Lückenskript zur Vorlesung

Mathematik 2
(MA2)

für Informatik-Studiengänge

G. Tapken (aufbauend auf einem Skript von M. Pohl)
Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**

1.1 Fakultäten und Binomialkoeffizienten . . . 1
1.2 Ungleichungen . . . 10

2 Folgen und Reihen **19**

2.1 Konvergente Folgen . . . 19
2.2 Die Landauschen Symbole . . . 35
2.3 Konvergente/Divergente Reihen . . . 38
2.4 Potenzreihen und elementare Funktionen . . . 50

3 Grenzwerte und Stetigkeit **65**

3.1 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen . . . 65
3.2 Wertannahme stetiger Funktionen . . . 70

4 Differentialrechnung **73**

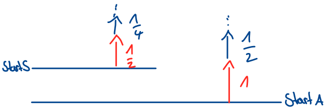
4.1 Differenzierbarkeit . . . 73
4.2 Folgerungen aus der Differenzierbarkeit . . . 83
4.3 Eigenschaften elementarer Funktionen . . . 91
4.4 Grenzwerte differenzierbarer Funktionen . . . 105
4.5 Taylor-Entwicklung . . . 109
4.6 Anwendungen der Differentialrechnung . . . 114

5 Integralrechnung **127**

5.1 Bestimmtes und unbestimmtes Integral . . . 127
5.2 Technik der Integration . . . 136
5.3 Uneigentliche Integrale . . . 149
5.4 Anwendung der Integralrechnung . . . 154
5.4.1 Flächenberechnung . . . 154
5.4.2 Bogenlänge . . . 157
5.4.3 Volumen/Mantelfläche von Rotationskörpern . . . 159
5.4.4 Mittelpunkt ebener Bereiche/Schwerpunkt . . . 165

Zenon: Wettlauf zwischen Achill und der Schildgröte

$v_A = 2 v_S$, d.h. $v_S = \frac{1}{2} v_A$



$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots}_{\text{Reihe (Summe aus Folgeglieder)}} = 1$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots$$

$$\sin(x) = 1 - x + \frac{1}{3!} x^3 - \frac{1}{5!} x^5 + \ldots$$

Lothar Papula als Literatur

$$\text{Prüfung} \begin{cases} \text{Formelsammlung zur Prüfung} \\ \text{Formel und Hilfen zur höheren Math.} \end{cases}$$

1 Einführung

In dieser Einführung werden einige einfache Grundlagen der Analysis zusammengestellt. Die Darstellung ist eher knapp gehalten. In der einschlägigen Literatur findet man ausführlichere Beschreibungen dieser Grundlagen.

1.1 Fakultäten und Binomialkoeffizienten

Definition 1.1 (Fakultäten)
Für $n \in \mathbb{N}_0$ wird die Fakultät $n!$ von n definiert durch:

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ (n-1)! \cdot n & \text{für } n \geq 1 \end{cases}.$$

$10! = 3\,628\,800 \approx 3{,}6 \cdot 10^6$

Bemerkung: Fakultäten wachsen extrem schnell.

$20! \approx 2{,}4 \cdot 10^{18}$

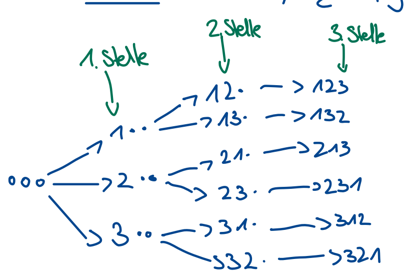
Beispiele: $0! = 1$, $1! = 0! \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$, $2! = 1! \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 2! \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6, \ldots$; $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

Anwendungen in der Kombinatorik

1) $n!$ ist gleich der Anzahl möglicher Anordnungen (Permutationen) einer n-elementigen Menge, also von $\{1, 2, \ldots, n\}$

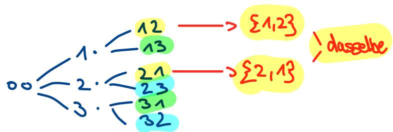
Bsp: $n = 3$, $G = \{1, 2, 3\}$



Möglichkeiten: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

2) Anzahl Möglichkeiten, eine k-elementige Teilmenge aus einer n-elementigen Grundmenge auszuwählen

Beispiel: $n = 3$, $G = \{1,2,3\}$, $k = 2$



$\boxed{\text{Möglichkeiten:}}$ $\frac{3 \cdot 2}{2!} = 3$

Allgemein

$\boxed{\text{Möglichkeiten:}}$ $\frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)}^{1\text{ Stelle} \ldots k\text{. Stelle}}}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$k!$ kommt auf die Reihenfolge der Element nicht an

$(n-k) \cdot \ldots 2 \cdot 1$

?

Definition 1.2 (Binomialkoeffizienten)
Für n, $k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \le k \le n$ definiert man die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ *(„n über k“ oder „n tief k“ oder vor allem im Bereich der Statistik auch „k aus n“) als*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\ldots(n-k+1)}^{k\text{-Faktoren abwärts}}}{k!}$$

Bsp.: $\binom{100}{3}$

$\hookrightarrow \frac{100!}{3!97!} = \frac{\cancel{100}^{50} \cdot \cancel{99}^{33} \cdot 98}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}}$

2) Lotto (6 Kugeln aus 49)

$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,983\,816$

1. Bsp: $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{24}{4} = 6$ $\boxed{\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \overset{!}{=} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-k+1)}{k!}}$

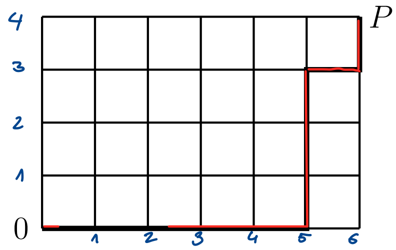
$= \frac{4 \cdot 3}{2!} = \frac{12}{2} = 6$

2. Bsp:
$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{3} \cdot 2 \cdot \cancel{2}} = \frac{20}{2} = 10$

$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 10$

Aufgabe A 1.1

a) *Um vom Punkt $0 = (0;0)$ zum Punkt $P = (6;4)$ zu gelangen, wollen wir uns nur auf Wegstücken bewegen, die durch ganzzahlige Gitterpunkte des $\mathbb{R}^2$ gehen und parallel zu einer Koordinatenachse verlaufen.*
(Beispiel eines solchen Weges von 0 nach P)



Auf wieviel Wegen der minimalen Länge $l = 6+4$ kann man von 0 nach P gelangen? (Vom Gitterpunkt $(i;j)$ bewegt man sich also entweder zum Gitterpunkt $(i+1;j)$ oder $(i;j+1)$)

b) *Wie viele 12-stellige Zahlen, bei denen die Ziffer 9 genau zweimal auftritt, lassen sich aus den Ziffern $1, 2, ..., 9$ bilden? (Das Produkt muss nicht ausmultipliziert werden.)*

a) Bei jedem Weg sind genau 10 Schritte zu gehen, davon 6 nach rechts und 4 nach oben.
Es genügt, diejenigen Schritte nach oben anzugeben (Beispiel: 6,7,8,10.)
Damit gibt es $\binom{10}{4}$ Möglichkeiten für Wege von 0 nach P

$$\binom{10}{4} = \frac{\cancel{10}^{5}\cdot\cancel{9}^{3}\cdot\cancel{8}^{2}\cdot 7}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}} = 210$$

! (Beachte: $\binom{10}{6} = \binom{10}{4}$) ! Satz 1.3 ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

b) $\boxed{\text{Vorweg: Wie viele 12-stellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern } 1,2,3,\dots,9 \text{ bilden? } \underbrace{9\cdot 9\cdot 9\cdot 9 \cdots 9}_{12\text{-mal}} = 9^{12} \text{ Möglichkeiten}}$

1) 12 Stellen, davon zwei mit 9en zu besetzen:

$\binom{12}{2}$ Möglichkeiten

2) Restlichen 10 Stellen mit den Ziffern $1,2,\dots,8$ zu besetzen:

8^{10} Möglichkeiten

$\Rightarrow$ Gesamtanzahl $\binom{12}{2}\cdot 8^{10} = \frac{\cancel{12}^{6}\cdot 11}{\cancel{2}}\cdot 8^{10} = \underline{66\cdot 8^{10}}$

Satz 1.3 (Eigenschaften von Binomialkoeffizienten (Teil 1))
Es seinen n, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten für die Binomialkoeffizienten:

i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

ii) $0 \leq k \leq n: \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

iii) $0 \leq k \leq n-1: \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Beweis:

i) $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{0!\,n!} \quad \frac{n!}{1\,n!} = 1, \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$

ii) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))} = \binom{n}{n-k}$

iii) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} = \frac{n!\cdot(k+1) + n!\cdot(n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{n!\,(\cancel{k}+1+n-\cancel{k})}{(k+1)!\,(n-k)!}$

$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} \stackrel{!}{=} \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}$ $\square$

Anschauliche Bedeutung von Satz 1.3

i) Es gilt jeweils nur eine Möglichkeit eine nullelementige bzw. n-elementige Teilmenge aus der n-elementigen Grundmenge G auszuwählen, nämlich $\emptyset$ bzw. G

i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

ii) $0 \leq k \leq n: \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

iii) $0 \leq k \leq n-1: \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

i) $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1$ $\square$

ii) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))} = \binom{n}{n-k}$ $\square$

iii) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-(k+1))!} = \frac{n!\,(k+1) + n!\,(n-k)!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{n!\,(k+1+n-\cancel{k})}{(k+1)!\,(n-k)!}$

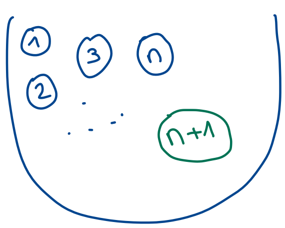
$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}$

ii) Wenn wir aus unserer $n-$elementigen Grundmenge eine $k-$elementige Teilmenge wählen, legen wir indirekt auch eine $(n-k)-$elementige Teilmenge fest.

z.B. für $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ also $n = 5$ und $k = 2$ gibt es $\binom{5}{2} = 10$ 2-elemtige Teilmengen und $\binom{5}{3} = 10$ 3-elemtige Teilmengen:

gewählte Teilmenge	Komplement-Menge
$\{1,2\}$	$\{3,4,5\}$
$\{1,3\}$	$\{2,4,5\}$
$\{1,4\}$	$\{2,3,5\}$
$\{1,5\}$	$\{2,3,4\}$
$\{2,3\}$	$\{1,25\}$
$\{2,4\}$	$\{1,3,5\}$
$\{2,5\}$	$\{1,3,4\}$
$\{3,4\}$	$\{1,2,5\}$
$\{3,5\}$	$\{1,2,4\}$
$\{4,5\}$	$\{1,2,3\}$

iii) Wir betrachten nun eine Urne mit n weißen Kugeln mit den Nummern $1, 2, 3, \ldots, n$ und einer grünen Kugel mit der Nummer $n + 1$
Wir wollen aus dieser Urne $k + 1$ Kugeln ziehen. Dies können wir auf zwei Arten tun:



1) Wir ignorieren die grüne Kugel und ziehen k+1 Kugeln aus den blauen Kugeln:

$$\binom{n}{k+1} \text{ Möglichkeiten}$$

2) Wir wählen die grüne Kugel, und damit müssen wir noch k Kugeln aus den blauen Kugeln:

$$\binom{n}{k} \text{ Möglichkeiten}$$

Da 1) und 2) nicht gleichzeitig auftreten können, ist die Gesamtanzahl

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Abzählprinzip der Kombinatorik

Ein Verfahren bestehe aus mehreren Schritten. Für den 1. Schritt gibt es n_1 Möglichkeiten, für den 2. Schritt (unabhängig von der getroffenen Wahl im 1. Schritt) n_2 Möglichkeiten, ...

Dann gibt es genau $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots$ Möglichkeiten, das gesamte Verfahren durchzuführen

Beispiel war 1.1 b);

noch ein ähnliches:

Wie viele 12-stellige ganze Dezimalzahlen gibt es?

Verfahren: Besetzung der 12 Stellen (von links)

1. Schritt: " " 1. Stelle => Element von $\{1,2,3,\ldots 9\}$ $n_1 = 9$
2. Schritt: " " 2. Stelle => Element von $\{0,1,2,\ldots 9\}$ $n_2 = 10$

.. ..

12. Schritt " " " " " $n_{12} = 10$

Gesamtanzahl $= n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_{12} = 9 \cdot 10^{11}$

Pascalsches Dreieck
Mit Hilfe von $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ lassen sich die Binomialkoeffizienten im *Pascalschen Dreieck* anordnen. Dabei ist ein Eintrag im „Inneren“ dieses Dreiecks die Summe der beiden direkt darüber stehenden Zahlen. Es ergeben sich die Werte:

$k=0$ $\quad k=1$ $\quad k=2$ $\quad k=3$

$$
\begin{array}{l|ccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & \vdots & & & & & & \vdots & & & & & & \vdots
\end{array}
$$

$\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} = 32$

$\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} = 64$

↳ Vermutung: $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$

$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{5}{k} = 1-5+10-10+5-1=0$

$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{6}{k} = 1-6+15-20+15-6+1=0$

↳ Vermutung: $\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0}$ Satz 1.5

Implementierung von Binomialkoeffizienten

1) Wenn „alle“ Binomialkoeffizienten gesucht sind, berechnet man die Binomialkoeffizienten gemäß dem Pascalschen Dreieck.

2) Wenn nur ein einzelner Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ (mit $n, k \in \mathbb{N}$) gesucht ist, geht man wie folgt vor:

Formel: $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$

$= \prod_{i=1}^{k} \frac{n-i+1}{i}$

z.B. Maple:

```
n:=    , k:=
p:=1
for i from 1 to k do
p:= p·(n-i+1)/i
end do;
print(p)
```

Satz 1.4 (Binomischer Lehrsatz (bzw. allgemeine Binomische Formel))
Für beliebige Zahlen $a,\, b \in \mathbb{R}$ und für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Anschauliche Begründung:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)}_{\text{1. Klammer}} \cdot \underbrace{(a+b)}_{\text{2. Klammer}} \cdots \underbrace{(a+b)}_{\text{n. Klammer}} \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Wie oft kommt beim Ausmultiplizieren das Produkt $a^{n-k} \cdot b^k$ zustande?
$\binom{n}{k}$-mal, denn $\binom{n}{k}$ = Anzahl der Möglichkeiten, die k Klammern für die b's zu wählen

Beweis: Der Beweis dieses Satzes erfolgt mit Hilfe vollständiger Induktion.

Induktionsanfang =(IA)

$n=0$

LS $(a+b)^0 = 1$ ✓
RS $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} \cdot b^k = \binom{0}{0} \cdot a^0 \cdot b^0 = 1$ ✓

Induktionsschritt =(IS) zu zeigen $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$:

$$\underbrace{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k}_{(IV)} \overset{!}{\Rightarrow} (a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} \cdot b^k$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot (a+b)^n \overset{(IV)}{=} (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} \cdot b^k}_{a \text{ mal Summe}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^{k+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^{k+1}}$$

Indexverschiebung: $l := k+1 \Leftrightarrow k = l-1$

$$\sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l-1} a^{n+(1-l)} \cdot b^l$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)}_{\binom{n+1}{k}} a^{n+1-k} b^k$$

$$= \binom{n+1}{0} \cdot a^{n+1} \cdot b^0 + \binom{n+1}{n+1} \cdot a^0 \cdot b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \qquad \text{qed.} \ \square$$

Beispiele $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$n=2: \quad (a+b)^2 = \binom{2}{0} a^{2-0} \cdot b^0 + \binom{2}{1} a^{2-1} \cdot b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} \cdot b^2$

$= 1 \cdot a^2 + 2 \cdot a + b + 1 b^2$

$n=3: \quad (a+b)^3 \quad 1 \cdot a^3 + 3a^2 \cdot b + 3 a \cdot b^2 + 1 \cdot b^3$

Abschätzungen von Größenordnungen

1) $(1.07)^{10} = \left(1+\frac{7}{100}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot \underbrace{1^{10-k}}_{1} \cdot \left(\frac{7}{100}\right)^k$

$\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n$

$\approx \underbrace{\binom{10}{0}\left(\frac{7}{100}\right)^0}_{1} + \underbrace{\binom{10}{1}\cdot\left(\frac{7}{100}\right)^1}_{10\cdot\frac{7}{100}=0{,}7} + \underbrace{\binom{10}{2}\cdot\left(\frac{7}{100}\right)^2}_{45\cdot\frac{49}{10^4}=0{,}2205} + \ldots$

$\approx 1{,}9205$; exakt via TR: $1{,}967$

2) $(1.999)^{10} = \left(2-\frac{1}{1000}\right)^{10}$

$= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 2^{10-k} \cdot \left(-\frac{1}{1000}\right)^k$

$1018{,}9$

exakt $1018{,}8913$

Satz 1.5 (Eigenschaften von Binomialkoeffizienten (Teil 2))
Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten für die Binomialkoeffizienten:

iv) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

v) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 0, & n \geq 1 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$

Beweis: über Binomischen Lehrsatz

iv) $\sum \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k = (1+1)^n = 2^n$

Satz 1.4 mit $a=b=1$

mit $a=1$ $b=-1$

v) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot (-1^k) = (1+(-1))^n = (1-1)^n = 0^n \begin{cases} 0, & n \geq 1 \\ 1, & n=0 \end{cases}$

Anschauliche Bedeutung von Satz 1.5

iv) $\binom{n}{k}$ = Anzahl der k-elementigen Teilmenge einer n-elementigen Grundmenge G

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$ = Anzahl aller Teilmengen von G
= Mächtigkeit der Potenzmenge
= 2^n (1. Semester)

v) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0 \quad (n \geq 1)$ → Untersuchung hinsichtlich Parität (durch 2 teilbar oder nicht)

$$\Longleftrightarrow \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ gerade}}} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ ungerade}}} \binom{n}{k} = 0 \Longleftrightarrow \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ gerade}}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ ungerade}}} \binom{n}{k}$$

$\Longleftrightarrow$ Anzahl aller Teilmengen mit gerader Elementeanzahl =
" " " " ungerader "

klar; zunächst für n-ungerade.
Dies folgt nämlich aus ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ und weil $k, n-k$ untersch. Parität haben:
z.B. $G = \{1,2,3,4,5\}$
$k=0$: Anzahl der 0-elem. Teilmengen = Anzahl der 5-elem. Teilmengen
$k=1$ " 1- " " " 4- "
$k=2$ 2- " " " 3- "

Jetzt für n-gerade, etwa $\{1,\dots,n\} = \{1,\dots,n-1\} \cup \{n\}$

1) Für jede Teilmenge von $\{1,\dots,n-1\}$ mit gerader Elementeanzahl existiert genau eine Teilmenge von $\{1,\dots,n-1\}$ mit ungerader Elementeanzahl.
2) Damit fehlen noch die Teilmengen, die n enthalten:
Diese erhält man durch Vereinigung der Teilmengen aus 1) mit $\{n\}$
Es entstehen also gleich viele Mengen mit ungerader Elementenanzahl wie solche mit gerader Elementenanzahl

1.2 Ungleichungen

Definition 1.6 (Ordnungsaxiome)
Es gibt eine Relation „<“ in $\mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

i) für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Aussagen:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a$$

=> alle Zahlen ungerade => Relation komplett

ii) Transitivität: für $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$a < b \ \wedge \ b < c \qquad \Longrightarrow \qquad a < c$$

iii) Monotonie bzgl. Addition für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$a < c \ \wedge \ b < d \qquad \Longrightarrow \qquad a + b < c + d$$

iv) Monotonie bzgl. Multiplikation für $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$a < b \ \wedge \ 0 < c \qquad \Longrightarrow \qquad ac < bc$$

Folgerung:

$a < b \wedge c < d \Rightarrow a+b < b+d$

Beweis $a < b \overset{\text{Def 1.6 iii)}}{\Rightarrow} a+c < b+c$, $c < d \overset{\text{"}}{\Rightarrow} b+c < b+d$ $\overset{\text{Def 1.6 ii)}}{\Rightarrow} a+c < b+d$

q.e.d.

Bemerkung: Es gelten folgende Schreibweisen und Vereinbarungen:

1) $a \leq b :\Longleftrightarrow a < b$ oder $a = b$
2) $a > b :\Longleftrightarrow b < a$
3) $a \geq b :\Longleftrightarrow b \leq a$
4) $a < b \leq c :\Longleftrightarrow a < b$ und $b \leq c$
5) Die Zahl a heißt **positiv**, wenn $a > 0$ gilt.
6) a heißt **negativ**, wenn $a < 0$ gilt.
7) Ist $a \geq 0$, so nennt man a **nichtnegativ**.

Bemerkung: Mit Definition 1.6 und obiger Bemerkung kann man zeigen, dass $\leq$ eine Ordnungsrelation ist, also gilt:

i) Reflexiv: $\forall a \in \mathbb{R} : a \leq a$

ii) Transitiv: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \wedge b \leq c \Longrightarrow a \leq c$

iii) Antisymmetrisch: $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \wedge b \leq a \Longrightarrow a = b$

Satz 1.7 (Rechenregeln für Ungleichungen)
Für Ungleichungen gelten folgende Rechenregeln:

i) $a > 0 \iff -a < 0$

ii) $a^2 \geq 0$

iii) $a < b$ und $c < 0 \implies ac > bc$

iv) $0 < a < b \iff 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

v) *Sind* $a, b \geq 0$, *so gilt:* $a < b \iff a^2 < b^2$.

Beweis: Der Beweis erfolgt unter Verwendung von Definition 1.6 und der darauffolgenden Bemerkung.

i) $a > 0 \Rightarrow \underbrace{a + (-a)}_{0} > \underbrace{0 + (-a)}_{-a}$

$-a < 0 \Rightarrow \underbrace{a + (-a)}_{0} < \underbrace{a + 0}_{a}$

ii) Fall 1: $a > 0 \quad | \cdot a$

$\Rightarrow a \cdot a > a \cdot 0$

$a^2 > 0$ ✓

Fall 2: $a = 0$

$a^2 = 0 \cdot 0 \geq 0$ ✓

Fall 3: $a < 0$

$\Rightarrow -a > 0$

$\Rightarrow (-a) \cdot (-a) > (-a) \cdot 0$

$a^2 > 0$ ✓

iii) $c < 0 \overset{i)}{\Rightarrow} -c > 0$

$a < b \overset{\cdot(-c)}{\Rightarrow} a \cdot (-c) < b \cdot (-c)$

$\Rightarrow -ac < -bc \quad | +ac$

$\Rightarrow 0 < ac - bc \quad | +bc$

$\Rightarrow bc < ac \iff ac > bc$

iv) $\boxed{\text{ist trivial:)}}$

v) Klar für $a = 0$. Sei jetzt $a > 0$

"$\Rightarrow$" $\left.\begin{array}{l} a < b \wedge a > 0 \Rightarrow a^2 < ab \\ a < b \wedge b > 0 \Rightarrow ab < b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 < b^2$

"$\Leftarrow$" Durch Widerspruch! $a \geq b$ $\boxed{!(a<b)}$

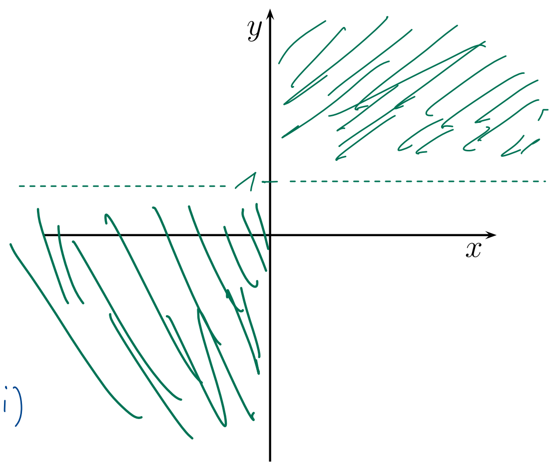
1. Fall: $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ ↯ zur $a^2 < b^2$

2. Fall: $a > b \Rightarrow b < a$

↳ nach schon bewiesener Richtung "$\Rightarrow$" $\Rightarrow b^2 < a^2$ ↯ zur $a^2 < b^2$

Aufgabe A 1.2

Für welche Werte von x und y gilt: $xy > x$?
Zeichnen Sie die möglichen Kombinationen von $(x, y)-$Werte in das Koordinatensystem.



$\boxed{\text{Variante 1: Fallunterscheidung}}$

Fall 1: $x > 0$

$xy > x \quad | \cdot \frac{1}{x} > 0$

$y > 1$ ✓

Fall 2: $x < 0$

$xy > x \quad | \cdot \frac{1}{x} < 0$ siehe Satz 1.7 iii)

$y < 1$ ✓

Fall 3: $x = 0$

$\Rightarrow x \cdot y = 0 = x$

$\boxed{\text{Variante 2:}}$

$x \cdot y > x \iff xy - x > 0 \iff$
$x(y-1) > 0 \iff (x > 0 \wedge y-1 > 0) \vee$
$(x < 0 \wedge y-1 < 0) \iff (x > 0 \wedge y > 1) \vee$
$(x < 0 \wedge y < 1)$

Aufgabe A 1.3 $x, y > 0$

Zeigen Sie: Für positive Zahlen x und y gilt

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

wobei Gleichheit genau dann Eintritt, wenn $x = y$ ist.

