Aufgabe 1

Bestimme untere und obere Schranke der folgenden Rekursionsgleichungen mit Hilfe Iterations- und Substitutionsmethode

1. $T(1) = 1, T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \ , \ \ \forall n > 1$

   Iterationsmethode:

   - Iteriere: $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n = 4\left(4T\left(\frac{n}{4}\right) + n\right) + n = 4\left(4\left(4T\left(\frac{n}{8}\right) + n\right) + n\right) + n$
   - Struktur: $4^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + n \sum_{k=0}^{i-1} 2^k$
   - Löse $i = 2^{\log n}$: $4^{\log n} T\left(\frac{n}{2^{\log n}}\right) + n \sum_{k=0}^{\log(n)-1} 2^k = n^2 + n \frac{2^{\log n} - 1}{2-1} = n^2 + n^2 - n \in O(n^2)$

   Substitutionsmethode:

   - Behauptung: $T(n) \in \Theta(n^2)$

     Z. Z.: $T(n) = 1 \cdot n^2$

     IA: $n = 1 : T(1) = 1^2$

     IV: Behauptung gilt auch für $\frac{n}{2}$

     IS: $\frac{n}{2} \to n : T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n = 4 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 + n = 1 \cdot n^2 + n \in \Theta(n^2)$

2. $T(1) = 1, T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n} \ \forall n > 1$

   Iterationsmethode:

   - Iteriere:
     $$\begin{aligned} T(n) = 2T\left(\tfrac{n}{4}\right) + \sqrt{n} = 2\left(2T\left(\tfrac{n}{4^2}\right) + \sqrt{\tfrac{n}{4}}\right) + \sqrt{n} &= 2\left(2\left(2T\left(\tfrac{n}{4^3}\right) + \sqrt{\tfrac{n}{4^2}}\right) + \sqrt{\tfrac{n}{4}}\right) + \sqrt{n} \\ &= 2^3 T\left(\tfrac{n}{4^3}\right) + 4\sqrt{\tfrac{n}{4^2}} + 2\sqrt{\tfrac{n}{4}} + \sqrt{n} \\ &= 2^3 T\left(\tfrac{n}{4^3}\right) + \textstyle\sum_{k=0}^{2} \left(2^k \sqrt{\tfrac{n}{4^k}}\right) \end{aligned}$$
   - Struktur:
     $T(n) = 2^i T\left(\frac{n}{4^i}\right) + \sum_{k=0}^{i-1} \left(2^k \sqrt{\frac{n}{4^k}}\right)$
   - Löse $i = \log_4(n)$
     $$\begin{aligned} T(n) = 2^{\log_4 n} T\left(\tfrac{n}{4^{\log_4 n}}\right) + \textstyle\sum_{k=0}^{\log_4(n)-1} \left(2^k \sqrt{\tfrac{n}{4^k}}\right) &= 2^{\log_4 n} + \sqrt{n} \textstyle\sum_{k=0}^{\log_4(n)-1} 2^k \cdot 2^{-k} \\ &= 2^{\log_4 n} + \sqrt{n} \textstyle\sum_{k=0}^{\log_4(n)-1} 1 \\ &= \sqrt{n} + \sqrt{n} \cdot \log_4(n) - \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n} \cdot \log_4(n) \\ &\Rightarrow T(n) \in \Theta(\sqrt{n} \cdot \log n) \end{aligned}$$

   Substitutionsmethode:

   - Behauptung: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n} \in \Theta(\sqrt{n} \log n)$
   - Induktions Anfang: $n = 4 : T(4) = 2T\left(\frac{4}{4}\right) + \sqrt{4} = 2 + 2 = 4 \leq 4 = 2 \cdot 2 = \sqrt{4} \log(4)$
   - Induktions Vorraussetung: es gibt ein n für das die Aussage gilt
   - Induktions Schritt: $\frac{n}{4} \to n$
     $$\begin{aligned} T(n) = 2T\left(\tfrac{n}{4}\right) + \sqrt{n} = 2 \cdot \sqrt{\tfrac{n}{4}} \log\left(\tfrac{n}{4}\right) + \sqrt{n} &= \sqrt{n}(\log(n) - \log(4)) + \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n} \log(n) - \sqrt{n} \log(4) + \sqrt{n} \\ &\Rightarrow T(n) \in \Theta(\sqrt{n} \log(n)) \end{aligned}$$

