Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg
Studiengänge Informatik und Wirtschaftsinformatik
Dr. G. Tapken
Dr. D. Gröger

WiSe 2024/25

10. Übungsblatt zur Mathematik 2

Lösung zu Aufgabe Ü 10.1

a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1-x+\ln(x)} &= \lim_{x\to 1} \frac{\exp(x\ln(x)) - x}{1-x+\ln(x)} \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\exp(x\ln(x))\cdot(\ln(x)+\frac{x}{x}) - 1}{-1+\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\exp(x\ln(x))\cdot(\ln(x)+1) - 1}{-1+\frac{1}{x}} \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\exp(x\ln(x))\cdot(\ln(x)+1)^2 + \exp(x\ln(x))\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \frac{1\cdot(0+1)^2 + 1\cdot 1}{-1} = \frac{2}{-1} = -2
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{x}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1} \frac{x-1-x\ln(x)}{\ln(x)\cdot(x-1)} \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1-(\ln(x)+\frac{x}{x})}{\frac{1}{x}\cdot(x-1)+\ln(x)\cdot 1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-\ln(x)}{1-\frac{1}{x}+\ln(x)} \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-x}{1+x} = \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} x^{1/(x-1)} &= \lim_{x\to 1} \exp(\tfrac{1}{x-1}\cdot\ln(x)) \\
&= \exp\left(\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln(x)}{x-1}\right)\right) \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \exp\left(\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{1}\right)\right) \\
&= \exp\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}\right) = \exp(1) = \mathrm{e}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe Ü 10.2

Die Gerade hat die Gleichung $y = m \cdot x + b$ wobei wir durch den Punkt $P_0 = (3,2)$ durch den die Gerade verlaufen soll einen Zusammenhang zwischen den vorkommenden Variablen finden können:

$$2 = 3 \cdot m + b \qquad \Leftrightarrow \qquad b = 2 - 3m \qquad \Leftrightarrow \qquad m = \frac{2-b}{3}$$

Die y-Koordinate des Punktes $P_2 = (0,y)$ ist $y = m \cdot 0 + b = b = 2 - 3m$
Nun brauchen wir noch die x-Koordinate des Punktes $P_1 = (x,0)$

$$\begin{aligned} & & 0 &= m \cdot x + b \\ &\Leftrightarrow & 0 &= m \cdot x + (2 - 3m) \\ &\Leftrightarrow & 3m - 2 &= m \cdot x \\ &\Leftrightarrow & 3 - \frac{2}{m} &= x \end{aligned}$$

damit ergibt sich die Funktion für die Fläche:

$$\begin{aligned} A(m) &= \frac{1}{2} \cdot (2 - 3m) \cdot \left(3 - \frac{2}{m}\right) = -\frac{2}{m} + 3 + 3 - \frac{9}{2} \cdot m \\ &= -\frac{2}{m} + 6 - \frac{9}{2} \cdot m \end{aligned}$$

Diese Funktion wollen wir nun minimieren:

$$A'(m) = \frac{2}{m^2} - \frac{9}{2}$$

$$\begin{aligned} & & A'(m) &\stackrel{!}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow & \frac{2}{m^2} - \frac{9}{2} &= 0 \\ &\Leftrightarrow & \frac{2}{m^2} &= \frac{9}{2} \\ &\Leftrightarrow & \frac{4}{9} &= m^2 \\ &\Leftrightarrow & m &= \pm\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Da nach Angabe in der Aufgabenstellung $m < 0$ gelten muss, kommt nur $m = -\frac{2}{3}$ in Frage. Wir prüfen noch, ob in diesem Punkt wirklich das globale Minimum liegt:

$$A''(m) = -\frac{4}{m^3} > 0$$

da $m < 0$ gelten muss, ist die zweite Ableitung stets positiv, d.h. die Funktion hat positive Krümmung, d.h. die einzige Stelle mit horizontaler Tangente, also $m = -\frac{2}{3}$ ist der Ort des globalen Minimums. Der maximale Flächeninhalt ist für dieses m beträgt:

$$A\left(-\frac{2}{3}\right) = 12$$