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \quad | \cdot xy > 0$

$\iff \frac{x \cdot x\cancel{y}}{\cancel{y}} + \frac{\cancel{x}y \cdot y}{\cancel{x}} > 2xy$

$\iff x^2 + y^2 \geq 2xy \quad | -2xy$

$\iff x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$

$(x-y)^2 \geq 0$ ✓

$\hookrightarrow$ siehe Satz 1.7 ii)

$\hookrightarrow$ Mitbewiesen: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \iff (x-y)^2 = 0 \iff x = y$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
Symbol ∞: $\forall x \in \mathbb{R}: x < \infty$

Definition 1.8 (Intervalle)
Die folgenden Mengen reeller Zahlen heißen Intervalle.

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
x \in \,]a,\, b[& \iff & a < x < b & x \in \,]a,\, \infty[& \iff & a < x \\
x \in [a,\, b[& \iff & a \le x < b & x \in \,]-\infty,\, b[& \iff & x < b \\
x \in \,]a,\, b] & \iff & a < x \le b & x \in [a,\, \infty[& \iff & a \le x \\
x \in [a,\, b] & \iff & a \le x \le b & x \in \,]-\infty,\, b] & \iff & x \le b
\end{array}$$

- *Intervalle der Form* $]a,\, b[$ *heißen „offenen Intervalle"*
- *Intervalle der Form* $[a,\, b]$ *heißen „abgeschlossene Intervalle"*
- *Intervalle der Form* $]a, b]$ *bzw.* $[a, b[$ *heißen „halboffenen Intervalle"*
- *Die Intervalle auf der linken Seite heißen „endliche Intervalle"*
- *Statt* $]a, b[$ *schreibt man auch* (a, b)
- *Statt* $]a, b]$ *schreibt man auch* $(a, b]$
- *Statt* $[a, b[$ *schreibt man auch* $[a, b)$

alte Schreibweise

Satz 1.9 (Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischen Mittel)
Es seinen $a,\, b \in]0, \infty[$*. Dann gilt*

$$\sqrt{ab} \le \frac{1}{2}(a+b) \quad \text{und} \quad \sqrt[2]{ab} = \frac{1}{2}(a+b) \iff a = b$$

positiv (ansonsten $-\sqrt{\ }$)

Die Zahl $\sqrt{ab}$ *heißt* geometrisches Mittel *und* $\frac{1}{2}(a+b)$ *heißt* arithmetisches Mittel *von* a *und* b.

Beweis: Für $a,\, b > 0$ gilt:

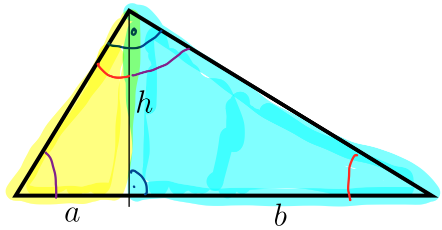
$$\begin{array}{rrcll}
 & \sqrt{a \cdot b} & \overset{!}{\le} & \frac{1}{2}(a+b) & \backslash\backslash \ldots^2 \\
\overset{\text{da } a,b>0}{\iff} & a \cdot b & \overset{!}{\le} & \frac{1}{4}(a+b)^2 & \backslash\backslash \cdot 4 \\
\iff & 4ab & \overset{!}{\le} & a^2 + 2ab + b^2 & \backslash\backslash - 4ab \\
\iff & 0 & \overset{!}{\le} & a^2 - 2ab + b^2 & \\
\iff & 0 & \overset{!}{\le} & (a-b)^2 &
\end{array}$$

Satz 1.7 v) abgesichert $a, b \ge 0$, hier sogar $a, b > 0$

Da die letzte Zeile richtig ist, ist auch die erste Zeile richtig.
Dass der Spezialfall gilt, folgt sofort aus obiger Rechnung mit einem Gleichheitszeichen statt einem „$\le$". ■

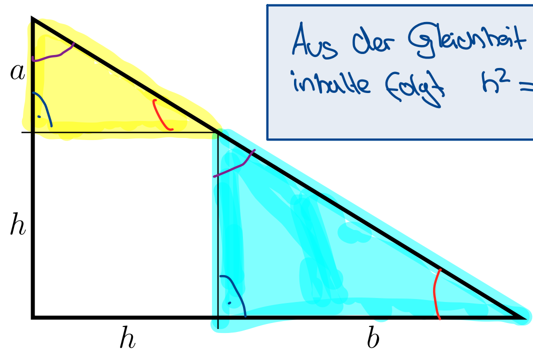
Mit beweisen $\sqrt[2]{ab} = \frac{1}{2}(a+b) \iff 0 = (a-b)^2 \iff a = b$

Geometrische Veranschaulichung von Satz 1.9
Dafür brauchen wir zunächst den Höhensatz:
In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt: Das Produkt der Hypotenusenabschnitte ist gleich der Höhe im Quadrat.

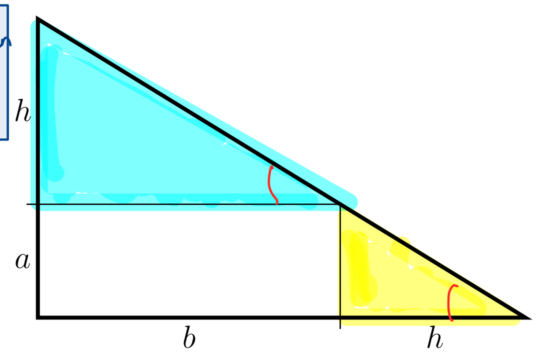


$$h^2 = a \cdot b$$

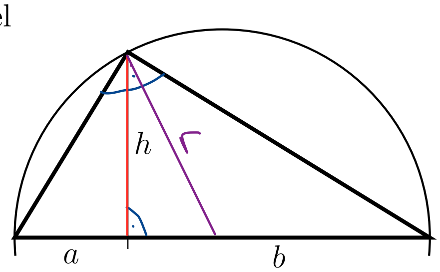
Beweis des Höhensatzes:



Aus der Gleichheit der Flächeninhalte folgt $h^2 = a \cdot b$



Veranschaulichung des Zusammenhanges zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel



$\Rightarrow h = \sqrt[2]{a \cdot b}$ geom. Mittel von a, b

$\Rightarrow$ obiger Kreisradius $r = \frac{1}{2}(a+b)$ arith. Mittel

Bemerkung: Wir betrachten nun den Fall, in dem das Mittel über mehrere Werte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gebildet werden soll.

1) Die allgemeine Formel für das arithmetische Mittel lautet: $\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k}$

   Das arithmetische Mittel ist der am häufigsten verwendete Mittelwert.

Bei $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

2) Die allgemeine Formel für das geometrische Mittel lautet: $\boxed{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}}$

Wird vorwiegend bei Wachstum um einen (Wachstum) Faktor verwendet. Wie Zinsfaktoren.

Zinssatz p% Kapital K [€] nach 1 Jahr: $K' = K + \frac{p}{100}K = \underbrace{\left(1+\frac{p}{100}\right)}_{\text{Zinsfaktor}}K$

Im Jahr darauf mit Zinssatz p': nach 2 Jahre $K'' = \left(1+\frac{p'}{100}\right)K' = \underbrace{\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p'}{100}\right)}_{\text{Zinssätze}} \cdot K$

z.B. Zinssätze in den Jahren 2012-2017: 7,5%, 2,5%, 1%, 1%, 0,5%

Kapital Ende 2017: $K^{V} = 1{,}075 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}005\, K$

geom. Mittel $= \sqrt[5]{1{,}075 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}005} = 1{,}0247$ Zinsfaktor $\Rightarrow$ mittlerer Zinssatz $\bar{p} = 2{,}47\%$

3) Der Median ($\approx$ mittlerer Wert) ist ein weiterer Mittelwert. (nur bei ungerader Anzahl, ansonsten arith. Mittel) Der Median wird vor allem dann verwendet, wenn große Ausreißer keine Rolle spielen sollen.

z.B. 3, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 8, 10

Median

5, 5, 7, 9, 11, 12, 15, 18

$\frac{1}{2}(9+11) = 10$ Median

Satz 1.10 (Bernoullische Ungleichung)
Für alle $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Bemerkung: $0^0 := 1$

Bemerkung: Für $x \geq 0$ folgt die Aussage aus dem Binomischen Lehrsatz.

Beweis von Satz 1.10: (Induktion nach n)

Definition 1.11 (Absolutbetrag)

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt $|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$ *der* (Absolut-)Betrag *von x.*

Bemerkung: Es gilt auch $|x| = \max(x, -x)$ bzw. $|x| = \sqrt{x^2}$

per Definition $\sqrt[2]{\ } \geq 0$

Satz 1.12 (Rechenregeln für Beträge)
Für den Absolutbetrag gelten die folgenden Regeln:

i) $|a| \geq 0$ *und* $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$

ii) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, insb. $|-a| = |a|$

iii) $|a + b| \leq |a| + |b|$

iv) $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$

v) $|a| \leq b \Longleftrightarrow -b \leq a \leq b$ $\Rightarrow -r < x - x_0 < r$

vi) $|x - x_0| < r \overset{+x_0}{\Longleftrightarrow} x_0 - r < x < x_0 + r$

vii) $|a| \geq b \Longleftrightarrow a \geq b \ \vee \ -a \geq b$

Beweis: Mit Hilfe der Anordnungsaxiome Def. 1.6, den Rechenregeln für Ungleichungen Satz 1.7 und der Definition des Betrages Def. 1.11.

i) ✓

ii) Durch Fallunterscheidung:

Klar für $a = 0 \vee b = 0$

1 Fall: $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$ ✓

2. Fall: $a > 0 \wedge b < 0 \Rightarrow a \cdot b < 0$

RS: $|a| \cdot |b| = a \cdot (-b)$ ← gleich

LS: $|a \cdot b| = -(a \cdot b)$ ✓

3. Fall: $a < 0 \wedge b > 0 \Rightarrow$ ebenso

4. Fall: $a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$

RS: $|a| \cdot |b| = (-a) \cdot (-b)$ ✓

LS: $|a \cdot b| = a \cdot b$

iii)
$$\frac{\begin{array}{c} a \leq |a| \\ b \leq |b| \end{array}}{a + b \leq |a| + |b|} \qquad \frac{\begin{array}{c} -a \leq |a| \\ -b \leq |b| \end{array}}{-(a+b) \leq |a| + |b|}$$

$\Rightarrow |a+b| = \max(a+b, -(a+b)) \leq |a| + |b|$

iv) $|a| = |a - b + b| \overset{iii)}{\leq} |a-b| + |b| \overset{-|b|}{\Longrightarrow} |a| - |b| \leq |a-b|$

$|b| = |b - a + a| \overset{iii)}{\leq} \underbrace{|b-a|}_{= |a-b|} + |a| \overset{-|a|}{\Longrightarrow} \underbrace{|b| - |a|}_{-(|a| - |b|)} \leq |a-b|$

$$\Rightarrow \quad \big||a|-|b|\big| = \max\big(|a|-|b|, -(|a|-|b|)\big) \leq |a-b|$$

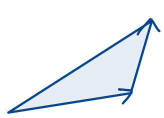
v) $|a| \leq b \Leftrightarrow \max(a,-a) \leq b$
$\Leftrightarrow a \leq b \wedge a \geq -b$
$\Leftrightarrow -b \leq a \leq b$

vi) folgt v)

vii) $|a| \geq b \Leftrightarrow \max(a,-a) \geq b$
$\Leftrightarrow a \geq b \vee -a \geq b$

Bemerkungen:

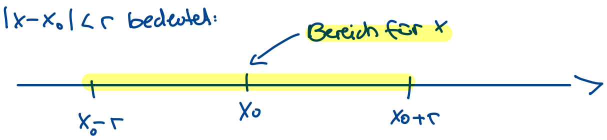
1) Die Ungleichung $|a+b| \leq |a|+|b|$ nennt man *Dreiecksungleichung*, da es sich um einen Spezialfall von $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$ handelt.



$$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

2) $|x-x_0|$ ist der Abstand von x zu dem (als festen angenommenen) Punkt x_0, r steht für den Radius.

$|x-x_0|<r$ bedeutet:



Aufgabe A 1.4
Lösen Sie die Ungleichung:

$$\left|2 - \frac{x}{2}\right| < \frac{1}{2}$$

1\. Variante: Fallunterscheidung

1\. Fall $2 - \frac{x}{2} \geq 0$; d.h. $\frac{x}{2} \leq 2$ | d.h. $x \leq 4$ $\quad (+\frac{x}{2})$

$|2 - \frac{x}{2}| = 2 - \frac{x}{2} \overset{!}{<} \frac{1}{2} \quad | + \frac{x}{2}$

$\Leftrightarrow 2 < \frac{1}{2} + \frac{x}{2} \quad | \cdot 2$

$\Leftrightarrow 4 < 1 + x \quad | - 1$

$\Leftrightarrow x > 3$

Also $\mathbb{L}_1 =]3;4]$

abgleichen!

2\. Fall $2 - \frac{x}{2} < 0$; d.h. $\frac{x}{2} > 2$, d.h. $x > 4$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 =]3,5[$

$|2 - \frac{x}{2}| = -(2 - \frac{x}{2}) \overset{!}{<} \frac{1}{2} \quad | - \frac{x}{2}$

$\Leftrightarrow -2 + \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \quad | + 2$

$\frac{x}{2} < \frac{5}{2} \quad | \cdot 2 > 0$

$x < 5$

Also $\mathbb{L}_2 =]4,5[$

abgleichen!

Aufgabe A 1.5
Bestimmen Sie alle Lösungen x der Gleichung

$$\sqrt{(x^2 - 5x + 6)^2} = x^2 - 5x + 6$$

$\Leftrightarrow |x^2 - 5x + 6| = x^2 - 5x + 6$

$\underbrace{x^2 - 5x + 6}_{(x-2)(x-3)} \geq 0$, da $|a| = a$

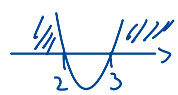
$\Leftrightarrow (x-2 \geq 0 \land x-3 \geq 0) \lor (x-2 \leq 0 \land x-3 \leq 0)$

$\Leftrightarrow (x \geq 2 \land x \geq 3) \lor (x \leq 2 \land x \leq 3)$

$\Leftrightarrow x \geq 3 \lor x \leq 2$

$\Leftrightarrow [3, \infty[\lor]-\infty, 2]$

$\mathbb{L} =]-\infty, 2] \cup [3, \infty[$



Aufgabe A 1.4
Lösen Sie die Ungleichung:

$$\left|2 - \frac{x}{2}\right| < \frac{1}{2}$$

2. Variante

$\overset{v)}{\Longleftrightarrow} \quad |2-x| < \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} < 2 - \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \qquad | \cdot 2 \quad > 0$

$-1 < 4 - x < 1 \qquad | -4$

$-5 < -x < -3 \qquad | \cdot (-1)$

$5 > x > 3$

$\mathbb{L} =]3;5[$

2 Folgen und Reihen

2.1 Konvergente Folgen

Definition 2.1 (Folge)
Eine Folge *ist eine Abbildung, die jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Wert $a_n \in \mathbb{R}$ zuordnet.*

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a(n) = a_n \end{aligned}$$

Man schreibt $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ oder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (a_n).

Spezielle Folgen:

1) Arithmetische Folge (1. Ordnung):
$a_n := a_0 + n \cdot d$ für $n \in \mathbb{N}$ $(d \in \mathbb{R})$, also $(a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, a_0 + 3d, \ldots)$, d.h. die Folge der Differenzen $(a_1 - a_0, a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots) = (d, d, d, d, \ldots)$ ist konstant.

Bsp.: $a_0 = 1$, $d = 2$ · $(1, 3, 5, 7, 9 \ldots)$

2) Arithmetische Folge 2. Ordnung:
$b_n := b_0 + n \cdot \widetilde{b}_0 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ für $n \in \mathbb{N}$ $(b_0, \widetilde{b}_0, d \in \mathbb{R})$. Die Folge der Differenzen ist eine arithmetische Folge 1. Ordnung.

$$b_{n+1} - b_n = \left(b_0 + (n+1)\cdot\tilde{b}_0 + \frac{(n+1)\,(n+1-1)}{2}\cdot d\right) - \left(b_0 + n\cdot\tilde{b}_0 + \frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot d\right)$$
$$= (n+1-n)\cdot\tilde{b}_0 + \underbrace{\left(\frac{(n+1)\cdot n}{2} - \frac{n(n-1)}{2}\right)}_{\frac{n^2+n-(n^2-n)}{2} = n}\cdot d$$
$= \tilde{b} + n\cdot d$ arith. Folge 1 Ordnung

3) Geometrische Folge:
$c_n := c_0 \cdot q^n$ für $n \in \mathbb{N}$ $(q \in \mathbb{R})$, also $(c_0, c_0 \cdot q, c_0 \cdot q^2, c_0 \cdot q^3, \ldots)$, d.h. die Folge der Quotienten $(\frac{c_1}{c_0}, \frac{c_2}{c_1}, \frac{c_3}{c_2}, \ldots) = (q, q, q, \ldots)$ ist konstant.

Bsp.:

1) $c_0 = 100$, $q = 3$

$(100, 300, 900, 2700, 8100, \ldots)$
$100\cdot 3^0$ $100\cdot 3^1$ $100\cdot 3^2$ ...

2) $c_0 = 8$ $q = -\frac{1}{2}$

$(8, -4, 2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \ldots)$

Bemerkung:

Anwendung zu 3.

C_0 = Anfangskapital

q = Zinsfaktor ($\Rightarrow (q-1)\cdot 100$ = Zinssatz)

$\Rightarrow q^n$ ist Kapital nach n Jahren

Bsp zu 2.:

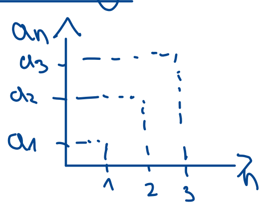
$b_0 = 0,\ \tilde{b}_0 = 1,\ d = 2 \Rightarrow b_n = 0 + n\cdot 1 + \frac{n(n-1)}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2} = n^2$

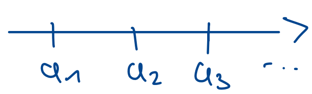
$(0, 1, 4, 9, 16, \dots)$

Differenzen $(1, 3, 5, 7, \dots)$

" $(2, 2, 2, 2, \dots)$

Anmerkung:

1) 

2) 

Definition 2.2 (Eigenschaften von Folgen)
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt*

i) monoton wachsend, *falls* $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_{n+1} \geq a_n$

ii) streng monoton wachsend, *falls* $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_{n+1} > a_n$

iii) monoton fallend, *falls* $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_{n+1} \leq a_n$

iv) streng monoton fallend, *falls* $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_{n+1} < a_n$

v) von oben (oder nach oben) beschränkt, *falls* $\exists M \in \mathbb{R}$, *so dass* $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_n \leq M$.

vi) von unten (oder nach unten) beschränkt, *falls* $\exists m \in \mathbb{R}$, *so dass* $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_n \geq m$.

vii) beschränkt, *wenn sie von oben und von unten beschränkt ist,*
d.h. $\exists K > 0$, *so dass* $\forall n \in \mathbb{N}:\ |a_n| \leq K$.

viii) alternierend, *falls* $\forall n \in \mathbb{N}:\ \frac{a_{n+1}}{a_n} < 0$

↳ a_n & a_{n+1} unterschiedliche VZ

Bemerkung:
In einigen Bücher wird eine andere Benennung verwendet:

unsere Benennung	weitere Benennung
monoton wachsend	monoton nichtfallend
monoton fallend	monoton nichtwachsend
streng monoton wachsend	monoton wachsend
streng monoton fallend	monoton fallend

Beispiele:

$a_0 + nd$

1) Gegeben sei eine arithmetische Folge (a_n) mit $d > 0$. Welche Eigenschaften hat diese Folge? $(a_0, a_0+d, a_0+2d, \ldots)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

- (a_n) ist streng monoton wachsend:

$a_n < a_{n+1} \iff a_0 + nd < a_0 + (n+1)d \quad | -a_0$
$\iff nd < (n+1)d = nd + d \quad | nd$
$0 < d$

- nach oben unbeschränkt:
- nach unten beschränkt durch a_0

2) Welche Bedingungen muss man an eine geometrische Folge stellen, damit sie streng monoton fallend ist? $c_n = c_0 \cdot q^n,\ n \geq 0$

(c_n) streng mon. fallend $\iff c_0 \cdot ?\ q ?$

$\forall n \in \mathbb{N}: c_{n+1} < c_n$
$\iff \forall n \in \mathbb{N}: c_0 q^{n+1} < c_0 q^n$

1. Fall: $c_0 > 0$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}: c_0 q^{n+1} < c_0 q^n \quad | \cdot \frac{1}{c_0} > 0$
$\iff \quad " \quad : q \cdot q^n = q^{n+1} < q^n$
$q < 1$

1.1 Fall: $q > 0$
1.2 Fall: $q < 0$ für auf Widerspruch $\lightning$

3) Welche Bedingungen muss man an eine geometrische Folge stellen, damit sie alternierend und beschränkt ist? $c_n = c_0 \cdot q^n \iff c_0 ?\ q ?$

1. Forderung: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{c_{n+1}}{c_n} < 0$
$\iff \quad " \quad \frac{c_0 \cdot q^{n+1}}{c_0 \cdot q^n} < 0$
$\iff \quad q < 0$

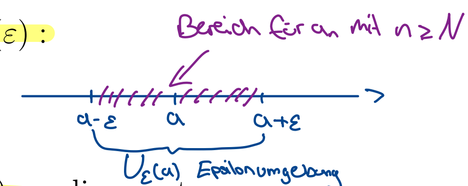
2. Forderung: $\forall n \in \mathbb{N}: \quad |c_n| \leq k$
$\iff \quad " \quad |c_0 \cdot q^n| \leq k$
$\iff \quad " \quad |c_0| \cdot |q|^n \leq k \quad | \cdot \frac{1}{|c_0|} > 0$
$\iff \quad " \quad |q|^n \leq k'$
$\iff \quad |q| \leq 1$

Definition 2.3 (Konvergente Folge)
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen den Grenzwert a, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \text{sodass}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N(\varepsilon):$$

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

↳ Abstand kleiner als ε



Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
Wenn es kein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass obige Aussage gilt, heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

* 2. Fall: $c_0 < 0$ $\forall n \in \mathbb{N}: q^{n+1} > q^n$

Geht nur, wenn $q > 0$. In diesem Unterfall ist die Bedingung äquivalent zu $q > 1$

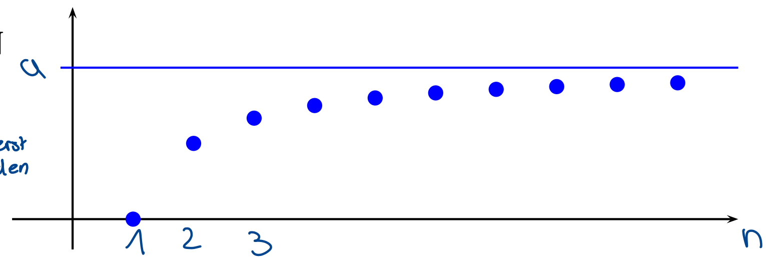
Insgesamt ergeben sich für die Folge die Möglichkeiten:

1) $c_0 > 0 \wedge 0 < q < 1$ <u>Bsp:</u> $c_0 = 4$, $q = \frac{1}{3}$ $\left(4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}, \dots\right)$

2) $c_0 < 0 \wedge q > 1$ <u>Bsp:</u> $c_0 = -5$, $q = 2$ $\left(-5, -10, -20, -40, \dots\right)$

Bsp.:

1) $a_n := 1 - \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $\quad \left(\frac{n-1}{n}\right)$



Vermutung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 := a$

Beweis: $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq \underline{\underline{N}}$ ← zuerst finden

$|\cancel{1} - \frac{1}{n} - \cancel{1}| < \varepsilon$ $\quad$ "

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon$ $\quad$ " $\quad | \cdot n, \cdot \frac{1}{\varepsilon} > 0$

$\Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$

Wähle für N die kleinste nat. Zahl, die größer als $\frac{1}{\varepsilon}$ ist

2) $c_n := c_0 \cdot q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 < q < 1$

z.B. $c_0 = 1, q = \frac{1}{2}$ $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$

Satz 2.4 (Rechenregeln für konvergente Folgen)
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folgen mit* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Dann gilt:* 0) $\lim\limits_{n\to\infty} (c\, a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

