Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg
Studiengänge Informatik und Wirtschaftsinformatik
Dr. G. Tapken
Dr. D. Gröger

WiSe 2024/25

5. Übungsblatt zur Mathematik 2

Lösung zu Aufgabe Ü 5.1

a) Wir beweisen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $\sqrt{x_0}$ nach unten beschränkt ist durch vollständige Induktion.

(IA) $n = 1$ $a_1 > \sqrt{x_0}$ gemäß Definition der Folge

(IS) z.z. $\underbrace{a_n > \sqrt{x_0}}_{=(IV)} \implies a_{n+1} > \sqrt{x_0}$

Variante 1

$$\begin{array}{rrcl}
 & a_{n+1} & \overset{!}{>} & \sqrt{x_0} \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{2}\cdot\left(a_n + \frac{x_0}{a_n}\right) & > & \sqrt{x_0} \\
\Leftrightarrow & a_n + \frac{x_0}{a_n} & > & 2\sqrt{x_0} \\
\Leftrightarrow & a_n^2 + x_0 & > & 2\sqrt{x_0}\cdot a_n \\
\Leftrightarrow & a_n^2 - 2\sqrt{x_0}\cdot a_n + x_0 & > 0 & \\
\Leftrightarrow & \left(\underbrace{a_n - \sqrt{x_0}}_{>0}\right)^2 & > 0 &
\end{array}$$

Variante 2:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x_0}{a_n}\right) \overset{*}{>} \sqrt{a_n\cdot\frac{x_0}{a_n}} = \sqrt{x_0}$$

$*$ Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel (echte Ungleichung, da $a_n \neq \frac{x_0}{a_n}$ nach (IV))

Variante 3:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x_0}{a_n}\right) = \frac{1}{2\,a_n}\cdot({a_n}^2 + x_0) \\
&= \frac{1}{2\,a_n}\cdot({a_n}^2 - 2\,a_n\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}^2 + 2\,a_n\sqrt{x_0}) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2a_n}}_{\overset{\text{nach (IV)}}{>}0}\underbrace{(a_n - \sqrt{x_0})^2}_{\text{nach (IV)}>0} + \sqrt{x_0} > \sqrt{x_0}.
\end{aligned}$$

b) Wir zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

Variante 1: Induktion

Induktionsanfang=(IA) $n = 1$

$$\begin{array}{rrcl}
 & a_2 & < & a_1 \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{2}\cdot\left(a_1 + \frac{x_0}{a_1}\right) & < & a_1 \\
\Leftrightarrow & a_1 + \frac{x_0}{a_1} & < & 2a_1 \\
\Leftrightarrow & \frac{x_0}{a_1} & < & a_1 \\
\Leftrightarrow & x_0 & < & {a_1}^2 \\
\Leftrightarrow & \sqrt{x_0} & < & a_1 \quad \checkmark
\end{array}$$

Induktionsschritt=(IS)

$$\begin{array}{rrcl}
 & a_{n+2} & \overset{!}{<} & a_{n+1} \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{2}\cdot\left(a_{n+1}+\frac{x_0}{a_{n+1}}\right) & < & \frac{1}{2}\cdot\left(a_n+\frac{x_0}{a_n}\right) \\
\Leftrightarrow & \left(a_{n+1}+\frac{x_0}{a_{n+1}}\right) & < & \left(a_n+\frac{x_0}{a_n}\right) \\
\Leftrightarrow & a_{n+1}^2\cdot a_n+x_0\cdot a_n & < & a_n^2\cdot a_{n+1}+x_0\cdot a_{n+1} \\
\Leftrightarrow & a_{n+1}^2\cdot a_n-x_0\cdot a_{n+1} & < & a_n^2\cdot a_{n+1}-x_0\cdot a_n \\
\Leftrightarrow & a_{n+1}\cdot\underbrace{(a_n\cdot a_{n+1}-x_0)}_{>0} & < & a_n\cdot\underbrace{(a_n\cdot a_{n+1}-x_0)}_{>0} \\
\Leftrightarrow & a_{n+1} & < & a_n
\end{array}$$

Variante 2: Abschätzung

Nach a) ist die Folge durch $\sqrt{x_0}>0$ nach unten beschränkt und für $n\in\mathbb{N}$ ist

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{x_0}{a_n}\right)-a_n=\frac{x_0-a_n^2}{2a_n}=\frac{\overbrace{(\sqrt{x_0}-a_n)}^{<0\,(\text{nach a})}\cdot\overbrace{(\sqrt{x_0}+a_n)}^{>0\,(\text{nach a})}}{2\cdot a_n}<0.$$

Somit ist die Folge (sogar streng) monoton fallend.

c) Die Folge konvergiert nach dem „hinreichenden Konvergenzkriterium“ für Folgen (Satz 2.6 ii)) gegen einen Grenzwert a.
Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}$ muss gelten

$$\begin{array}{rl}
 & a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{x_0}{a}\right) \\
\Longleftrightarrow & 2a=a+\frac{x_0}{a} \\
\Longleftrightarrow & a=\frac{x_0}{a} \\
\Longleftrightarrow & a^2=x_0 \\
\overset{a>0}{\Longleftrightarrow} & a=\sqrt{x_0}
\end{array}$$

Also ist $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{x_0}$.

Lösung zu Aufgabe Ü 5.2

a)

$$\begin{array}{rc}
 & \text{Gesamtfördermenge}=(\text{Anzahl Jahre})\cdot(\text{Fördermenge/Jahr}) \\
\Leftrightarrow & 13\cdot10^9\text{Tonnen}=(\text{Anzahl Jahre})\cdot0{,}25\cdot10^9\text{Tonnen/Jahr} \\
\Leftrightarrow & \text{Anzahl Jahre}=\dfrac{13\cdot10^9\text{Tonnen}}{0{,}25\cdot10^9\text{Tonnen/Jahr}}=52\text{Jahre}
\end{array}$$

b)

$$\begin{aligned}
\text{Fördermenge im 1. Jahr } &:= u = 0,25 \cdot 10^9 \\
\text{Fördermenge im 2. Jahr } &= u \cdot (0,98) \\
\text{Fördermenge im 3. Jahr } &= u \cdot (0,98)^2 \\
&\vdots \\
\text{Fördermenge in } n \text{ Jahren: } \quad & u + u\cdot(0,98) + u\cdot(0,98)^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{n} u\cdot(0,98)^k \\
&= u \cdot \frac{1-(0,98)^{n+1}}{1-0,98} = u \cdot \frac{1-(0,98)^{n+1}}{0,02} \\
&= 50 \cdot u \cdot \left(1-(0,98)^{n+1}\right) = 12,5 \cdot \underbrace{\left(1-(0,98)^{n+1}\right)}_{\leq 1} \leq 12,5 < 13
\end{aligned}$$

Auf diese Weise werden sich die Ölvorkommen nie erschöpfen.