Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg
Studiengänge Informatik und Wirtschaftsinformatik
Dr. G. Tapken
Dr. D. Gröger

WiSe 2024/25

10. Übungsblatt zur Mathematik 2

Lösung zu Aufgabe Ü 10.1

a) Gesucht: Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)}_{=a_n}\cdot(x-\underbrace{0}_{=x_0})^n$

Quotientenmethode

$$\begin{aligned}
q &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)^{-1}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}+2^{n+1}}{6^{n+1}}}{\frac{3^n+2^n}{6^n}} = \frac{1}{6}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2^{n+1}}{3^n+2^n} \\
&= \frac{1}{6}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{6}\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} \\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}\cdot 3 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Der Konvergenzradius ist $r=\frac{1}{q}=2$.

Wurzelmethode

$$w = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right|}$$

Wir möchten nun das Sandwich-Theorem anwenden. Dafür schätzen wir ab:

$$\frac{1}{2}=\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}\le\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right|}\ge\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}}\le\sqrt[n]{\frac{2}{2^n}}=\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2^n}}=\frac{\sqrt[n]{2}}{2}$$

Wir berechnen den Grenzwert der oberen Abschätzung

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}}{2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}}{2}=\frac{1}{2}$$

Wir berechnen den Grenzwert der unteren Abschätzung

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

damit ergibt sich insgesamt

$$w=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right|}=\frac{1}{2}$$

Der Konvergenzradius ist $r=\frac{1}{w}=2$.

b) Gesucht: Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^k} \cdot (x+2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(2k)!}{(k!)^k}}_{=a_k} \cdot \big(x - \underbrace{(-2)}_{=x_0}\big)^k$

Quotientenmethode

$$0 \le q = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^{k+1}} \cdot \frac{\big(k!\big)^k}{(2k)!}\right|$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)\cdot(2k+1)\cdot(k!)^k}{\big((k+1)\cdot k!\big)^{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2(k+1)\cdot(2k+1)}{(k+1)^{k+1}\cdot k!}$$
$$\le \lim_{k\to\infty} \frac{2(k+1)\cdot 2(k+1)}{(k+1)^{k+1}\cdot k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{4}{(k+1)^{k-1}\cdot k!} = 0$$

Der Konvergenzradius ist $r = \frac{1}{q} = \infty$.

Wurzelmethode

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{(2k)!}{(k!)^k}\right|}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{(2k)!}}{\sqrt[k]{(k!)^k}}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k!}\sqrt[k]{(2k)!}$$

Wir möchten nun das Sandwich-Theorem anwenden. Dafür schätzen wir ab:

$$0 \le \frac{1}{k!}\sqrt[k]{(2k)!} \le \frac{1}{k!}\sqrt[k]{(2k)^{2k}}$$

Wir brauchen nur den Grenzwert der oberen Abschätzung zu berechenen:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k!}\sqrt[k]{(2k)^{2k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k!}\cdot(2k)^2 = 0$$

Damit folgt:

$$w := \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$$

Der Konvergenzradius ist damit $r = \frac{1}{w} = \infty$.

Lösung zu Aufgabe Ü 10.2

a) **Variante 1: zuerst vereinfachen, dann Quotientenregel**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_1(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot(1-\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}}{(1-\sqrt{x})^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2\,(1-\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-x)^2}$$

Variante 2: direkte Rechnung über Quotientenregel

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_1(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{1/2}+x}{x^{1/2}-x}\right) \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}+1\right)\cdot(x^{1/2}-x)-\left(x^{1/2}+x\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}-1\right)}{\left(x^{1/2}-x\right)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-\left(\frac{1}{2}-\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}-x\right)}{\left(x^{1/2}-x\right)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}-x-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x}-x\right)}{\left(x^{1/2}-x\right)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}-x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}+x}{\left(x^{1/2}-x\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-x\right)^2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_2(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sin\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)\right) \\
&= \cos\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)\cdot\frac{(-\sin(x))\cdot x-\cos(x)\cdot 1}{x^2}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_3(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin(\sqrt{x})}{1+\cos(\sqrt{x})}\right) \\
&= \frac{\cos(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-1/2}\cdot(1+\cos(\sqrt{x}))-\sin(\sqrt{x})\cdot\left(-\sin(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-1/2}\right)}{(1+\cos(\sqrt{x}))^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot x^{-1/2}\cdot\left(\cos(\sqrt{x})+\cos^2(\sqrt{x})+\sin^2(\sqrt{x})\right)}{(1+\cos(\sqrt{x}))^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot x^{-1/2}\cdot(\cos(\sqrt{x})+1)}{(1+\cos(\sqrt{x}))^2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot x^{-1/2}}{1+\cos(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}\cdot(1+\cos(\sqrt{x}))}
\end{aligned}$$

