Skript zur Vorlesung

Mathematik 2
(MA2)

Informatik-Studiengänge

G. Tapken (aufbauend auf einem Skript von M. Pohl)
Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg

Version vom 16. August 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

In dieser Einführung werden einige einfache Grundlagen der Analysis zusammengestellt.
Die Darstellung ist eher knapp gehalten. In der einschlägigen Literatur findet man ausführlichere Beschreibungen dieser Grundlagen.

1.1 Fakultäten und Binomialkoeffizienten

Definition 1.1 (Fakultäten)
Für $n \in \mathbb{N}_0$ *wird die Fakultät* $n!$ *von* n *definiert durch:*

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ (n-1)! \cdot n & \text{für } n \geq 1 \end{cases}$$

Definition 1.2 (Binomialkoeffizienten)
Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ *mit* $0 \leq k \leq n$ *definiert man die* Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ *(„*n *über* k *“ oder auch „*n *tief* k*“) als*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

Satz 1.3 (Eigenschaften von Binomialkoeffizienten (Teil 1))
Es seinen $n, k \in \mathbb{N}_0$*. Dann gelten für die Binomialkoeffizienten:*

i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

ii) $0 \leq k \leq n: \ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

iii) $0 \leq k \leq n-1: \ \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Beweis: Einsetzen der Definition und Nachrechnen.

Pascalsches Dreieck
Mit Hilfe von $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ lassen sich die Binomialkoeffizienten im *Pascalschen Dreieck* angeordnen. Dabei ist ein Eintrag im „Inneren" dieses Dreiecks die Summe der beiden direkt darüber stehenden Zahlen. Es ergeben sich die Werte:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

usw.

Satz 1.4 (Binomischer Lehrsatz bzw. Binomische Formel)
Für beliebige Zahlen $a,\ b \in \mathbb{R}$ *und für alle Zahlen* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Beweis: Der Beweis dieses Satzes erfolgt mit Hilfe vollständiger Induktion.

Satz 1.5 (Eigenschaften von Binomialkoeffizienten (Teil 2))
Sei $n \in \mathbb{N}_0$. *Dann gelten für die Binomialkoeffizienten:*

iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0^n = \begin{cases} 1 & \textit{falls } n = 0 \\ 0 & \textit{falls } n \geq 1 \end{cases}$

Beweis: Der Beweis erfolgt über die Verwendung des Binomischen Lehrsatzes

1.2 Ungleichungen

Definition 1.6 (Ordnungsaxiome)
Es gibt eine Relation „<" in $\mathbb{R}$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

i) *für* $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt genau eine der Aussagen:*

$$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a$$

ii) Transitivität: *für* $a, b, c \in \mathbb{R}:$

$$a < b \ \wedge \ b < c \quad \Longrightarrow \quad a < c$$

iii) Monotonie bzgl. Addition *für* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$a < c \quad \wedge \quad b < d \quad \Longrightarrow \quad a + b < c + d$$

iv) Monotonie bzgl. Multiplikation *für* $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$a < b \quad \wedge \quad 0 < c \quad \Longrightarrow \quad ac < bc$$

Bemerkung: Es gelten folgende Schreibweisen und Vereinbarungen:

1) $a \leq b :\Longleftrightarrow \; a < b$ oder $a = b$
2) $a > b :\Longleftrightarrow \; b < a$
3) $a \geq b :\Longleftrightarrow \; b \leq a$
4) $a < b \leq c :\Longleftrightarrow \; a < b$ und $b \leq c$
5) Die Zahl a heißt **positiv**, wenn $a > 0$ gilt.
6) a heißt **negativ**, wenn $a < 0$ gilt.
7) Ist $a \geq 0$, so nennt man a **nichtnegativ**.

Bemerkung: Mit Definition 1.6 und obiger Bemerkung kann man zeigen, dass $\leq$ eine Ordnungsrelation ist, also gilt:

i) Reflexiv: $\forall a \in \mathbb{R} : \; a \leq a$

ii) Transitiv: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : \; a \leq b \wedge b \leq c \Longrightarrow a \leq c$

iii) Antisymmetrisch: $\forall a, b \in \mathbb{R} : \; a \leq b \wedge b \leq a \Longrightarrow a = b$

Satz 1.7 (Rechenregeln für Ungleichungen)
Für Ungleichungen gelten folgende Rechenregeln:

i) $a > 0 \Longleftrightarrow -a < 0$

ii) $a^2 \geq 0$

iii) $a < b$ *und* $c < 0 \Longrightarrow ac > bc$

iv) $0 < a < b \Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

v) Sind a, $b \geq 0$, *so gilt:* $a < b \Longleftrightarrow a^2 < b^2$.

Beweis: Der Beweis erfolgt unter Verwendung von Definition 1.6 und der darauffolgenden Bemerkung.

Definition 1.8 (Intervalle)
Die folgenden Mengen reeller Zahlen heißen Intervalle.

$$
\begin{array}{llllll}
x \in]a, b[& \Longleftrightarrow & a < x < b & \qquad x \in]a, \infty[& \Longleftrightarrow & a < x \\
x \in [a, b[& \Longleftrightarrow & a \leq x < b & \qquad x \in]-\infty, b[& \Longleftrightarrow & x < b \\
x \in]a, b] & \Longleftrightarrow & a < x \leq b & \qquad x \in [a, \infty[& \Longleftrightarrow & a \leq x \\
x \in [a, b] & \Longleftrightarrow & a \leq x \leq b & \qquad x \in]-\infty, b] & \Longleftrightarrow & x \leq b
\end{array}
$$

- *Intervalle der Form* $]a, b[$ *heißen „offenen Intervalle“*
- *Intervalle der Form* $[a, b]$ *heißen „abgeschlossene Intervalle“*
- *Intervalle der Form* $]a, b]$ *bzw.* $[a, b[$ *heißen „halboffenen Intervalle“*
- *Die Intervalle auf der linken Seite heißen „endliche Intervalle“*
- *Statt* $]a, b[$ *schreibt man auch* (a, b)
- *Statt* $]a, b]$ *schreibt man auch* $(a, b]$
- *Statt* $[a, b[$ *schreibt man auch* $[a, b)$

Satz 1.9 (Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischen Mittel)
Es seinen $a, b \in]0, \infty[$*. Dann gilt*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b) \quad \textit{und} \quad \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a+b) \iff a = b$$

Die Zahl $\sqrt{ab}$ *heißt* geometrisches Mittel *und* $\frac{1}{2}(a+b)$ *heißt* arithmetisches Mittel *von* a *und* b*.*

Beweis: Für $a, b > 0$ gilt:

$$
\begin{array}{rcl}
 & \frac{1}{2}(a+b) \overset{!}{\geq} \sqrt{a \cdot b} & \backslash\backslash \ldots^2 \\
\overset{\text{da } a,b>0}{\iff} & \frac{1}{4}(a+b)^2 \overset{!}{\geq} a \cdot b & \backslash\backslash \cdot 4 \\
\iff & a^2 + 2av + b^2 \overset{!}{\geq} 4ab & \backslash\backslash - 4ab \\
\iff & a^2 - 2ab + b^2 \overset{!}{\geq} 0 & \\
\iff & (a-b)^2 \overset{!}{\geq} 0 &
\end{array}
$$

Da die letzte Zeile richtig ist, ist auch die erste Zeile richtig.
Dass der Spezialfall gilt, folgt sofort aus obiger Rechnung mit einem Gleichheitszeichen statt einem „$\geq$“. ■

Satz 1.10 (Bernoullische Ungleichung)
Für alle $x \geq -1$ *und alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt* $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Bemerkung: $0^0 := 1$

Beweis von Satz 1.10: (Induktion nach n)
Induktionsanfang: Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{LS} &= (1+x)^0 = 1 \\ \mathrm{RS} &= 1 + 0x \\ \Rightarrow\ \mathrm{LS} &= \mathrm{RS}\ \checkmark \end{aligned}$$

Induktionsschluss: Zu zeigen ist $\underbrace{(1+x)^n \geq 1+nx}_{\mathrm{IV}} \Longrightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \overset{\mathrm{IV}}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x$$

■

Definition 1.11 (Absolutbetrag)
Für $x \in \mathbb{R}$ *heißt* $|x| := \begin{cases} x & \textit{falls } x \geq 0 \\ -x & \textit{sonst} \end{cases}$ *der* (Absolut-)Betrag *von* x.

Bemerkung: Es gilt auch $|x| = \max(x, -x)$ bzw. $|x| = \sqrt{x^2}$

Satz 1.12 (Rechnenregeln für Beträgen)
Für den Absolutbetrag gelten die folgenen Regeln:

i) $|a| \geq 0$ *und* $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$

ii) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

iii) $|a+b| \leq |a| + |b|$

iv) $|a-b| \geq \big||a| - |b|\big|$

v) $|a| \leq b \Longleftrightarrow -b \leq a \leq b$

vi) $|x - x_0| < r \Longleftrightarrow x_0 - r < x < x_0 + r$

vii) $|a| \geq b \Longleftrightarrow a \geq b \ \vee\ -a \geq b$

Beweis: Mit Hilfe der Anordnungsaxiome Def. 1.6, den Rechenregeln für Ungleichungen Satz 1.7 und der Definition des Betrages Def. 1.11.

Bemerkungen:

1) Die Ungleichung $|a+b| \leq |a| + |b|$ nennt man *Dreiecksungleichung*.

2) $|x - x_0|$ ist der Abstand von x zu dem (als festen angenommenen) Punkt x_0.

2 Folgen und Reihen

2.1 Konvergente Folgen

Definition 2.1 (Folge)
Eine Folge *ist eine Abbildung, die jedem* $n \in \mathbb{N}$ *einen Wert* $a_n \in \mathbb{R}$ *zuordnet.*

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto a(n) = a_n \end{aligned}$$

Man schreibt $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ *oder* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *oder* (a_n).

Spezielle Folgen:

1) **Arithmetische Folge (1. Ordnung):** $a_n := a_0 + n \cdot d$ für $n \in \mathbb{N}$ $(d \in \mathbb{R})$, also $(a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, a_0 + 3d, \ldots)$, d.h. die Folge der Differenzen $(a_1 - a_0, a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots) = (d, d, d, d, \ldots)$ ist konstant.

2) **Arithmetische Folge 2. Ordnung:** $b_n := b_0 + n \cdot \widetilde{b}_0 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ für $n \in \mathbb{N}$ $(b_0, \widetilde{b}_0, d \in \mathbb{R})$. Die Folge der Differenzen ist eine arithmetische Folge 1. Ordnung.

3) **Geometrische Folge:** $c_n := c_0 \cdot q^n$ für $n \in \mathbb{N}$ $(q \in \mathbb{R})$, also $(c_0, c_0 \cdot q, c_0 \cdot q^2, c_0 \cdot q^3, \ldots)$, d.h. die Folge der Quotienten $(\frac{c_1}{c_0}, \frac{c_2}{c_1}, \frac{c_3}{c_2}, \ldots) = (q, q, q, \ldots)$ ist konstant.

Definition 2.2 (Eigenschaften von Folgen)
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt*

i) monoton wachsend, *falls* $\forall n \in \mathbb{N} : \; a_{n+1} \geq a_n$

ii) streng monoton wachsend, *falls* $\forall n \in \mathbb{N} : \; a_{n+1} > a_n$

iii) monoton fallend, *falls* $\forall n \in \mathbb{N} : \; a_{n+1} \leq a_n$

iv) streng monoton fallend, *falls* $\forall n \in \mathbb{N} : \; a_{n+1} < a_n$

v) von oben (oder nach oben) beschränkt, *falls* $\exists M \in \mathbb{R}$, *so dass* $\forall n \in \mathbb{N} : \; a_n \leq M$.

vi) von unten (oder nach unten) beschränkt, *falls* $\exists m \in \mathbb{R}$, *so dass* $\forall n \in \mathbb{N} : \; a_n \geq m$.

vii) beschränkt, *wenn sie von oben und von unten beschränkt ist,*
d.h. $\exists K > 0$, *so dass* $\forall n \in \mathbb{N} : \; |a_n| \leq K$.

viii) alternierend, *falls* $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} < 0$

Definition 2.3 (Konvergente Folge)
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* konvergent *gegen den Grenzwert* a, *falls gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \ \textit{sodass} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N(\varepsilon):$$

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
Wenn es kein $a \in \mathbb{R}$ *gibt, so dass obige Aussage gilt, heißt* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergent.*

Satz 2.4 (Rechenregeln für konvergente Folgen)
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folgen mit* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Dann gilt:*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

iii) falls $b_n \neq 0 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ *und* $b \neq 0:$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

iv) falls $a_n < b_n \ \ \forall\, n \geq n_0$ *(für ein* $n_0 \in \mathbb{N}$*)* $\Longrightarrow a \leq b$
falls $a_n \leq b_n \ \ \forall\, n \geq n_0$ *(für ein* $n_0 \in \mathbb{N}$*)* $\Longrightarrow a \leq b$

Satz 2.5 (Sandwichtheorem)
Falls für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n) n \in \mathbb{N}, (c_n) n \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \textit{und} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$

dann konvergiert auch die Folge $(b_n) n \in \mathbb{N}$ *und es gilt:* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Satz 2.6 (Konvergenzkriterien für Folgen)

i) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

ii) Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

Bemerkung:

zu i) Die Beschränktheit ist ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz. Deswegen nennt man dieses Kriterium insgesamt auch notwendiges Konvergenzkriterium für Folgen.

