Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg
Studiengang IN, IT
R. Wörle, Dr. G. Tapken WS 2023/24

8. Übungsblatt zur Mathematik 2 – Lösungen

Lösung zu Aufgabe Ü8.1

a)

$$\frac{\sin(x)-4}{3} = -1 \qquad |\cdot 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(x) - 4 = -3 \qquad | + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(x) = 1 \qquad |\arcsin$$

$$\Leftrightarrow \quad \arcsin(\sin(x)) = \arcsin(1)$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

b)

$$\frac{13-\cos(2y)}{7} = 2 \qquad |\cdot 7$$

$$\Leftrightarrow \quad 13 - \cos(2y) = 14 \qquad | - 13$$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos(2y) = 1 \qquad |\cdot(-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(2y) = -1 \qquad |\arccos$$

$$\Leftrightarrow \quad \arccos(\cos(2y)) = \arccos(-1)$$

$$2y = \pi \qquad |:2$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{\pi}{2}$$

c)

$$\frac{a^3}{8} - 5 = 3 \qquad | + 5$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^3}{8} = 8 \qquad |\cdot 8$$

$$\Leftrightarrow \quad a^3 = 64 \qquad |\sqrt[3]{\ }$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{64}$$

$$a = 4$$

d)

$$z^4 = 81 \qquad |\sqrt[4]{}$$

$$\Leftrightarrow \qquad z = \sqrt[4]{81}$$

$$z_1 = -3 \qquad z_2 = 3$$

e)

$$3^u = 243 \qquad |\log$$

$$\Leftrightarrow \qquad \log(3^u) = \log(243) \qquad |+4$$

$$u \cdot \log(3) = \log(243) \qquad |:\log(3)$$

$$\Leftrightarrow \qquad u = \frac{\log(243)}{\log(3)}$$

$$u = \log_3 243$$

$$u = 5$$

f)

$$\frac{5^x - 5^2}{5} = 20 \qquad |\cdot 5$$

$$\Leftrightarrow \qquad 5^x - 25 = 100 \qquad |+25$$

$$\Leftrightarrow \qquad 5^x = 125$$

$$\Leftrightarrow \qquad x = \log_5 125$$

$$x = 3$$

oder: $\log(5^x) = \log 125$

$$x \cdot \log(5) = \log 125 \qquad |:\log(5)$$

$$x = \frac{\log(125)}{\log(5)}$$

$$x = 3$$

Lösung zu Aufgabe Ü8.2

Wir sollen zeigen: $\sin(x) + \cos(x) \leq \sqrt{2}$ für alle $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ und zeigen, dass das globale Maximum dieser Funktion auf $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ kleiner oder gleich $\sqrt{2}$ ist.

Wir suchen also zunächst die stationären Stellen von $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$:

$$f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$$

$$f'(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \cos(x) - \sin(x) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \cos(x) = \sin(x) \\
\Leftrightarrow \quad & 1 = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
\Leftrightarrow \quad & 1 = \tan(x) \\
\Leftrightarrow \quad & x = \arctan(x) = \tan^{-1}(x) \\
\Leftrightarrow \quad & x = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Variante 1: Randpunkte

Das globale Maximum liegt also entweder in $x = \frac{\pi}{4}$ oder in einem der beiden Randpunkte $x = 0$ bzw. $x = \frac{\pi}{2}$.

$$f(0) = \sin(0) + \cos(0) = 0 + 1 = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 0 = 1$$

Variante 2: Krümmung

Wir untersuchen was in $x = \frac{\pi}{4}$ für eine Stelle vorliegt, indem wir die zweite Ableitung betrachten:

$$f''(x) = -\sin(x) - \cos(x)$$

da Sinus und Cosinus in $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ positiv sind, ist f'' in dem gegebenen Bereich negativ und damit hat die Funktion f in $\frac{\pi}{4}$ sein globales Maximum. Bleibt die Berechnung des Funktionswertes an dieser Stelle:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

Damit liegt das globale Maximum in $\frac{\pi}{4}$ und $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$. Damit ist die Behauptung bewiesen.