftrightarrow 1 = 1$ IV: Behauptung gilt auch für $T(n)$

IS: $T(2n) = 4\underbrace{T(n)}_{IV}+2n \leq 4\cdot c\cdot n^2+2n \Rightarrow \underline{\underline{T(n)\in O(n^2)}}$

2. $T(1) = 1$, $T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n}$

Iterationsmethode:

$$T(n) = 2T(\tfrac{n}{4})+\sqrt{n} = 2\cdot\left(2T(\tfrac{n}{16})+\sqrt{n}\right)+\sqrt{n} = 2\left(2\cdot\left(2T(\tfrac{n}{64})+\sqrt{\tfrac{n}{16}}\right)+\sqrt{\tfrac{n}{4}}\right)+\sqrt{n} = 2^3T(\tfrac{n}{4^3})+\sum_{k=0}^{2}2^k\sqrt{\tfrac{n}{4^k}}$$

Struktur: $2^iT(\frac{n}{4^i})+\sqrt{n}\cdot\sum_{k=0}^{i-1}2^k\sqrt{\frac{1}{4^k}} = \ldots+\sqrt{n}\cdot\sum_{k=0}^{i-1}2^k\cdot\frac{1}{\sqrt{4^k}} = \ldots+\sqrt{n}\cdot\sum_{k=0}^{i-1}2^k\frac{1}{\sqrt{2^{2k}}}$

$= \ldots+\sqrt{n}\cdot\sum_{k=0}^{i-1}\frac{2^k\cdot 1}{2^k} = 2^iT(\frac{n}{4^i})+\sqrt{n}(i-1)$

Rekursionsbasis: $\frac{n}{4^i} = 1 \Rightarrow i = \log_4 n$

$$\Rightarrow T(n) = 2^{\log_4 n}T(1)+\sqrt{n}\cdot(\log_4(n)-1)$$

$$= 2^{\frac{\log_2 n}{\log_2 4}}+\sqrt{n}\cdot(\log_4(n)-1) = 2^{\log_2(n)\cdot\frac{1}{2}}+\ldots = 2^{\frac{1}{2}}+\sqrt{n}\cdot\left(\frac{\log_2(n)}{\log_2(4)}-1\right)$$

$$= \sqrt{2}+\sqrt{n}\cdot\log_2(n)\cdot\tfrac{1}{2}-\sqrt{n} \in O(\sqrt{n}\log_2(n))$$

Substitutionsmethode:

Beh.: $T(n)\in O(\sqrt{n}\log(n))$ IA: ~~$T(1) = O(\sqrt{1}\log_2(1)) \Leftrightarrow 1 = O(1\cdot 0)$~~

~~$T(n) = O(\sqrt{n}\log(n)) \Leftrightarrow 1 = c\cdot\sqrt{n}\log(n)$ $\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\log(n)}}_{\to 0}\leq c$ 0~~

~~$\Rightarrow$ Wahr~~

2. Substitutionsmethode

$T(4) = 2T\left(\frac{4}{4}\right) + \sqrt{4} = 2\,T(1) + 2 = 4$

Beh.: $T(n) \in O(\sqrt{n}\log_2(n))$

IA.: $T(4) = 4 \leq \sqrt{4}\,\log_2(4) \cdot c \Leftrightarrow \frac{4}{2 \cdot 2} \leq c \Leftrightarrow 1 \leq c \Leftrightarrow \underline{c \geq 1}$ ~~Wahr~~

IV.: Beh. gilt auch für $\frac{n}{4}$ IS.: $T(n) \to T\left(\frac{n}{4}\right)$

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n} \underset{IV}{\leq} 2\sqrt{\frac{n}{4}}\,\log\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n} = \cancel{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{n}\,(\log(n) - \log(4)) + \sqrt{n}$

$= \sqrt{n}\,\log(n) - \sqrt{n}\,2 + \sqrt{n} = \sqrt{n}\,\log(n) - \sqrt{n} \in O(\sqrt{n}\log(n))$

3. $T(1), T(2), T(3) = 1 \quad T(n) = 2T(n-1) + n^2$

$\Rightarrow T(n) = 2T(n-1) + n^2 = 2 \cdot (2T(n-2) + (n-1)^2) + n^2 = 2\cdot(2\cdot(2T(n-3) + (n-2)^2) + (n-1)^2) + n^2$

Struktur: $2^i \cdot T(n-i) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k (n-k)^2$

Rekursionsbasis: $n-i = 1 \Rightarrow i = n-1 \lor n-i = 2 \Rightarrow i = n-2 \lor n-i = 3 \Rightarrow i = n-3$

Ansatz für $i = n-1$: $2^{n-1} \cdot \underbrace{T(1)}_{1} + \sum_{k=0}^{n-2} 2^k (n-k)^2$

Höchster Wert der Summe: $2^{n-2}(n-(n-2))^2 = 2^{n-2}(2)^2$

Summand vor der Summe: $2^{n-1}(1) = 2^{n-1} \cdot (1)^2 = 2^{n-1} \cdot (n-(n-1))^2$

$\Rightarrow$ Mitnehmen in die Summe:

$$T(n) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k (n-k)^2$$

Jetzt muss die Summe konvergieren

$2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{2^{n-1}} (n-k)^2$ mit Quotientenkriterium zeigt sich das die Reihe konvergiert.

Somit bleibt $2^n \cdot c \Rightarrow F(n) = \Theta(2^n)$

3. Substitutionsmethode

Beh.: $T(n) = \Theta(2^n)$ IA.: $T(n) = \Theta(2^n) \Leftrightarrow \underline{\underline{1 = 1}}$

IV.: Beh. gilt ~~immer~~ auch für $n-1$

IS.: $T(n) \rightarrow T(n-1)$:

$T(n) = 2T(n-1) + n^2 \underset{IV}{\leq} 2 \cdot 2^n + n^2 = \Theta(2^n)$