Jede konvergente Folge ist beschränkt
$\Leftrightarrow$ Jede nicht beschränkte Folge ist auch nicht konvergent

zu ii) Die Aussage ii) ist ein hinreichendes Konvergenzkriterium für Folgen.
Die Aussage ii) ist gleichbedeutend mit der Vollständigkeit der reellen Zahlen.

Wichtige Grenzwerte:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 1 & q = 1 \\ 0 & |q| < 1 \end{cases}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0,\ q \in \mathbb{R}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \end{cases}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{n!} = 0$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1,\ q > 0$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e = 2.718\ldots$ (Eulersche Zahl)

Definition 2.7 (Nullfolge)
Eine Folge $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *nennt man eine* Nullfolge.

	Explizite Folge	Rekursive Folge
Beispiel	$a_n := \frac{2n-5}{n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$	$a_0 := 1,\ a_{n+1} := \frac{a_n}{a_n+2}$ für $n \in \mathbb{N}_0$
Beschränktheit nach unten z.z. $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ a_n \geq m$ für ein $m \in \mathbb{R}$ nach oben z.z. $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq M$ für ein $M \in \mathbb{R}$ insgesamt z.z. $\forall\, n \in \mathbb{N}: \lvert a_n \rvert \leq K$ für ein $K > 0$	m (bzw. M bzw. K) gegeben: Falls falsch reicht ein Gegenbeispiel. Sonst Ungleichung nach n Auflösung und überprüfen, ob das für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. m (bzw. M bzw. K) nicht gegeben: m etc. als Variable stehen lassen, Ungleichung lösen und am Ende der Rechnung falls möglich m etc. passend wählen	m (bzw. M bzw. K) gegeben: Falls falsch reicht ein Gegenbeispiel. Sonst mit vollständiger Induktion.
Monotonie wachsend z.z. $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ a_{n+1} - a_n \geq 0$ fallend z.z. $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ a_{n+1} - a_n \leq 0$	Falls nicht monoton reicht ein Gegenbeispiel. Sonst auflösend der entsprechenden Ungleichung Manchmal ist es einfacher die Aussage über eine Abschätzung von $a_{n+1} - a_n$ zu zeigen	Falls nicht monoton reicht ein Gegenbeispiel. Sonst mit vollständiger Induktion. Manchmal kann die Aussage auch über eine Abschätzung von $a_{n+1} - a_n$ gezeigt werden (unter Verwendung der Schranken m etc.)
Konvergenz/Grenzwert $\exists a \in \mathbb{R}:\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$	Existenz über hinreichendes Konvergenzkriterium möglich, oder durch Berechnung des Grenzwertes (wie im Abschnitt Grenzwerte)	Existenz muss über hinreichendes Konvergenzkriterium gezeigt werden, erst dann kann der Grenzwert berechnet werden, indem man verwendet, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a$

2.2 Die Landauschen Symbole

Die Landauschen Symbole (auch Landau-Symbole) machen Aussagen über das Wachstum von Folgen (oder auch Funktionen). Sie werden zum Beispiel bei der Laufzeitanalyse von Algorithmen eingesetzt. Die Laufzeit von einem Algorithmus kann man als eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten, wobei der Index n die „Größe der Eingabe“ bedeutet, oft in der Anzahl von Bit gemessen.

Definition 2.8 (Landau-Symbole)
Es seien zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben.

i) Die Folge (a_n) ist groß-O *von (b_n) (geschrieben $a_n = O(b_n)$), falls die Folge der Quotienten $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ beschränkt ist (d.h. falls ein $K > 0$ existiert, sodass $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq K$).*
Anschaulich heißt dies, dass die Folge $(|a_n|)$ höchstens so schnell wächst wie die Folge $(|b_n|)$.

ii) Die Folge (a_n) ist klein-O *von (b_n) (geschrieben $a_n = o(b_n)$), falls die Folge der Quotienten $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ eine Nullfolge ist (d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$)*
Anschaulich heißt dies, dass die Folge $(|a_n|)$ langsamer wächst als die Folge $(|b_n|)$.

Beispiele:

1) $25n^2 + 33n + 45 = O(n^2)$ und $25n^2 + 33n + 45 = o(n^4)$
2) $n^5+5000n^3+10000n+1000000 = O(n^5)$ und $n^5+5000n^3+10000n+1000000 = o(n^6)$
3) $\frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$ und $\frac{n(n-1)}{2} = O(n^3)$ und $\frac{n(n-1)}{2} = o(n^3)$.
4) Ist $a_n = O(n^k)$, so folgt $a_n = o(n^j)$ für alle $j > k$.

Bemerkung: Für Landau-Symbole gilt:

- Konstante Faktoren sind unwichtig
- Terme niederer Ordnung sind unwichtig

Achtung: Landau-Symbole machen Aussagen für $n \to \infty$, d.h. für endliche Werte von n können Vorfaktoren oder Terme niedrigerer Ordnung durchaus eine Rolle spielen.
Z.B. $a_n = 10^{100} \cdot n = O(n)$ in der Praxis ist aber $n < 10^{100}$.

Zur Beschreibung des Wachstumsverhalten von Folgen sind folgende Bezeichnungen üblich, wobei die Tabelle nach aufsteigender Wachstumsgeschwindigkeit sortiert ist:

Vergleichsfolge	Beschreibung
$O(1)$	konstant
$O(\log n)$	logarithmisch
$O\big((\log n)^k\big)$	logarithmisch polynomial
$O(n)$	linear
$O(n \log n)$	logarithmisch linear
$O(n^2)$	quadratisch
$O(n^3)$	kubisch
$O(n^k)$, $k \geq 1$ fest	polynomial
$O(a^n)$, $a > 1$ fest	exponentiell

Bemerkungen:

1)
- Man nennt einen Algorithmus *effizient*, wenn seine Komplexität im „worst-case" höchstens polynomial ist.
- Ist die Komplexität des Algorithmuses im „worst case" exponentiell, dann nennt man ihn *ineffizient*.
- Es werden in der Praxis auch ineffiziente Algorithmen verwendet. Z.B. wenn kein besserer Algorithmus vorhanden ist, wenn n nicht sehr groß ist oder wenn der „worst case" gar nicht oder nur sehr unwahrscheinlich auftritt. Interessanter wäre der „average case" (mittlerer Fall, typischer Fall), diese Laufzeit ist aber oft sehr schwer oder auch gar nicht zu bestimmen.

2) **Fester Prozessor, Vergrößerung des Problems um Faktor 10**

Komplexität d. Algorithmus	Verlängerung der Laufzeit um Faktor
$O(n)$	10
$O(n^2)$	$10^2 = 100$
$O(2^n)$	$2^{9n} \underset{n=100}{=} 2^{900} \approx 10^{270}$

Feste Laufzeit, um Faktor 100 besserer Prozessor

Komplexität d. Algorithmus	Vergrößerung der Problemgröße
$O(n)$	100
$O(n^2)$	$\sqrt{100} = 10$
$O(2^n)$	$\frac{\log_2(100)}{n} + 1 \underset{n=100}{\approx} 1,06$

2.3 Konvergente/Divergente Reihen

Satz 2.9 (Endliche geometrische Reihe)
Für alle $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ *und alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt:*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Beweis: Über vollständige Induktion

Definition 2.10 (Unendliche Reihen)
Sei die Folge (A_k) *gegeben. Die Folge* (S_n) *der* Partialsummen *ist definiert durch:*

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} A_k$$

Man nennt (S_n) *auch* unendliche Reihe *mit den Gliedern* A_k *(geschrieben* $\sum A_k$ *oder* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$*).*

Wenn die Folge (S_n) *konvergiert, nennt man auch die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ *konvergent und* $S := \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ *ist der* Wert der Reihe.

Bemerkung: Unendliche Reihen können bei einem beliebigen Index $j \in \mathbb{Z}$ beginnen ($\sum\limits_{k=j}^{\infty} A_k$), häufig ist $j = 0$ oder $j = 1$.

Satz 2.11 (Unendliche geometrische Reihe)
Für die (unendliche) geometrische Reihe gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad \textit{divergent für } |q| \geq 1$$

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q} \quad \textit{für } |q| < 1$$

Satz 2.12 (Konvergenz-/Divergenzkriterien für Reihen)

i) Notwendiges Kriterium

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ *konvergent* $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} A_k = 0$

(Alternative Formulierung: (A_k) *konvergiert nicht gegen* $0 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ *divergent)*

ii) Leibniz-Kriterium

Wenn (B_k) *eine monoton fallende Nullfolge ist, so konvergiert die alternierende Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_k$.

iii) Vergleichskriterium

Es sei $|A_k| \leq B_k$ *für alle* $k \geq k_0$. *Dann gilt*

a) Majorantenkriterium

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} B_k$ *konvergent* $\Longrightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} |A_k|$ *und* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ *konvergent.*

b) Minorantenkriterium

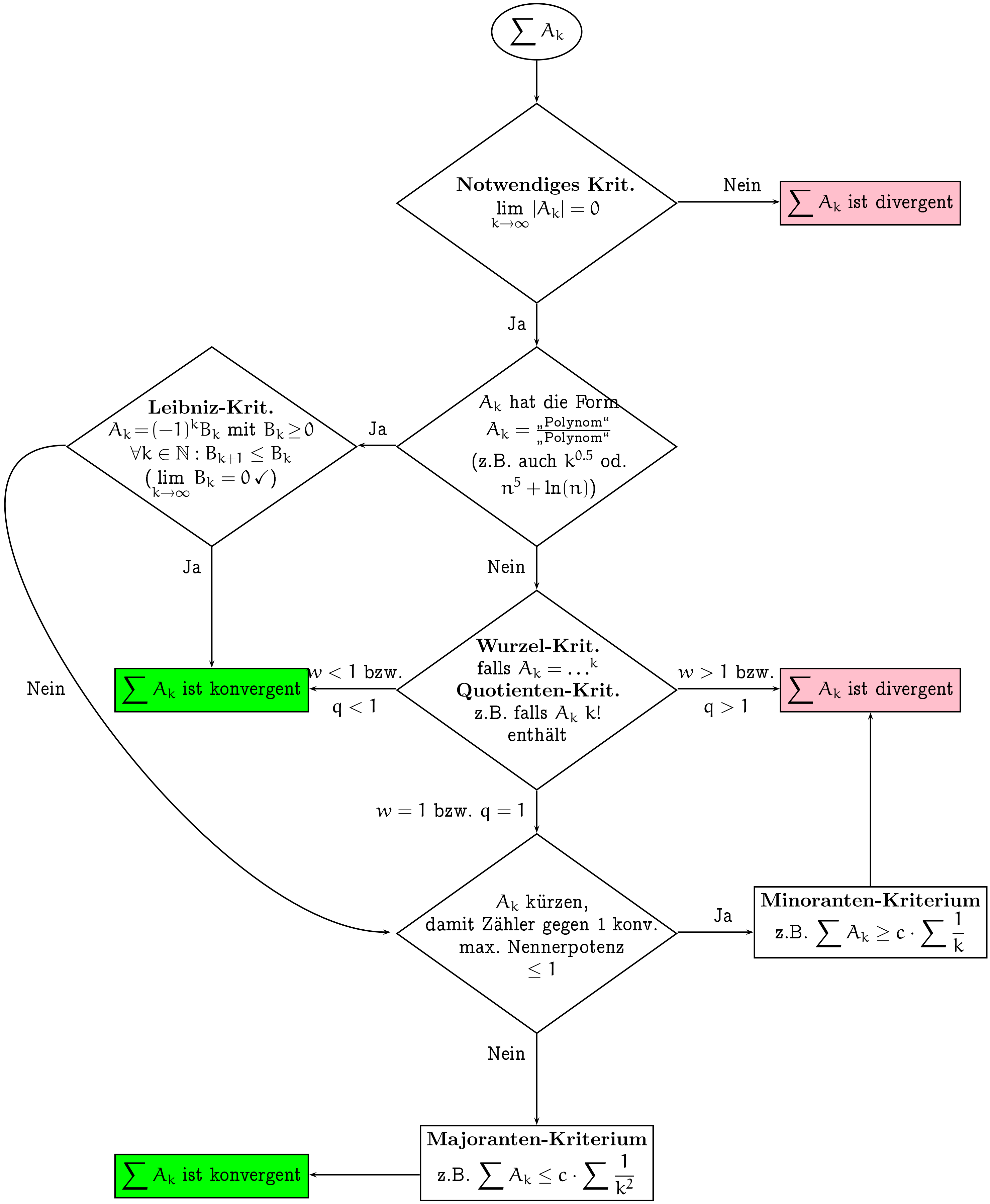
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} |A_k|$ *divergent* $\Longrightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} B_k$ *divergent.*

iv) Wurzelkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|A_k|} = w \begin{cases} < 1 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{k=0}^{\infty} |A_k| \text{ konvergent}, \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k \text{ konvergent} \\ = 1 \;\Rightarrow\; \text{lässt keine Schlüsse über Konvergenz/Divergenz von} \\ \qquad \sum\limits_{k=0}^{\infty} |A_k| \text{ bzw. } \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k \text{ zu} \\ > 1 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{k=0}^{\infty} |A_k| \text{ divergent}, \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k \text{ divergent} \end{cases}$$

v) Quotientenkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{A_{k+1}}{A_k}\right| = q \begin{cases} < 1 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{k=0}^{\infty} |A_k| \text{ konvergent}, \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k \text{ konvergent} \\ = 1 \;\Rightarrow\; \text{lässt keine Schlüsse über Konvergenz/Divergenz von} \\ \qquad \sum\limits_{k=0}^{\infty} |A_k| \text{ bzw. } \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k \text{ zu} \\ > 1 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{k=0}^{\infty} |A_k| \text{ divergent}, \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k \text{ divergent} \end{cases}$$