3. $T(1) = 1, T(2) = 1, T(3) = 1, T(n) = 2T(n-1) + n^2 \ \forall n > 3$
   Iterationsmethode:
   - Iteriere:
     $$\begin{aligned} T(n) = 2T(n-1) + n^2 &= 2\big(2T(n-2) + (n-1)^2\big) + n^2 \\ &= 2\big(2\big(2T(n-3) + (n-2)^2\big) + (n-1)^2\big) + n^2 \\ &= 2^3T(n-3) + 2^2(n-2)^2 + 2^1(n-1)^2 + n^2 \\ &= 2^3T(n-3) + \textstyle\sum_{k=0}^{2} 2^k(n-k)^2 \end{aligned}$$
   - Struktur:
     $$T(n) = 2^iT(n-i) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k(n-k)^2$$
   - Löse $i = n-1$:
     $$T(n) = 2^{n-1}T(n-(n-1)) + \sum_{k=0}^{n-1-1} 2^k(n-k)^2 = 2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} 2^k(n-k)^2$$
     Lösungsidee:
     $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-2} 2^k(n-k)^2 &= n^2 + 2(n-1)^2 + 4(n-2)^2 + ... + 2^{n-3}(3)^2 + 2^{n-2}(2)^2 \\ &= 2^{n-2}2^2 + 2^{n-3}3^2 + ... + 4(n-2)^2 + 2(n-1)^2 + n^2 \end{aligned}$$
     Aus der Lösungsidee:
     $$T(n) = 2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} 2^k(n-k)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k(n-k)^2 = 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{2^{n-1}} \cdot (n-k)^2$$
     mit dem Quotientenkriterium: $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$
     $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^k}{2^n}(n+1-k)}{\frac{2^k}{2^{n-1}}(n-k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}(n+1-k)}{2^n(n-k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-k}{2^n(n-k)} = 0 < 1$$
     $$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{2^{n-1}} \cdot (n-k)^2 = l$$
     $$\Rightarrow T(n) = 2^{n-1} \cdot \Theta(1) \in \Theta(2^n)$$

   Subsitutionsmethode:
   - Behauptung B: $T(n) = 2T(n-1) + n^2 \in \Theta(2^n)$
   - Zu zeigen: $T(n) = \frac{1}{2} \cdot 2^n$
   - Induktions anfang: $n = 1$
     $T(1) = 1 = \frac{1}{2} \cdot 2^1 = 1$
   - Induktions Vorraussetzung: $\exists n \in \mathbb{N} : B(n-1)$ gilt
   - Induktions Behauptung: Für dieses $n-1$ gilt auch $B(n)$
   - Induktions Schritt: $n-1 \to n$
     $$T(n) = 2T(n-1) + n^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} + n = \frac{1}{2} \cdot 2^n + n \in \Theta(2^n)$$

Aufgabe 2

Sei f(n) die n.te Fibonacci Zahl, die wie folgt definiert ist:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ mit } f(1) = 1, f(2) = 1, f(n) = f(n-1) + f(n-2)\ \forall n \geq 3$$

a) folgern Sie mit vollständiger Induktion, dass gilt:

$$f(n) = \frac{\Phi^n - \hat{\Phi}^n}{\sqrt{5}} \quad \text{mit} \quad \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \hat{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

b) Folgern Sie, dass eine rekursive Implementierung zur Berechnung der Fibonacci Zahlen die Laufzeit $T(n) = \Theta(\Phi^n)$

a)

Induktions Anfang: $n = 1, n = 2$

$$f(1) = \frac{\Phi^1 - \hat{\Phi}^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1$$

$$f(2) = \frac{\Phi^2 - \hat{\Phi}^2}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{6-2\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{6-6+4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1$$

Induktions Vorraussetzung: es gibt ein n für das die Aussage gilt
Induktions Schritt: $n \to n+1$

$$f(n+1) = f(n) + f(n-1) \overset{\text{IV}}{=} \frac{\Phi^n - \hat{\Phi}^n}{\sqrt{5}} + \frac{\Phi^{n-1} - \hat{\Phi}^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^n - \hat{\Phi}^n + \Phi^{n-1} - \hat{\Phi}^{n-1}}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{\Phi^{n-1}(\Phi+1) - \hat{\Phi}^{n-1}\left(\hat{\Phi}+1\right)}{\sqrt{5}}$$

mit $\Phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \Phi$
und $\hat{\Phi}^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = 1 + \frac{1}{2} - \sqrt{5} = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 + \hat{\Phi}$

$$\Rightarrow f(n+1) = \frac{\Phi^{n-1}(\Phi+1) - \hat{\Phi}^{n-1}\left(\hat{\Phi}+1\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^{n-1}\Phi^2 - \hat{\Phi}^{n-1}\hat{\Phi}^2}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^{n+1} - \hat{\Phi}^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

b)

$$T(1) = 1,\ T(2) = 1,\ T(n) = T(n-1) + T(n-2)$$

<u>Substitutionsmethode:</u>
Behauptung: $\Theta(T(n)) = \Theta(\Phi^n)$
Induktions Anfang: $n = 1$, $n = 2$:

$$c_1 \cdot \Phi^1 \leq T(1) = 1 \leq c_2 \cdot \Phi^1$$
$$\Rightarrow c_1 \leq \frac{1}{\Phi} \wedge c_2 \geq \frac{1}{\Phi}$$

$$c_1 \cdot \Phi^2 \leq T(2) = 1 \leq c_2 \cdot \Phi^2$$
$$\Rightarrow c_1 \leq \frac{1}{\Phi^2} \wedge c_2 \geq \frac{1}{\Phi^2}$$

Induktions Schritt: $n \to n+1$:

