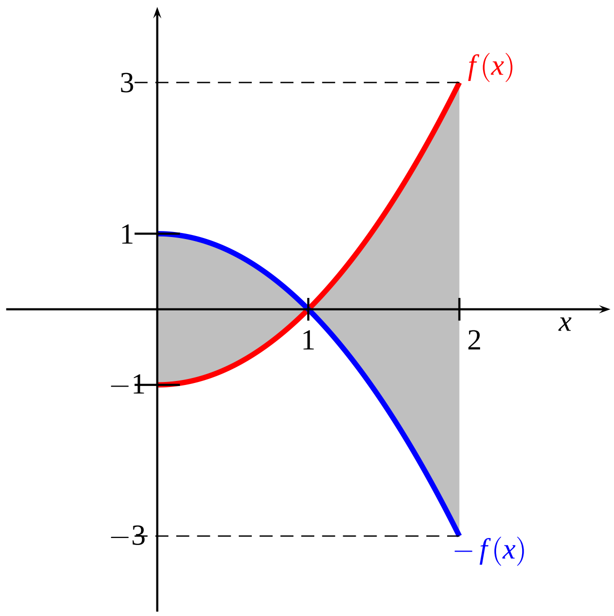
Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg
Studiengänge Informatik und Wirtschaftsinformatik
Dr. G. Tapken WiSe 2021/22

5. Wiederholungsblatt zur Mathematik 2

Lösung zu Aufgabe W 5.1



Da die Funktion im Integral quadratisch auftritt, ist das Vorzeichen egal. D.h. wir können alles auf einmal integrieren.

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int_0^2 (f(x))^2 \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^2 \left(x^2-1\right)^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int_0^2 \left(x^4-2x^2+1\right)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot x^5 - \frac{2}{3} \cdot x^3 + x\right]_0^2 \\
&= \pi \cdot \left(\left(\frac{1}{5} \cdot 2^5 - \frac{2}{3} \cdot 2^3 + 2\right) - 0\right) = \pi \cdot \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{3} + 2\right) \\
&= \pi \cdot \frac{96-80+30}{15} = \frac{46}{15} \cdot \pi
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe W 5.2

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2}-1}{x^3-x^2}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2}\cdot 6x}{3x^2-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2}\cdot 6}{3x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}e^{3x^2}\cdot 6}{\lim\limits_{x\to 0}(3x-2)}=\frac{6}{-2}=-3$$

b) Wir verwenden das Sandwichtheorem: Es gilt

$$\sqrt[n]{5^{2n}}\leq\sqrt[n]{5^{2n}+5^n+n^2}\leq\sqrt[n]{5^{2n}+5^{2n}+5^{2n}}\qquad\forall\, n\in\mathbb{N}$$

Nun schauen wir wohin die beiden eingrenzenden Folgen konvergieren:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{25^n}=\lim_{n\to\infty}25=25$$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^{2n}+5^{2n}+5^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3\cdot 5^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{5^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{25^n}=1\cdot 25$$

c)

Falls $x>1$ gilt $|x-1|=(x-1)$ und damit folgt

$$\begin{aligned}\lim_{x\searrow 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\searrow 1}\frac{|x-1|\cdot(x+2)}{x-1}\\&=\lim_{x\searrow 1}\frac{(x-1)\cdot(x+2)}{x-1}=\lim_{x\searrow 1}(x+2)=3\end{aligned}$$

Falls $x<1$ gilt $|x-1|=(1-x)$ und damit folgt

$$\begin{aligned}\lim_{x\nearrow 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\nearrow 1}\frac{|x-1|\cdot(x+2)}{x-1}\\&=\lim_{x\nearrow 1}\frac{(1-x)\cdot(x+2)}{x-1}=\lim_{x\nearrow 1}-(x+2)=-3\end{aligned}$$

Da der Limes von oben und der von unten nicht identisch sind, ist die Funktion in $x=1$ nicht differenzierbar

Lösung zu Aufgabe W 5.3

a) Gesucht $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_{-x}^{x}\left(\cos(t)\right)^2\,\mathrm{d}t\right)$