$\sum A_k$
Notwendiges Krit.
$\lim_{k\to\infty} |A_k| = 0$
Nein
$\sum A_k$ ist divergent
Ja
A_k hat die Form
$A_k = \frac{\text{„Polynom"}}{\text{„Polynom"}}$
(z.B. auch $k^{0.5}$ od.
$n^5 + \ln(n)$)
Ja
Leibniz-Krit.
$A_k = (-1)^k B_k$ mit $B_k \geq 0$
$\forall k \in \mathbb{N} : B_{k+1} \leq B_k$
$(\lim_{k\to\infty} B_k = 0 \checkmark)$
Ja
Nein
Nein
$\sum A_k$ ist konvergent
$w < 1$ bzw.
$q < 1$
Wurzel-Krit.
falls $A_k = \ldots^k$
Quotienten-Krit.
z.B. falls A_k $k!$
enthält
$w > 1$ bzw.
$q > 1$
$\sum A_k$ ist divergent
$w = 1$ bzw. $q = 1$
A_k kürzen,
damit Zähler gegen 1 konv.
max. Nennerpotenz
≤ 1
Ja
Minoranten-Kriterium
z.B. $\sum A_k \geq c \cdot \sum \frac{1}{k}$
Nein
Majoranten-Kriterium
z.B. $\sum A_k \leq c \cdot \sum \frac{1}{k^2}$
$\sum A_k$ ist konvergent

Beispiel: Einige der am häufigsten vorkommenden Reihen sind:

Harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{ist divergent}$$

Alternierende harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{ist konvergent}$$

Verallgemeinerte harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \begin{cases} \text{konvergent für} & \alpha > 1 \\ \text{divergent für} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Alternierende verallgemeinerte harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \quad \text{ist konvergent für alle } \alpha > 0$$

e-Funktion

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{konvergiert für alle } x \in \mathbb{R}$$

Satz 2.13 (Cauchy-Produkt)
Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} |A_k|$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} |B_k|$ *konvergent. Dann ist*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k$$

mit den Gliedern $C_k = \sum_{n=0}^{k} A_n B_{k-n}$.

2.4 Potenzreihen und elementare Funktionen

Definition 2.14 (Potenzreihe)

Die (formale) Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *heißt* Potenzreihe *mit Entwicklungspunkt* x_0 *und Koeffizienten* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung: Für den ganzzahligen Exponenten $n=0$ setzt man $0^n = 0^0 = 1$.

Satz 2.15 (Konvergenzradius einer Potenzreihe)

Für jede Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *existiert ein eindeutig bestimmter* Konvergenzradius r, $(0 \le r \le \infty)$, *für den gilt:*

i) Ist $r=0$, *so konvergiert die Reihe nur für* $x=x_0$.

ii) Ist $0<r<\infty$, *so ist die Reihe konvergent für alle* x *mit* $|x-x_0|<r$ *und divergent für alle* x *mit* $|x-x_0|>r$.

iii) Ist $r=\infty$, *so konvergiert die Reihe für alle* $x\in\mathbb{R}$.

Diesen Konvergenzradius kann man (meistens) wie folgt berechnen:

Quotientenmethode

Existiert $q = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, *so ist der Konvergenzradius* $r=\frac{1}{q}$

Wurzelmethode

Existiert $w = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$, *so ist der Konvergenzradius* $r=\frac{1}{w}$

wobei hier „$\frac{1}{0}:=\infty$*“ und „*$\frac{1}{\infty}:=0$*“ gelten soll.*

Definition 2.16 (Konvergenzbereich)

Der Konvergenzbereich *einer Potenzreihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *ist*

$$K = \left\{ x\in\mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ ist konvergent} \right\}$$

Es gilt:

$$]x_0-r, x_0+r[\; \subseteq\; K \;\subseteq\; [x_0-r, x_0+r]$$

Bemerkung: Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ definiert im Konvergenzbereich K eine Funktion

$$\begin{aligned} f:\; K &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \end{aligned}$$

Satz 2.17 (Eigenschaften von Potenzreihen)
Seien K_f *und* K_g *die Konvergenzbereiche der Potenzreihen*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \quad \textit{bzw.} \quad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x - x_0)^n$$

mit dem gleichen Entwicklungspunkt x_0. *Dann kann man*

1. *die Summe der beiden Reihen bilden und erhält die (mindestens) in* $K_f \cap K_g$ *konvergente Potenzreihe*
$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \big(a_n + b_n\big) \cdot (x - x_0)^n$$

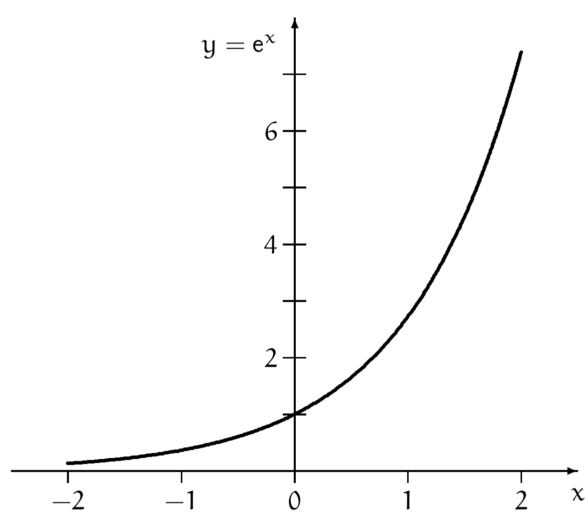
2. *das Produkt der beiden Reihen bilden und erhält die (mindestens) in* $K_f \cap K_g$ *konvergente Potenzreihe*
$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right) \cdot (x - x_0)^n$$

Mit Hilfe von Potenzreihen kann man einige elementarer Funktionen definieren.

Definition 2.18 (Exponentialfunktion)
Die Funktion

$$\begin{aligned} \exp : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

heißt Exponentialfunktion.



Satz 2.19 (Eigenschaften der e-Funktion)

i) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \; e^{x+y} = e^x e^y$ *Funktionalgleichung*

ii) $e^0 = 1, \; e^1 = e,$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

iii) $x < 0 \implies 0 < e^x < 1$

$x > 0 \implies e^x > 1$

iv) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0, \; \lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$

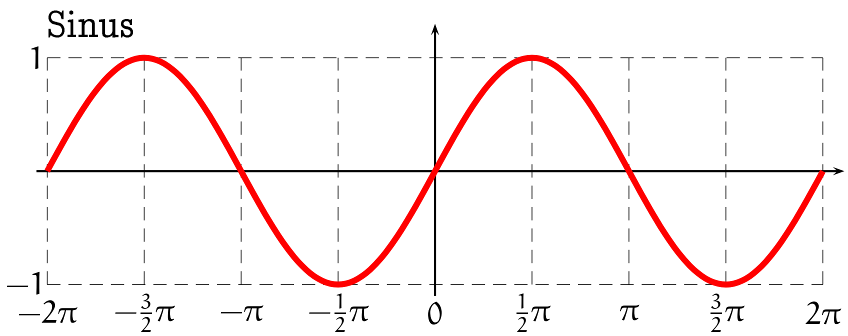
$$\forall n \in \mathbb{N}: \; \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

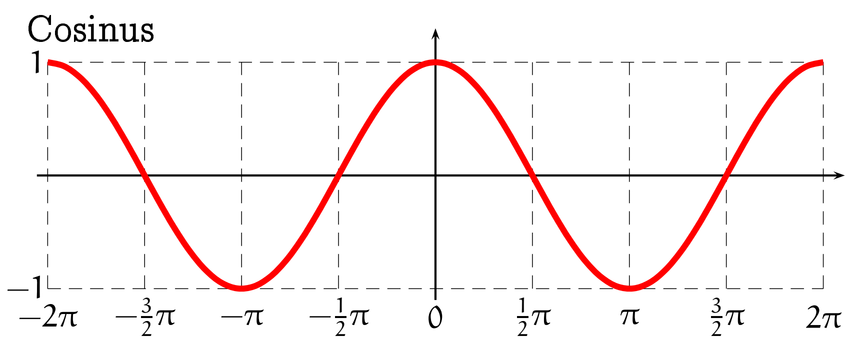
Definition 2.20 (Trigonometrische Funktionen)

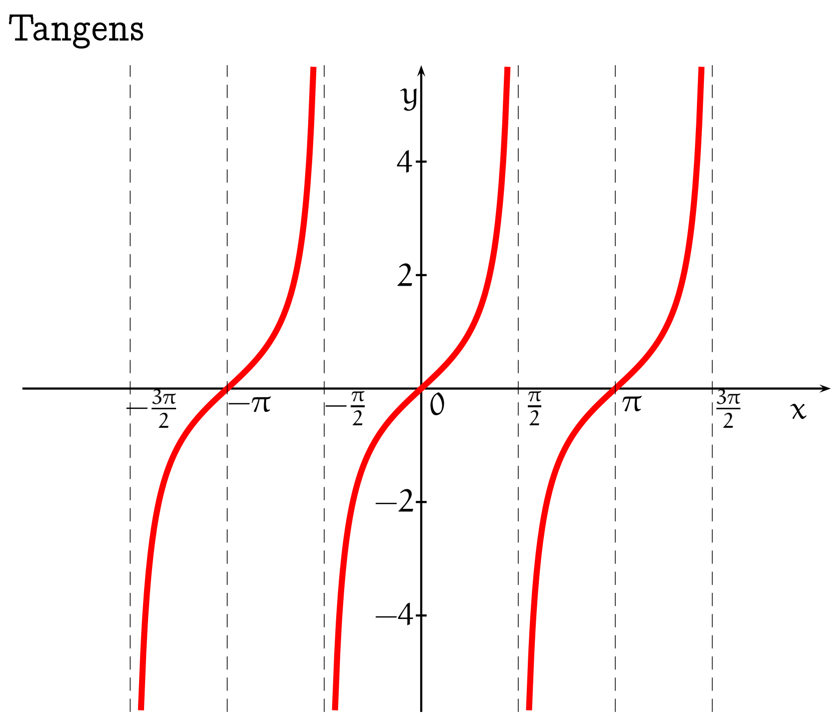
1) *Cosinus* $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

2) *Sinus* $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

3) *Tangens* $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},$ *für* $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$







Satz 2.21 (Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen)

i)

$$\cos 0 = 1, \ \sin 0 = 0$$

ii)

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \textit{gerade Funktion}$$
$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \textit{ungerade Funktion}$$

iii)
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

iv)
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

v)
$$\begin{aligned}\cos x \cos y &= \frac{1}{2}\big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\big)\\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big)\\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2}\big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\big)\end{aligned}$$

vi)
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

vii)
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$
$$-1 \leq \cos(x),\, \sin(x) \leq 1$$

viii) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ *gilt:*
$$\begin{aligned}\cos(x+2k\pi) &= \cos x\\ \sin(x+2k\pi) &= \sin x\\ \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) &= 0\\ \cos(k\pi) &= (-1)^k\\ \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) &= (-1)^k\\ \sin(k\pi) &= 0\end{aligned}$$

Bemerkungen:

1) Die Zahl π kann man als das Doppelte der kleinsten positiven Nullstelle des Cosinus definieren.