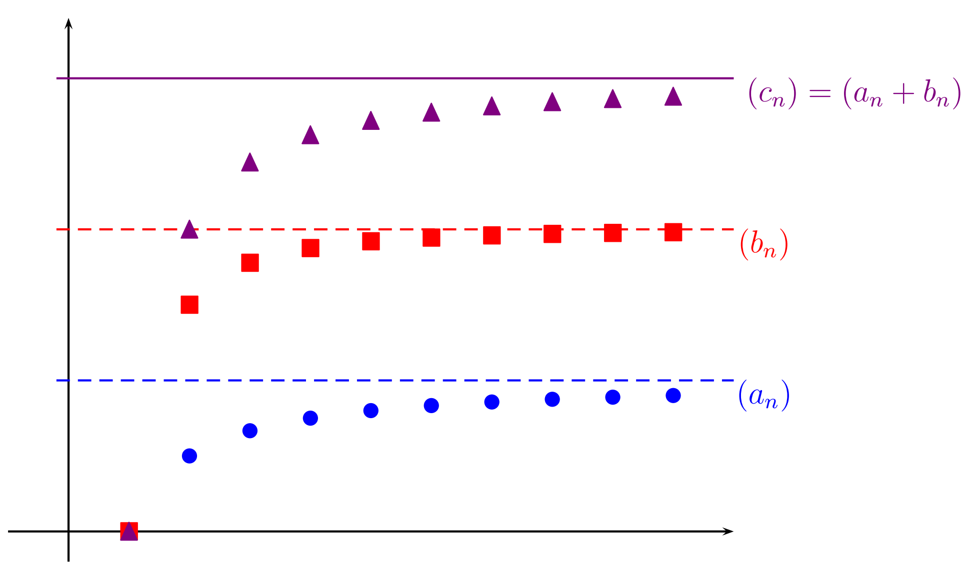
ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

iii) *falls* $b_n \neq 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$ *und* $b \neq 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

iv) *falls* $a_n < b_n \;\; \forall\, n \geq n_0$ *(für ein* $n_0 \in \mathbb{N}$*)* $\Longrightarrow a \leq b$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
falls $a_n \leq b_n \;\; \forall\, n \geq n_0$ *(für ein* $n_0 \in \mathbb{N}$*)* $\Longrightarrow a \leq b$

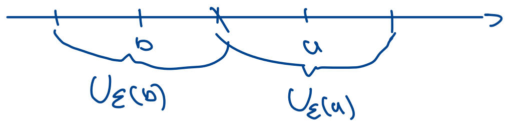
Bew.:

zu i)



iv) durch Widerspruch. Annahme: $b < a$

$$\varepsilon = \frac{a-b}{2}$$



Bem.:

$a_n := \frac{1}{n^2}$, $b_n := \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $a_n < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \qquad \text{Aber: } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Bsp.:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2+1}{n}\right) = ?$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - (n-1)\cdot(n^2+1)}{(n-1)\cdot n} = \lim \frac{n^3 - (n^3 + n - n^2 - 1)}{(n-1)\cdot n} = \lim \frac{n^3 - n^3 - n + n^2 + 1}{n^2 - n} = \lim \frac{n^2 - n + 1}{n^2 - n}$$

Standardtrick

$$= \lim \frac{\cancel{n^2}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\lim\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{1 - 0 + 0}{1 - 0} = 1$$

↳ ausklammern höchste Potenz
$\Rightarrow$ kürzen

Satz 2.5 (Sandwichtheorem)
Falls für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein festes $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall\, n \in \{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\} \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$

dann konvergiert auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Bsp.: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n}$

$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{ll} \lim a_n = \lim(-\frac{1}{n}) = -\lim(\frac{1}{n}) = -0 = 0 \\ \lim c_n = \lim(\frac{1}{n}) & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(n)}{n}\right) = 0$$

Bemerkung:
Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $a \in \mathbb{R}$ ist und die Funktion f in der Nähe von a keine Sprünge hat ($\rightarrow$ stetig), dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(a)$$

Beispiele:

- $f(x) = \sin(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{n-1}{2n}\pi\right) = \sin\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}\pi\right) = \sin\left(\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}\right)\cdot\pi\right) \overset{ST}{=} \sin\left(\left(\lim \frac{1-\frac{1}{n}}{2}\right)\cdot\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\cdot\pi\right) = 1$$

$f(x) = e^x$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e} = \lim_{n\to\infty} e^{1/n} = e^{\lim \frac{1}{n}} = e^0 = 1$$

Aufgabe A 2.1
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3^n} + \frac{n^2+1}{n^2+2n} \right)$

$= \frac{2}{3} \cdot \lim \left(\frac{1}{3^n} + \frac{n^2+1}{n^2+2n} \right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\lim \frac{1}{3^n} + \lim \frac{n^2+1}{n^2+2n} \right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{3^n}}_{0} + \lim \left(\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}} \right) \right)$

$\to \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= \frac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n-2)^3}{(2n+1)^3} = \lim \left(\frac{n-2}{2n+1} \right)^3 \overset{f(x)=x^3}{=} \left(\lim \frac{n-2}{2n+1} \right)^3 = \left(\lim \frac{1-\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}} \right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

oder: mit bin. Lehrsatz

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n-2)^3}{(2n+1)^3} = \lim\limits_{n\to\infty} = \frac{n^3 + 3n^2 \cdot (-2) + 3n(-2)^2 + (-2)^3}{(2n)^3 + 3 \cdot (2n)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2n \cdot 1^2 + 1^3}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3 - 6n^2 + 12n - 8}{8n^3 + 12n^2 + 6n + 1} \overset{ST}{=} \lim \frac{1 - \overbrace{\frac{6}{n} + \frac{12}{n^2} - \frac{8}{n^3}}^{0}}{8 + \underbrace{\frac{12}{n} + \frac{6}{n^2} + \frac{1}{n^3}}_{0}} = \frac{1}{8}$

→ TODO: nochmal anschauen

Satz 2.6 (Konvergenzkriterien für Folgen)

Notwendig → *i) Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

ii) Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

Bemerkung:

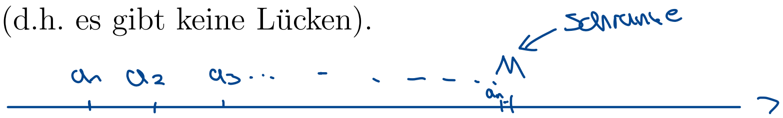
zu i) Die Beschränktheit ist ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz. Deswegen nennt man dieses Kriterium insgesamt auch notwendiges Konvergenzkriterium für Folgen.

(a_n) konvergent $\Rightarrow$ (a_n) beschränkt

Kontraposition: (a_n) nicht beschränkt $\Rightarrow$ (a_n) divergent

↳ Anfang immer schauen ob Folge beschränkt

zu ii) Die Aussage ii) ist ein hinreichendes Konvergenzkriterium für Folgen.
Die Aussage ii) ist gleichbedeutend mit der Vollständigkeit der reellen Zahlen (d.h. es gibt keine Lücken).



i) (a_n) mon. wachsend $\wedge$ beschränkt

ii) wähle kl. obere Schranke M, dann ist der $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$

Bsp.: $a_1 := 2$

$$\boxed{a_{n+1} := \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}} \quad n \geq 1$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{1}{a_1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2} + \frac{1}{a_2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12}$$

$\vdots$

Man kann zeigen: (a_n) ist mon. fallend und beschränkt (vgl. ÜS. 1)

$\Rightarrow \exists a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$$\Rightarrow a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2} \lim a_n + \frac{1}{\lim a_n} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{a}$$

d.h. $a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{a} \quad | - \frac{1}{2}a$

$\frac{1}{2}a = \frac{1}{a} \quad | \cdot a$

$\frac{1}{2}a^2 = 1 \quad | \cdot 2$

$a^2 = 2$

$\Rightarrow a = +\sqrt{2}$ $\rightarrow$ da $\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} > 0$, $-\sqrt{2}$ nicht möglich

Wichtige Grenzwerte: α, q konstant

1) $$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 1, & q = 1 \\ 0, & |q| < 1 \end{cases}$$ $q > 1 \rightarrow$ divergent, immer größer

2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$$ für jedes $q \in \mathbb{R}$

3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 1, & \alpha = 0 \\ 0, & \alpha > 0 \end{cases}$$

4) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{n!} = 0$$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$

5) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$$ für jedes $q > 0$

6) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

7) $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}71828\ldots$$ eulerische Zahl

Def.: (a_n) heißt Nullfolge, falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Es gilt: (a_n) Nullfolge $\Leftrightarrow$ $(|a_n|)$ Nullfolge

Zum Beweis des Katalogs:

5) $$\lim_{n\to\infty} q^{1/n} \underset{\substack{f(x)=q^x \\ \text{stetig}}}{=} q^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = q^0 = 1$$

7) Man kann zeigen, dass $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ mon. wachsend und beschränkt ist. Existenz des Limes mit Satz 2.6 ii)

Bsp.:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n\cdot(n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{3^n}}_{3} \cdot \sqrt[n]{(n^2+1)} = 3\cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1}}_{?} = 3\cdot 1 = 3$$

Denn:

$$= \quad n^2 \leq n^2+1 \leq n^2+n^2 = 2n^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{n^2}}_{a_n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n^2+1}}_{b_n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{2n^2}}_{c_n}$$

mit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n} \overset{6}{=} 1\cdot 1 = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} \overset{5)6)}{=} 1\cdot 1 \underset{\text{theorem}}{\overset{\text{Sandwich-}}{\Rightarrow}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1} = 1$$

Bsp.: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n \cdot (n^2+1)}$

Aufgabe A 2.2

Bestimmen Sie die Grenzwerte für n gegen ∞ (falls diese existieren)

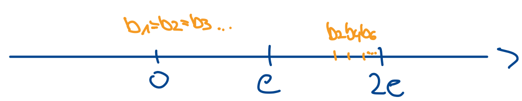
a) $a_n := \sqrt[n]{n^5} \overset{5)}{\Rightarrow} \lim\left(\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}\right) = 1^5 = 1$

b) $b_n := \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n + \left(-1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

$$\overset{7)}{\Rightarrow} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(-\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left((-1)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n = (-1)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \underbrace{\left(1+(-1)^n\right)}_{\begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ 2, & \text{gerade} \end{cases}} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$



Da $\lim\limits_{n\to\infty} 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2e \neq 0$, hat (b_n) keinen Grenzwert (divergent)

c) $c_n := \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

$$3^n \leq 2^n + 3^n \leq 3^n + 3^n = 2 \cdot 3^n$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{3^n}}_{3} \leq \sqrt[n]{2^n+3^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{3^n}}_{=3}$$

Sandwichtheorem

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = 3$$

Beispiel für eine rekursive Folge

$a_0 := 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+2} \quad$ für $n \in \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$

$$\Rightarrow a_0 = 1, \; a_1 = \frac{a_0}{a_0+2} = \frac{1}{3}, \; a_2 = \frac{1/3}{1/3+2} = \frac{1/3}{7/3} = \frac{1}{7}, \; a_3 = \frac{1/7}{1/7+2} = \frac{1/7}{15/7} = \frac{1}{15}, \ldots$$

Vermutungen: • Streng monoton fallend
• beschränkt nach unten durch 0

$\Rightarrow$ konvergent

1) Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}_0: a_n \geq 0$

(IA): $n=0 \quad a_0 = 1 > 0$ ✓

(IS): Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist z.z.: $\underbrace{a_n > 0}_{(IV)} \overset{!}{\Rightarrow} a_{n+1} > 0$

$$a_{n+1} \overset{\text{Rekursion}}{=} \frac{a_n}{a_n+2} = a_n \cdot \frac{1}{\underbrace{a_n+2}_{>0}} \overset{(IV)}{>} 0$$

2) Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}_0: a_{n+1} \leq a_n$

$\boxed{\text{Variante 1: vollst. Induktion}}$

(IA): $n=0 \quad a_1 \leq a_0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq 1$ ✓

(IS): Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist z.z.: $\underbrace{a_{n+1} \leq a_n}_{(IV)} \overset{!}{\Rightarrow} a_{n+2} \leq a_{n+1}$

$$\overset{\text{Rekursion}}{\Longleftrightarrow} \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+2} \leq \frac{a_n}{a_n+2} \quad | \cdot (a_n+2) \cdot (a_{n+1}+2) > 0$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} \cdot (a_n+2) \leq a_n (a_{n+1}+2)$$

$\iff \cancel{a_{n+1}} a_n + 2a_{n+1} \leq \cancel{a_n} a_{n+1} + 2a_n \quad | \cdot \frac{1}{2} > 0$

$\iff a_{n+1} \leq a_n$ nach (IV)

$\boxed{\text{Variante 2: abschätzen}}$

$a_{n+1} \overset{\text{Rek.}}{=} \frac{a_n}{a_n+2} = a_n \cdot \underbrace{\frac{1}{a_n+2}}_{<\frac{1}{2}} < a_n$

3) Mit hinreichenden Konvergenzkriterium folgt die Existenz von $a := \lim_{n\to\infty} a_n$

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim \frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{\lim a_n}{\lim a_n + 2} = \frac{a}{a+2}$$

$\Rightarrow a = \frac{a}{a+2} \quad | \cdot a+2$

$a \cdot (a+2) = a$

$a^2 + 2a = a \quad | -a$

$a^2 + a = 0$

nur relevant, da $a_n \geq 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}_0$

$a(a+1) = 0 \Rightarrow a = 0 \vee a = -1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Behauptung: $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$

Beweis: Wir zeigen: $\frac{|q|^n}{n!} = 0$

Für $|q| \leq 1$ ist das klar, denn $\frac{|q|^n}{n!} \leq \frac{1}{n!}$ und damit

$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|q|^n}{n!} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \leq 0$, qed.

Für $|q| > 1$ sei $m := \lfloor 2|q| \rfloor$

größte ganze Zahl $\leq 2|q|$

Für $n > m$ gilt:

$$0 \leq \frac{|q|^n}{n!} = \underbrace{\frac{|q|}{n}}_{<\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{|q|}{n-1}}_{<\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{|q|}{n-2}}_{<\frac{1}{2}} \cdots \underbrace{\frac{|q|}{m+1}}_{<\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{|q|}{m} \cdots \frac{|q|}{2} \cdot \frac{|q|}{1}}_{=:C \text{ unabhängig von } n}$$

denn $m \leq 2 \cdot |q|$ und $\underbrace{m+1 > 2 \cdot |q|}_{\iff \frac{|q|}{m+1} < \frac{1}{2}}$

$$= C \cdot \frac{|q|}{n} \cdot \frac{|q|}{n-1} \cdots \frac{|q|}{m+1} < C \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-m}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{-m}}_{(2^{-1})^{-m} = 2^m}} = \underbrace{2^m \cdot C}_{\tilde{C}} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \underbrace{\tilde{C} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n}_{c_n}$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$

$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{c}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \tilde{c} \lim_{n\to\infty} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \tilde{c} \cdot 0 = 0$

Sandwichtheorem
$\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \cdot \frac{|q|^n}{n!} = 0$ ✓

	Explizite Folge	**Rekursive Folge**
Beispiel	$a_n := \frac{2n-5}{n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$	$a_0 := 1,\ a_{n+1} := \frac{a_n}{a_n+2}$ für $n \in \mathbb{N}_0$
Beschränktheit nach unten z.z. $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq m$ für ein $m \in \mathbb{R}$ nach oben z.z. $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq M$ für ein $M \in \mathbb{R}$ insgesamt z.z. $\forall n \in \mathbb{N}: \lvert a_n\rvert \leq K$ für ein $K > 0$	m (bzw. M bzw. K) gegeben: Falls falsch, reicht ein Gegenbeispiel. Sonst Ungleichung nach n Auflösung und überprüfen, ob das für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. m (bzw. M bzw. K) nicht gegeben: m etc. als Variable stehen lassen, Ungleichung lösen und am Ende der Rechnung falls möglich m etc. passend wählen	m (bzw. M bzw. K) gegeben: Falls falsch, reicht ein Gegenbeispiel. Sonst mit vollständiger Induktion. Manchmal kann auch eine Abschätzung einfacher sein.
Monotonie wachsend z.z. $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ a_{n+1} - a_n \geq 0$ fallend z.z. $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ a_{n+1} - a_n \leq 0$	Falls nicht monoton, reicht ein Gegenbeispiel. Sonst auflösend der entsprechenden Ungleichung Manchmal ist es einfacher die Aussage über eine Abschätzung von $a_{n+1} - a_n$ zu zeigen	Falls nicht monoton, reicht ein Gegenbeispiel. Sonst mit vollständiger Induktion. Manchmal kann die Aussage auch über eine Abschätzung von $a_{n+1} - a_n$ gezeigt werden (unter Verwendung der Schranken m etc.)
Konvergenz/Grenzwert $\exists a \in \mathbb{R}:\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$	Existenz über hinreichendes Konvergenzkriterium möglich, oder durch Berechnung des Grenzwertes (wie im Abschnitt Grenzwerte)	Existenz muss über hinreichendes Konvergenzkriterium gezeigt werden, erst dann kann der Grenzwert berechnet werden, indem man verwendet, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a$

Aufgabe A 2.3
Gegeben sei die Folge:

$$a_n := \begin{cases} 10 & \text{für } n = 0 \\ \frac{a_{n-1}}{3} + \frac{1}{2} & \text{für } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Folge auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz.

$a_0 = 10$, $a_1 = \frac{a_0}{3} + \frac{1}{2} = \frac{10}{3} + \frac{1}{2} = \frac{26}{6}$, $a_2 = \frac{23}{18} + \frac{1}{2} = \frac{32}{18} = \frac{16}{9}$, $a_3 = \frac{16}{27} + \frac{1}{2} = \frac{59}{54}$, ...

Vermutungen:

- (a_n) monoton fallend
- (a_n) nach unten beschränkt durch $\frac{1}{2}$

1) Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}_0: a_n > \frac{1}{2}$

Beweis durch Induktion.

(IA) $n = 0$; $a_0 = 10 \geq \frac{1}{2}$ ✓

(IS) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$: $\underbrace{a_n \geq \frac{1}{2}}_{IV} \Rightarrow a_{n+1} \geq \frac{1}{2}$

$a_{n+1} \geq \frac{1}{2} \overset{\text{Rek.}}{\Longleftrightarrow} \frac{a_n}{3} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \overset{IV}{\Longleftarrow} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ ✓

2) Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}_0: a_{n+1} \leq a_n$

Beweis durch Induktion.

(IA) $n=0$; $a_1 = \frac{23}{6} \leq 10 = a_0$ ✓

(IS) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$: $\underbrace{a_{n+1} \leq a_n}_{IV} \Rightarrow a_{n+2} \leq a_{n+1}$

$a_{n+2} \leq a_{n+1} \overset{\text{Rek}}{\Longleftrightarrow} \frac{a_{n+1}}{3} + \frac{1}{2} \leq \frac{a_n}{3} + \frac{1}{2} \overset{|-\frac{1}{2}}{\Longleftrightarrow} \frac{a_{n+1}}{3} \leq \frac{a_n}{3} \overset{|\cdot 3 > 0}{\Longleftrightarrow} a_{n+1} \leq a_n$ ✓ nach (IV)

Beweisvariante direkte Abschätzung:

$a_{n+1} \leq a_n \overset{\text{Rek}}{\Longleftrightarrow} \frac{a_n}{3} + \frac{1}{2} \leq a_n \quad | - \frac{a_n}{3}$

$\Longleftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{3} a_n \quad | \cdot \frac{3}{2} > 0$

$\Longleftrightarrow \frac{3}{4} \leq a_n$

Dies müsste noch wie in Beh. 1) bewiesen werden

Definition 2.7 (Nullfolge)
Eine Folge $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *nennt man eine* Nullfolge.

2.2 Die Landauschen Symbole

Die Landauschen Symbole (auch Landau-Symbole) machen Aussagen über das Wachstum von Folgen (oder auch Funktionen). Sie werden zum Beispiel bei der Laufzeitanalyse von Algorithmen eingesetzt. Die Laufzeit von einem Algorithmus kann man als eine Folge $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten, wobei der Index n die „Größe der Eingabe“ bedeutet, oft in der Anzahl von Bit gemessen.

Definition 2.8 (Landau-Symbole)
Es seien zwei Folgen $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegeben.*

i) Die Folge $\left(a_n\right)$ *ist* groß-O *von* $\left(b_n\right)$ *(geschrieben* $a_n = O(b_n)$*), falls die Folge der Quotienten* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *beschränkt ist (d.h. falls ein* $K > 0$ *existiert, sodass* $\forall\, n \in \mathbb{N}:$ $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \le K$*).*
Anschaulich heißt dies, dass die Folge $\left(|a_n|\right)$ *höchstens so schnell wächst wie die Folge* $\left(|b_n|\right)$*.*

ii) Die Folge $\left(a_n\right)$ *ist* klein-O *von* $\left(b_n\right)$ *(geschrieben* $a_n = o(b_n)$*), falls die Folge der Quotienten* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *eine Nullfolge ist (d.h.* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$*)*
Anschaulich heißt dies, dass die Folge $\left(|a_n|\right)$ *langsamer wächst als die Folge* $\left(|b_n|\right)$*.*

Folg.: $a_n = o(b_n) \Rightarrow a_n = O(b_n)$

Beispiele:

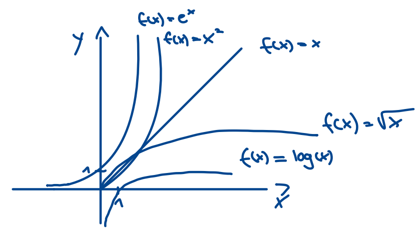
1) $a_n = 26n^4 + 13n^3 - 138n + 17$

$a_n = O(n^4)$, denn $\frac{a_n}{b_n} = 26 + \frac{13}{n} - \frac{138}{n^3} + \frac{17}{n^4}$

natürlich auch $a_n = O(n^5)$

$a_n = o(n^5)$, denn $\frac{a_n}{b_n} = \frac{26}{n} + \frac{13}{n^2} - \frac{138}{n^4} + \frac{17}{n^5} \Rightarrow$ Nullfolge

oder auch $a_n = o\left(n^{4+\frac{1}{100}}\right)$



2) $a_n = 2n + 7\log(n) + 110\sqrt{n} + 3\sqrt{n \cdot \log(n)}$

$a_n = O(n)$

$a_n = o(n^2)$, $a_n = o(n^{1,1})$

3) $a_n = o(n^\nu) \Rightarrow a_n = O(n^\nu)$

$a_n = o(n^\beta) \Rightarrow a_n = O(n^{\beta+\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$

Bemerkung: Für Landau-Symbole gilt:

- Konstante Faktoren sind unwichtig
- Terme niederer Ordnung sind unwichtig

Achtung: Landau-Symbole machen Aussagen für $n \to \infty$, d.h. für endliche Werte von n können Vorfaktoren oder Terme niedrigerer Ordnung durchaus eine Rolle spielen. Z.B. $a_n = 10^{100} \cdot n = O(n)$ in der Praxis ist aber $n < 10^{100}$.

Zur Beschreibung des Wachstumsverhalten von Folgen sind folgende Bezeichnungen üblich, wobei die Tabelle nach aufsteigender Wachstumsgeschwindigkeit sortiert ist:

Vergleichsfolge	Beschreibung
$O(1)$	konstant
$O(\log n)$	logarithmisch
$O\big((\log n)^k\big)$	logarithmisch polynomial
$O(n)$	linear
$O(n \log n)$	logarithmisch linear
$O(n^2)$	quadratisch
$O(n^3)$	kubisch
$O(n^k)$, $k \geq 1$ fest	polynomial
$O(a^n)$, $a > 1$ fest	exponentiell

effizient

-> für prim algo wichtig

ineffizient ↓

Bemerkungen:

1)
- Man nennt einen Algorithmus *effizient*, wenn seine Komplexität im „worst-case“ höchstens polynomial ist.
- Ist die Komplexität des Algorithmuses im „worst case“ exponentiell, dann nennt man ihn *ineffizient*.
- Es werden in der Praxis auch ineffiziente Algorithmen verwendet. Z.B. wenn kein besserer Algorithmus vorhanden ist, wenn n nicht sehr groß ist oder wenn der „worst case“ gar nicht oder nur sehr unwahrscheinlich auftritt. Interessanter wäre der „average case“ (mittlerer Fall, typischer Fall), diese Laufzeit ist aber oft sehr schwer oder auch gar nicht zu bestimmen.

$x :=$ Faktor $\Rightarrow x = \frac{a_{10n}}{a_n}$

2) **Fester Prozessor, Vergrößerung des Problems um Faktor 10**

Komplexität d. Algorithmus	Verlängerung der Laufzeit um Faktor
$O(n)$	10
$O(n^2)$	100
$O(2^n)$	2^{9n}

$a_n = n \Rightarrow x = \frac{10n}{n} = 10$

$a_n = n^2 \Rightarrow x = \frac{(10n)^2}{n} = \frac{10^2 n^2}{n^2} = 100$

$a_n = 2^n \Rightarrow x = \frac{2^{10n}}{2^n} = 2^{9n}$

$\hookrightarrow \left(\frac{2^{10}}{2}\right)^n = \left(\frac{\cancel{2} \cdot 2 \dots}{\cancel{2}}\right)^n = (2^9)^n = 2^{9n}$

$\frac{a^k}{a^1} = a^{k-1}$

$\Rightarrow$ Bsp. $n = 100 \Rightarrow 2^{9n} \approx 10^{270}$

Feste Laufzeit, um Faktor 100 besserer Prozessor

	Komplexität d. Algorithmus	Vergrößerung der Problemgröße	
i)	$O(n)$	100	
ii)	$O(n^2)$	10	
iii)	$O(2^n)$	$1+\frac{6{,}644}{n}$	(bringt fast nichts)

$x :=$ Faktor $\Rightarrow \underset{\uparrow \text{ Laufzeit alter Prozessor}}{a_n} = \frac{a_{xn}}{\underset{\uparrow \text{ neuer Prozessor}}{100}} \Leftrightarrow a_{xn} = 100 a_n$

i) $a_n = n \Rightarrow xn = 100n \overset{|\cdot\frac{1}{n}}{\Rightarrow} x = 100$

ii) $a_n = n^2 \Rightarrow (x\cdot n)^2 = x^2 \cdot n^2 = 100n^2 \overset{|\cdot\frac{1}{n^2}}{\Rightarrow} x^2 = 100 \overset{\sqrt{\ }}{\Rightarrow} x = 10$

iii) $a_n = 2^n \Rightarrow 2^{xn} = 100 \cdot 2^n \overset{|:2^n}{\Rightarrow} \underbrace{2^{xn-n}}_{2^{(x-1)n}} = 100 \overset{|\log_{(2)}}{\Rightarrow} (x-1)n = \log_2(100) \overset{|:n,+1}{\Rightarrow} x = 1 + \frac{\log_2(100)}{n}$

$\frac{2^{xn}}{2^n} = 2^{xn-n}$

$= 1 + \frac{6{,}644}{n}$

3) Als die Komplexität eines Problems definiert man die Komplexität des *bestmöglichen* Algorithmus, der das Problem löst.