d) **Variante 1: zuerst mit Hilfe der Logarithmengesetze vereinfachen**

$$\begin{aligned}
f_4(x) &= \ln\left(\frac{x^3}{\ln\left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right)}\right) = \ln(x^3)-\ln\left(\ln\left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right)\right) \\
&= 3\cdot\ln(x)-\ln\left(\ln(x^3)-\ln(\ln(x))\right) = 3\cdot\ln(x)-\ln\left(3\cdot\ln(x)-\ln(\ln(x))\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_4(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln\left(\frac{x^3}{\ln\left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right)}\right)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(3\cdot\ln(x)-\ln\left(3\cdot\ln(x)-\ln(\ln(x))\right)\right) \\
&= \frac{3}{x}-\frac{1}{3\cdot\ln(x)-\ln(\ln(x))}\cdot\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{\ln(x)}\cdot\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{3}{x}-\frac{3\ln(x)-1}{\left(3\cdot\ln(x)-\ln(\ln(x))\right)\cdot x\ln(x)}
\end{aligned}$$

Variante 2: direkt Ableiten

Bevor wir ans Ableiten von $\ln\left(\frac{x^3}{\ln\left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right)}\right)$ herangehen, leiten wir zunächst $g(x) = \ln\left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right)$ ab

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right) = \left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right)^{-1}\cdot\frac{3x^2\cdot\ln(x) - x^3\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}\\
&= \frac{\ln(x)}{x^3}\cdot\frac{x^2\cdot(3\ln(x)-1)}{(\ln(x))^2} = \frac{3\ln(x)-1}{x\ln(x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_4(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln\left(\frac{x^3}{\ln\left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right)}\right)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln\left(\frac{x^3}{g(x)}\right)\right)\\
&= \left(\frac{x^3}{g(x)}\right)^{-1}\cdot\frac{3x^2\cdot g(x) - x^3\cdot g'(x)}{(g(x))^2}\\
&= \frac{g(x)}{x^3}\cdot\frac{3x^2\cdot g(x) - x^3\cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{3g(x) - x\cdot g'(x)}{x\cdot g(x)}\\
&= \frac{3}{x} - \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{3}{x} - \frac{3\ln(x)-1}{x\ln(x)}\cdot\frac{1}{\ln\left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right)} = \frac{3}{x} - \frac{3\ln(x)-1}{x\ln(x)\cdot\ln\left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right)}\\
&= \frac{3}{x} - \frac{3\ln(x)-1}{\big(3\cdot\ln(x) - \ln(\ln(x))\big)\cdot x\ln(x)}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe Ü 10.3

Wir sollen zeigen: $\sin(x)+\cos(x) \leq \sqrt{2}$ für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin(x)+\cos(x)$ und zeigen, dass das globale Maximum dieser Funktion auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ kleiner oder gleich $\sqrt{2}$ ist.

Wir suchen also zunächst die stationären Stellen von $f(x) = \sin(x)+\cos(x)$:

$$\begin{aligned}
&& f'(x) &= \cos(x) - \sin(x)\\
&& f' &\stackrel{!}{=} 0\\
&\iff & \cos(x)-\sin(x) &= 0\\
&\iff & \cos(x) &= \sin(x)\\
&\iff & x &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Variante 1: Randpunkte

das globale Maximum liegt also entweder in $x = \frac{\pi}{4}$ oder in einem der beiden Randpunkte $x = 0$ bzw. $x = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
f(0) &= \sin(0)+\cos(0) = 0+1 = 1\\
f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}\\
f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1+0 = 1
\end{aligned}$$

Variante 2: Krümmung

Wir untersuchen was in $x = \frac{\pi}{4}$ für eine Stelle vorliegt, indem wir die zweite Ableitung betrachten:

$$f''(x) = -\sin(x) - \cos(x)$$

da Sinus und Cosinus in $[0, \frac{\pi}{2}]$ positiv sind, ist f'' in dem gegebenen Bereich negativ und damit hat die Funktion f in $\frac{\pi}{4}$ sein globales Maximum. Bleibt die Berechnung des Funktionswertes an dieser Stelle:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Damit liegt das globale Maximum in $\frac{\pi}{4}$ und $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$. Damit ist die Behauptung bewiesen.