2) **Euler'sche Beziehung:**
Setzt man in die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion ein rein imaginäres Argument ix ein, so erhält man:
$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \cos(x) + i\sin(x).$$

3 Grenzwerte und Stetigkeit

3.1 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Wir betrachten das Verhalten einer Funkt. $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in der Nähe eines Punktes x_0.

Definition 3.1

a) *Die Funktion* f *hat in* x_0 *den* Grenzwert a, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, *falls gilt:*

$$\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\textit{ mit }\; x_n \in D \setminus \{x_0\},\; \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \;\textit{ gilt: }\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

b) *Die Funktion* f *hat in* x_0 *den* linksseitigen Grenzwert a, $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = a$ *(auch geschrieben* $\lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x) = a$ *oder* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = a$*), falls gilt:*

$$\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\textit{ mit }\; x_n \in D, x_n < x_0,\; \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \;\textit{ gilt: }\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

c) *Die Funktion* f *hat in* x_0 *den* rechtsseitigen Grenzwert a, $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = a$ *(auch geschrieben* $\lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x) = a$ *oder* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = a$*), falls gilt:*

$$\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\textit{ mit }\; x_n \in D, x_n > x_0,\; \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \;\textit{ gilt: }\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

d) *Die Funktion* f *hat in* $\pm\infty$ *den* Grenzwert a, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$, *falls gilt:*

$$\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\textit{ mit }\; x_n \in D,\; \lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty \;\textit{ gilt: }\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

e) *Die Funktion* f *hat in* x_0 *den* uneigentlichen Grenzwert $\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, *falls gilt:*

$$\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\textit{ mit }\; x_n \in D \setminus \{x_0\},\; \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \;\textit{ gilt: }\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \pm\infty$$

Links-/Rechtsseitige uneigentliche Grenzwerte werden analog definiert.

Bemerkung: Es gilt: $\quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \quad\Longleftrightarrow\quad \lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow x_0} f(x) = a$

Satz 3.2 (Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen)
Falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ *und* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$, *dann gilt:*

i) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \pm b$

ii) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \big(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\big)\cdot\big(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\big) = a \cdot b$

iii) *für* $\lambda \in \mathbb{R}$ *:* $\quad \lim\limits_{x\to x_0} \big(\lambda f(x)\big) = \lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lambda \cdot a$

iv) falls $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$: $\quad \lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{a}{b}$

Definition 3.3 ((Grenzwert-Definition der) Stetigkeit)
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *heißt* stetig *in* $x_0 \in D$, *wenn* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ *ist.* f *heißt stetig auf der Menge* $A \subseteq D$, *wenn* f *in jedem Punkt* $x_0 \in A$ *stetig ist.*

Bemerkung: δ-ε-Definition der Stetigkeit
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \quad \forall\, x \in D :$$

$$|x - x_0| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

f heißt stetig auf der Menge $A \subseteq D$, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in A$ stetig ist.

Bemerkung: Gleichmäßige Stetigkeit
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig in $A \subseteq D$, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall\, x_1, x_2 \in D :$$

$$|x_1 - x_2| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Bemerkung:
Stetigkeit einer Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ bedeutet anschaulich, dass man den Graph von f (die Menge $G(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [a, b], y = f(x)\}$) ohne Absetzen zeichnen kann.

Satz 3.4 (Rechenregeln für stetige Funktionen)
Die Funktionen f *und* g *seien stetig in* x_0*. Dann sind auch*

$$f \pm g, \; f \cdot g \quad \textit{und} \quad |f| \quad \textit{stetig in } x_0$$

Ist $g(x_0) \neq 0$*, so ist auch* $\frac{f}{g}$ *stetig in* x_0*.*

3.2 Wertannahme stetiger Funktionen

Ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 stetig, so heißt dies anschaulich, dass sich der Funktionswert von f nur wenig ändert, wenn sich das Argument nur wenig von x_0 unterscheidet. Daraus ergeben sich u.a. folgende Sätze:

Satz 3.5
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *sei stetig in* x_0 *und es gelte* $f(x_0) > 0$ $(f(x_0) < 0)$*. Dann gibt es eine Umgebung* $U_\delta(x_0)$ *von* x_0 *(d.h.* $\exists\, \delta > 0 : \; U_\delta(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$*) so, dass für alle* $x \in U(x_0) \cap D$ *ebenfalls* $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ *gilt.*

Satz 3.6 (Zwischenwertsatz)
Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig auf dem ganzen Intervall* $[a, b]$ *und* $f(a) \cdot f(b) < 0$. *Dann gibt es ein* $\xi \in]a, b[$ *mit* $f(\xi) = 0$.

Beweis: (Konstruktiver Beweis) Es sei OBdA. $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Man konstruiert eine Folge von Intervalle $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit :

1) $[a_0, b_0] = [a, b]$

2) $[a_n, b_n] = \begin{cases} \left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right] & \text{falls} \quad f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) > 0 \\ \left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}\right] & \text{falls} \quad f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) \leq 0 \end{cases}$

Damit ist die Folge eindeutig definiert und da

$$b_n - a_n = 2^{-n} \cdot (b - a) \tag{$*$}$$

gilt:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschreibt eine monoton wachsende und durch b nach oben beschränkt Folge $\Rightarrow \quad (a_n)$ ist konvergent.
$(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschreibt eine monoton fallende und durch a nach unten beschränkt Folge $\Rightarrow \quad (b_n)$ ist konvergent.

Wegen $(*)$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n}(b - a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: \xi$$

Da f stetig ist, gilt:

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} f(a_n)}_{\leq 0} = f(\xi) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} f(b_n)}_{\geq 0} \quad \Longrightarrow \quad f(\xi) = 0$$ ■

Bemerkung: Die Konstruktionsmethode einer Nullstelle aus dem Beweis von Satz 3.6 nennt man *Intervallhalbierungsmethode* oder *Bisektionsmethode*.

Satz 3.7 (Existenz von Minimum und Maximum)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Dann nimmt* f *auf* $[a, b] \subseteq D$ *sein Minimum und Maximum an, d.h.*

$$\exists\, \underline{x}, \overline{x} \in [a, b] \text{ so dass } \forall x \in [a, b] : \quad f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\overline{x})$$

Bemerkung: Dieser Satz ist die Grundlage vieler Extremwertaufgaben, da er die Existenz von Minimum und Maximum einer stetigen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall sicherstellt. Mit Hilfe der Differentialrechnung kann man eine (im allgemeinen nicht sehr umfangreiche) Liste mit Punkten bestimmen, an denen *möglicherweise* ein Maximum oder Minimum angenommen werden kann. Da durch diesen Satz die Existenz der Extrema sichergestellt ist, *muss* ein Punkt aus dieser Liste die gesuchte Extremalstelle sein.

4 Differentialrechnung

4.1 Differenzierbarkeit

Die Stetigkeit bedeutet, dass der Graph der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ „keine Sprünge" macht. Die Differenzierbarkeit fordert zudem, dass der Graph von f „keinen Knick" haben darf, d.h. man verlangt, dass man in jedem Punkt $x_0 \in D$ eine Tangente an den Graphen legen kann.

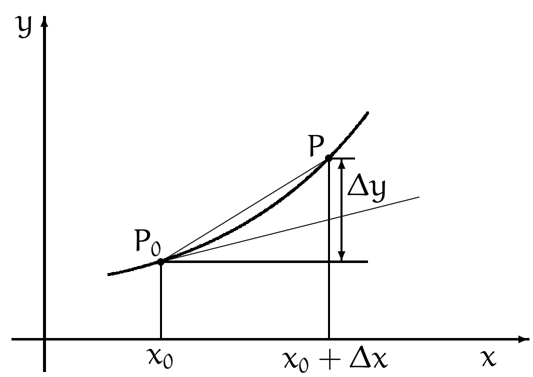
Definition 4.1 (Differenzierbarkeit)
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *heißt* differenzierbar *im Punkt* $x_0 \in D$*, falls der Grenzwert*

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert ($f'(x_0) \in \mathbb{R}$)*. Die Zahl* $f'(x_0)$ *heißt die* Ableitung *von* f *an der Stelle* x_0*.*

Die Funktion f *heißt differenzierbar in* $A \subseteq D$*, falls* f *in jedem* $x_0 \in A$ *differenzierbar ist.*

Geometrische Interpretation: Mit $h = \Delta x = x - x_0$ stellt der Differenzenquotient $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ die Steigung der Sekante (Sehne) zwischen P_0 und P dar. Für $h \to 0$, d.h. $x \to x_0$, wird die Sekante zur Tangente in x_0 und die Steigung der Tangente ist $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Für den Winkel α zwischen der Tangente und der x-Achse gilt $\tan \alpha = f'(x_0)$.



Bemerkungen:

1) h muss nicht > 0 sein
2) $\dfrac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$ heißt der Differentialquotient von f in x_0.
3) Eine alternative Definition der Differenzierbarkeit lautet:
   Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Punkt derart, dass mindestens eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ existiert mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

   Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann im Punkt x_0 differenzierbar, wenn es eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

   $$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x)(x - x_0) \qquad x \in D$$

   wobei für r gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} r(x) = 0$. In diesem Fall ist $a = f'(x_0)$

4) Die Gleichung der Tangente an f in x_0 lautet:

$$\begin{aligned} t(x) &= f(x_0) + \frac{df}{df}(x_0)(x - x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

Satz 4.2 (Stetigkeit differenzierbarer Funktionen)
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei im Punkt x_0 differenzierbar, dann ist f in x_0 auch stetig.

Beweis:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} \big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0) \big) \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \underbrace{\lim_{x \to x_0} (x - x_0)}_{=0} + \underbrace{\lim_{x \to x_0} r(x)}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} (x - x_0)}_{=0} \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

■

Satz 4.3 (Rechenregeln für Ableitungen)
Die Funktionen f und g seien in x_0 differenzierbar und α, $\beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

i) Die Funktion $\alpha f + \beta g$ ist differenzierbar in x_0 und

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

ii) Die Funktion fg ist differenzierbar in x_0 und es gilt die Produktregel*:*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

iii) Falls $g(x_0) \neq 0$ ist, dann ist die Funktion $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt die Quotientenregel*:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Beweis: (nur Produktregel) Es ist

$$\begin{aligned} &\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)} + f(x_0) \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)} \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

■

Satz 4.4 (Kettenregel)
Die Funktion f *sei differenzierbar in* x_0 *und die Funktion* g *sei differenzierbar in* $y_0 = f(x_0)$. *Dann ist* $g \circ f$ *differenzierbar in* x_0 *und es gilt:*

$$(g \circ f)'(x_0) = \frac{dg(f(x))}{dx}\bigg|_{x=x_0} = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0)$$

Bemerkung: Mit Differentialen lautet die Kettenregel

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}$$

Beweis: über die Definition der Differenzierbarkeit über die Darstellbarkeit durch eine Tangente

4.2 Folgerungen aus der Differenzierbarkeit

Satz 4.5
Sei f *eine in* $]a, b[$ *differenzierbar Funktion und* $x_0 \in]a, b[$ *so, dass für alle* $x \in]a, b[$ *gilt:* $f(x) \leq f(x_0)$ *(bzw.* $f(x) \geq f(x_0)$*). Dann ist* $f'(x_0) = 0$.

Beweis: OBdA $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in]a, b[$. Dann gilt:

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \searrow x_0} \frac{1}{\underbrace{x - x_0}_{>0}} \cdot \underbrace{(f(x) - f(x_0))}_{\leq 0} \leq 0$$

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{1}{\underbrace{x - x_0}_{<0}} \cdot \underbrace{(f(x) - f(x_0))}_{\leq 0} \geq 0$$

da f differenzierbar ist, gilt:

$$f'(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x_0) = 0$$

■

Satz 4.6 (Satz von Rolle)
Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sei stetig in* $[a, b]$, *differenzierbar in* $]a, b[$ *und es gelte* $f(a) = f(b)$. *Dann existiert ein* $\xi \in]a, b[$ *mit* $f'(\xi) = 0$.