2.3 Konvergente/Divergente Reihen

Satz 2.9 (Endliche geometrische Reihe)
Für alle $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Beweis: Über vollständige Induktion

Beispiel
Ein Autohändler verkauft ein gebrauchtes Auto. Der Käufer hat zwei Zahlungsweisen zur Auswahl: 8000 € sofort oder 6 vorschüssige Jahresraten (also 1.Zahlung sofort) zu je 1500 €.
Welche Zahlungsweise ist für den Verkäufer besser, wenn er auf der Bank einen Zins von 3% bekommt?

Beweis durch Trick:
$$S := 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n$$
$$\Rightarrow q \cdot S = q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}$$
$$\Rightarrow S - q \cdot S = 1 - q^{n+1} = (1-q) \cdot S \Rightarrow S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Beispiel:

Zinssatz 3% $\Rightarrow$ Zinsfaktor $q = 1 + \frac{3}{100} = 1{,}03$

Sofortzahlung

Wert nach 5 Jahren: $8000 \cdot q^5 = 8000 \cdot 1{,}03^5 = 9274{,}19$ €

Ratenzahlung

Wert nach 5 Jahren:

$$1500 \cdot q^5 + 1500 \cdot q^4 + 1500 \cdot q^3 + 1500 \cdot q^2 + 1500 \cdot q + 1500$$
$$= 1500 \cdot \sum_{k=0}^{5} q^k = 1500 \cdot \frac{1-q^6}{1-q} = 1500 \cdot \frac{-0{,}194}{-0{,}03} = 9702{,}61 €$$

Für den Verkäufer ist die Rentenzahlung besser.

Definition 2.10 (Unendliche Reihen)
Sei die Folge (A_k) gegeben. Die Folge (S_n) der Partialsummen *ist definiert durch:*

$S_1 = A_1$, $S_2 = A_1 + A_2$, ...
$$S_n := \sum_{k=1}^{n} A_k$$

Man nennt (S_n) auch unendliche Reihe *mit den Gliedern A_k (geschrieben $\sum A_k$ oder $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$).*
Wenn die Folge (S_n) konvergiert, nennt man auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ konvergent und $S := \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$ ist der Wert der Reihe.

Bemerkung: Unendliche Reihen können bei einem beliebigen Index $j \in \mathbb{Z}$ beginnen ($\sum_{k=j}^{\infty} A_k$), häufig ist $j = 0$ oder $j = 1$.

Satz 2.11 (Unendliche geometrische Reihe)
Für die (unendliche) geometrische Reihe gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad \textit{divergent für } |q| \geq 1$$
$$S = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \textit{für } |q| < 1$$

Bew.: Nach Satz 2.9 gilt für $q \neq 1$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Fall 1: $|q| < 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\lim q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}$

Fall 2: $|q| > 1$

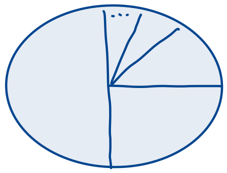
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ divergiert, da auch (q^n) divergiert

Fall 3: $q = 1$

$\Rightarrow S_n = n+1 \Rightarrow (S_n)$ divergiert

Fall 4: $q = -1$

$\Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = 1-1+1-1\pm\ldots \begin{cases} 1, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$



$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

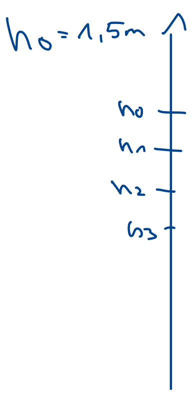
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$$

Andere Möglichkeit:

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Beispiel:
Ein Gummiball springt bei einfachem Fallenlassen bis zu einer Höhe von 0.9 der ehemaligen Höhe zurück. Er wird nun aus einer Höhe von 1.5 Meter fallen gelassen und so lange springen gelassen, bis er schließlich liegen bleibt. Wie viele Meter hat der Ball dabei zurückgelegt?



$h_1 = 0{,}9 \cdot h_0$

$h_2 = 0{,}9 \cdot h_1 = 0{,}9^2 \cdot h_0$

$h_3 = \dots$

Zurückgelegte Strecke:

$h_0 + 2h_1 + 2h_2 + \dots$

$= h_0 + 2h_0 \cdot 0{,}9 + 2h_0 \cdot 0{,}9^2 + 2h_0 \cdot 0{,}9^3 + \dots$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0{,}9^k = \frac{1}{1-0{,}9} = 10$$

$$= h_0 + 2h_0 \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} 0{,}9^k}_{\sum_{k=0}^{\infty} 0{,}9^k - 1} = h_0 + 2h_0(10-1) = 19h_0 = 19 \cdot 1{,}5 = 28{,}5 \text{ [m]}$$

Satz 2.12 (Konvergenz-/Divergenzkriterien für Reihen)

i) Notwendiges Kriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \text{ konvergent } \Rightarrow \lim_{k\to\infty} A_k = 0$$

(Alternative Formulierung (A_k) *konvergiert nicht gegen* $0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A_k$ *divergent)*

ii) Leibniz-Kriterium

Wenn (B_k) *eine monoton fallende Nullfolge ist, so konvergiert die alternierende Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^k B_k}_{A_k}$.

iii) Vergleichskriterium

Es sei $|A_k| \leq B_k$ *für alle* $k \geq k_0$. *Dann gilt*

a) Majorantenkriterium Gilt ganz allgemein:

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k \text{ konvergent} \Longrightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} |A_k| \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} A_k \text{ konvergent.}}$$

b) Minorantenkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} |A_k| \text{ divergent} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} B_k \text{ divergent.}$$

iv) Wurzelkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|A_k|} = w \begin{cases} < 1 \Rightarrow & \sum_{k=0}^{\infty} |A_k| \text{ konvergent, } \sum_{k=0}^{\infty} A_k \text{ konvergent} \\ = 1 \Rightarrow & \text{lässt keine Schlüsse über Konvergenz/Divergenz von} \\ & \sum_{k=0}^{\infty} |A_k| \text{ bzw. } \sum_{k=0}^{\infty} A_k \text{ zu} \\ > 1 \Rightarrow & \sum_{k=0}^{\infty} |A_k| \text{ divergent, } \sum_{k=0}^{\infty} A_k \text{ divergent} \end{cases}$$

v) Quotientenkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{A_{k+1}}{A_k} \right| = q \begin{cases} < 1 \Rightarrow & \sum_{k=0}^{\infty} |A_k| \text{ konvergent, } \sum_{k=0}^{\infty} A_k \text{ konvergent} \\ = 1 \Rightarrow & \text{lässt keine Schlüsse über Konvergenz/Divergenz von} \\ & \sum_{k=0}^{\infty} |A_k| \text{ bzw. } \sum_{k=0}^{\infty} A_k \text{ zu} \\ > 1 \Rightarrow & \sum_{k=0}^{\infty} |A_k| \text{ divergent, } \sum_{k=0}^{\infty} A_k \text{ divergent} \end{cases}$$

Bei diesen Kriterien handelt es sich um Anwendungen der Ungleichskriterium mit der geometr. Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} w^k$ bzw $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ als Vergleichsreihe

Zum notwendigen Kriterium

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = \lim_{n\to\infty} S_{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{n+1} - S) = 0$$

Dieses Kriterium kann nur zum Nachweis der Divergenz benutzt werden.

Man sollte es immer erst überprüfen.

Beispiele:

1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{10k+1}$?

$$A_k = \frac{k}{10k+1} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{10k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{10-\frac{1}{k}} = \frac{1}{10-0} = \frac{1}{10} \neq 0$$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{10k+1}$ divergent

2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$?

$$A_k = \frac{1}{k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k=\infty} \frac{1}{k} = 0$$

$\Rightarrow$ hier nützt das notwendige Kriterium nichts!

3) $\sum_{k=0}^{\infty} \sin(k)$?

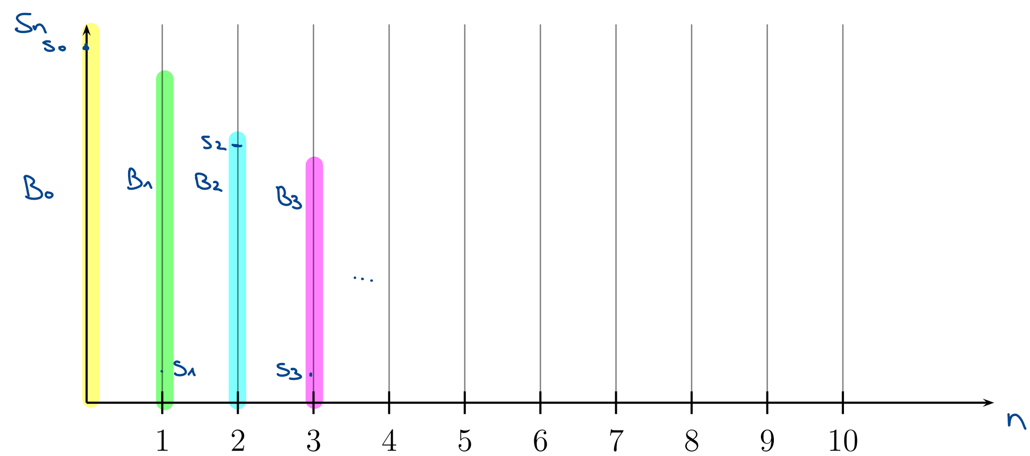
$\lim_{k=\infty} \sin(x)$ existiert nicht

$\Rightarrow$ divergent

Zum Leibniz-Kriterium

$\forall k \in \mathbb{N}_0 : B_{k+1} \le B_k$ monoton fallend; $\lim\limits_{k\to\infty} B_k = 0$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k B_k$$



$S_1 \le S_3 \le S_5 \le S_7 \le \dots \le S_{2n-1} \le S_{2n} \le \dots S_4 \le S_2 \le S_0$

$(S_{2n-1})_n$ ist mon. wachsend und nach oben beschränkt durch S_0

$\Rightarrow$ es existiert $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} =: T \to$ Grenzwert

$(S_{2n})_n$ ist mon. fallen und nach unten beschränkt durch S_1

$\Rightarrow$ es existiert $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} =: \tilde{T}$

$\Rightarrow \tilde{T} \ge T$

$$\tilde{T} - T = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{A_{2n}}_{(-1)^{2n} B_{2n} = B_{2n}}$$

D.h.:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = T$

Beispiel

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \underbrace{\frac{1}{k}}_{B_k}$$ konvergent nach Leibniz, da:

Untersuche, ob $\left(\frac{1}{k}\right)$ eine mon. fallende Nullfolge ist:

Mon. $B_{k+1} \leq B_k$

$\Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} \quad | \, k(k+1) > 0$

$\Leftrightarrow k \leq k+1 \quad | -k$

$\Leftrightarrow 0 \leq 1$ ✓

Nullfolge

$\lim_{k\to\infty} B_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$

Also konvergiert. $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$

$\overset{\text{auch}}{\underset{\text{da} \cdot (-1)}{\Rightarrow}} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$

alternierende harmonische Reihe

Zum Minoranten-kriterium

Es gelte $|A_k| \leq B_k \; \forall k$

Ferner $\sum_{k=0}^{\infty} |A_k|$ divergent $\Rightarrow$

$\left(\sum_{k=0}^{n} |A_k|\right)_n$ mon. wachsend $\Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} |A_k|\right)_n$ unbeschränkt

wegen $\sum_{k=0}^{n} B_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |A_k|$ ist auch $\left(\sum_{k=0}^{n} B_k\right)_n$ unbeschränkt

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} B_k$ ist divergent

Beispiel $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots =: \sum_{k=1}^{\infty} B_k$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ mal} = \frac{1}{2}} + \dots =: \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{ oder } \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|$$

$\dots$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{2^n} A_k = 1 + \frac{n}{2}$

Beispiel
$$\begin{pmatrix} n=2 & \sum_{k=1}^{4} & 1 + \frac{2}{2} \\ n=3 & \sum_{k=1}^{8} & 1 + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$\left(1 + \frac{n}{2}\right)$ ist unbeschränkt $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k$ divergent

$\overset{\text{Minorantenkrit.}}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ harmonische Reihe ist divergent!

Das Majorantenkriterium ist die Kontraposition des Minorantenkriterium.

<u>Beispiel</u>

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k+1} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ konvergent nach Majorantenkrit., denn

$\frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \geq \frac{1}{2^k+1}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ <u>konvergierte geometrische Reihe</u>.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k-1}$$

Hier gilt: $\frac{1}{2^k-1} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \forall k \geq 1$

$$\Leftrightarrow 2^{k-1} \leq \overset{\to 2\cdot 2^{k-1}}{2^k} - 1 \quad \Big| -2^{k-1}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2^{k-1} - 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2^{k-1}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \overset{l:=k-1}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l$ geom. Reihe mit $q = \frac{1}{2}$

Beispiele Quotientenkriterium

$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k!}}_{A_k}$ konvergent, denn:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{A_{k+1}}{A_k}\right| = \lim\left|\frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}}\right| = \lim\frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim\frac{1}{\underbrace{\cancel{(k+1)}!}_{k!\cdot(k+1)}}\cdot\frac{\cancel{k!}}{1}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1}\cdot 1 = 0 =: q < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots \overset{!}{=} e$$

Allgemeiner: $\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\frac{x^k}{k!}}_{A_k}$ $(x\in\mathbb{R}\text{ fest})$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{A_{k+1}}{A_k}\right| = \lim\left|\frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}}\right| = \lim\frac{\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{|x|^k}{k!}} = \lim\frac{|x|^{k+1}}{\cancel{(k+1)!}}\cdot\frac{\cancel{k!}}{\cancel{|x|^k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{|x|^{k+1}}{k+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{|x|}{k+1} = |x|\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1} = |x|\cdot 0 =: q<1$$

$\hookrightarrow$ es gilt: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x$

Beispiel Wurzelkriterium

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{2^k}$ konvergent, denn:

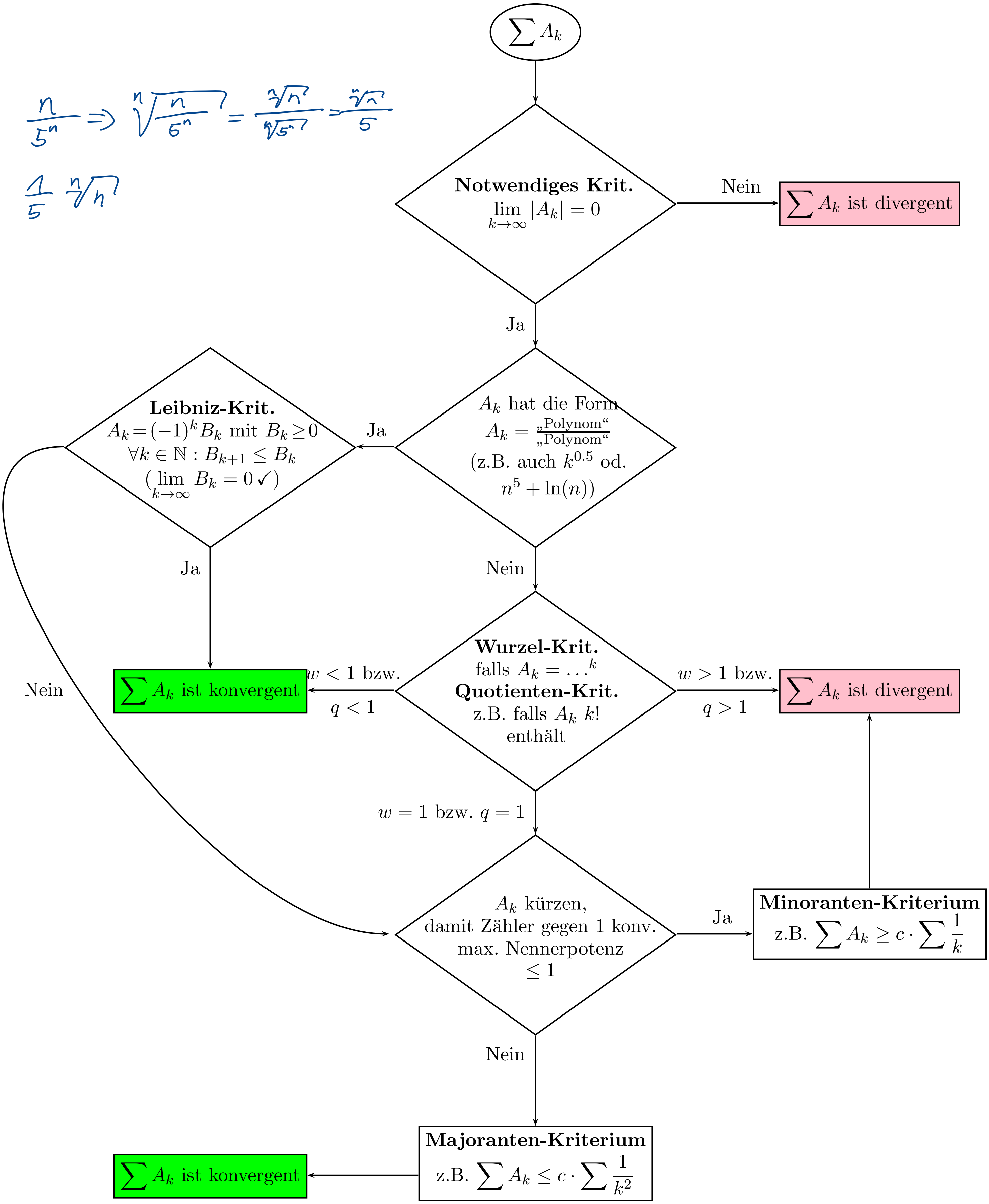
$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|A_k|} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{k}{2^k}\right|} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{k}{2^k}} = \lim\frac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k]{2^k}\,(=2)} = \frac{1}{2}\underbrace{\lim\sqrt[k]{k}}_{1}$$

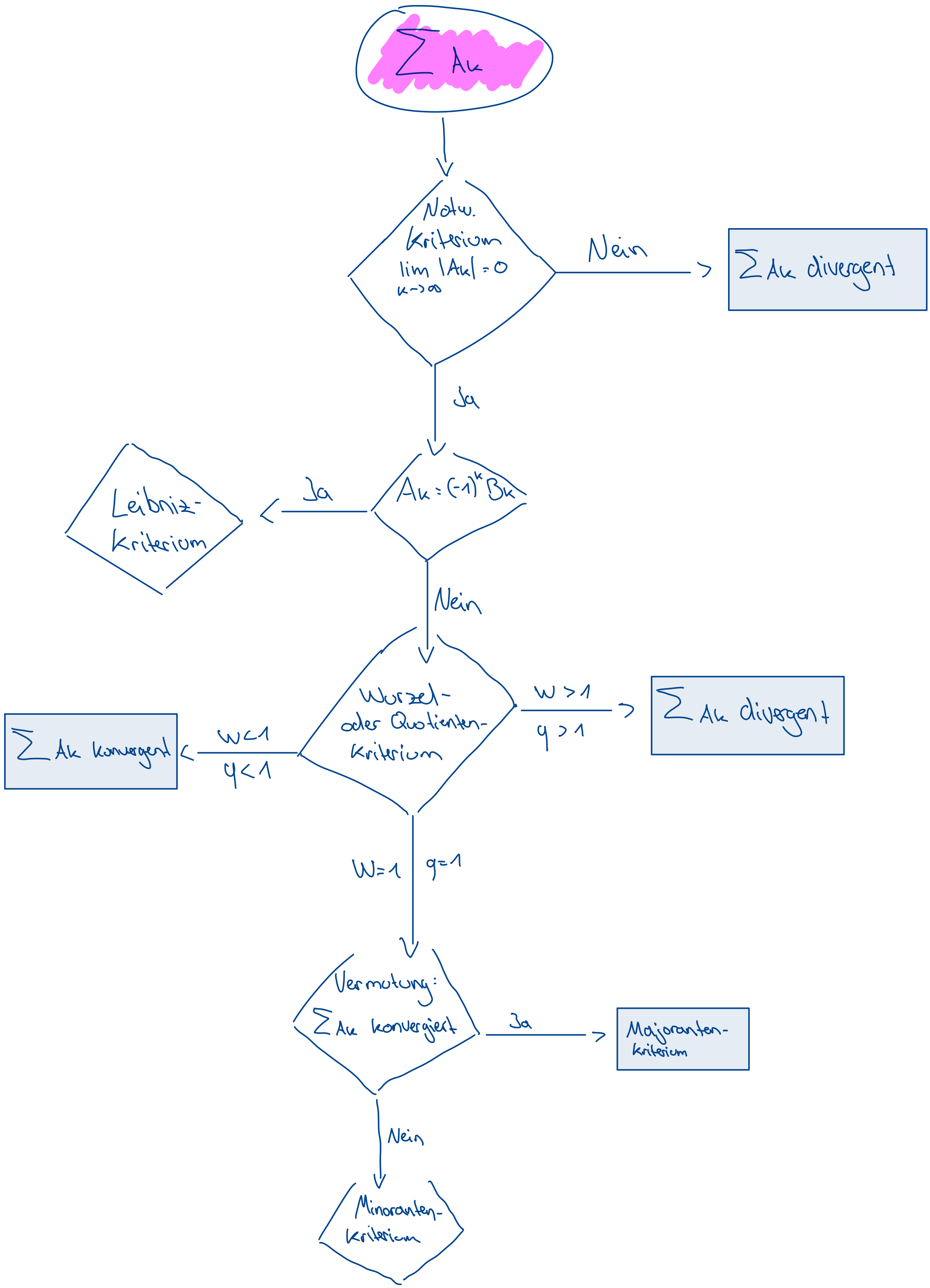
$$= \frac{1}{2} =: w < \frac{1}{2}$$

Geht auch mit Quotientenkriterium (Übung)

$\frac{n}{5^n} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{n}{5^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{5^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{5}$

$\frac{1}{5} \sqrt[n]{n}$





∑ Ak
Notw. Kriterium lim |Ak| = 0 k->∞
Nein
∑ Ak divergent
Ja
Ak = (-1)^k Bk
Ja
Leibniz-Kriterium
Nein
Wurzel- oder Quotienten-Kriterium
w > 1
q > 1
∑ Ak divergent
w < 1
q < 1
∑ Ak konvergent
W = 1
q = 1
Vermutung: ∑ Ak konvergiert
Ja
Majoranten-Kriterium
Nein
Minoranten-Kriterium

Wichtige Reihen

Harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{ist divergent}$$

Alternierende harmonische Reihe:

man fängt eher mit positiv an

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{ist konvergent} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Verallgemeinerte harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \begin{cases} \text{konvergent für} & \alpha > 1 \ \text{(Zetafunktion)} \\ \text{divergent für} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Alternierende verallgemeinerte harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \quad \text{ist konvergent für alle } \alpha > 0 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^\alpha}$$

e-Funktion

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{konvergiert für alle } x \in \mathbb{R}$$

Beispiele für Kriteriumswahl

1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+n^2\cdot\sin(n)}{n^5}$

Aufgabe A 2.4

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$ konvergiert, da:

[Notw. Kriterium : $A_n = \frac{1}{2+3^n} \Rightarrow \frac{1}{3^n} = \lim A_n = 0$]

Quotientenkriterium: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| = \frac{\frac{1}{2+3^{n+1}}}{\frac{1}{2+3^n}} = \lim \frac{1}{2+3^{n+1}} \cdot \frac{2+3^n}{1} = \lim \frac{2+3^n}{2+3^{n+1}}$

$\overset{\cdot \frac{1}{3^{n+1}}}{=} \lim \frac{\overset{\to 0}{\frac{2}{3^{n+1}}} + \frac{1}{3}}{\underset{\to 0}{\frac{2}{3^{n+1}}} + 1} = \longrightarrow \frac{\lim \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{1}{3}}{\lim \frac{2}{3^{n+1}} + 1} = \frac{0+\frac{1}{3}}{0+1} = \frac{1}{3}$, $q < 1$ ✓

<u>Wurzelkriterium</u>: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|A_n|} = \lim \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2+3^n}\right|}$

$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{2}\cdot 3}}_{\lim_{n\to\infty}(\text{"}) = \frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2\cdot 3^n}} \leq \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{2+3^n}}}_{\sqrt[n]{|A_n|}} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Sandwich

$\Rightarrow \lim \sqrt[n]{|A_n|} = \frac{1}{3} =: w < 1$

Majorantenkriterium:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ konvergiert (geometrische Reihe)}$$

1) $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{k!}{(2k)!}}_{A_k}$ konvergiert, da:

Quotientenkriterium:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{A_{k+1}}{A_k}\right| = \lim \frac{\frac{(k+1)!}{(2(k+1))!}}{\frac{k!}{(2k)!}} = \lim \frac{\cancel{(k+1)}!}{(2k+2)!}\cdot\frac{(2k)!}{\cancel{k!}} = \lim \frac{\overset{1}{\cancel{k+1}}}{(2k+1)\underset{2(k+1)}{\cancel{(2k+2)}}} = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow q = 0 < 1$ ✓

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n^2\cdot\sin(n)}{n^5}$ konvergiert, da: $\frac{\cancel{n^3}}{\cancel{n^5}} + \dots \to \frac{1}{n^2} + \dots$

[Notw. Kriterium: $A_n = \frac{n^3+n^2\cdot\sin(n)}{n^5} = \underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}} + \underset{\to 0}{\frac{1}{n^3}}\cdot \underset{-1\le\sin(n)\le 1}{\sin(n)} \Rightarrow \lim A_n = 0$]

Majorantenkriterium:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+n^2\cdot\sin(n)}{n^5} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+n^2\cdot n}{n^5} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3}{n^5} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\frac{1}{n^2}}{\underbrace{\frac{n^3}{n^5}}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$ ✓

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^2}$ divergiert, nach Notw. Kriterium

$\lim_{n\to\infty}(A_n) \to \lim \sqrt[n]{n^2} = \lim \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$

c) $\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \underbrace{\frac{k^2}{k^3+1}}_{B_k}}_{A_k}$ konvergiert nach Leibniz-Kriterium:

Notwend. Kriterium $\to$ 0Folge durch ST

1) $\lim_{k\to\infty} B_k = \lim \frac{k^2}{k^3+1} \overset{ST}{=} \lim \frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k^3}} = \frac{0}{1} = 0$ ✓

2) (B_k) mon. fallend: $\forall k \in \mathbb{N}: B_{k+1} \leq B_k$

$\iff \frac{(k+1)^2}{(k+1)^3+1} \leq \frac{k^2}{k^3+1}$ | kürzen LS: $\frac{1}{(k+1)^2}$ kürzen RS: $\frac{1}{k^2}$

$\iff \frac{1}{k+1+\frac{1}{(k+1)^2}} \leq \frac{1}{k+\frac{1}{k^2}}$

$\iff \cancel{k}+1+\frac{1}{(k+1)^2} \geq \cancel{k}+\frac{1}{k^2}$ ✓ da $\frac{1}{k^2} \leq 1$

Bem. Aus den Rechenregeln für Folgengrenzwerte folgt sofort:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} B_k = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \pm B_k)$$

$$c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k = \sum_{k=0}^{\infty} c \cdot A_k$$

Satz 2.13 (Cauchy-Produkt)
Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} |A_k|$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} |B_k|$ *konvergent. Dann ist* auch $\sum_{k=0}^{\infty} |C_k|$ konvergent

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k$$ $\longrightarrow$ Grenzwert = Produkt der beiden

mit den Gliedern $C_k = \sum_{n=0}^{k} A_n B_{k-n}$.