- Case O(T(n)):

$$T(n+1) = T(n) + T(n-1) \overset{\text{IV}}{\leq} c_2 \cdot \Phi^n + c_2 \cdot \Phi^{n-1} = c_2\Phi^{n-1}(\Phi+1) = c_2\Phi^{n-1} \cdot \Phi^2 = c_2\Phi^{n+1}$$

- Case $\Omega(T(n))$:

$$T(n+1) = T(n) + T(n-1) \overset{\text{IV}}{\geq} c_1 \cdot \Phi^n + c_1 \cdot \Phi^{n-1} = c_1\Phi^{n-1}(\Phi+1) = c_1\Phi^{n+1}$$

also gilt: Für $c_1 \leq \frac{1}{\Phi^2} \land c_2 \geq \frac{1}{\Phi} : T(n) \in \Theta(\Phi^n)$

Aufgabe 3

Beweise mit Master Methode:

1. $T(1) = 1, T(2) = 1, T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \ \forall n > 2 \Rightarrow T(n) \in \Theta(\log n)$:
   $a = 1, b = 2, f(n) = 1$
   $n^{\log_b a} = n^{\log_2(1)} = n^0 = 1 \Rightarrow f(n) \in \Theta(1) \Rightarrow T(n) \in \Theta\left(n^{\log_2 1} \log n\right) = \Theta(\log n)$
2. $T(1) = 1, T(2) = 1, T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n \log n \ \forall n > 2 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n \log n)$
   $a = 3, b = 4, f(n) = n \log n$
   $\forall n : n^{\log_4 3} \leq n^1 \leq n \log n \Rightarrow n^{\log_4 3} \in O(n \log n) \Rightarrow f(n) = n \log n \in \Omega\left(n^{\log_4 3}\right)$
   Teste: $af\left(\frac{n}{b}\right) = 3f\left(\frac{n}{4}\right) \leq cf(n)$
$$\begin{aligned}3\left(\frac{n}{4}\log\frac{n}{4}\right) &= \frac{3}{4}n\log\frac{n}{4} = \frac{3}{4}n(\log n - \log 4) = \frac{3}{4}n\log n - \frac{3}{4}n\log 4 = \frac{3}{4}n\log n - \frac{3}{2}n \\ &= \frac{3}{2}n(\log n - 1) \leq \frac{3}{2}n\log n \Rightarrow T(n) \in \Theta(n \log n)\end{aligned}$$
3. $T(1) = 1, T(2) = 1, T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \ \forall n > 2 \Rightarrow T(n) \in \Theta\left(n^{2.81}\right)$
   $a = 7, b = 2, f(n) = n^2$
   $n^{\log_2 7} \geq n^2 \Rightarrow n^{\log_2 7} \in \Omega(n^2) \Rightarrow f(n) = n^2 \in O\left(n^{\log_2 7}\right) \Rightarrow T(n) \in \Theta\left(n^{\log_2 7}\right) \approx \Theta\left(n^{2.81}\right)$

Aufgabe 4

$$f(n,m) = \begin{cases} m+1 \ , & n = 0 \\ f(n-1, 1) \ , & m = 0 \ \land \ n \geq 1 \\ f(n-1, f(n, m-1)) \ , & \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung $D(f(n,m)) = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

- Induktionsanfang: $n = 0$
  - Unterbehauptung: $\forall m \in \mathbb{N}_0 : f(0,m) \in \mathbb{N}$
  - Induktionsanfang $m = 0$

$$f(0,0) = 0 + 1 \in \mathbb{N}$$

  - Induktionsvorraussetzung: $\exists m \in \mathbb{N}_0 : f(0,m) \in \mathbb{N}$ [IV1]
  - Induktionsschritt: $m \to m+1$

$$f(0, m+1) = (m+1) + 1 \in \mathbb{N}$$

  $\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}_0 : f(0,m) \in \mathbb{N}$
- Induktionsvorraussetzung: $\forall m \in \mathbb{N}_0 : \exists n \in \mathbb{N}_0 : f(n,m) \in \mathbb{N}$
- Induktionsschritt: $n \to n+1$

- Unterbehauptung: $\forall m \in \mathbb{N}_0 : f(n+1, m) \in \mathbb{N}$
- Induktionsanfang: $m = 0$

$$f(n+1, 0) = f(n, 1)$$

  Aus IV1 folgt: $f(n, 1) \in \mathbb{N}$
- Induktionsvorraussetzung: $\exists m : f(n+1, m) \in \mathbb{N}$ [IV2]
- Induktionsschritt: $m \to m+1$

  $$f(n+1, m+1) = f(n, f(n+1, m)) \underset{\text{IV2}}{\Rightarrow} \exists l \in \mathbb{N} : f(n, f(n+1, m)) = f(n, l)$$

  Aus IV1 folgt: $f(n, l) \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \forall n, m \in \mathbb{N}_0 : D(f(n, m)) \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f(n, m) &= f(n-1, f(n, m-1)) \\ &= f(n-1, f(n-1, f(n, m-2))) \\ &= f(n-1, f(n-1, f(n-1, f(n, m-3)))) \end{aligned}$$