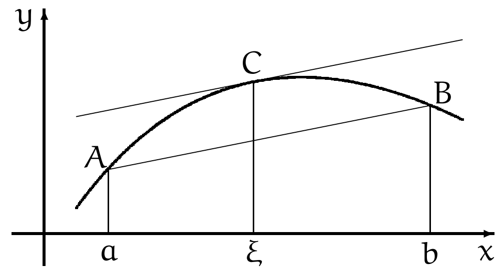
Beweis: $f \equiv \text{const} \Longrightarrow f' \equiv 0$. Ist $f \not\equiv \text{const}$, so existiert ein $x_0 \in]a, b[$ mit $f(x_0) \neq f(a)$. Daher nimmt f sein Minimum bzw. Maximum in $\xi \in]a, b[$ an und es gilt $f'(\xi) = 0$. ■

Satz 4.7 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sei stetig in* $[a, b]$ *und differenzierbar in* $]a, b[$. *Dann existiert ein* $\xi \in]a, b[$ *mit* $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Beweis: Es sei

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Dann gilt $g(a) = f(a)$ und $g(b) = f(a) = g(a)$. Nach dem Satz von Rolle existiert ein $\xi \in]a, b[$ mit



$$g'(\xi) = 0$$
$$\Longrightarrow f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a)} = 0$$
$$\Longrightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

Folgerungen: Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Dann gilt:

1) Ist $f' \equiv 0$ auf $]a, b[$, so ist f konstant.

2) Ist $f' \geq 0$ (bzw. $f' \leq 0$) auf $]a, b[$, so ist f monoton wachsend (bzw. fallend).
Ist $f' > 0$ (bzw. $f' < 0$) auf $]a, b[$, so ist f streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).

Definition 4.8 (Höhere Ableitungen)
Die Funktion f *heißt* n*-mal differenzierbar, falls* f', $f'' = (f')'$, $\ldots$, $f^{(n)} = \big(f^{(n-1)}\big)'$ *existieren.*

Bemerkung:

1) Für die Ableitung $f^{(n)}$ verwendet man auch die Schreibweise $f^{(n)} = \dfrac{d^n f}{dx^n}$.

2) f' beschreibt die Veränderung der Funktion f, also deren Steigung.
$f''(x)$ beschreibt die Veränderung der Steigung der Funktion f und damit die Krümmung von f.

Satz 4.9 (Existenz und Ableitung der Umkehrfunktion)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige und streng monoton wachsende (also* $f(x) < f(\tilde{x})$ *für* $x < \tilde{x}$*) Funktion mit* $A := f(a)$ *und* $B := f(b)$ *bzw. eine stetige und streng monoton fallende (also* $f(x) > f(\tilde{x})$ *für* $x < \tilde{x}$*) Funktion mit* $A := f(b)$ *und* $B := f(a)$*. Dann existiert die Umkehrfunktion* $f^{-1} : [A, B] \to [a, b]$ *mit*

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \quad \forall x \in [a, b]$$

und

$$f\big(f^{-1}(y)\big) = y \quad \forall y \in [A, B]$$

Wenn f *in* x_0 *differenzierbar ist, so gilt:*

$$\left(f^{-1} \text{ ist differenzierbar in } y_0 = f(x_0)\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f'(x_0) \neq 0$$

Ist $f'(x_0) \neq 0$ *so gilt:*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{d}{dy}\left(f^{-1}(y)\right)\Big|_{y=y_0} = \underbrace{\frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}}_{=\frac{1}{f'(x_0)}}$$

Beweisskizze: Aus der Gleichung $x = f^{-1}\left(f(x)\right)$ folgt durch Differentiation nach x mit der Kettenregel: $1 = \dfrac{d}{dx}\left(f^{-1}\left(f(x)\right)\right) = \left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) \cdot f'(x)$. ■

Bemerkung: Betrachtet man eine Funktion der Zeit also z.B. $f = f(t)$ oder $x = x(t)$, so bezeichnet man die Ableitung nach t oft als , $\frac{df}{dt} = \dot{f}$ bzw. $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$.

4.3 Eigenschaften elementarer Funktionen

Satz 4.10 (Ableitung einer Potenzreihe)
Sei $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* r. *Dann ist* f *im Intervall* $]x_0 - r, x_0 + r[$ *stetig und beliebig oft differenzierbar.*

Die Ableitungen von f *erhält man durch gliedweises Differenzieren:*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-x_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2 \cdot (x-x_0) + 3a_3 \cdot (x-x_0)^2 + 4a_4 \cdot (x-x_0)^3 + \dots$$

$$f''(x) := (f'(x))' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n \cdot (x-x_0)^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 \cdot (x-x_0) + 12a_4 \cdot (x-x_0)^2 + \dots$$

usw.

Die Konvergenzradien der Potenzreihen von $f', f'', \dots$ *sind alle gleich dem Konvergenzradius* r *der Potenzreihe von* f.

Satz 4.11 (Ableitung der e-Funktion)

i) $(e^x)' = \frac{d}{dx} e^x = e^x$

ii) Die e-Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ *streng monoton wachsend.*

Beweis:

i)

$$(e^x)' = \frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

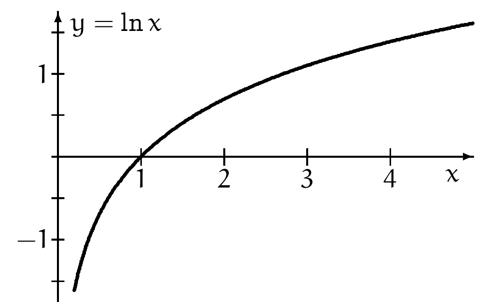
ii) Da $(e^x)' = e^x$ und nach Satz 2.19 iii) $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, folgt aus der Folgerung aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 4.7), dass e^x auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

■

Definition 4.12 (Natürlicher Logarithmus)
Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} \ln :]0, \infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

heißt natürlicher Logarithmus.



Satz 4.13 (Eigenschaften des Logarithmus)
Seien $x, y > 0$ *und* $r \in \mathbb{R}$

i) Die Logarithmusfunktion ist stetig

ii) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ *Funktionalgleichung*
$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
$\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$

iii) $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$

iv) $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$
$\forall \alpha > 0 : \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$

v) $\big(\ln(x)\big)' = \dfrac{1}{x}$, *also ist insbesondere* $\ln(x)$ *streng monoton wachsend.*

Beweis:

i) Folgt aus dem Satz von der Umkehrfunktion (Satz 4.9)

ii) $\eta := \ln(x) \quad \Rightarrow \quad e^\eta = e^{\ln(x)} = x$
$\xi := \ln(y) \quad \Rightarrow \quad e^\xi = e^{\ln(y)} = y$

- Unter Verwendung der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ergibt sich:
$$\ln(x \cdot y) = \ln(e^\eta \cdot e^\xi) = \ln(e^{\eta+\xi}) = \eta + \xi = \ln(x) + \ln(y)$$

- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^\eta}\right) = \ln(e^{-\eta}) = -\eta = -\ln(x)$

iii) $\ln(1) = \ln\left(e^0\right) = 0$ und $\ln(e) = \ln\left(e^1\right) = 1$

iv) • $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$, denn für jedes $K > 0$:

$$\forall x > e^K \quad \Rightarrow \quad \ln(x) > K$$

• $\lim\limits_{x\searrow 0} \ln(x) = \lim\limits_{y\to\infty} \ln\left(\frac{1}{y}\right) \overset{\text{ii)}}{=} \lim\limits_{y\to\infty}(-\ln(y)) = -\lim\limits_{y\to\infty} \ln(y) = -\infty$

• für (x_n) mit $x_n > 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $y_n := \alpha \cdot \ln(x_n)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. Da wir zudem wissen, dass e^y schneller wächst als jede Potenz von y ergibt sich damit:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{\alpha} \cdot e^{-y_n} = \frac{1}{\alpha} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{e^{y_n}} = 0$$

v) Die Verwendung des Satzes von der Umkehrfunktion (4.9) ergibt mit $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f^{-1}(y) = \ln(y)$

$$\frac{d}{dy} \ln(y) = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}$$

Mit der Folgerung aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 4.7) folgt, da $\frac{d}{dy}\ln(y) = \frac{1}{y} > 0$ für alle y im Definitionsbereich des Logarithmus ($y \in]0,\infty[$), dass der Logarithmus streng monoton wachsend ist. ■

Bem: $\log_a(y)$ ist die Umkehrfunktion von $f(x) = y = a^x \quad (a > 0)$. Jeder dieser Logarithmen lässt sich durch einen Logarithmus vorgegebener Basis ersetzen:

$$\log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = \frac{\lg(y)}{\lg(a)}$$

Satz 4.14 (Ableitungen der trigonometrischen Funktionen)

i) $\cos'(x) = \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$

ii) $\sin'(x) = \frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$

iii) $\tan'(x) = \dfrac{d}{dx}\tan(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

Beweisskizze:

i)
$$\begin{aligned}\cos'(x) &= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(-1)^n}{(2n)!}x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n-1} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = -\sin(x)\end{aligned}$$

ii) analog zu i)

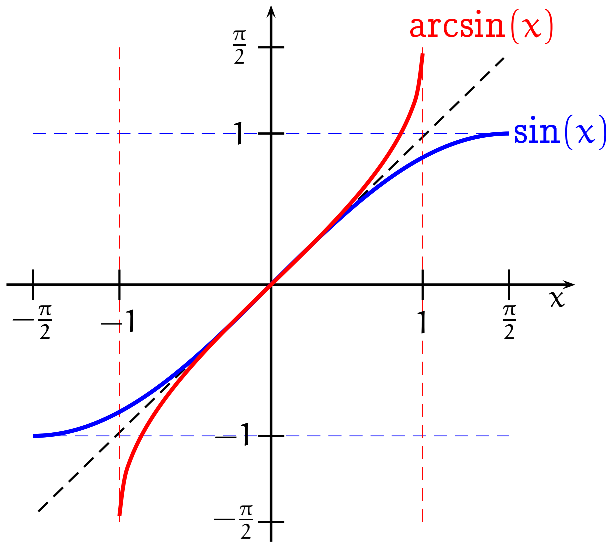
iii) Aus i) und ii) mit Hilfe der Quotientenregel

Definition 4.15 (Umkehrfunktionen von trigonometrischen Funktionen)

i) Der Arcussinus

$$\begin{aligned}\arcsin : [-1,1] &\to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y &\mapsto \arcsin(y)\end{aligned}$$

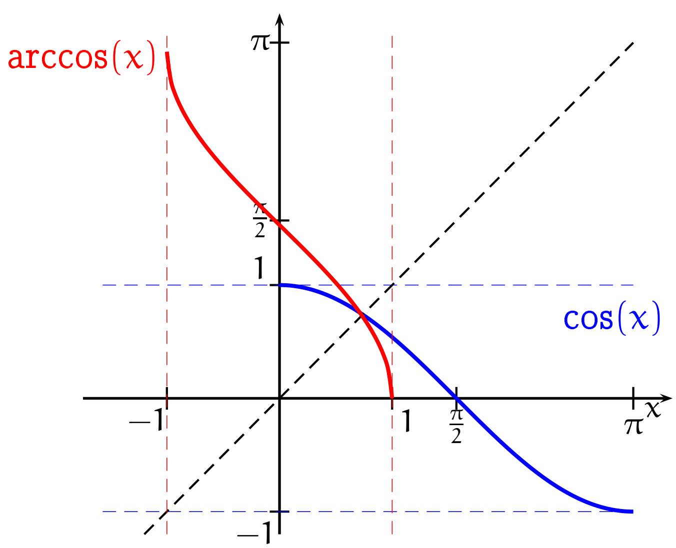
ist die Umkehrfunktion von $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$



ii) Der Arcuscosinus

$$\begin{aligned}\arccos : [-1,1] &\to [0,\pi] \\ y &\mapsto \arccos(y)\end{aligned}$$

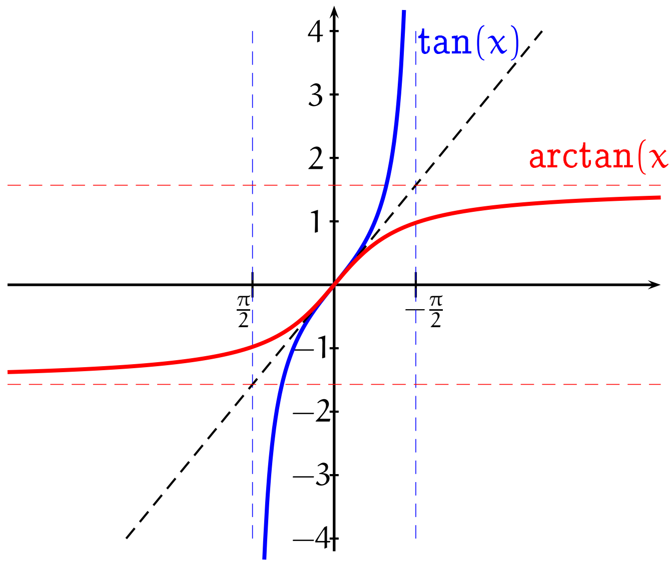
ist die Umkehrfunktion von $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$



iii) Der Arcustangens

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ y &\mapsto \arctan(y) \end{aligned}$$

ist die Umkehrfunktion von $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$