Bem.:
Das Cauchy-Produkt kann selbstverständlich auch dann angewendet werden, wenn eine der beiden Reihen endlich ist bzw. sogar beide Reihen endlich sind.

Beispiel
$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \cdot (b_0 + b_1 + b_2) = \underbrace{a_0 b_0}_{C_0} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{C_1} + \underbrace{(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)}_{C_2} + \underbrace{(a_3 \cdot b_0)}_{C_3}$

2.4 Potenzreihen und elementare Funktionen

Definition 2.14 (Potenzreihe) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

Die (formale) Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *heißt* Potenzreihe *mit Entwicklungspunkt* x_0 *und Koeffizienten* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Bemerkung: Für den ganzzahligen Exponenten $n = 0$ setzt man $0^n = 0^0 = 1$.

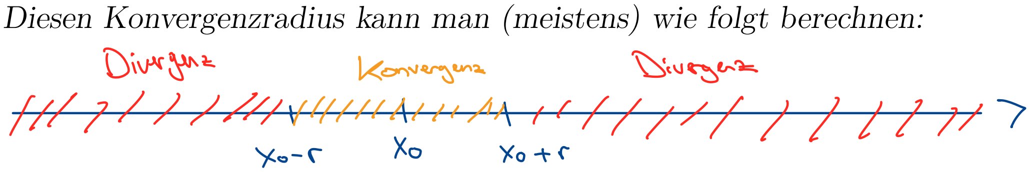
Satz 2.15 (Konvergenzradius einer Potenzreihe)
Für jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *existiert ein eindeutig bestimmter* Konvergenzradius r, $(0 \leq r \leq \infty)$, *für den gilt:*

i) *Ist* $r = 0$, *so konvergiert die Reihe nur für* $x = x_0$.

ii) *Ist* $0 < r < \infty$, *so ist die Reihe konvergent für alle* x *mit* $|x - x_0| < r$ *und divergent für alle* x *mit* $|x - x_0| > r$.

iii) *Ist* $r = \infty$, *so konvergiert die Reihe für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Diesen Konvergenzradius kann man (meistens) wie folgt berechnen:



Quotientenmethode bei Fakultäten

Existiert $q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, *so ist der Konvergenzradius* $r = \frac{1}{q}$

Wurzelmethode bei Potenzen

Existiert $w = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, *so ist der Konvergenzradius* $r = \frac{1}{w}$

wobei hier „$\frac{1}{0} := \infty$*“ und „*$\frac{1}{\infty}:=0$*“ gelten soll.* !

$\hookrightarrow$ bester Fall $\quad$ $\hookrightarrow$ schlechtester Fall

Bemerkung: Sei $0 < r < \infty$

Beweis: Mit Quotientenkriterium für $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n (x-x_0)^n}_{A_n}$; $Q := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right|$

$$Q := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n (x-x_0)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}| \, |\cancelto{x-x_0}{(x-x_0)^{n+1}}|}{|a_n| \, |\cancelto{1}{(x-x_0)^n}|} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}_{q} \cdot |x-x_0|$$

Die Potenzreihe konvergiert, wenn

$$q \cdot |x-x_0| = Q < 1 \iff |x-x_0| < \frac{1}{q} = r$$

Die Potenzreihe divergiert, wenn

$$q \cdot |x-x_0| = Q > 1 \iff |x-x_0| > \frac{1}{q} = r$$

Wenn

$q \cdot |x-x_0| = Q = 1 \iff |x-x_0| = \frac{1}{q} = r$, muss gesondert untersucht werden.

Definition 2.16 (Konvergenzbereich)
Der Konvergenzbereich *einer Potenzreihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *ist*

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ ist konvergent} \right\}$$

Es gilt:

$$]x_0 - r, x_0 + r[\;\subseteq\; K \;\subseteq\; [x_0 - r, x_0 + r]$$

Beispiel

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x - \underset{x_0}{0})^n$

Quotientenmethode:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$$

$\Rightarrow$ Konvergenzradius: $\frac{1}{q} = \frac{1}{0} \Rightarrow r = \infty$

$\Rightarrow$ Konvergenzbereich $K = \mathbb{R}$

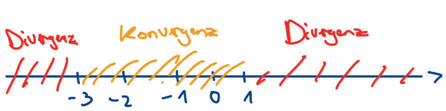
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n$ nicht in Standardform!

$$\frac{(x+1)^n}{2^n} = \frac{1}{2^n} \cdot (x-(-1))^n \Rightarrow a_n = \frac{1}{2^n}, \; x_0 = -1$$

Wurzelmethode

$$w = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $r = \frac{1}{w} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$



Für den Konvergenzbereich K gilt:

$]-3,1[\subseteq K \subseteq [-3,1]$

Für $x=-3 \wedge x=1$ muss man die Reihe gesondert untersucht werden

$x=-3 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-3+1}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

divergiert (geom. Reihe mit $q=-1$)

$x=1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+1}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1^n$

divergiert (geom. Reihe mit $q=1$)

Insgesamt: $K =]-3,1[$

Bemerkung Für die Randpunkte des Konvergenzbereiches funktionieren Wurzel- bzw. Quotientenkriterium nie.

Aufgabe A 2.5

Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt, den Konvergenzradius und den Konvergenzbereich der folgenden Potenzreihen

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n \cdot x^n$ $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n \cdot x^n = n^n (x-0)^n$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n^{n+1}}{n^n} \right| = \lim_{n \to \infty} n = \infty$$

$r = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow$ Konvergenzbereich $K = \{0\}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^k}{k+3}$

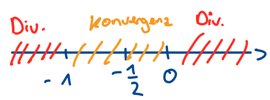
$$\frac{1}{k+3}\cdot(2x+1)^k = \frac{2^k}{k+3}\cdot\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^k = a_k = \frac{2^k}{k+3},\ x_0=-\frac{1}{2}$$

$$\left(2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^k = 2^k\left(x+\frac{1}{2}\right)^k$$

Quotientenmethode:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim \frac{\frac{2^{k+1}}{k+4}}{\frac{2^k}{k+3}} = \lim \frac{2^{k+1}(k+3)}{(k+4)2^k} = 2\lim_{k\to\infty}\frac{k+3}{k+4} = 2\lim \frac{1+\frac{3}{k}}{1+\frac{4}{k}} = 2\cdot\frac{1+0}{1+0} = 2$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$$



Randpunkte $x=-1,\ x=0$

$$x=-1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2x+1)^k}{k+3} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+3} = \frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots$$ $\Rightarrow$ konvergiert (alt. harm. Reihe)

↳ Leibniz Kriterium

$$x=0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(2x+1)^k}{k+3}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+3} = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\dots$$

↳ divergent (harm. Reihe)

Insgesamt: $K = [-1, 0[$

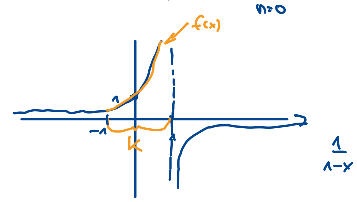
Bemerkung: Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ definiert im Konvergenzbereich K eine Funktion

$$f: K \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

Beispiel: geom. Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, $K =]-1,1[$

$\Rightarrow f:]-1,1[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$



Satz 2.17 (Eigenschaften von Potenzreihen)
Seien K_f und K_g die Konvergenzbereiche der Potenzreihen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n \quad \text{bzw.} \quad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-x_0)^n$$

mit dem gleichen Entwicklungspunkt x_0. Dann kann man

i) die Summe der beiden Reihen bilden und erhält die (mindestens) in $K_f \cap K_g$ konvergente Potenzreihe

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n + b_n\right) \cdot (x-x_0)^n$$

ii) das Produkt der beiden Reihen bilden und erhält die (mindestens) in $K_f \cap K_g$ konvergente Potenzreihe

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right) \cdot (x-x_0)^n$$

„Beweis"

Beispiel zu ii)

$f(x) = g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, $K_f = K_g =]-1,1[$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = f(x)\cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \underbrace{1}_{a_k}\cdot\underbrace{1}_{b_{n-k}}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n, \quad x \in]-1,1[$$

Aufgabe A 2.6
Für welche Werte von x konvergiert die Reihe

$$1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x^5 + x^6 + \ldots \quad ?$$

Bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert.

$\Rightarrow x_0 = 0, \quad a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade} \\ 2, & n \text{ ungerade} \end{cases}$

Konvergenzradius

Quotientenmethode:

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \begin{cases} \frac{2}{1}, & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$ $\Rightarrow$ existiert nicht!

Wurzelmethode: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \begin{cases} \sqrt[n]{1}, & n \text{ gerade} \\ \sqrt[n]{2}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$

$= 1$ (Standardfolge $\sqrt[n]{q} \to 1$)

$\Rightarrow r = \frac{1}{w} = \frac{1}{1} = 1$

$]-1,1[\subseteq K \subseteq [-1,1]$

$x = -1$ $\quad 1 - 2 + 1 - 2 + 1 - 2 + - \quad \Rightarrow$ divergiert, da keine Nullfolge

bzw. Folge $b_n \begin{cases} 1, & n \text{ gerade} \\ -2, & n \text{ ungerade} \end{cases}$ keine Nullfolge

Insgesamt: $K = \,]-1,1[$

$x = 1$ $\quad 1 + 2 + 1 + 2 + \ldots \quad \Rightarrow$ divergiert, " "

bzw. Folge $b_n \begin{cases} 1, & n \text{ gerade} \\ 2, & n \text{ ungerade} \end{cases}$ keine Nullfolge

Grenzwertberechnung:

$$1+2x+x^2+2x^3+x^4+2x^5+x^6+2x^7+\dots$$

$$= (1+x^2+\underbrace{x^4}_{(x^2)^2}+\underbrace{x^6}_{(x^2)^3}+\dots) + 2(x+x^3+x^5+x^7+\dots)$$

$\hookrightarrow 2x(1+x^2+x^4+x^6+\dots)$

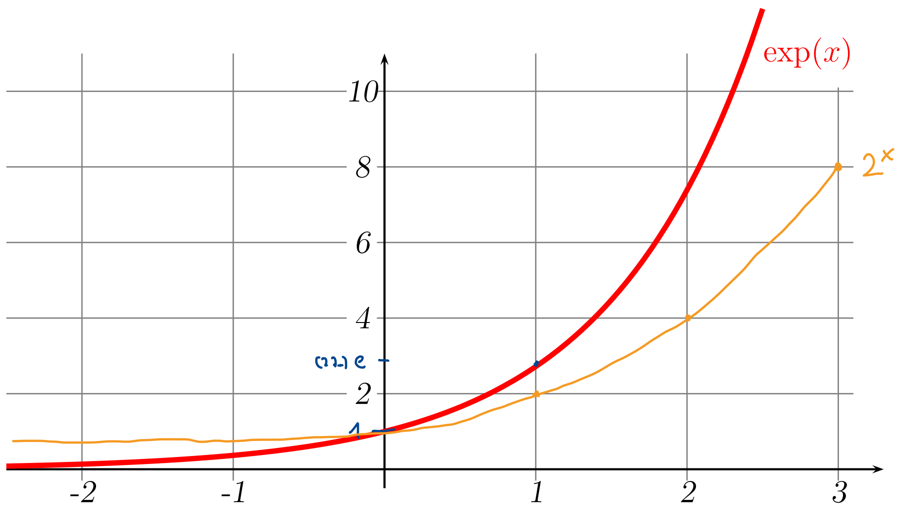
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n + 2x\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n = \frac{1}{1-x^2} + 2x\frac{1}{1-x^2} = \frac{1+2x}{1-x^2}$$

Mit Hilfe von Potenzreihen kann man einige elementare Funktionen definieren.

Definition 2.18 (Exponentialfunktion)
Die Funktion

$$\begin{aligned}\exp:\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \exp(x) = \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\end{aligned}$$

heißt Exponentialfunktion.



Bemerkung:
Alle Funktionen der Art a^x $(a>1)$ erhält man aus e^x durch axiale Streckung bzgl. der x-Achse

Satz 2.19 (Eigenschaften der e-Funktion)

i) $\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}:\ \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\, \mathrm{e}^y$ *Funktionalgleichung*

ii) $\mathrm{e}^0 = 1,\ \mathrm{e}^1 = \mathrm{e},$
$\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$

iii) $x < 0 \implies 0 < \mathrm{e}^x < 1$
$x > 0 \implies \mathrm{e}^x > 1$

iv) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0,\ \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$

$\forall n \in \mathbb{N}:\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$

Beweis

i) $e^x \cdot e^y = \Big(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}_{A_n}\Big) \cdot \Big(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}}_{B_n}\Big) \overset{\text{Cauchy}}{\underset{\text{Produkt}}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n$ mit

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} A_k \cdot B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k \cdot y^{n-k} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{n!}(x+y)^n$$

Bin. Lehrsatz

$$\Rightarrow e^x \cdot e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x \cdot y}$$

ii) $1 = e^0 = e^{x-x} = e^x \cdot e^{-x} \Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

iii) Sei $x > 0$: $e^x = 1 + \underbrace{\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots}_{>0} > 1$

Wegen $e^{-x} = \frac{1}{x}$ ist $0 < e^{-x} < 1$

iv) Beh. $\forall n \in \mathbb{N}: \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

Wir zeigen: $\frac{e^x}{x^n} \to \infty$ für $x \to \infty$

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ gilt:

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{x^n}\left(1 + \frac{x}{1!} + \quad \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots\right) > \frac{1}{n!} + \frac{x}{(n+1)!} + \frac{x^2}{(n+2)!} + \dots > \frac{x}{(n+1)!} \longrightarrow \infty$$

für $x \to \infty$

Für $n = 0$ folgt $e^x \to \infty$ für $x \to \infty$

Schließlich ist $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{e^{x}} \overset{z := -x}{=} \lim\limits_{z \to \infty} \frac{1}{e^z} = 0$

Bsp.:
Der Luftdruck der Erdatmosphäre nimmt bei 1000m Höhenzuwachs jeweils um 13% ab. Der Luftdruck in Meereshöhe beträgt durchschnittlich 1013 hPa.
Gesucht ist der Luftdruck auf dem Mount Everest (ca. 8800 m).

h[m]	p[hPa]
0	1013
1000	$(1-0{,}13)\cdot 1013 = 0{,}87 \cdot 1013$
2000	$0{,}87^2 \cdot 1013$
3000	$0{,}87^3 \cdot 1013$

Allgemein: $1013 \cdot 0{,}87^{\frac{h}{1000}}$

Definition 2.20 (Trigonometrische Funktionen)

1) *Cosinus* $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$ $\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

2) *Sinus* $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$ $\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

nicht benutzt von uns

3) *Tangens* $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, *für* $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$

Nst von cos(x)

Satz 2.21 (Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen)

i)

$$\cos(0) = 1, \ \sin(0) = 0$$

ii)

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \textit{gerade Funktion}$$
$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \textit{ungerade Funktion}$$

iii)

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

iv)

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

Additionstheorem

v)

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\big)$$
$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big)$$
$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\big)$$

vi)

$$\cos(2x) = \big(\cos(x)\big)^2 - \big(\sin(x)\big)^2$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

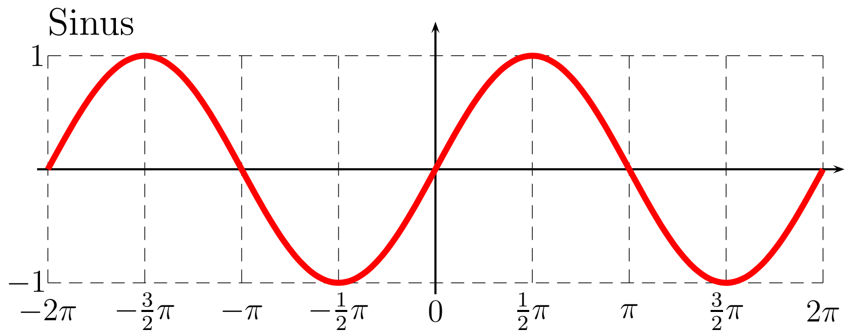
vii)

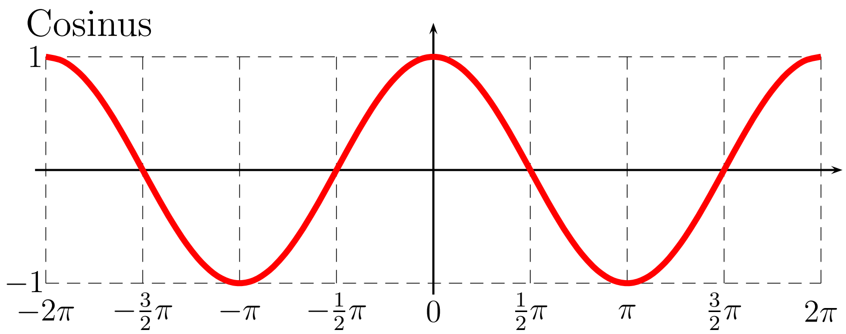
$$\big(\cos(x)\big)^2 + \big(\sin(x)\big)^2 = 1$$
$$-1 \leq \cos(x),\ \sin(x) \leq 1$$

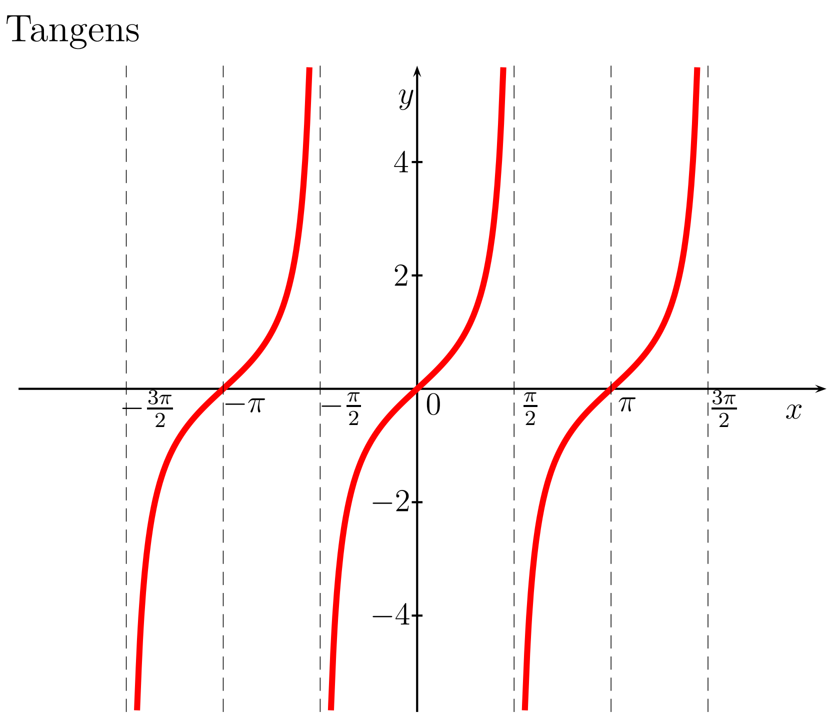
viii) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ *gilt:*

$$\left.\begin{aligned} \cos(x + 2k\pi) &= \cos x \\ \sin(x + 2k\pi) &= \sin x \end{aligned}\right\} \ 2\pi\text{-Periodizität}$$
$$\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$\cos(k\pi) = (-1)^k$$
$$\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$$
$$\sin(k\pi) = 0$$

Nst sin(x)


Sinus
1
−1
−2π
−3/2π
−π
−1/2π
0
1/2π
π
3/2π
2π


Cosinus
1
−1
−2π
−3/2π
−π
−1/2π
0
1/2π
π
3/2π
2π


Tangens
y
4
2
−2
−4
−3π/2
−π
−π/2
0
π/2
π
3π/2
x

Bemerkungen:

1) Die Zahl π kann man als das Doppelte der kleinsten positiven Nullstelle des Cosinus definieren.

Leibniz verwendete

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + - \ldots$$

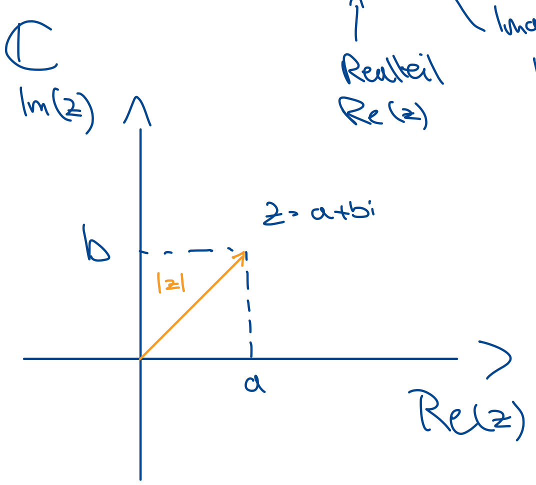
2) **Euler'sche Beziehung:**
Den Zusammenhang der geometrischen Definition der Winkelfunktionen Sinus und Cosinus und der hier gemachten Definitionen über die Reihen kann man über die sogenannte Euler-Beziehung herstellen.

$$z = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R},\ i^1 = i,\ i^2 = 1)$$

Realteil $Re(z)$ — Imaginärteil $Im(z)$

$i^3 = i \cdot i^2 = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$



Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

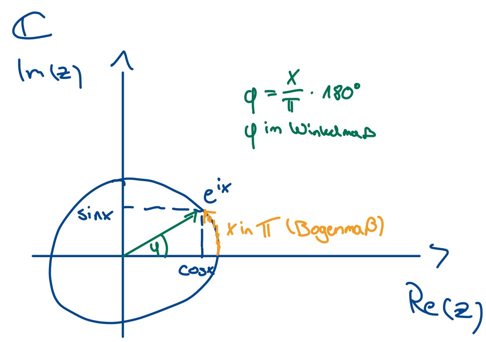
$$e^{ix} = \exp(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n!}$$

(Zerlegung bzgl. geraden und ungeraden n; $2k$, $2k+1$)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{i^{2k}}_{(i^2)^k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos x + i \cdot \sin x$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x} \longrightarrow |e^{ix}| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = \sqrt{1} = 1$$



3) Mit der Eulerischen Formel lassen sich die Additionstheoreme für cos und sin leicht herleiten:

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$$

LS:

$$e^{i(x+y)} = e^{ix+iy} = e^{ix} \cdot e^{iy} \overset{\text{Euler}}{=} (\cos x + i\sin x) \cdot (\cos y + i\sin y)$$

$$= \underbrace{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y}_{\mathrm{Re}(z)} + \underbrace{i(\sin x \cdot \cos y + \cos x + \sin y)}_{\mathrm{Im}(z)}$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil auf linker bzw. rechter Seite ergibt:

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

3 Grenzwerte und Stetigkeit

3.1 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

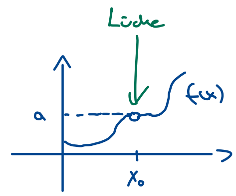
Wir betrachten das Verhalten einer Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in der Nähe eines Punktes x_0.