Variante 1:

Da cos eine gerade Funktion ist, ist auch $\cos^2$ eine gerade Funktion, damit gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_{-x}^{x}\left(\cos(t)\right)^2\,\mathrm{d}t\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2\cdot\int\limits_{0}^{x}\underbrace{\left(\cos(t)\right)^2}_{=f(x)}\,\mathrm{d}t\right)$$

Die Funktion $f(x)=(\cos(x))^2$ ist eine stetige Funktion und ist damit integrierbar. Wir nennen ihre Stammfunktion F und erhalten somit:

$$=2\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[F(t)\Big]_0^x=2\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(x)-F(0)\right)=2\cdot f(x)=2\cdot(\cos(x))^2$$

Variante 2:

Die Funktion $f(x) = (\cos(x))^2$ ist eine stetige Funktion und ist damit integrierbar. Wir nennen ihre Stammfunktion F und erhalten somit:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{-x}^{x} \underbrace{\big(\cos(t)\big)^2}_{=f(x)} \,\mathrm{d}t\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[F(t)\Big]_{-x}^{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(x) - F(-x)\right)$$
$$= f(x) - f(-x)\cdot(-1) = f(x) + f(-x) = (\cos(x))^2 + (\cos(-x))^2 = 2\cdot(\cos(x))^2$$

wobei wir im letzten Schritt verwenden, dass $\cos(x)$ eine gerade Funktion ist.

b) Berechnen Sie das folgende Integral, indem Sie mit $t(x) = \ln(x)$ substituieren: $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x\cdot\sqrt{1-(\ln(x))^2}}\,\mathrm{d}x$

Variante 1: Substitution mit evidenter innerer Ableitung:

Sei $g(x) = \ln(x)$ und $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-(t)^2}}$, damit gilt:

$$\int_1^{\mathrm{e}} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-(\ln(x))^2}}}_{=f\left(g(x)\right)} \,\mathrm{d}x = \int_{g(1)}^{g(\mathrm{e})} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{\ln(1)}^{\ln(\mathrm{e})} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$
$$= \Big[\arcsin(t)\Big]_0^1 = \arcsin(1) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Variante 2: Substitution ohne evidente innere Ableitung:

Wir bestimmen zunächst alle einzelnen Teile, die wir benötigen

$$t(x) = \ln(x) \quad\Leftrightarrow\quad x = \mathrm{e}^t \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\cdot\mathrm{d}t$$

und setzten diese dann ins Integral ein:

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x\cdot\sqrt{1-(\ln(x))^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{t(1)}^{t(\mathrm{e})} \frac{1}{\mathrm{e}^t\cdot\sqrt{1-(t)^2}}\,\mathrm{e}^t\cdot\mathrm{d}t$$
$$= \int_{\ln(1)}^{\ln(\mathrm{e})} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \Big[\arcsin(t)\Big]_0^1$$
$$= \arcsin(1) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Lösung zu Aufgabe W 5.4

a) Sei $g(t) := \sqrt{t^4+2t^2}$ und G die Stammfunktion von g, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_5^{2x}\sqrt{t^4+2t^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[G(t)\right]_5^{2x}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(G(2x)-G(5)\right)\\ &= g(2x)\cdot 2-0 = 2\cdot\sqrt{(2x)^4+2(2x)^2}\\ &= 2\cdot\sqrt{16x^4+8x^2} = 4\cdot\sqrt{4x^4+2x^2}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int x\cdot\ln(x^2)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}x^2\cdot\ln(x^2)\right]-\int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\cdot\ln(x^2)\right]-\int x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x^2\cdot\ln(x^2)-\frac{1}{2}x^2+c\end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $(x-3)\cdot(x+3)\leq(x-3)$:

Fall 1: $x=3$ $\qquad 0\cdot 6\leq 0 \quad \checkmark \qquad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_1=\{3\}$