Satz 4.16 (Ableitungen der Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen)

i) Für $y \in]-1, 1[$: $\quad \arcsin'(y) = \frac{d}{dy}\arcsin(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

ii) Für $y \in]-1, 1[$: $\quad \arccos'(y) = \frac{d}{dy}\arccos(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

iii) Für $y \in \mathbb{R}$: $\quad \arctan'(y) = \frac{d}{dy}\arctan(y) = \frac{1}{1+y^2}$

$\lim\limits_{y\to\infty}\arctan(y) = \frac{\pi}{2}, \ \lim\limits_{y\to-\infty}\arctan(y) = -\frac{\pi}{2}$

Beweis:

i) nach dem Satz von der Umkehrfunktion (Satz 4.9) gilt: $\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}\arcsin(y) &= \frac{1}{\cos\left(\arcsin(y)\right)} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\left(\arcsin(y)\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin(y)\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \end{aligned}$$

ii) analog zu i)

iii)
$$\frac{d}{dy}\arctan(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1+y^2}$$

Da $\frac{d}{dy}\arctan(y) = \frac{1}{1+y^2} > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$, ist der Arcustangens nach der Folgerung aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 4.7) auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Zudem gilt:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$$

Daraus ergibt sich:

$$\lim_{y\to\infty} \arctan(y) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \arctan(\tan(x)) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{y\to-\infty} \arctan(y) = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \arctan(\tan(x)) = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} x = -\frac{\pi}{2}$$

■

Tabelle mit Ableitungen von elementaren Funktionen

f	f'
c	$0 \qquad c \in \mathbb{R}$
x^r	$r \cdot x^{r-1} \qquad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln(a) \quad a > 0$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

4.4 Grenzwerte differenzierbarer Funktionen

Die Bestimmung von Grenzwerten der Form $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ kann schwierig werden, wenn

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$$

Man spricht in diesen Fällen von „unbestimmten Ausdrücken" der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$.

Satz 4.17 (Regel von de l´Hospital)
Die Funktionen f *und* g *seien differenzierbar in* $\mathcal{U}_\delta(x_0) :=]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ *(für ein* $\delta > 0$*) und* $g'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{U}_\delta(x_0)$. *Weiter gelte*

Annahme A 1: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$

oder

Annahme A 2: $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$

Falls dann der Grenzwert

$$G := \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert, so ist auch

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = G$$

Bemerkung: Diesen Satz kann man auch auf andere unbestimmte Ausdrücke anwenden:

1) Produkte $f \cdot g$ mit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ formt man folgendermaßen um:

$$f \cdot g = \frac{f}{1/g}$$

2) Differenzen $f - g$ mit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ formt man zunächst folgendermaßen um:

$$f - g = f\left(1 - \frac{g}{f}\right) \quad \text{oder} \quad f - g = g\left(\frac{f}{g} - 1\right)$$

Falls dann $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ ist (was dasselbe ist wie $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$), erhält man einen Ausdruck der Form $\pm\infty \cdot 0$ und geht dann gemäß 1) vor.

3) Bei unbestimmten Ausdrücken der Form 1^∞, 0^0 oder ∞^0 formt man um:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \exp\left(g(x) \cdot \ln\left(f(x)\right)\right) = \exp\left(\lim_{x\to x_0} g(x) \cdot \ln\left(f(x)\right)\right)$$

Dies führt wieder auf den Fall $\pm 0 \cdot \infty$ von 1).

4) Für Grenzwerte der Form $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ gilt dieser Satz genauso.

4.5 Taylor-Entwicklung

Reihendarstellung:

Ist $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ konvergent in $|x - x_0| < r$, so gilt dort:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) a_k (x - x_0)^{k-n} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (x - x_0)^{k-n}.$$

Insbesondere ist $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Die Koeffizienten einer Potenzreihe kann man also mit Hilfe der Ableitungen der durch die Potenzreihe dargestellten Funktion am Entwicklungspunkt ausdrücken.

Definition 4.18 (Taylorpolynom)

Für eine n-mal differenzierbare Funktion f heißt

$$T_n(f, x_0, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

das n-te Taylorpolynom *von f um x_0.*

Satz 4.19 (Satz von Taylor)

Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei $(n+1)$-mal stetig differenzierbar (d.h. $(n+1)$-mal differenzierbar und $f^{(n+1)}$ stetig) und $x_0 \in]a, b[$.

Dann gilt für alle $x \in [a, b]$ die Taylor-Formel:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n+1}(x)$$

und es existiert ein ξ zwischen x und x_0 mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \qquad \textit{Lagrange-Form d. Restgliedes}$$

Spezialfälle:

Für $n = 1$ ist dies die lineare Approximation von f durch die Tangente
$T_1(f, x_0, x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Für $n = 2$ erhält man die Approximation von f durch eine Parabel
$T_2(f, x_0, x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$.

Definition 4.20 (Taylorreihe)

Ist eine Funktion f beliebig oft differenzierbar, so heißt die Potenzreihe

$$T(f, x_0, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

die Taylorreihe *von f mit Entwicklungspunkt x_0.*

Bemerkung:

1) Es sind keine allgemeinen Aussagen über die Konvergenz der Taylorreihe möglich (also ob der Konvergenzradius $r > 0$ bzw. wie groß)).

2) Im Falle der Konvergenz der Taylorreihe gilt nicht notwendigerweise $T(f, x_0, x) = f(x)$.

3) Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ für die für jedes $x_0 \in D$ gilt: $T(f, x_0, x)$ konvergiert für alle $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ und dort gilt $T(f, x_0, x) = f(x)$ heißen analytisch. Viele der Funktionen, mit denen man „normalerweise" zu tun hat, sind analytisch.

Beispiele:

1) Man kann zeigen, dass $\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$ für $x \in (\,]0, 2]$
   die Potenzreihendarstellung des Logarithmus ist.

   Daraus erhält man $\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

2) Sei $\alpha \in \mathbb{R}, |x| < 1$ und $x_0 = 0$, dann gilt:

$$f(x) := (1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots$$

   Ist $|\alpha x|$ viel kleiner als 1, so erhält man die lineare Approximation $(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x$. Insbesondere ist $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ und $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ für $x \approx 0$.

4.6 Anwendungen der Differentialrechnung

1) Bestimmung von Minima und Maxima.
2) Bestimmung von Nullstellen mit dem Newton-Verfahren
3) Die Ableitung als lokale Änderungsrate wird zur Beschreibung vieler technischer und wirtschaftlicher Zusammenhänge benötigt.
4) Die zeitliche Änderung gekoppelter Größen kann man mit Hilfe impliziter Differentiation berechnen.

1) Bestimmung von Maxima/Minima

Definition 4.21 (Lokales/Relatives Extremum)
Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *eine Funktion*

i) f *besitzt in* $x_0 \in]a, b[$ *ein* relatives/lokales Maximum, *falls es eine Umgebung* $\mathcal{U}_\delta(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ *gibt, so dass* $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall\, x \in \mathcal{U}_\delta(x_0)$

ii) Falls $f(x_0) > f(x) \quad \forall\, x \in \mathcal{U}_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$, *so spricht man von einem* strengen/isolierten Maximum.

Die Definitionen für ein Minimum sind analog.

Ein Minumum oder Maximum heißt auch Extremum.

Definition 4.22 (Globales/Absolutes Extremum)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ *eine Funktion.*

f *besitzt in* $x_0 \in D$ *ein* globales/absolutes Maximum, *falls* $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall\, x \in D$.

Die Definition für ein Minimum ist analog.

Satz 4.23
Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sei stetig und in* $]a, b[$ *differenzierbar.*

i) Ist $f'(x) > 0$ *für alle* $x \in]a, b[$
$\Longrightarrow f$ *ist streng monoton wachsend*
$\Longrightarrow f$ *hat in* b *ein globales, isoliertes Maximum und in* a *ein globales, isoliertes Minimum*

ii) Ist $f'(x) \geq 0$ *für alle* $x \in]a, b[$
$\Longrightarrow f$ *ist monoton wachsend*
$\Longrightarrow f$ *hat in* b *ein globales Maximum und in* a *ein globales Minimum*

Für $f'(x) < 0$ *bzw.* $f'(x) \leq 0$ *gelten analoge Aussagen.*

Beweisskizze: Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 4.7) und die Definitionen für ein globales Maximum (Def. 4.22) bzw. ein isoliertes Maximum (Def. 4.21). ■

Satz 4.24 (Notwendige Bedingung für lokales/relatives Extremum)
$f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *habe in* $x_0 \in]a, b[$ *ein lokales Extremum und sei in* x_0 *differenzierbar, dass gilt:*

$$f'(x_0) = 0$$

Beweisskizze: Über die die Definition der Differenzierbarkeit (Def. 4.1) und die Definition für ein lokales Extremum (Def. 4.21). ■

Bemerkung: Ein Punkt x_0 in dem f differenzierbar ist und $f'(x_0) = 0$ gilt, heißt *stationärer/kritischer Punkt.*

Satz 4.25 (Hinreichende Bedingung für lokales/relatives Extremum)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *und* $x_0 \in]a, b[$. *Wenn für ein* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:* f *in* x_0 n*-mal stetig differenzierbar, sowie*

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \textit{für} \quad 1 \leq k \leq n - 1$$

und

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

dann folgt:

i) *Ist* n *gerade und* $f^{(n)}(x_0) < 0$, *so hat* f *in* x_0 *ein lokales Maximum.*

ii) *Ist* n *gerade und* $f^{(n)}(x_0) > 0$, *so hat* f *in* x_0 *ein lokales Minimum.*

iii) *Ist* n *ungerade, so hat* f *in* x_0 *kein lokales Extremum.*

Beweisskizze: Über den Satz von Taylor (Satz 4.19)

Bemerkung: Man kann ein lokales Extremum auch über folgende Bedingung erkennen: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f sei differenzierbar und f' sei stetig. Weiter sei $x_0 \in]a, b[$.

i) f hat in x_0 ein lokales Maximum, genau dann wenn mindestens eine der folgenden beiden Zeilen gilt:

$f(x_0 - \epsilon) < f(x_0)$	$f(x_0)$	$f(x_0 + \epsilon) < f(x_0)$
$f'(x_0 - \epsilon) > 0$	$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0 + \epsilon) < 0$

für ein $\epsilon > 0$, so dass $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subseteq [a, b]$ und es gibt kein $x_1 \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \setminus \{x_0\}$ mit $f'(x_1) = 0$.

ii) f hat in x_0 ein lokales Minimum, genau dann wenn mindestens eine der folgenden beiden Zeilen gilt:

$f(x_0 - \epsilon) > f(x_0)$	$f(x_0)$	$f(x_0 + \epsilon) > f(x_0)$
$f'(x_0 - \epsilon) < 0$	$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0 + \epsilon) > 0$

für ein $\epsilon > 0$, so dass $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subseteq [a, b]$ und es gibt kein $x_1 \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \setminus \{x_0\}$ mit $f'(x_1) = 0$.

Vorgehen beim Lösen von Extremwertproblemen

1) Aufstellen der Ziel-/Hauptfunktion, d.h. die Funktion bestimmen, die maximiert/ minimiert werden soll. (In seltenen Fällen auch schon gegeben)
   Dabei sollten Sie beachten, dass keine nicht definierten Variablen auftreten dürfen. Eine solche Definition kann auch über eine Skizze erfolgen.

2) Falls die Hauptfunktion zwei Variablen enthält, muss man eine davon eliminieren. Aufstellen der Nebenbedingung/-funktion und nach einer der Variable auflösen. In die Hauptfunktion einsetzen, die nun nur noch von einer Variablen abhängt.

3) Definitionsbereich D der noch übrig gebliebenen Variablen angeben.
   Ev. ist für die Bestimmung der einen Grenze die andere Variable und die Nebenbedingung notwendig.

4) Hauptfunktion nach der einzigen Variablen ableiten.

5) Nullstellen der Ableitung bestimmen.

6) Für jede dieser Nullstellen prüfen, ob sie im Definitionsbereich liegt und damit für die Extremalstelle in Frage kommt.

7) Bestimmung des globalen Maximums/Minimums. Sei n die Anzahl der in Frage kommender Stellen im Inneren des Defintionsbereiches:

   $\mathbf{n = 0}$
   Falls D abgeschlossen ist, ist der gesuchte Extremwert in einem der Randpunkte. Über die Funktionswerte kann man herausfinden welcher es ist. Oder darüber, ob die 1. Ableitung immer > 0 (Funkt. streng monoton wachsend) oder immer < 0 (Funktion streng monoton fallend) ist.
   Falls D offen ist, wird das globale Maximum/Minimum nicht angenommen.