(Oder x_0 liegt am Rand von D ; z.B. $D =]1,2[$, dann kann $x_0 = 1$ oder $x_0 = 2$ sein)

Definition 3.1
Die Funktion f hat in

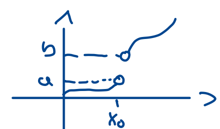
a) x_0 *den* Grenzwert a, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, *falls gilt:*

$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D \setminus \{x_0\}$: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$



b) x_0 *den* linksseitigen Grenzwert a, $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = a$ $\left(\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x) = a ; \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a\right)$,
falls gilt:

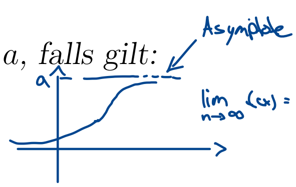
$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D \setminus \{x_0\} \wedge x_n < x_0$: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$



c) x_0 *den* rechtsseitigen Grenzwert a, (in Zeichen: $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$
falls gilt: $\forall (x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n \in D \setminus \{x_0\} \wedge x_n > x_0$: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$

d) $\pm\infty$ *den* Grenzwert a, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$, *falls gilt:*

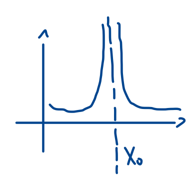
$\forall (x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n \in D$: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \pm \infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$



$\lim\limits_{n \to \infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$

e) x_0 *den* uneigentlichen Grenzwert $\pm\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, *falls gilt:*

$\forall (x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n \in D \setminus \{x_0\}$: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \pm\infty$



Links-/Rechtsseitige uneigentliche Grenzwerte bzw. uneigentliche Grenzwerte in $\pm\infty$ werden analog definiert.

Bemerkung: Es gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \iff \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = a$

Satz 3.2 (Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen)
Falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ *und* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$*, dann gilt:*

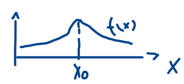
i) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \pm b$

ii) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \big(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\big) \cdot \big(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\big) = a \cdot b$

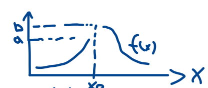
iii) für $\lambda \in \mathbb{R}:\quad \lim\limits_{x\to x_0} \big(\lambda f(x)\big) = \lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lambda \cdot a$

iv) falls $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0 \;:\quad \lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{a}{b}$

Definition 3.3 ((Grenzwert-Definition der) Stetigkeit)
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *heißt stetig in* $x_0 \in D$*, wenn* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ *ist.* f *heißt stetig auf der Menge* $A \subseteq D$*, wenn* f *in jedem Punkt* $x_0 \in A$ *stetig ist.*



f stetig in x_0



f unstetig in x_0, da: $\lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x) \neq \lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

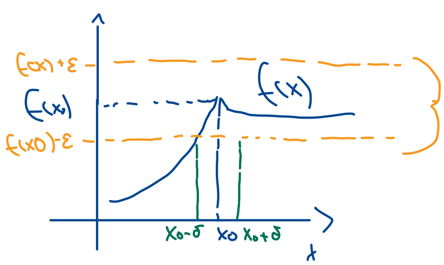
Bemerkung: δ-ε-Definition der Stetigkeit
Die Funktion $f :\; D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$, falls

→ hängt ab von ε, x_0

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \quad \forall\, x \in D :$$

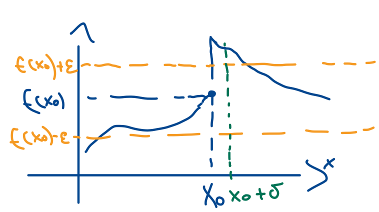
$$|x - x_0| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

f heißt stetig auf der Menge $A \subseteq D$, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in A$ stetig ist.



Streifen der Breite 2ε

f stetig in x_0



f unstetig in x_0, wie klein man auch $\delta > 0$ wählt, es existieren immer $x \in [x_0, x_0 + \delta[$ so dass $f(x)$ außerhalb des 2ε-Streifen liegt

Bemerkung: Gleichmäßige Stetigkeit
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig in $A \subseteq D$, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall\, x_1, x_2 \in D :$$

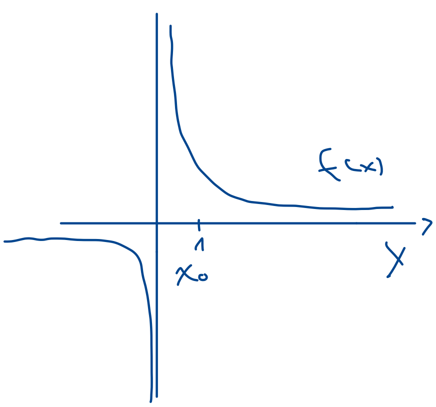
$$|x_1 - x_2| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

(δ hängt nicht von x_0 ab!)

Bemerkung:
Stetigkeit einer Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ bedeutet anschaulich, dass man den Graph von f (die Menge $G(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [a, b], y = f(x)\}$) ohne Absetzen zeichnen kann.
Gleichmäßige Stetigkeit bedeutet anschaulich, dass die Steigung beschränkt ist.

Beispiele:

$f(x) = \frac{1}{x}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



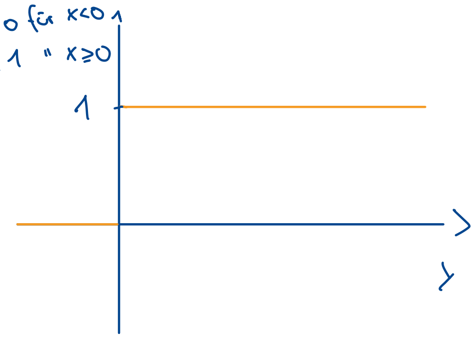
Zu festen $\varepsilon > 0$ wird δ immer kleiner, wenn X_0 gegen 0 geht

$\Rightarrow$ f nicht gleichmäßig stetig auf D

Es gilt der Satz: Jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion ist sogar gleichmäßig stetig.

Bem. Stetigkeit einer Funktion f auf ihrem Definitionsbereich D bedeutet anschaulich, dass man ihren Graph über jedem Teilintervall von D ohne Absetzen zeichnen kann.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{" } x \geq 0 \end{cases}$



Heaviside-Sprungfunktion
unstetig in $x_0 = 0$

$$f(x) := \begin{cases} x^3+1, & x \geq 1 \\ 2x^2, & x < 1 \end{cases}$$

Für $x \in \left]-\infty, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$ ist das klar.

Es bleibt $x_0 = 1$ zu untersuchen.

1) $\lim\limits_{x \downarrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow 1} x^3 + 1 \overset{x=1+\varepsilon}{=} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \underbrace{(1+\varepsilon)^3}_{1+\binom{3}{1}\varepsilon+\binom{3}{2}\varepsilon^2+\varepsilon^3} + 1 = 2$

rechts $x \geq 0$

2) $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 1} 2x^2 \overset{x=1-\varepsilon}{=} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} 2\underbrace{(1-\varepsilon)^2}_{1-2\varepsilon+\varepsilon^2} = 2 \cdot 1 = 2$

links $x \leq 0$

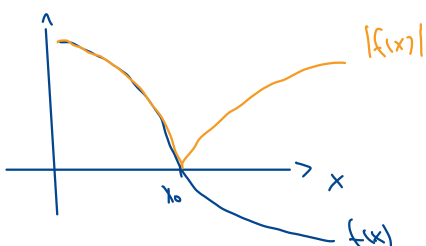
3) $f(1) = 1^3 + 1 = 2$

1)2)3) $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2 \Rightarrow f$ stetig in $x_0 = 1 \Rightarrow f$ stetig auf $\mathbb{R}$

Satz 3.4 (Rechenregeln für stetige Funktionen)
Die Funktionen f und g seien stetig in x_0. Dann sind auch

$$f \pm g, \; f \cdot g \quad \text{und} \quad |f| \quad \text{stetig in } x_0$$

Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in x_0.



Elem. Funk (Polynome, rationale Funktionen $\left(\frac{1}{x}\right)$, e-Funktionen, trigonometrische Funktionen, ...) sind stetig auf ihren Definitionsbereich

Beispiel:

Ist $\quad f(x) := \begin{cases} x^3 + 1 & \text{falls } x \geq 1 \\ 2 \cdot x^2 & \text{falls } x < 1 \end{cases} \quad$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$?

Aufgabe A 3.1
Untersuchen Sie die Stetigkeit der folgenden Funktion im Definitionsbereich:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } 0 \leq x \leq 2 \\ x+2 & \text{falls } 2 < x < 5 \end{cases} \qquad D = [0,5[\text{ stetig?}$$

$$1)\ \lim_{x \searrow 2} f(x) = x+2 \overset{x=\varepsilon+2}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\varepsilon+2+2}_{\to 0} = 4$$

$$2)\ \lim_{x \nearrow 2} f(x) = x^2 \overset{x=\varepsilon-2}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{(\varepsilon-2)^2}_{\to 4\varepsilon^2 - 4\varepsilon + \varepsilon^2} = 4$$

$$3)\ f(2) = 2^2 = 4$$

1)2)3) $\Rightarrow f$ stetig in $x_0 = 2 \Rightarrow f$ stetig auf D

Aufgabe A 3.2
Bestimmen Sie (falls möglich) eine Konstante λ so, dass die Funktion

$$f : [0,2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot x^2 & \text{falls } x \in [0,1] \\ \frac{x^3-7x+6}{x-1} & \text{falls } x \in]1,2] \end{cases} \qquad D = [0,2]$$

im ganzen Intervall $[0,2]$ stetig ist.

$$1)\ \lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \nearrow 1} \lambda \cdot x^2 \overset{x=1-\varepsilon}{=} \lim \lambda \underbrace{(1-\varepsilon)^2}_{1-2\varepsilon+\varepsilon^2} = \lambda \cdot 1 = \lambda$$

$$\lim_{x \searrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} \frac{x^3-7x+6}{x-1}$$

$$\overset{x=\varepsilon+1}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(1+\varepsilon)^3 - 7\cdot(1+\varepsilon)+6}{(\varepsilon+1)-1} = \lim_{\varepsilon \to \infty} \frac{\cancel{1} + 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - \cancel{7} + 7\varepsilon \cancel{+6}}{1+\varepsilon - \cancel{1}}$$

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} = \frac{-4\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon(-4+3\varepsilon+\varepsilon^2)}{\cancel{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \to 0} -4+3\varepsilon+\varepsilon^2 = -4$$

$$3)\ f(1) = \lambda \cdot 1^2 = \lambda$$

$\Rightarrow f$ stetig in $x_0 = 1$ und damit auf $[0,2]$, falls $\lambda = -4$

3.2 Wertannahme stetiger Funktionen

Ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 stetig, so heißt dies anschaulich, dass sich der Funktionswert von f nur wenig ändert, wenn sich das Argument nur wenig von x_0 unterscheidet. Daraus ergeben sich u.a. folgende Sätze:

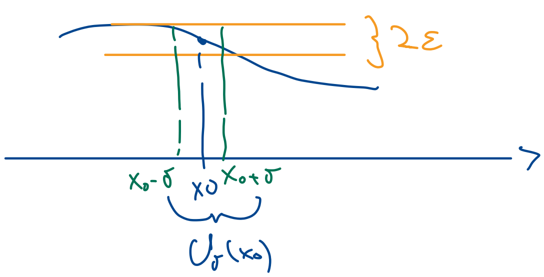
Satz 3.5
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig in x_0 und es gelte

$$f(x_0) > 0 \quad (\text{bzw. } f(x_0) < 0)$$

Dann gibt es eine Umgebung $U_\delta(x_0)$ von x_0 (d.h. $\exists\, \delta > 0 : \; U_\delta(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$) so, dass für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap D$ ebenfalls

$$f(x) > 0 \quad (\text{bzw. } f(x_0) < 0)$$

gilt.



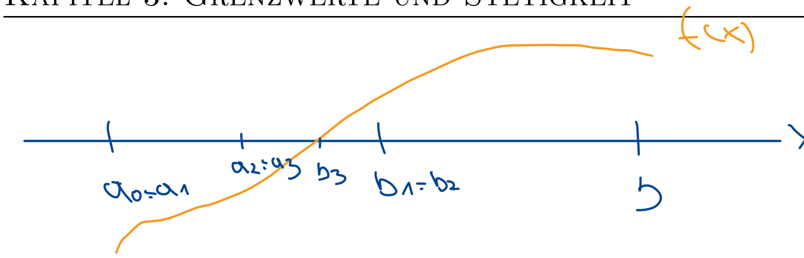
Satz 3.6 (Zwischenwertsatz)
Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem ganzen Intervall $[a, b]$ und $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit $f(\xi) = 0$.

Beweis: (Konstruktiver Beweis) Es sei OBdA (=ohne Beschränkung der Allgemeinheit). $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Man konstruiert eine Folge von Intervalle $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit :

1) $[a_0, b_0] = [a, b]$

2) $[a_n, b_n] = \begin{cases} \left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right] & \text{falls} \quad f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) > 0 \\ \left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}\right] & \text{falls} \quad f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) \leq 0 \end{cases}$

auf linken Randpunkt ist f negativ, auf rechten positiv



Damit ist die Folge eindeutig definiert und da

$$b_n - a_n = 2^{-n} \cdot (b - a) \qquad (*)$$

gilt:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschreibt eine monoton wachsende und durch b nach oben beschränkte Folge $\Rightarrow \quad (a_n)$ ist konvergent.
$(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschreibt eine monoton fallende und durch a nach unten beschränkte Folge $\Rightarrow \quad (b_n)$ ist konvergent.

Wegen $(*)$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n}(b-a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: \xi$$

Da f stetig ist, gilt:

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} f(a_n)}_{\leq 0} = f(\xi) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} f(b_n)}_{\geq 0} \qquad \Longrightarrow \qquad f(\xi) = 0 \qquad \blacksquare$$

Bemerkung: Die Konstruktionsmethode einer Nullstelle aus dem Beweis von Satz 3.6 nennt man *Intervallhalbierungsmethode* oder *Bisektionsmethode*.

Beispiel: Bestimmung von $\sqrt{2}$

pos. Nullstelle von $f(x) = x^2 - 2$

Startintervalle $[1,2]$

$f(1) = -1 < 0, f(2) = 2 > 0$

$f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - 2 > 0 \quad \Rightarrow \sqrt{2} \in [1, \frac{2}{3}]$

$f\left(\frac{1+\frac{3}{2}}{2}\right) = f(\frac{5}{4}) = \frac{22}{16} - 2 < 0 \Rightarrow \sqrt{2} \in [\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$

$f\left(\frac{\frac{5}{4}+\frac{3}{2}}{2}\right) = f(\frac{11}{8}) < 0 \Rightarrow \sqrt{2} \in [\frac{11}{8}, \frac{3}{2}]$

$f\left(\frac{\frac{11}{8}+\frac{3}{2}}{2}\right) = f(\frac{23}{16}) > 0 \Rightarrow \sqrt{2} \in [\frac{11}{8}, \frac{23}{16}] \ldots$

Satz 3.7 (Existenz von Minimum und Maximum)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f auf $[a, b] \subseteq D$ sein Minimum und Maximum an, d.h.

↳ Abgeschlossenes Teilintervall

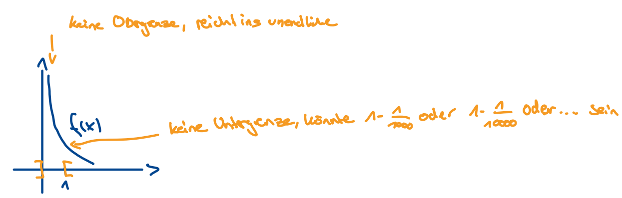
$$\exists\, \underline{x},\, \overline{x} \in [a,\, b] \ \text{ so dass } \forall x \in [a,\, b] \ : \quad \underbrace{f(\underline{x})}_{\text{Minimum}} \leq f(x) \leq \underbrace{f(\overline{x})}_{\text{Maximum}}$$

Bem. 1) Es ist wichtig, dass das Intervall abgeschlossen ist. zB

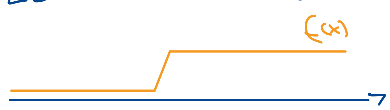
$\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{x}$

nimmt auf $]0, 1[$ kein Maximum und auch kein Minimum an:



2) Es kann mehere oder sogar unendlich viele Maxima/Minima geben.

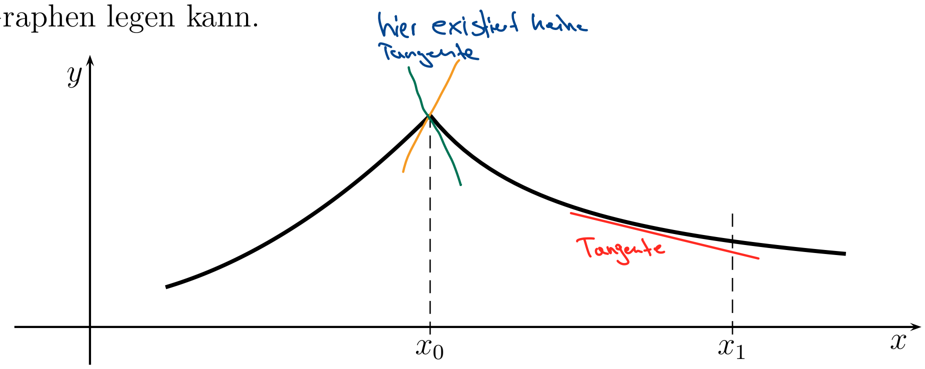


3) Mit Hilfe der Differentialrechnung lässt sich oft der Ort von Maximal Minima berechnen

4 Differentialrechnung

4.1 Differenzierbarkeit

Die Stetigkeit bedeutet, dass der Graph der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ „keine Sprünge“ macht. Die Differenzierbarkeit fordert zudem, dass der Graph von f „keinen Knick“ haben darf, d.h. man verlangt, dass man in jedem Punkt $x_0 \in D$ eine Tangente an den Graphen legen kann.



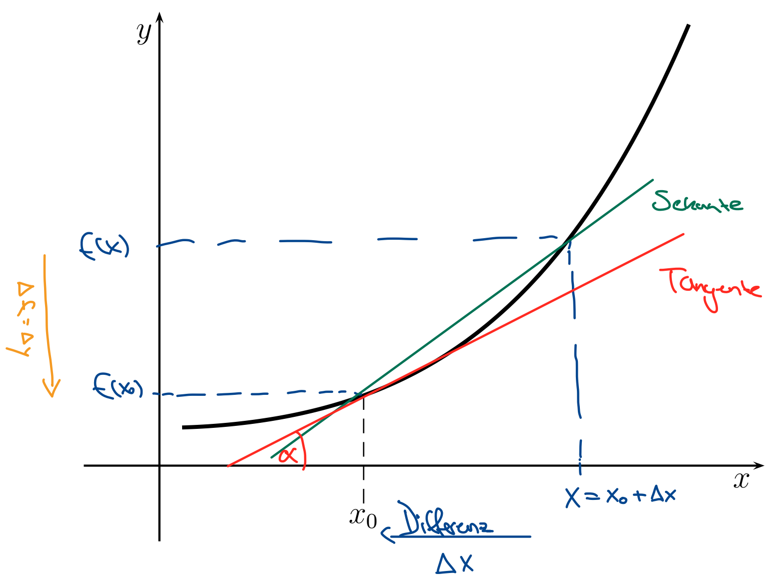
Definition 4.1 (Differenzierbarkeit)
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar im Punkt $x_0 \in D$, falls der Grenzwert

$$\boxed{f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

existiert ($f'(x_0) \in \mathbb{R}$). Die Zahl $f'(x_0)$ heißt die Ableitung von f an der Stelle x_0.

Die Funktion f heisst differenzierbar in $A \subseteq D$, falls f in jedem $x_0 \in A$ differenzierbar ist.

Geometrische Interpretation:



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ist die Steigung der Sekante (Sehne) zwischen $\big(x_0, f(x_0)\big)$ und $(x_0 + \Delta x, f(X_0 + \Delta x))$.

Für $\Delta x \to 0$, d.h. $x \to x_0$, wird die Sekante zur Tangente in x_0 und die Steigung der Tangente ist

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \tan(\alpha)$$

Grenzwert

Steigungswinkel α

Bemerkungen:

1) $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ nennt man Differenzenquotient und analog dazu $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ Differentialquotient.
2) Δx muss nicht > 0 sein
3) Die Gleichung der Tangente an f in x_0 lautet:

$$t_{x_0}(x) = f(x_0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

4) Eine alternative **Definition der Differenzierbarkeit** lautet:
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Punkt derart, dass mindestens eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ existiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann im Punkt x_0 differenzierbar, wenn es eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

Rest oder so

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x)(x - x_0) \qquad x \in D$$

wobei für r gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} r(x) = 0$. In diesem Fall ist $a = f'(x_0)$

Vergleich: $r(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \overset{\lim_{x\to 0}}{\Rightarrow} 0 = f'(x_0) - a \Rightarrow a = f'(x_0)$

Beispiel 1)
Sei $f(x) := 4x - 5$
Ist f in $x_0 = 2$ differenzierbar? Ist $f \to \mathbb{R}$ differenzierbar?
Ist f in $\mathbb{R}$ differenzierbar?

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

(oft: $h = \Delta x$)

$$\lim_{h\to 0} \frac{4(x_0+h) - 5 - (4x_0 - 5)}{h} = \lim \frac{4\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} 4$$

$x_0 = 2$ wurde überhaupt nicht benutzt, d.h. der Grenzwert existiert für alle $x_0 \in \mathbb{R}$:

$f'(x_0) = 4 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

d.h. $f'(x) = 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Aufgabe A 4.1

Ermitteln Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ direkt mit Hilfe der Definition.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - (x_0)^2}{h} = \lim \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim \frac{2x_0h + h^2}{h} = \lim \frac{\cancel{h}(2x_0 + h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} 2x_0 + h = 2x_0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Beispiel 2)

$f(x) := \mathrm{e}^x$, gesucht $f'(x)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0+h) + f(x_0)}{h} = \frac{e^{x_0+h} + e^{x_0}}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^h - e^{x_0}}{h} = \lim \frac{e^{x_0}(e^h - 1)}{h} = e^{x_0} \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{0}$$

$$= e^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}\right) - 1\right) = e^{x_0} \cdot \lim \frac{1}{h} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = e^{x_0} \lim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!}$$

$$= e^{x_0} \cdot \lim\left(1 + \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!}\right)\right) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0}\left(1 + h \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-2}}{k!}\right)}_{\stackrel{!}{=} 1}$$

$$\Downarrow$$

Bleibt z.z.: $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-2}}{k!}$ ist beschränkt

$$0 \leq \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-2}}{k!} \right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|h|^{k-2}}{k!} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|h|^{k-2}}{(k-2)!} \overset{l=k-2}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{|h|^l}{l!} = e^{|h|} < e \quad \text{für } |h| < 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx} e^x = e^x}$$

Satz 4.2 (Stetigkeit differenzierbarer Funktionen)
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei im Punkt x_0 differenzierbar, dann ist f in x_0 auch stetig.

Beweis:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \underset{\text{Bem (4)}}{\overset{f \text{ diffbar}}{=}} \lim_{x \to x_0} \left(f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + r(x - x_0) \right) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} (x - x_0)}_{=0} + \underbrace{\lim_{x \to x_0} r(x)}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} (x - x_0)}_{=0}$$

$$= f(x_0)$$

<u>Bem.:</u> Kontraposition: f unstetig in x_0 $\Rightarrow$ f nicht differenzierbar in x_0

Satz 4.3 (Rechenregeln für Ableitungen)
Die Funktionen f und g seien in x_0 differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

i) Die Funktion $\alpha f + \beta g$ ist differenzierbar in x_0 und

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

ii) Die Funktion $f \cdot g$ ist differenzierbar in x_0 und es gilt die Produktregel*:*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

iii) Falls $g(x_0) \neq 0$ ist, dann ist die Funktion $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt die Quotientenregel*:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}$$

Beweis:

i) trivial

ii) $$\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\,g(x) + f(x_0)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\xrightarrow{x\to x_0} f'(x_0)} \cdot \underbrace{g(x)}_{g(x_0)} + f(x_0)\cdot \underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\xrightarrow{x\to x_0} g'(x_0)}$$

nach Satz 4.3

$$\xrightarrow{x\to x_0} f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

iii) Zunächst Spezialfall $f(x) = \text{const} = 1$

$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\left(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}\right) = \frac{1}{x-x_0}\cdot\frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)\cdot g(x_0)} = (-1)\,\underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{g'(x_0)}\cdot\underbrace{\frac{1}{g(x)}}_{\frac{1}{g(x_0)}}\cdot\frac{1}{g(x_0)}$$

$x \to x_0$

$$\xrightarrow{x\to x_0} -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Nun der allg. Fall mit der Produktregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Bei der Formulierung der Ableitungsregeln wird fortan der Index 0 bei x weggelassen!
Damit ist f' auch eine Funktion von x.

