

8. Tutoriumsblatt zur Mathematik 2

Aufgabe 17

Welche der folgenden auf \mathbb{R} definierten Funktionen ist in $x_0 = 0$ differenzierbar?

Berechnen Sie die Ableitung in x_0 , falls diese existiert.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f_1(x) = x\sqrt{|x|} & \text{b) } f_2(x) = \begin{cases} 2 + (x+1)^2 & \text{für } x < 0 \\ x^3 + 2x + 3 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} & \text{c) } f_3(x) = \sqrt{x^4 + x^2} \end{array}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Definition der Differenzierbarkeit

Aufgabe 18

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f_1(x) = 2x \cdot \ln(x) & \text{f) } f_6(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ \text{b) } f_2(x) = e^x \cdot \cos(x) & \text{g) } f_7(x) = (\sin(2x-4))^2 \\ \text{c) } f_3(x) = 2x \cdot e^x \cdot \sin(x) & \text{h) } f_8(x) = e^{x^2-2x+5} \\ \text{d) } f_4(x) = (\tan(x))^2 & \text{i) } f_9(x) = \ln(x^3-2x) \\ \text{e) } f_5(x) = \frac{5x^4-x^2-3x+2}{x^3-7x^2+x} & \text{j) } f_{10}(x) = \ln\left(\left(\frac{3x-2}{x^2}\right)^3\right) \end{array}$$

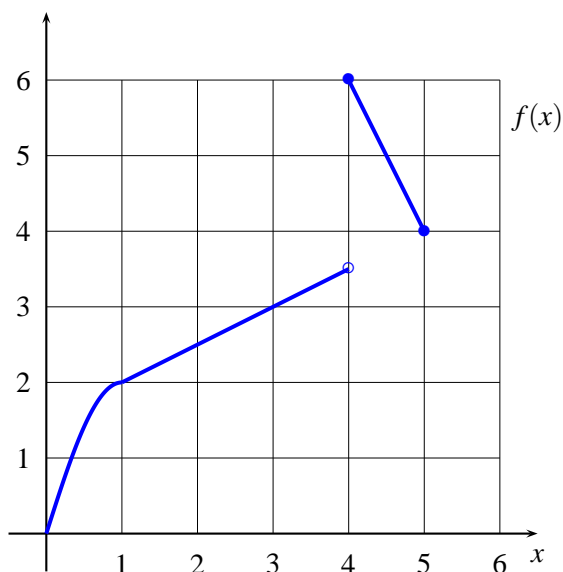
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\frac{d}{dx}e^x = e^x$, $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$, $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$, $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$,
 $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Aufgabe 19

Betrachten Sie die durch die untenstehende Abbildung definierte Funktion $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$.

Hat f eine Umkehrfunktion? Falls nein, weshalb nicht?

Falls ja, zeichnen Sie die Funktion f^{-1} in die untenstehende Abbildung. Was ist der Definitionsbereich von f^{-1} ? Für welche x hat f^{-1} eine Ableitung?



Aufgabe 20

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe von de l'Hospital

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{\sin(2x)}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Aufgabe 21

Das Bruttonsozialprodukt der USA betrug im Jahr 1990 ca. $5.6 \cdot 10^{12}$ \$, dasjenige von China $1.2 \cdot 10^{12}$ \$. Wenn man nun davon ausgeht, dass die USA im Mittel eine Wachstumsrate von 2% und China eine von 9% hat, in welchem Jahr sind dann die beiden Bruttonsozialprodukte gleich?

Aufgabe 22

Berechnen Sie die folgenden Ableitungen, wenn $h(2) = 2$, $h'(2) = 3$ und $h''(2) = -5$ gilt.

a) $\frac{d}{dx} \left(x^2 \cdot (h(x))^3 \right) \Big|_{x=2}$

b) $\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{h(x)}{x^2} \right) \right) \Big|_{x=2}$