   $\mathbf{n = 1}$
   Falls D abgeschlossen ist, kommen die beiden Randpunkte und der eine Punkt im Inneren in Frage. Man kann über das Berechnen der Funktionswerte den gesuchten Extremwert finden. Oder man untersucht den Punkt im Inneren mit Hilfe von Satz 4.25 oder der darauffolgenden Bemerkung. Wenn man ein globales Maximum sucht und man bei dem einen Punkt im Inneren ein lokales Maximum hat, dann ist das auch das globale Maximum (für Minimum analog)
   Falls D offen ist, ist entweder der Punkt im Inneren der gesuchte Punkt oder das gesuchte Extremum wird nicht angenommen. Man kann den Punkt im Inneren mit Hilfe von Satz 4.25 oder der darauffolgenden Bemerkung untersuchen und so folgern, ob es sich um den gesuchten Punkt handelt (oder ob der eben nicht existiert). Man kann prinzipiell über die Funktionswerte gehen, d.h. man bestimmt den Funktionswert des Punktes im Inneren und vergleicht ihn mit den Grenzwerten von $f(x)$ in Richtung der Ränder (falls die denn existieren), falls einer oder beide Grenzwerte nicht existieren, muss man den Punkt im Inneren dann doch einzeln untersuchen.

$\mathbf{n \geq 2}$
Falls D abgeschlossen ist, kommen die beiden Randpunkte und die Punkte im Inneren in Frage. Falls die Funktionswerte nicht allzu schlimm zu berechnen sind, sollte man diese für alle in Frage kommenden Punkte bestimmen und damit den gesuchten Punkt finden. Prinzipiell kann man die inneren Punkte auch mit den obigen Methoden untersuchen, was aber hier alleine nicht ausreicht,...
Falls D offen ist, ist entweder einer der kritischen Punkte im Inneren der gesuchte Punkt oder das gesuchte Extremum wird nicht angenommen. Man sollte versuchen die Funktionswerte und die Grenzwerte der Funktionswerte in den Rändern zu bestimmen und dann daraus den gesuchten Punkt. Sollte einer der Grenzwerte nicht existieren, dann muss man Satz 4.25 oder die darauffolgenden Bemerkung anwenden,...

8) Antwortsatz schreiben

2) Newton-Verfahren Das Newton-Verfahren ist ein Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen einer differenzierbaren Funktion f.
Man verwendet, dass eine differenzierbare Funktion f in der Nähe eines Punktes x_0 durch die Tangente an f im Punkt x_0 genähert werden kann.

Satz 4.26 (Hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Newton-Verfahrens)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zweimal differenzierbar mit* $f(a) \cdot f(b) < 0, f'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in [a, b]$ *und*

a) $f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in]a, b[$
oder
b) $f''(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in]a, b[$

dann gilt:

i) Es gibt genau ein $\xi \in [a, b]$ *mit* $f(\xi) = 0$

ii) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *mit* $x_0 \in [a, b]$ *und*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

konvergiert monoton

	$f(a) > 0$	$f(a) < 0$
a) $f''(x) \geq 0 \wedge f(x_0) > 0$	*wachsend*	*fallend*
b) $f''(x) \leq 0 \wedge f(x_0) < 0$	*fallend*	*wachsend*

gegen ξ.

5 Integralrechnung

5.1 Bestimmtes und unbestimmtes Integral

Das bestimmte Integral tritt bei der Berechnung von krummlinig berandeten Flächen auf.

Gesucht: Flächeninhalt zwischen $f(x) \quad (f(x) \geq 0 \ \forall\, x \in [a,b])$, der x-Achse und $x = a, x = b$.
Idee: Approximation der Fläche durch Rechtecksflächen.

Definition 5.1 (Zerlegung, Feinheit)
Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *ein endliches, abgeschlossenes Intervall. Dann nennt man die Menge*

$$Z_n := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \,|\, a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$$

Zerlegung *oder* Partition *von* $[a,b]$.
$\Delta x_j = x_j - x_{j-1} \quad (1 \leq j \leq n)$ *ist die Breite des* j*-ten Teilintervalls und* $F_{z_n} := \max\limits_{1\leq j\leq n}(\Delta x_j)$ *heißt* Feinheit *der Zerlegung* Z_n

Definition 5.2 (Untersumme, Obersumme)
Sei $[a,b] \to \mathbb{R}$ *eine Funktion mit* $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$ *und* Z_n *eine Zerlegung von* $[a,b]$.
Sei $\eta_j := \inf\limits_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$ *und* $\xi_j := \sup\limits_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$, *dann ist:*

$$U_{z_n} := \sum_{j=1}^{n} \eta_j \cdot \Delta x_j \quad \textit{die}\ \text{Untersumme}\ \textit{von}\ f\ \textit{bzgl. der Zerlegung}\ Z_n$$

$$O_{z_n} := \sum_{j=1}^{n} \xi_j \cdot \Delta x_j \quad \textit{die}\ \text{Obersumme}\ \textit{von}\ f\ \textit{bzgl. der Zerlegung}\ Z_n$$

Definition 5.3 (Integral)
Falls der Grenzwert $S = \lim\limits_{F_{Z_n}\to 0} U_{Z_n} = \lim\limits_{F_{Z_n}\to 0} O_{Z_n}$ *existiert, nennt man* S *das* bestimmte Integral *von* f *über* $[a,\, b]$,

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

Zudem nennt man f *dann integrierbar über* $[a,b]$. *Weiter heißt* a *untere Integrationsgrenze,* b *obere Integrationsgrenze,* $[a,b]$ *Integrationsintervall/–bereich,* f *Integrand und* x *(bzw.* t*) Integrationsvariable.*

Bemerkung: Es gibt auch „negative Flächen“.

- Gegenuhrzeigersinn entspricht mathematisch positiv
- Uhrzeigersinn entspricht mathematisch negativ

Satz 5.4 (Eigenschaften des bestimmten Integrals)

i) $\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx, \quad \int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$

ii) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$

iii) $\int\limits_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)\,dx$ *Homogenität des Integrals*

iv) $\int\limits_a^b (f+g)(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx$ *Additivität des Integrals*

v) $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$

vi) $f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in [a,b] \quad \Longrightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b g(x)\,dx$ *Monotonie des Integrals*

vii) $m \leq f(x) \leq M \quad \forall\, x \in [a,b] \Longrightarrow \quad m\cdot(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M\cdot(b-a)$

Beweisskizze: Folgt aus den entsprechenden Eigenschaften der Summen bzw. der Grenzwerte.

Bemerkung: Die Aussage iii) und iv) aus dem obigen Satz ergeben zusammen die Linearität des Integrals.

Satz 5.5 (Hinreichende Bedingungen für die Integrierbarkeit)

1. *Ist* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig, so ist* f *über* $[a, b]$ *integrierbar.*
2. *Ist* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *monoton, so ist* f *über* $[a, b]$ *integrierbar.*

Satz 5.6 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Die Funktion f *sei stetig auf* $[a, b]$. *Dann existiert ein* $\xi \in [a, b]$ *mit*

$$f(\xi) = \frac{1}{(b-a)} \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

Satz 5.7 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sei definiert durch*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$$

Dann ist F *differenzierbar in* $]a, b[$ *und es gilt*

$$F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

Beweis: Für alle $x_0 \in [a, b]$:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int\limits_a^x f(t)\,dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt}{x - x_0} = \frac{\int\limits_a^x f(t)\,dt + \int\limits_{x_0}^a f(t)\,dt}{x - x_0} = \frac{\int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt}{x - x_0}$$

nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung exixitert ein $\xi(x)$ (hängt natürlich vom betrachteten x ab) zwischen x und x_0 mit $f(\xi(x)) = \frac{1}{x-x_0} \cdot \int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt$. Damit gilt :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(\xi(x)) = f(x_0)$$

■

Bemerkung: Es gibt unstetige Funktionen f, die integrierbar sind. Für unstetige Funktionen f gilt die Aussage des Satzes aber nicht.

Definition 5.8 (Stammfunktion)
Die Funktion F *heißt* Stammfunktion *von* f, *falls* $F' = f$ *ist.*

Bemerkung:

1) Ist f stetig auf $[a, b]$, so ist $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ eine Stammfunktion von f.

2) Sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f, so ist $F_1 - F_2 \equiv \text{const}$.

3) Wenn F eine Stammfunktion von f ist, so gilt:

$$\int\limits_a^b f\,dt = [F(t)]_a^b = F(t)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Definition 5.9 (Unbestimmtes Integral)
$\int f\,dx = \{F \,|\, F' = f\}$ *(das ist eine ganze Menge von Funktionen) heißt das* unbestimmte Integral *von* f.

Bemerkung: Statt $\{F \,|\, F' = f\}$ schreibt man auch $F + c$ wobi F eine Stammfunktion von f ist und $c \in \mathbb{R}$.

Tabelle mit wichtigen Integralen

f	$\int f\,dx$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+c,\ \alpha\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
$\cos(x)$	$\sin(x)+c$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+c$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)+c$
e^x	e^x+c
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)+c$
$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)+c$

5.2 Technik der Integration

Da die Integration in gewissem Sinne die Umkehrung der Differentiation ist, lassen sich aus Differentiationsregeln Integrationsregeln herleiten.

Satz 5.10 (Partielle Integration)
f, g *seien stetig differenzierbare Funktionen, dann gilt:*

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = \Big[f(x)\cdot g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx$$
$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Beweis: Unter Anwendung der Produktregel ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&(f\cdot g)'(x) = \frac{d}{dx}(f\cdot g) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)\\
\Longleftrightarrow\quad & f(x)\cdot g'(x) = (f\cdot g)'(x) - f'(x)\cdot g(x)\\
\Longleftrightarrow & \int f(x)\cdot g'(x)\,dx = \int (f\cdot g)'(x)\,dx - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx\\
\Longleftrightarrow & \int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx
\end{aligned}$$

■

Satz 5.11 (Substitutionsregel)
Sei f *stetig und* g *stetig differenzierbar auf* $[a,b]$ *und* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in [a,b]$ *(d.h.* g *ist invertierbar). Dann gilt:*

$$\int_a^b f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Beweis: Sei F eine Stammfunktion von f, so gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt &= \int_{g(a)}^{g(b)} F'(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_{g(a)}^{g(b)} \\
&= F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big) = \Big[F\big(g(x)\big)\Big]_a^b \\
&= \int_a^b \left(\frac{d}{dx}F\big(g(x)\big)\right) dx = \int_a^b f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,dx
\end{aligned}$$

■

Es gibt zwei mögliche Anwendungsarten der Substitutionsregel.

1) **Substitution bei evidenter innerer Ableitung**

   Beispiel: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = ?$

   $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x)\,dx$$

   es gilt als $g(x) = \sin(x)$, $g'(x) = \cos(x)$ und $f(t) = \frac{1}{t}$. Damit ergibt sich

   $$\begin{aligned}
   \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx &= \int_{g\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{g\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{1}{t}\,d = \int_{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{1}{t}\,dt = \Big[\ln(|t|)\Big]_{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} \\
   &= \ln\left(\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|\right) - \ln\left(\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|\right) = \ln(1) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
   &= 0 - \ln(2^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln(2) \approx 0{,}347
   \end{aligned}$$

2) **Substitution ohne evidente innere Ableitung**
   In den Fällen in dem eine Innere Ableitung nicht vorhanden oder nicht zu erkennen ist, geht man etwas formaler vor. Man wählt sich eine Funktion $t(x)$. Damit alle anderen vorkommenden x-Terme und dx durch Funktionen von t ersetzt werden können, Invertiert man $t(x)$ und löst die Ableitung $\frac{dx(t)}{dt}$ nach dx auf.

Beispiel: $\int\limits_1^2 (3x-5)^6\,dx = ?$

Wir substituieren mit $t(x) := 3x-5. \Leftrightarrow\ x(t) = \frac{t+5}{3} \ \Rightarrow\ \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{3} \ \Rightarrow\ dx = \frac{1}{3}\,dt$

$$\int\limits_1^2 (3x-5)^6\,dx = \int\limits_{t(1)}^{t(2)} t^6 \cdot \frac{1}{3}\,dt = \int\limits_{-2}^{1} t^6 \cdot \frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{7}t^7\right]_{-2}^{1}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}1^7 - \frac{1}{7}(-2)^7\right) = \frac{1}{21}(1+128) = \frac{43}{7}$$

Integration rationaler Funktionen:
Es sei eine rationale Funktion $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ mit Polynomen $P(x)$ und $Q(x)$ gegeben. Jede solche rationale Funktion kann explizit integriert werden. Die Bestimmung von $\int R(x)\,dx$ wird in 4 Schritten durchgeführt.