Beispiele

1) Beh.: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: (x^n)' = n \cdot x^{n-1}}$

(IA) $n=1$: LS $(x)' = 1$ RS $1 \cdot x^0 = 1$ ✓

(IS) Für bel., $n \in \mathbb{N}$ ist z.z.: $\underbrace{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}}_{(IV)} \Rightarrow (x^{n+1})' = (n+1) \cdot x^n$

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' \overset{\text{Produkt}}{\underset{\text{Regel}}{=}} (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' \overset{IV}{=} n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n + x^n \cdot 1 = n \cdot x^n + x^n = (n+1) \cdot x^n \checkmark$$

Beachte: $(x^0)' = (1)' = 0$

2) Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ sei die folgende Funktion h definiert:

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x^n} = x^{-n} \end{array}$$

Gesucht ist h'

$h'(x) \overset{\text{Qu. Regel}}{=} \frac{(1)' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}}$ $\quad (a^b)^c = a^{b \cdot c}$

$\overset{\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}}{=} -n \cdot x^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}$

$\boxed{\text{Also: } \forall k \in \mathbb{Z}: (x^k)' = k \cdot x^{k-1}}$

3) Über eine Funktion h sei bekannt, dass $h(2) = 4, h'(2) = 3$. Es soll damit berechnet werden:

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{x^2}{h(x)} \right) \Big|_{x=2} \iff \left(\frac{x^2}{h(x)} \right)'$

$\overset{\text{Qu. Regel}}{=} \frac{(x^2)' \cdot h(x) - x^2 \cdot h'(x)}{(h(x))^2} \Big|_{x=2} = \frac{2x \cdot h(x) - x^2 \cdot h'(x)}{h(x)^2} \Big|_{x=2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot h(2) - 2^2 \cdot h'(2)}{h(2)^2} = \frac{4 \cdot 4 - 4 \cdot 3}{4^2} = \frac{1}{4}$

Aufgabe A 4.2

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen in deren Definitionsbereich:

a) $f_1(x) = x^{45} + x^{-45}$

$f_1'(x) = 45x^{44} + (-45x^{-46})$

$= 45x^{44} - 45x^{-46}$

b) $f_2(x) = \dfrac{3-4x}{3+4x}$

$$f_2'(x) \Rightarrow \frac{(3-4x)'\cdot(3+4x)-(3-4x)\cdot(3+4x)'}{(3+4x)^2}$$

$$= \frac{-4\,(3+4x) - (4\cdot(3-4x))}{(3+4x)^2} = \frac{-24}{(3+4x)^2}$$

c) $f_3(x) = \dfrac{x}{2+\frac{1}{3x+1}} \overset{\cdot 3x+1}{=} \dfrac{x\cdot(3x+1)}{2\cdot(3x+1)+1} = \dfrac{3x^2+x}{6x+3}$

stetige Ergänzung

(Beachte: $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} f_3(x) = 0$)

$\hookrightarrow / \{-\frac{1}{3}\}$

$$= \frac{x^2+\frac{1}{3}x}{2x+1}$$

$$f_3'(x) \Rightarrow \frac{(2x+\frac{1}{3})\cdot(2x+1) - [(x^2+\frac{1}{3}x)\cdot 2]}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2+2x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}-2x^2-\frac{1}{6}x}{(2x+1)^2}$$

falsch

$$= \frac{2x^2+\frac{7}{3}x+\frac{1}{3}}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+\frac{1}{3}}{(2x+1)^2}$$

Aufgabe A 4.3

Berechnen Sie die folgenden Ableitungen, wenn $h(-2) = 2$ und $h'(-2) = 3$ gilt.

a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(x^2\cdot h(x)\Big)\Big|_{x=-2}$

$$= (2x\cdot h(x) + x^2\cdot h'(x))\big|_{x=-2} = 2\cdot(-2)\cdot 2 + 4\cdot 3 = 4$$

b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{h(x)}{x^2+h(x)}\right)\Big|_{x=-2}$

$$= \frac{(h'(x)\cdot(x^2+h(x))) - (h(x)\cdot(2x+h'(x)))}{(x^2+h(x))^2}\Big|_{x=-2} = \frac{h'(-2)\cdot((-2)^2+h(-2)) - (2\cdot(-2)+h'(-2))}{((-2)^2+h(-2))^2}$$

$12+6+4-3$

$$= \frac{3\cdot(4+2) - (-4+3)}{(4+2)^2} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

Aufgabe A 4.4

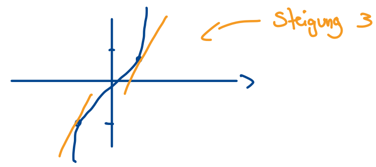
Bestimmen Sie alle Tangenten an den Graphen der Funktion $y = x^3$, die die Steigung 3 haben.

Tangente in $(x_0, f(x_0))$: $t_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0) + (x - x_0)$ hat die Steigung $f'(x)$

Ansatz: $f'(x_0) = 3 \iff 3x_0^2 = 3 \iff x_0^2 = 1 \iff x_0 = \pm 1$

Also: $t_1(x) = 1 + 3\cdot(x-1) = 3x - 2$

$t_{-1}(x) = -1 + 3\,(x+1) = 3x + 2$



Satz 4.4 (Kettenregel)

Die Funktion f sei differenzierbar in x_0 und die Funktion g sei differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x_0 und es gilt:

$$(g \circ f)'(x_0) = \frac{dg(f(x))}{dx}\bigg|_{x=x_0} = \underbrace{g'\big(f(x_0)\big)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{innere Ableitung}}$$

Bemerkung: Mit Differentialen lautet die Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}f} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \quad = \quad \frac{dg}{dx}\bigg|_{x=x_0} = \frac{dg}{dy}\bigg|_{y=y_0=f(x_0)} \cdot \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0}$$

Beweis: über die Definition der Differenzierbarkeit über die Darstellbarkeit durch eine Tangente

Beispiel

Gesucht ist die Ableitung von $g(x) = -2 \cdot \mathrm{e}^{3x^2}$

Setze $y = 3x^2$, $g = -2e^y = -2e^{3x^2}$

$\Rightarrow g'(x) = \frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = -2e^y \cdot 3\cdot 2x = -12x\,e^{3x^2}$

Aufgabe A 4.5

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen. Sie dürfen dafür verwenden, dass $\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \quad (x^r)' = r \cdot x^{r-1} \quad$ *und* $\quad (\cos(x))' = -\sin(x)$

$(\sqrt[n]{x})' = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ / $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

a) $h(x) = 4(5-2x)^3$

Setze $y = 5-2x$, $g = 4y^3 = 4(5-2x)^3$

$\Rightarrow h'(x) = \frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 4 \cdot 3 \cdot y^2 \cdot (-2) = -24 \cdot (5-2x)^2$

b) $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2t+4}}$

Setze $y = 2t+4$, $g = \frac{1}{\sqrt{y}} = y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2t+4}}$

$\Rightarrow g'(t) = \frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = (-\frac{1}{2}) y^{-\frac{1}{2}-1} \cdot 2 = -(2t+4)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{(2t+4)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{(2t+4)^3}}$

c) $h(u) = \cos(u)^3$

Setze $y = \cos(u)$, $g = y^3 = \cos(u)^3$

$\Rightarrow h'(u) = \frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dy} \cdot \frac{dx}{dy} = 3y^2 \cdot (-\sin(u)) = -3(\cos(u))^2 \cdot \sin(u)$

Kurz: $\underbrace{3 \cdot (\cos(u))^2}_{\text{Äußere}} \cdot \underbrace{(-\sin(u))}_{\text{Innere}} = -3 \cdot (\cos(u))^2 \cdot \sin(u)$

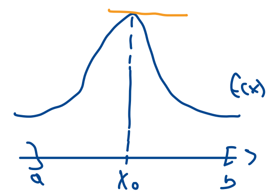
4.2 Folgerungen aus der Differenzierbarkeit

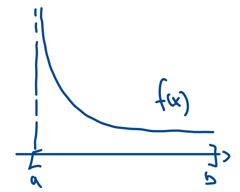
Satz 4.5
Sei f eine in $]a,\, b[$ differenzierbar Funktion und $x_0 \in\,]a,\, b[$ so, dass für alle $x \in\,]a,\, b[$ gilt:

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad (\text{bzw. } f(x) \geq f(x_0))$$

Dann ist

$$f'(x_0) = 0$$





Nicht gültig bei abgeschlossenem Intervall $[a,b]$

Beweis: OBdA $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in\,]a, b[$. Dann gilt:

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \searrow x_0} \underbrace{\frac{1}{x - x_0}}_{>0} \cdot \underbrace{(f(x) - f(x_0))}_{\leq 0} \leq 0$$

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \nearrow x_0} \underbrace{\frac{1}{x - x_0}}_{<0} \cdot \underbrace{(f(x) - f(x_0))}_{\leq 0} \geq 0$$

da f differenzierbar ist, gilt:

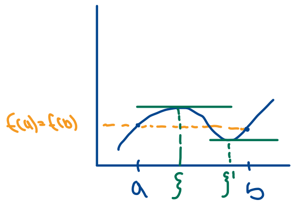
$$f'(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x_0) = 0$$

■

Satz 4.6 (Satz von Rolle)
Die Funktion $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig in $[a,\, b]$, differenzierbar in $]a,\, b[$ und es gelte $f(a) = f(b)$.
Dann existiert ein $\xi \in\,]a,\, b[$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis:

Beweis:



Beweis:

Fall 1: $f = \text{const}$

$\Rightarrow \forall x \in]a,b[: f'(x) = 0$

Fall 2: $f \neq \text{const}$

Dann gibt es ein $x_0 \in]a,b[$ mit $f(x_0) \neq f(a) = f(b)$, etwa $f(x_0) > f(a) = f(b)$

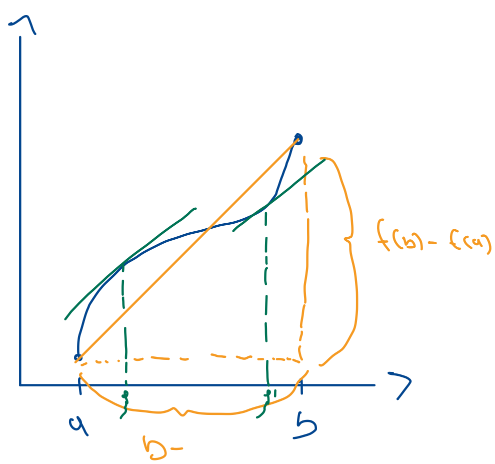
f stetig auf $[a,b]$ $\Rightarrow$ f nimmt auf $[a,b]$ sein $\underbrace{\text{Maximum}}_{f(\xi) \geq f(x_0) > f(a) = f(b)}$ an

$$\Rightarrow \xi \in]a,b[\overset{\text{Satz 4.5}}{\Rightarrow} f'(\xi) = 0$$

Bem.

Der Satz von Rolle besagt insbesondere, dass zwischen zwei Nst. einer differenzierbaren Funktion stets (mind) eine Nst. ihrer Ableitung liegen muss.

Satz 4.7 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in $]a, b[$. Dann existiert ein $\xi \in]a, b[$ mit $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Beweis:
Es sei

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Dann gilt $g(a) = f(a)$ und $g(b) = f(a) = g(a)$. Nach dem Satz von Rolle existiert ein

$\xi \in]a,\, b[$ mit $g'(\xi) = 0$

$$\Longrightarrow\ f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a)} = 0$$

$$\Longrightarrow\ f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

Folgerungen: Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Dann gilt:

1) $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a,\, b[\quad \Leftrightarrow \quad f$ konstant

2) $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a,\, b[\quad \Rightarrow \quad f$ streng monoton wachsend
   $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a,\, b[\quad \Leftrightarrow \quad f$ monoton wachsend
   $f'(x) < 0$ für alle $x \in]a,\, b[\quad \Rightarrow \quad f$ streng monoton fallend
   $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in]a,\, b[\quad \Leftrightarrow \quad f$ monoton fallend

Beweis: 2) i)

Vorraussetzung: $f'(x) > 0 \ \forall x \in]a,b[$ (1)

Annahme: $\exists x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \wedge f(x_1) \geq f(x_2)$ (2)

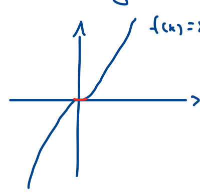
Wegen 2) gibt es nach MWS ein $\xi \in]x_1, x_2[$ mit $f(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0 \ \left| \ \frac{\leq 0}{> 0} \right.$

↯ zu 1)

<u>Bem.:</u> Bei den streng monotonen Funktionen gilt die Umkehrung nicht.

z.B. für $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 \geq 0$, $f'(0) = 0$



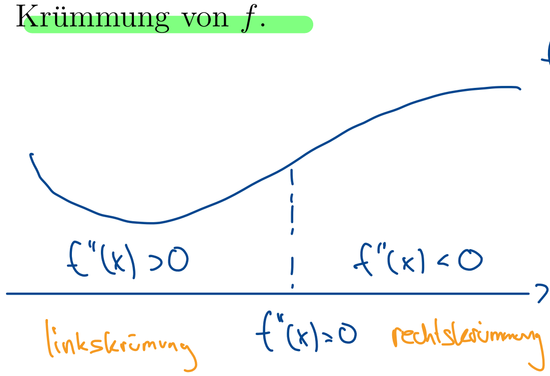
$f(x) = x^3$, streng mon. wachsend auf $\mathbb{R}$

Definition 4.8 (Höhere Ableitungen)
Die Funktion f heißt n-mal differenzierbar, falls f', $f'' = (f')'$, $\ldots$, $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$ existieren.

Bemerkung:

1) Für die Ableitung $f^{(n)}$ verwendet man auch die Schreibweise $f^{(n)} = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f$

2) f' beschreibt die Veränderung der Funktion f, also deren Steigung.
$f''(x)$ beschreibt die Veränderung der Steigung der Funktion f und damit die Krümmung von f.



Aufgabe A 4.6
Die Funktion f sei differenzierbar in $[0,2]$ und es sei $f(0) = -3$ sowie $f'(x) \leq 5$ für alle $x \in [0,2]$. Bestimmen Sie den größtmöglichen Wert für $f(2)$.

$f: [0,2] \to \mathbb{R}$ diff.bar

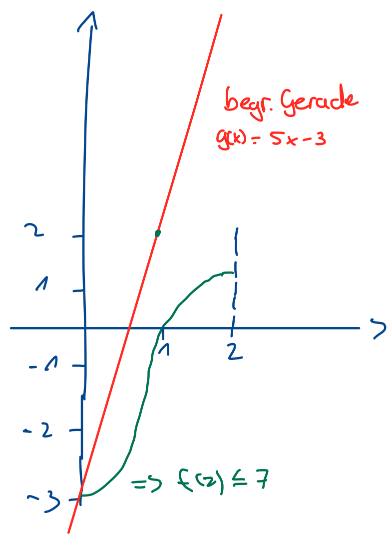
$f(0) = -3$, $\forall x \in [0,2]: f'(x) \leq 5$

Gesucht: Obere Grenze für $f(2)$?

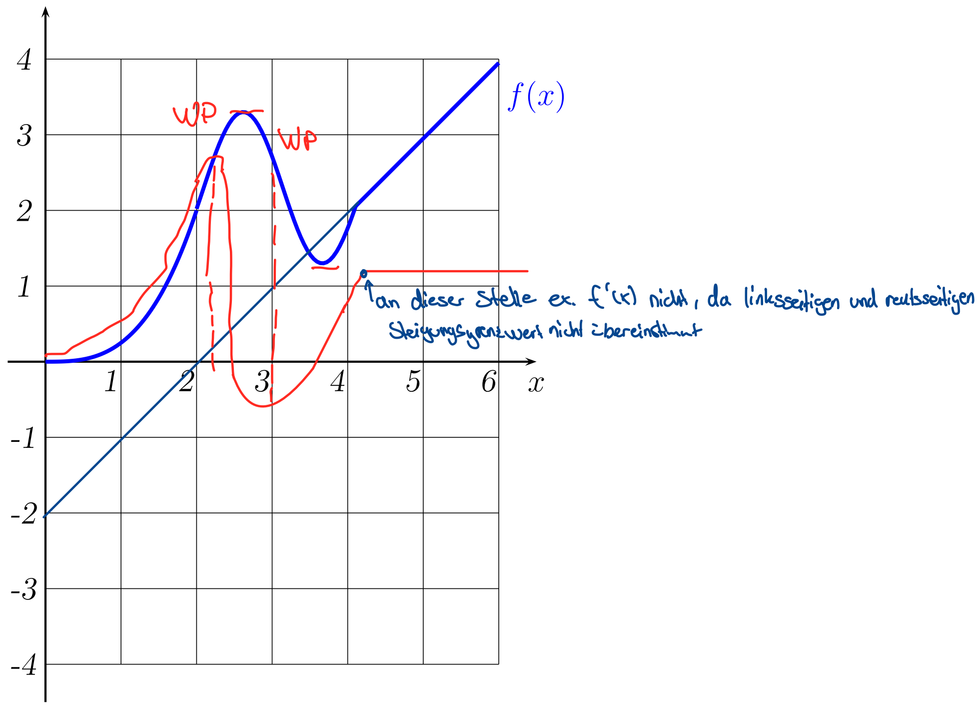
Algebraisch: Nach MWS ex $\xi \in\ ]0,2[$ mit

$f'(\xi) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \dfrac{f(2)+3}{2} \overset{!}{\leq} 5$

$\overset{\cdot 2}{\Longrightarrow} f(2) + 3 \leq 10 \Rightarrow f(2) \leq 7$



Aufgabe A 4.7
Gegeben sei die folgende Funktion f, zeichnen Sie die Ableitung f' von f in die gleiche Zeichnung ein. Sollte diese in einem Punkt nicht definiert sein, markieren Sie die Stelle mit $\circ$



Satz 4.9 (Existenz und Ableitung der Umkehrfunktion)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monoton wachsende (also $f(x) < f(\tilde{x})$ für $x < \tilde{x}$) Funktion mit $A := f(a)$ und $B := f(b)$ bzw. eine stetige und streng monoton fallende (also $f(x) > f(\tilde{x})$ für $x < \tilde{x}$) Funktion mit $A := f(b)$ und $B := f(a)$. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : [A, B] \to [a, b]$ mit

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \quad \forall x \in [a, b]$$

und

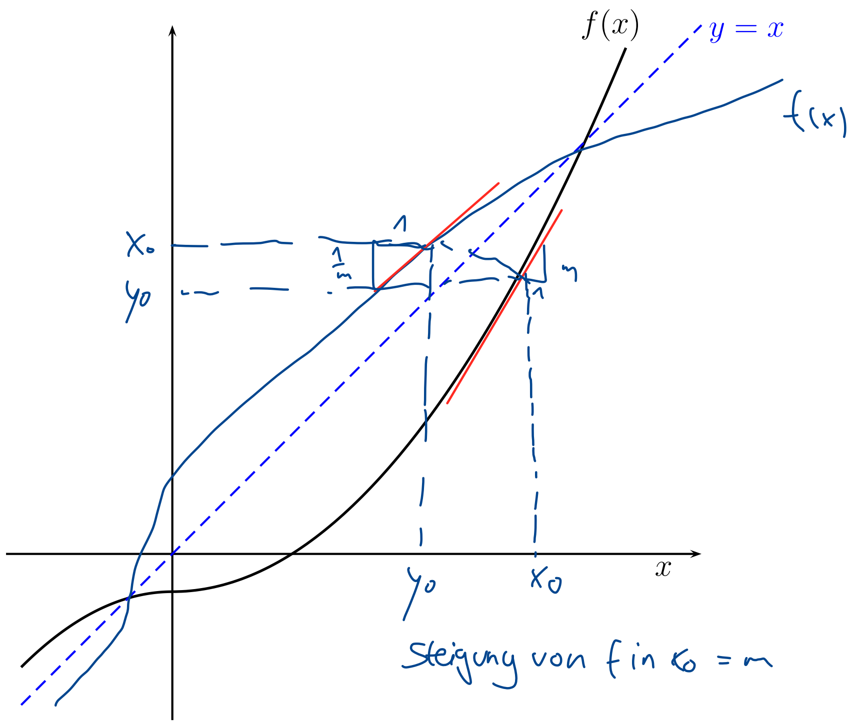
$$f\big(f^{-1}(y)\big) = y \quad \forall y \in [A, B]$$

Wenn f in x_0 differenzierbar ist, so gilt:

$$\big(f^{-1} \text{ ist differenzierbar in } y_0 = f(x_0)\big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f'(x_0) \neq 0$$

Ist $f'(x_0) \neq 0$ so gilt:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(f^{-1}(y)\right)\Big|_{y=y_0} = \underbrace{\frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}}_{=\frac{1}{f'(x_0)}}$$



Beweis: Zur Existenz sind nachzuweisen:

1) f ist injektiv: $\forall x_1, x_2 \in [a,b]: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Gilt, da: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 < x_2 \vee x_1 > x_2$

f streng mon. wachsend

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \vee f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Ebenso bei f streng mon. fallend

2) f ist surjektiv

Da f stetig ist und die Werte A, B angenommen werden, werden nach dem Zwischenwertsatz (ZWS) auch alle Werte zwische A und B angenommen.

<u>Ableitung</u>: Es gilt: $y = f(f^{-1}(y))$

Ableiten ergibt: $\frac{dy}{dy} = \frac{d}{dy} f\left(f^{-1}(y)\right)$

Kettenregel $\Rightarrow$ $1 = f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y)$

Speziell für $y_0 = f(x_0)$: $1 = f'\underbrace{(f^{-1}(y_0))}_{x_0} \cdot \left(f^{-1}\right)'(y_0) \Rightarrow (f^{-1})(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Bemerkung:
Betrachtet man eine Funktion der Zeit also z.B. $f = f(t)$ oder $x = x(t)$, so bezeichnet man die Ableitung nach t oft als , $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \dot{f}$ bzw. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$.

Beispiel:
Gegeben sei

$$\begin{aligned} g: \quad]0,\infty[\quad &\longrightarrow \quad]0,\infty[\\ y \quad &\longmapsto \quad y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y} \end{aligned}$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion
$f:]0,\infty[\to]0,\infty[$
$x \to x^n$

mit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Wir hätten gerne die Ableitung von g.

Gesucht: Ableitung von g!

Nach Umkehrformel gilt $g'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{n \cdot g(y)^{n-1}}$

$$= \frac{1}{n(y^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{y^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{y^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}$$

Allgemeines: $\forall r \in \mathbb{Q}: (x^r)' = r x^{r-1}$

Aufgabe A 4.8
Gegeben sei die Funktion

$$f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

Berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} (inklusive Definitionsbereich) sowie deren Ableitung.

1) Umkehrfunktion

Zum Nachweis der Injektivität untersuchen wir f auf strenge Monotonie

$$f'(x) = \underbrace{\frac{(1-x)'(1+x)-(1-x)\cdot(1+x)'}{(1+x)^2}}_{\text{Quotientenregel}} = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2} < 0$$

$\Rightarrow$ f streng mon. fallend

Surjektivität: $f(0)=1$, $f(1)=0$
$\Rightarrow$ Wertebereich von f ist $[0,1]$

Also ist $f: [0,1] \longmapsto [0,1]$ bijektiv, es ex. also die Umkehrfunktion $f^{-1}: [0,1] \mapsto [0,1]$

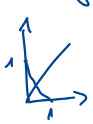
$f^{-1}(y) = ?$ Ansatz: $y = \frac{1-x}{1+x}$

$\Leftrightarrow y\cdot(1+x) = 1-x$

$\Leftrightarrow y \cdot yx = 1-x$

$\Leftrightarrow \underbrace{yx+x}_{x(y+1)} = 1-y \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{1+y} = f^{-1}(y)$

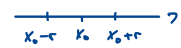
Also gilt $f^{-1} = f$



Und daher $(f^{-1})'(y) = \frac{-2}{(1+y)^2}$

4.3 Eigenschaften elementarer Funktionen

Satz 4.10 (Ableitung einer Potenzreihe)
Sei $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* r*. Dann ist* f *im Intervall* $]x_0 - r, x_0 + r[$ *stetig und beliebig oft differenzierbar.*



Die Ableitungen von f *erhält man durch gliedweises Differenzieren:*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2 \cdot (x - x_0) + 3a_3 \cdot (x - x_0)^2 + 4a_4 \cdot (x - x_0)^3 + \ldots$$

$$f''(x) := (f'(x))' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 \cdot (x - x_0) + 12a_4 \cdot (x - x_0)^2 + \ldots$$

usw.

Die Konvergenzradien der Potenzreihen von $f', f'', \ldots$ *sind alle gleich dem Konvergenzradius* r *der Potenzreihe von* f*.*

(Der Konvergenzradius für die Ableitungen ist auch gleich r)

Bew. für letzteres bei $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{n \cdot a_n}_{b_{n-1}} (x - x_0)^{n-1}$

Quot. methode

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{b}{b_{n-1}}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{(n+1) \cdot a_{n+1}}{n \cdot a_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \overbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n}}^{1} \cdot \overbrace{\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}^{q} = q \Rightarrow r' = \frac{1}{q} = r$$

Satz 4.11 (Ableitung der e-Funktion)

i) $(\mathrm{e}^x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$

ii) Die e-Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

Beweis:

i) 2. Beweis: $\frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^k}{k!}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d}{dx} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \overset{l:=k-1}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!}$

ii) Wegen $(e^x)' = e^x$ und $e^x > 0$ (Satz 2.19iii)) folgt, dass e^x auf $\mathbb{R}$ streng mon. wachsend ist.