Fall 2: $x>3$

$$\begin{aligned} & (x-3)\cdot(x+3)\leq(x-3)\\ \iff\quad & x+3\leq 1\\ \iff\quad & x\leq -2\\ \implies\quad & \mathbb{L}_2=(3,\infty)\cap(-\infty,-2]=\emptyset\end{aligned}$$

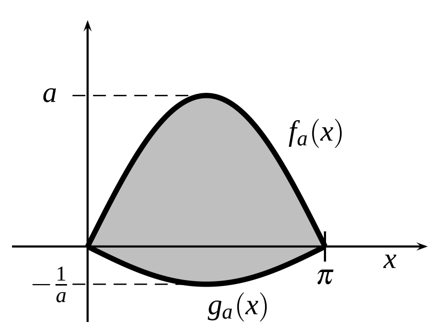
Fall 3: $x<3$

$$\begin{aligned} & (x-3)\cdot(x+3)\leq(x-3)\\ \iff\quad & x+3\geq 1\\ \iff\quad & x\geq -2\\ \implies\quad & \mathbb{L}_3=(-\infty,3)\cap[-2,\infty)=[-2,3)\end{aligned}$$

$$\implies\quad \mathbb{L}=\mathbb{L}_1\cup\mathbb{L}_2\cup\mathbb{L}_3=[-2,3]$$

Lösung zu Aufgabe W 5.5

a) Skizzieren Sie die Fläche.



b)

$$A = \int_0^{\pi} \left(f_a(x) - g_a(x)\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \left(a \cdot \sin(x) - \left(-\frac{1}{a} \cdot \sin(x)\right)\right)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\pi} \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x = \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} = \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot \Big(-\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} - (-\underbrace{\cos(0)}_{=1})\Big) = 2 \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right)$$

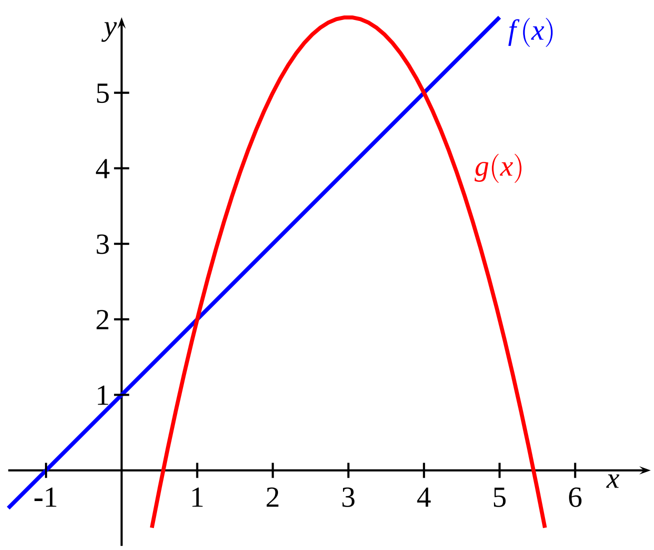
Lösung zu Aufgabe W 5.6

Wir bestimmen zunächst die Schnittpunkte der beiden Funktionen:

$$\begin{aligned} & f(x) = g(x) \\ \Leftrightarrow\quad & x + 1 = -x^2 + 6x - 3 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 - 5x + 4 = 0 \end{aligned}$$

mit der Mitternachtsformel erhält man (wenn man die Formel von Vieta kennt, darf man natürlich auch gerne diese anwenden)

$$\Rightarrow \qquad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$



Die Fläche zwischen den beiden Funktionen ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^4 (g(x) - f(x))\ \mathrm{d}x = \int_1^4 \left(-x^2 + 6x - 3 - (x+1)\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 \left(-x^2 + 5x - 4\right)\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x\right]_1^4 \\
&= \left(-\frac{4^3}{3} + \frac{5 \cdot 4^2}{2} - 4^2\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4\right) = \left(-\frac{64}{3} + 40 - 16\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4\right) \\
&= -\frac{64}{3} + 40 - 16 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = 28 - \frac{63}{3} - \frac{5}{2} = 7 - \frac{5}{2} = \frac{14-5}{2} = \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$