1) **Polynomdivision:** Durch eine Polynomdivision mit Rest wird R in die Form

$$R(x) = P_1(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q(x)}, \quad \operatorname{grad}(\tilde{P}) < \operatorname{grad}(Q)$$

gebracht.

Beispiel:

$$\begin{array}{rl}
\frac{4x^4-3x^3+2x^2+1}{2x^2+1} & = (4x^4 \ -3x^3 \ +2x^2+1) : (2x^2+1) = 2x^2 - \frac{3}{2}\cdot x + \frac{\frac{3}{2}x+1}{2x^2+1} \\
& \underline{-(4x^2+2x^2)} \\
& \qquad\quad -3x^3+1 \\
& \qquad \underline{-(-3x^3 - \frac{3}{2}x)} \\
& \qquad\qquad\quad +\frac{3}{2}x+1
\end{array}$$

2) **Faktorisierung**: Der Nenner $Q(x)$ wird über $\mathbb{R}$ vollständig faktorisiert. Man kann zeigen, dass sich jedes Polynom vollständig in Linearfaktoren und quadratische Faktoren ohne reelle Nullstelle zerlegen lässt, d.h.

$$\begin{aligned} Q(x) &= A\,(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{\nu_m} \\ &\quad (x^2+r_1x+s_1)^{\mu_1}(x^2+r_2x+s_2)^{\mu_2}\cdot\ldots\cdot(x^2+r_lx+s_l)^{\mu_l} \end{aligned}$$

mit

- $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$
- $(r_i, s_i) \neq (r_j, s_j)$ für $i \neq j$
- $x^2 + r_jx + s_j \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq l$ und
- $\operatorname{grad}(Q) = \sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i + \sum\limits_{j=1}^{l} 2\mu_j$

3) **Partialbruchzerlegung:** Der Bruch $\frac{\tilde{P}}{Q}$ mit $\tilde{P}$ und Q wie oben lässt sich als Summe einfacher Ausdrücke darstellen.

Jeder Faktor $(x-x_i)^{\nu_i}$ des Nenners liefert den Beitrag

$$\frac{A_{i,1}}{x-x_i}+\frac{A_{i,2}}{(x-x_i)^2}+\ldots+\frac{A_{i,\nu_i}}{(x-x_i)^{\nu_i}} \qquad A_{i,k}\in\mathbb{R}$$

Jeder Faktor $(x^2+r_jx+s_j)^{\mu_j}$ des Nenners liefert den Beitrag

$$\frac{B_{j,1}x+C_{j,1}}{x^2+r_jx+s_j}+\frac{B_{j,2}x+C_{j,2}}{(x^2+r_jx+s_j)^2}+\ldots+\frac{B_{j,\mu_j}x+C_{j,\mu_j}}{(x^2+r_jx+s_j)^{\mu_j}} \qquad B_{j,k},C_{j,k}\in\mathbb{R}$$

Insgesamt erhält man also eine Zerlegung

$$\frac{\tilde{P}(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{\nu_i}\frac{A_{i,k}}{(x-x_i)^k}\right)+\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{\mu_j}\frac{B_{j,k}x+C_{j,k}}{(x^2+r_jx+s_j)^k}\right)$$

Zur Bestimmung der Konstanten $A_{i,k}$, $B_{j,k}$ und $C_{j,k}$ gibt es mehrere Methoden, wir betrachten hier nur den Koeffizientenvergleich:

Beispiel: $\frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A_{1,1}}{x-1}+\frac{A_{1,2}}{(x-1)^2}+\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{x^2+1}$

$$\begin{aligned}
&\frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A_{1,1}}{x-1}+\frac{A_{1,2}}{(x-1)^2}+\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{x^2+1}\\
\Leftrightarrow\quad & x+2=A_{1,1}\cdot(x-1)(x^2+1)+A_{1,2}\cdot(x^2+1)+(B_{1,1}x+C_{1,1})\cdot(x-1)^2\\
\Leftrightarrow\quad & x+2=(A_{1,1}+B_{1,1})\cdot x^3+(-A_{1,1}+A_{1,2}-2B_{1,1}+C_{1,1})\cdot x^2\\
&\qquad +(A_{1,1}+B_{1,1}-2C_{1,1})\cdot x+(-A_{1,1}+A_{1,2}+C_{1,1})
\end{aligned}$$

Daraus erhält man nun durch Koeffizientenvergleich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
x^3:&\quad 0=A_{1,1}+B_{1,1} && \text{(I)}\\
x^2:&\quad 0=-A_{1,1}+A_{1,2}-2B_{1,1}+C_{1,1} && \text{(II)}\\
x^1:&\quad 1=A_{1,1}+B_{1,1}-2C_{1,1} && \text{(III)}\\
x^0:&\quad 2=-A_{1,1}+A_{1,2}+C_{1,1} && \text{(IV)}
\end{aligned}$$

Lösen dieses Gleichungssystems ergibt:

$$A_{1,1}=-1,\ \ A_{1,2}=\frac{3}{2},\ \ B_{1,1}=1,\ \ C_{1,1}=-\frac{1}{2}$$

4) **Integration:** Nun sind noch die Integrale $\int\frac{A}{(x-x_0)^k}\,dx$ und $\int\frac{Bx+C}{(x^2+rx+s)^k}\,dx$ zu berechnen.

a)

$$\int\frac{A}{(x-x_0)^k}\,dx=\begin{cases}A\ln|x-x_0|+c & \text{für } k=1\\[1ex] \frac{-A}{k-1}\,\frac{1}{(x-x_0)^{k-1}}+c & \text{für } k\neq 1\end{cases}$$

b)

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+rx+s)^k}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+r}{(x^2+rx+s)^k}\,dx + \left(C-\frac{Br}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+rx+s)^k}$$

wobei:

$$\int \frac{2x+r}{(x^2+rx+s)^k}\,dx = \begin{cases} \ln(x^2+rx+s)+c & \text{für } k=1 \\ \frac{-1}{k-1}\frac{1}{(x^2+rx+s)^{k-1}}+c & \text{für } k\neq 1 \end{cases}$$

und

$$\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+rx+s)^k}}_{=:I_k} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4s-r^2}}\arctan\frac{2x+r}{\sqrt{4s-r^2}}+c & \text{für } k=1 \\ \frac{2(2k-3)}{(4s-r^2)(k-1)}\cdot I_{k-1}+\frac{1}{(4s-r^2)(k-1)}\frac{2x+r}{(x^2+rx+s)^{k-1}} & \text{für } k\neq 1 \end{cases}$$

5.3 Uneigentliche Integrale

Bisher ist $\int_a^b f(x)\,dx$ nur für beschränkte Intervalle $[a, b]$ und für auf $[a, b]$ beschränkte Funktionen f definiert.

Definition 5.12 (Uneigentliche Integrale I)
Sei f eine beschränkte Funktion. Dann nennt man (sofern die Grenzwerte existieren)

- $\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim\limits_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx$
- $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim\limits_{r\to-\infty}\int_r^b f(x)\,dx$
- $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \lim\limits_{r\to-\infty}\lim\limits_{R\to\infty}\int_r^R f(x)\,dx$

uneigentliche Integrale *von* f *über* $[a, \infty[,]-\infty, b]$ *bzw.* $]-\infty, \infty[$.

Definition 5.13 (Uneigentliche Integrale II)
Sei f eine in einer oder beiden Integrationsgrenze(n) unbeschränkte Funktion, dann nennt man (sofern die Grenzwerte existieren)

- $\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim\limits_{\delta\searrow 0} \int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$ *(f in b unbeschränkt)*
- $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ *(f in a unbeschränkt)*
- $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\lim\limits_{\delta\searrow 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\delta} f(x)\,dx$ *(f in a und b unbeschränkt)*

uneigentliche Integrale von f über $[a, b[,]a, b]$ bzw. $]a, b[$.

Satz 5.14 (Integralkriterium für Reihen)
Es sei $f : [n_0, \infty[\to [0, \infty[$ stetig und monoton fallend ($n_0 \in \mathbb{Z}$). Dann gilt:

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx < \infty$$

Beweis: Für $k \geq n_0$ ($k \in \mathbb{N}_0$) folgt aus der Monotonie von f:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k)$$

Summiert man alle diese Ungleichungen für $k = n_0, \ldots, \infty$, so erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_0+1}^{\infty} f(k) \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x)\,dx &\leq \sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) \\ \sum_{k=n_0+1}^{\infty} f(k) \leq \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx \qquad &\leq \sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) \end{aligned}$$

Daher sind die Summe und das Integral entweder beide konvergent oder divergent. ∎

Bemerkung: Insbesondere kann man das Integral zur Abschätung des Wertes einer Summe verwenden.

5.4 Anwendung der Integralrechnung

1) **Flächenberechnung:**
Sind $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $f_1(x) \leq f_2(x)$ für $x \in [a, b]$, so ist der Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von f_1 und f_2 über dem Intervall $[a, b]$ gegeben durch

$$A = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx$$

2) **Bogenlänge:**
Für die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ soll die Länge ℓ des Graphen von f im Intervall $[a, b]$ bestimmt werden, also die Länge von $\big\{(x, f(x)) \,|\, x \in [a, b]\big\}$.

Die Länge eines infinitesimalen Längenelementes $d\ell$ erfüllt nach dem Satz von Pythagoras die Gleichung $(d\ell)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$. Weiter gilt für die Stelle x $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Daraus ergibt sich

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot (dx)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx$$

Integriert man diesen Ausdruck über die gesamte Kurve, so erhält man die Kurvenlänge

$$\ell = \int_G d\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

3) **Volumen/Mantelfläche von Rotationskörpern:**

a) **Rotation um die x-Achse**
Sei $f : [a, b] \to [0, \infty[$ eine Funktion. Läßt man die Fläche zwischen dieser Funktion und der x-Achse um die x-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper K.

i) **Volumen**
Diesen Körper kann man in dünne Scheiben der Dicke dx zerlegen, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen. Die Scheibe mit dem Mittelpunkt x hat den Radius $f(x)$ und die Dicke dx. Das Volumen dV einer solchen Scheibe beträgt daher:

$$dV = \pi\big(f(x)\big)^2\,dx$$

Integration über alle diese unendlich dünnen Scheiben liefert das Gesamtvolumen

$$V = \int_K dV = \pi\int_a^b \big(f(x)\big)^2\,dx.$$

ii) **Mantelfläche:**

Wir zerlegen den Rotationskörper K wiederum in dünne, kreisförmige Scheiben der Dicke dx, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen. Der Streifen über der Stelle x hat den Radius $f(x)$, und die Breite $d\ell = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$. Damit ergibt sich für die Außenfläche dA dieser Kreisscheibe

$$dA = 2\pi \cdot f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

Die gesamte Mantelfläche ist daher

$$A = \int_K dA = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

b) **Rotation um die y-Achse:**

Rotiert man die Fläche zwischen der Funktion $f : [a, b] \to [0, \infty)$ mit $0 \leq a$ und der x-Achse um die y-Achse, so entsteht ebenfalls ein Rotationskörper.

i) **Volumen**

Diesen Körper zerlegt man in Hohlzylinder mit Innenradius x, Dicke dx und Höhe $f(x)$. Damit ergibt sich für das Volumen eines solchen Hohlzylinders:

$$\begin{aligned} dV = V_a - V_i &= \pi \cdot (x + dx)^2 \cdot f(x) - \pi \cdot x^2 \cdot f(x) \\ &= \pi \cdot f(x) \cdot (x^2 + 2x dx + (dx)^2 - x^2) \\ &\approx 2\pi \cdot f(x) \cdot x \cdot dx \end{aligned}$$

Damit ist das Gesamtvolumen des Körpers gegeben durch

$$V = \int_K dV = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$$

ii) **durch die Kurve entstandene Oberfläche**

Man zerlegt den Körper wiederum in Hohlzylinder mit Innenradius x, Dicke dx und Höhe $f(x)$. Der Streifen über der Stelle x hat den Radius x, und die Breite $d\ell = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$. Damit ergibt sich die Fläche dieses Streifens zu:

$$dA = 2\pi \cdot x \cdot d\ell = 2\pi \cdot x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Woraus sich die gesamte durch die Kurve entstandene Oberfläche berechnet:

$$A = \int_K dA = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

4) **Mittelpunkt ebener Bereiche/Schwerpunkt:**

Es soll der geometrische Mittelpunkt/Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ für das Gebiet

$$\Omega = \left\{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\right\}$$

bestimmt werden. Ω hat die Fläche $A = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx$ Die Koordinaten des Schwerpunktes sind

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x\big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx \qquad \text{und} \qquad \overline{y} = \frac{1}{2A}\int_a^b \Big(\big(f_2(x)\big)^2 - \big(f_1(x)\big)^2\Big)\,dx.$$