Daher gilt: $\mathbb{R} \to]0,\infty[$ ist bijektiv

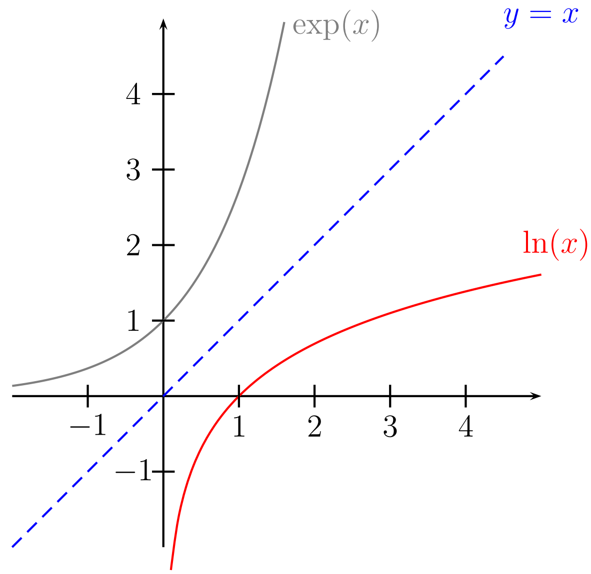
ii) Da $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ und nach Satz 2.19 iii) $\mathrm{e}^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, folgt aus der Folgerung aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 4.7), dass e^x auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

■

Definition 4.12 (Natürlicher Logarithmus)
Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} \ln :]0,\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(x) \end{aligned}$$

heißt natürlicher Logarithmus.



Bem.: $x > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ sei

$x^r := (e^{\ln(x)})^r = e^{r \cdot \ln(x)}$

$\hookrightarrow \ln(e^x)$

Satz 4.13 (Eigenschaften des Logarithmus)
Seien $x, y > 0$ und $r \in \mathbb{R}$

i) *Die Logarithmusfunktion ist stetig*

ii) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ *Funktionalgleichung*
$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
$\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$

iii) $\ln(1) = 0$, $\ln(\mathrm{e}) = 1$

iv) $\lim\limits_{x \to 0, x \searrow 0} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$
$\forall \alpha > 0: \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$

v) $\big(\ln(x)\big)' = \dfrac{1}{x}$, *also ist insbesondere* $\ln(x)$ *streng monoton wachsend.*

Beweis:

i) Folgt aus dem Satz von der Umkehrfunktion (Satz 4.9)

ii) Setze $\xi := \ln(x)$, $\eta := \ln(y)$
$\Rightarrow e^\xi = e^{\ln(x)} = x$, $e^\eta = e^{\ln(y)} = y$
$\Rightarrow \ln(x \cdot y) = \ln(e^\xi \cdot e^\eta) = \ln(e^{\xi+\eta}) = \xi + \eta = \ln(x) + \ln(y)$
$\ln(x^r) = \ln(e^{r \cdot \ln(x)}) = r \cdot \ln(x)$
$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x^{-1}) = (-1) \cdot \ln(x) = -\ln(x)$

iii) $\ln(1) = \ln(\mathrm{e}^0) = 0$ und $\ln(\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}^1) = 1$

iv)
- $\lim\limits_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$, denn für jedes $K > 0$:

$$x > \mathrm{e}^K \quad \Rightarrow \quad \ln(x) > K$$

- $$\lim_{x \searrow 0} \ln(x) = \lim_{y \to \infty} \ln\left(\frac{1}{y}\right) \overset{ii)}{=} \lim_{y \to \infty} (-\ln(y)) = -\lim_{y \to \infty} \ln(y) = -\infty$$

- für (x_n) mit $x_n > 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $y_n := \alpha \cdot \ln(x_n)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. Da wir zudem wissen, dass e^y schneller wächst als jede Potenz von y ergibt sich damit:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{\alpha} \cdot \mathrm{e}^{-y_n} = \frac{1}{\alpha} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{\mathrm{e}^{y_n}} = 0$$

v) Satz von der Umkehrfunktion

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f^{-1}(y) = \ln(y)$

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}\ln(y) = \frac{1}{e^{f^{-1}(y)}} = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y} > 0, \text{ da } y \in \overbrace{]0,\infty[}^{D = \ln(x)}$$

Bem: Sei $a > 0$. Entsprechend x^r definieren wir

$$\boxed{a^x := \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x\cdot\ln(a)}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}\left(e^{x\cdot\ln(a)}\right) = \underbrace{e^{x\ln a}}_{\text{äuße}} \cdot \underbrace{\ln(a)}_{\text{innere}} = a^x \cdot \ln(a)}$$

Bem:
Zu jedem $a > 0$ gibt es eine Funktion

$$\begin{array}{rccl} f_a: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,\infty[\\ & x & \longmapsto & f_a(x) := a^x \end{array}$$

und zu jeder davon gibt es eine Umkehrfunktion:

$$\begin{array}{rccl} f_a^{-1}: &]0,\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & f_a^{-1}(y) = \log_a(y) \end{array}$$

$\hookrightarrow$ Logarithmus zur Basis a

Für die wichtigsten dieser Logarithmen gibt es spezielle Abkürzungen:

Basis	Name	Abkürzung	
e	Natürlichen Logarithmus	ln	$\ln(e^x) = x$
2	dualer \ bin. Logarithmus	lb	$\mathrm{lb}(2^x) = x$
10	Dezimallogarithmus	lg	$\lg(10^x) = x$

Da in den meisten Programmen nur ein Logarithmus zur Verfügung steht, muss man die verschiedenen Logarithmen ineinander umrechnen können:

Umrechnungsformel:

Sei $x = a^y$

- $\log_a(x) = \log_a(a^y) = y$
- $\ln(x) = \ln a^y = y \cdot \ln(a)$

$\Rightarrow \boxed{\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}}$

Anwendung von Logarithmen

1) Lösen von Aufgaben mit vorhandener Exponentialfunktion

Beispiel:
Archäologen finden bei Ausgrabungen Holzkohlereste. Diese Kohlestückchen lassen sie nach der C-14-Methode datieren. Bei der Altersbestimmung wird die Aktivität dieser alten Probe mit der Aktivität einer frischen Holzkohleprobe (Referenzprobe) verglichen.
Die Messungen ergeben, dass die alte Probe eine Aktivität von 21.2 Zerfällen pro Minute und die Referenzprobe eine Aktivität von 32.3 Zerfällen pro Minute aufweisen.
Gesucht ist das Alter der gefundenen Holzkohleprobe. (C-14 hat eine Halbwertszeit von 5730 Jahren).

$A(t) :=$ Aktivität zum Zeitpunkt t in Jahren nach dem Tod des Baumes.

$A(0) = 32,3$ [Zerfälle pro min]

Es gilt: $A(t) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$ mit $A_0 = A(0)$

$= A(0) \cdot e^{-\frac{t}{5730} \cdot \ln(2)}$ $\quad (\ln(\tfrac{1}{2}) = -\ln(2))$

Auflösen nach t:

$\ln(A(t)) = \ln(A(0)) + \ln(e^{-\frac{t}{5730} \cdot \ln(2)})$

$= \ln(A(0)) - \frac{t}{5730} \cdot \ln(2)$

$\Rightarrow t = -\frac{\ln(A(t)) - \ln(A(0))}{\ln(2)} \cdot 5730$

Speziell für $A(t) = 21,2$ ergibt sich $t = 3481$ Jahre

Aufgabe A 4.9
Die Weltbevölkerung umfasste beim Jahreswechsel 2016/17 rund 7,47 Milliarden Menschen. Wenn wir von einer Zunahme der Bevölkerung um 1,15%/Jahr (=Wachstumsrate) ausgehen, wann erreicht die Weltbevölkerung dann die 10 Milliardenschranke?

$W(t) :=$ Weltbevölkerung in t Jahren, nach dem 1. Januar 2017

$\Rightarrow W(t) = W_0 \cdot (1 + 0,0115)^t = W_0 \cdot 1,0115^t$

$= W(0) \cdot e^{t \cdot \ln(1,0115)}$ mit $W(0) = 7,47 \cdot 10^9$ ← Milliarden

Ansatz: $10 \cdot 10^9 = W(t)$ nach t auflösen

$10 \cdot 10^9 = 7,47 \cdot 10^9 \cdot e^{t \cdot \ln 1,0115}$

$\Rightarrow \frac{10}{7,47} = e^{t \cdot \ln 1,0115}$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{10}{7,47}\right) = t \cdot \ln(1,0115)$

$\Rightarrow t = \frac{\ln(10) - \ln(7,47)}{\ln(1,0115)} = 25,5$ Jahre

$\Rightarrow$ Mitte des Jahres 2042 würde W die Grenze von $10 \cdot 10^9$ übersehr.

2) Anzahl benötigter Stellen

Man will beispielsweise eine große Zahl Z in binärer Form darstellen und möchte wissen, wie viele Stellen n man dafür benötigt:

$$n = \begin{cases} \text{größt möglich: } \overbrace{(1111\ldots 1)}^{n\text{-Stellen}} = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + \ldots 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} - 1 \\ \text{kleinstmöglich: } (100000\ldots 0) = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} \end{cases}$$

$\hookrightarrow 2^{n-1} \leq Z \leq 2^n - 1 < 2^n \,||\, \mathrm{lb}$

$\Rightarrow \mathrm{lb}(2^{n-1}) \leq \mathrm{lb}(Z) < \mathrm{lb}(2^n) \Rightarrow n-1 \leq \mathrm{lb}(Z) < n$

Mit dem Symbol $\lfloor \alpha \rfloor$:= gr. ganze Zahl $\leq \alpha$

3) Logarithmische Skalen

z.B. Angabe von Lautstärken in Dezibel (=dB):

$$L = 10 \cdot \lg \left(\frac{P_1}{P_0} \right) \text{ dB} = 20 \cdot \lg \left(\frac{p_1}{p_0} \right) \text{ dB}$$

P_0 Standardvergleichswert = Leistung/Energie, die dem Schalldruck bei der Hörschwelle von $p_0 = 2 \cdot 10^{-10}$bar entspricht.

dB	Geräusch	Auswirkung
0	Hörschwelle	
10	Atmen	
30	Flüstern	
50-60	Normale Unterhaltung	60 ist Stressgrenze
90	gut besuchte Kneipe	Hörschäden bei Dauerbelastung
95	Empfohlene Pegelbegrenzung zum Schutz vor Gehörschäden in Diskotheken zwecks Haftungsbegrenzung im Schadensfall.	
100-110	Presslufthammer, Schnellzug in geringer Entfernung	
120	Laute Diskothek, Vuvuzela, Schreirekord	Hörschäden auch bei Kurzzeitbelastung möglich
130		Schmerzschwelle, Hörschäden
150	Düsenflugzeug in 30m Entfernung	
160	Knall bei einer Airbag-Entfaltung.	Trommelfell kann platzen
170	Bundeswehrgewehr G 3 in Ohrnähe 168 dB, Pistole P1 171 dB, Ohrfeige aufs Ohr	
190		Innere Verletzungen, Hautverbrennungen, Tod wahrscheinlich
194	Höchstmöglicher Schalldruck, der auf der Erde nicht überschritten werden kann, da der Atmosphärendruck von 1,013 bar erreicht wird.	

$$L_1 = 60 = 10\lg\left(\frac{P_1}{P_0}\right)$$

$$L_2 = 100 = 10\lg\left(\frac{P_2}{P_0}\right)$$

$$\Rightarrow L_2 - L_1 = 40 = 10\cdot\left(\lg\left(\frac{P_1}{P_0}\right) - \lg\left(\frac{P_2}{P_0}\right)\right)$$

$$\Rightarrow 4 = \lg\left(\frac{P_2}{\cancel{P_0}}\cdot\frac{\cancel{P_0}}{P_1}\right) = \lg\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \quad |10^{(\,)}$$

$$10^4 = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = 10^{-4}$$

Bsp:

2 Lautsprecher à $L_1 = 90$ dB

Gesucht: totale Lärmbelastung

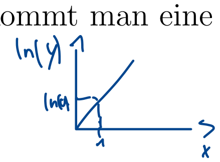
Ansatz: $10\cdot\lg\left(\frac{P_1+P_2}{P_0}\right) = 10\cdot\lg\left(\frac{2P_1}{P_0}\right) = 10\left(\lg\left(\frac{P_1}{P_0}\right)+\lg(2)\right)$

$= \underbrace{10\cdot\left(\lg\frac{P_1}{P_0}\right)}_{L_1=90} + \underbrace{10\cdot\lg(2)}_{3} = 93$ [dB]

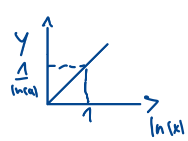
4) Darstellbarkeit komplizierterer Funktionen als Geraden

Da das menschliche Auge sehr gut darin ist zu erkennen, ob eine Menge von Punkten auf einer Geraden liegen. Viel schlechter sind wir aber darin zu sehen, ob die Punkte auf einer Kurve z.B. der Form $x^3, 2^x$ oder $\ln(x)$ liegen.

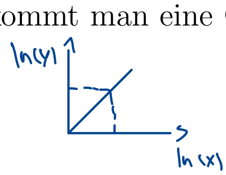
i) Aus $a^x = e^{x\cdot\ln(a)}$ bekommt man eine Gerade, indem man die y-Achse logarithmiert



ii) Aus $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ bekommt man eine Gerade, indem man die x-Achse logarithmiert



iii) Aus $x^a = e^{a\cdot\ln(x)}$ bekommt man eine Gerade, indem man beide Achse logarithmiert



Satz 4.14 (Ableitungen der trigonometrischen Funktionen)

i) $\cos'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) = -\sin(x)$

ii) $\sin'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = \cos(x)$

iii) $\tan'(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) = \dfrac{1}{\big(\cos(x)\big)^2} = 1 + \big(\tan(x)\big)^2$

Beweis:

i) $\frac{d}{dx}\cos(x) = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k)!}\underbrace{\frac{d}{dx}x^{2k}}_{2kx^{2k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{(-1)^k}_{(-1)\cdot(-1)^{k-1}}\frac{2k}{(2k)!}x^{2k-1}$

$= -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \overset{l:=k-1}{=} -\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!} = -\sin(x)$

ii) analog zu i)

iii) Aus i) und ii) mit Hilfe der Quotientenregel

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\overbrace{\sin(x)'}^{\cos(x)}\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot\overbrace{\cos(x)'}^{-\sin(x)}}{\cos^2(x)}$$

trigo. Pythagoras, egal für welche x, =1

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \\ \dfrac{1}{\cos^2(x)} \end{cases}$$

Aufgabe A 4.10
Zeigen Sie unter Verwendung von Satz 4.14 i)+ii), dass gilt:

$$\big(\sin(x)\big)^2 + \big(\cos(x)\big)^2 = 1$$

Hinweis: Es gilt:

$$\left.\begin{array}{ll} f'(x) = g'(x) & \text{für alle } x \in \mathbb{R} \\ f(x_0) = g(x_0) & \text{für ein } x_0 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x) \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Hier: $f(x) := \cos^2(x) + \sin^2(x)$, $g(x) := \text{const} = 1$

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{2\cos(x)}_{\text{äußere}} \cdot \underbrace{(-\sin(x))}_{\text{innere}} + 2\sin(x) \cdot (\cos(x)) = 0$$

$f(0) = \sin^2(0) + \cos^2(0) = 0^2 + 1^2 = 1$, $g(0) = 1$

$\overset{\text{Hinw.}}{\Longrightarrow} f(x) = g(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$

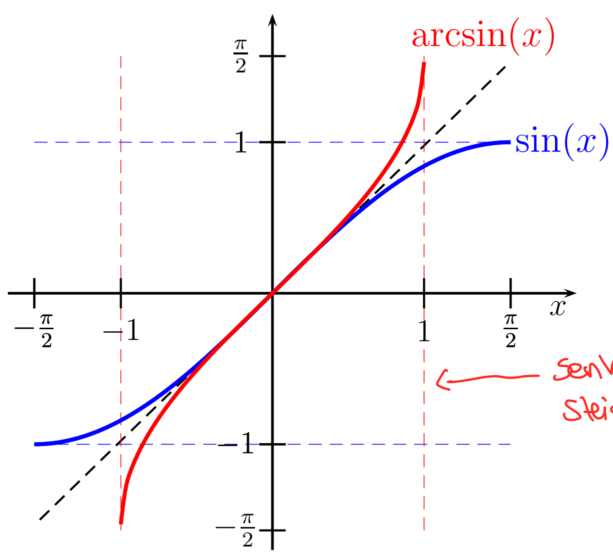
Definition 4.15 (Umkehrfunktionen von trigonometrischen Funktionen)

i) Der Arcussinus

lat. Arcus = Bogen

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$y \mapsto \arcsin(y)$$

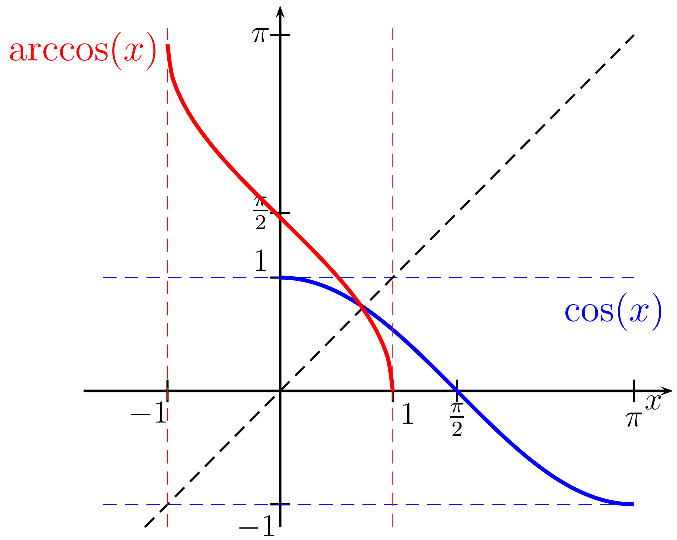
ist die Umkehrfunktion von $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$



senkrechte Tangente bei Randpunkte, Steigung $+\infty, -\infty$ => nicht definiert *ii) Der Arcuscosinus*

$$\begin{aligned}\arccos : [-1,1] &\to [0,\pi]\\ y &\mapsto \arccos(y)\end{aligned}$$

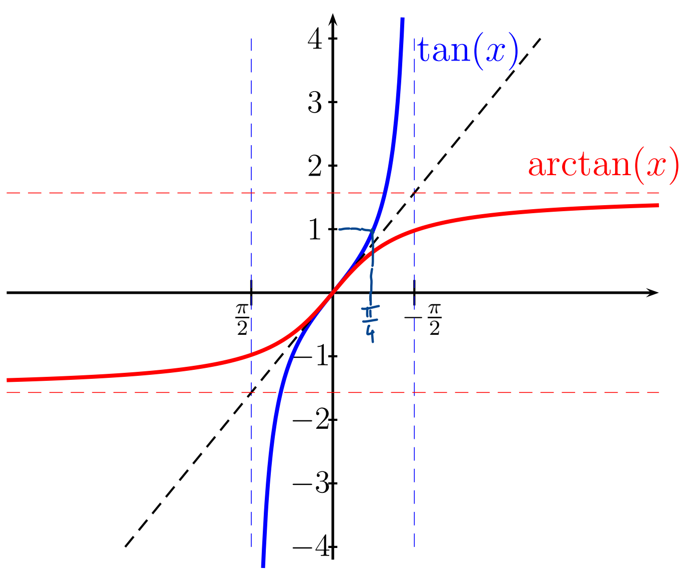
ist die Umkehrfunktion von $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$



iii) Der Arcustangens

$$\begin{aligned}\arctan : \mathbb{R} &\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ y &\mapsto \arctan(y)\end{aligned}$$

ist die Umkehrfunktion von $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$



Satz 4.16 (Ableitungen der Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen)

i) Für $y \in]-1,1[$: $\arcsin'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\arcsin(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

ii) Für $y \in]-1,1[$: $\arccos'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\arccos(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

iii) Für $y \in \mathbb{R}$: $\arctan'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\arctan(y) = \frac{1}{1+y^2}$

$\lim_{y\to\infty}\arctan(y) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{y\to-\infty}\arctan(y) = -\frac{\pi}{2}$

Beweis:

i) nach dem Satz von der Umkehrfunktion (Satz 4.9) gilt:

$\left(\forall y \in]-1,1[: \frac{d}{dy}\arcsin(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)$

$\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$
$\Rightarrow \cos(x) = \pm\sqrt{1-\sin(x)}$

$\hookrightarrow$ mit der Umkehrfunktion. $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Hier: $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$

$f^{-1}(y) = \arcsin(y)$

$\Rightarrow \frac{d}{dy}\arc\sin(y) = \frac{1}{\underbrace{\cos(\arcsin(y))}_{\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}}$

$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

hebt sich auf

ii) analog zu i) $\left(\forall y \in]-1,1[: \frac{d}{dy}\arccos(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)$

iii)

$\left(\begin{array}{l} \forall y \in \mathbb{R} : \frac{d}{dy}\arctan(y) = \frac{1}{1+y^2} \\ \lim_{y\to\infty}\arctan(y) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{y\to-\infty}\arctan(y) = -\frac{\pi}{2} \end{array}\right)$

$\frac{d}{dy}\arctan(y) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1+y^2}$

$f(x) = \tan(x) \Rightarrow f'(x) = 1+\tan^2(x)$

$\lim_{y\to\infty}\arctan(y) \overset{y=\tan(x)}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\arctan(\tan(x)) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x = \pm\frac{\pi}{2}$

Da $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\arctan(y) = \frac{1}{1+y^2} > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$, ist der Arcustangens nach der Folgerung aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 4.7) auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Zudem gilt:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$$

Daraus ergibt sich:

Aufgabe A 4.11

Es soll die Funktion $f(x) = \arcsin(x^2 - 1)$ betrachtet werden.

a) *Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f.*

$f(x) = \arcsin(x^2-1)$, $\arcsin(x): D = [-1, 1]$

$\hookrightarrow -1 \leq x^2 - 1 \leq 1$

1.Fall $-1 \leq x^2 - 1 \quad | +1$

$0 \leq x^2$ ✓

2.Fall $x^2 - 1 \leq 1 \quad | +1$

$x^2 \leq 2$

$|x| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

Also: $D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

b) Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ und deren Definitionsbereich.

$f(x) = \arcsin(x^2-1)$

Kettenregel: $\frac{d}{dx}\arcsin(x^2-1) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2(2-x^2)}} = \frac{2x}{|x|\cdot\sqrt{2-x^2}}$

$\hookrightarrow \sqrt{x^2}\cdot\sqrt{(2-x^2)}$

$= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}, & x \in \,]0, \sqrt{2}[\\ -\frac{2}{\sqrt{2-x}}, & x \in \,]-\sqrt{2}, 0[\end{cases}$

f ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$

$\Rightarrow D_{f'} = \,]-\sqrt{2}, 0[\,\cup\,]0, \sqrt{2}[$

Tabelle mit Ableitungen von elementaren Funktionen

! einprägen

f	f'
c	$0 \qquad c \in \mathbb{R}$
x^r	$r \cdot x^{r-1} \qquad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln(a) \quad a > 0$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

4.4 Grenzwerte differenzierbarer Funktionen

Die Bestimmung von Grenzwerten der Form $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ kann schwierig werden, wenn

oder
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$$

Man spricht in diesen Fällen von „unbestimmten Ausdrücken“ der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$.

Satz 4.17 (Regel von de l´Hospital)
Die Funktionen f und g seien differenzierbar in $\mathcal{U}_\delta(x_0) :=]x_0-\delta, x_0+\delta[$ (für ein $\delta > 0$) und $g'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{U}_\delta(x_0)$. Weiter gelte

Annahme A 1: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$

oder

Annahme A 2: $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$

Falls dann der Grenzwert
$$G := \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
existiert, so ist auch
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = G$$

Beweis Fall A 1: beide Funktionen sind in x_0 stetig:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0$, $g(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{f x}{g x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} \xrightarrow[x\to x_0]{} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Bsp: 1) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^2-5x-3}{x^2+x-12} = \frac{\text{“}0\text{”}}{\text{“}0\text{”}}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{4x-5}{2x+1} = \frac{\lim_{x\to 3}(4x-5)}{\lim_{x\to 3}(2x+1)} = \frac{7}{7} = 1$$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{4n^2+1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{4x^2+1} \overset{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{8x} \overset{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Bemerkung:
Diesen Satz kann man auch auf andere unbestimmte Ausdrücke anwenden:

1) Produkte $f \cdot g$ mit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ formt man folgendermaßen um:

"$0 \cdot \infty$"

$$f \cdot g = \frac{f}{1/g} \implies \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

2) Differenzen $f - g$ mit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ formt man zunächst folgendermaßen um:

"$\infty - \infty$"

$$f - g = f\left(1 - \frac{g}{f}\right) \quad \text{oder} \quad f - g = g\left(\frac{f}{g} - 1\right) \implies \text{"}0 \cdot \infty\text{" falls } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

- Falls dann $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ ist (was dasselbe ist wie $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$), erhält man einen Ausdruck der Form $\pm\infty \cdot 0$ und geht dann gemäß 1) vor.

- Falls $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existiert, aber $\neq 1$ ist, dann ist $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - g(x)) \in \{\pm\infty\}$.

- Falls $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ nicht existiert, dann existiert auch $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - g(x))$ nicht.

3) Bei unbestimmten Ausdrücken der Form 1^∞, 0^0 oder ∞^0 formt man um:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \exp\big(g(x) \cdot \ln\big(f(x)\big)\big) = \exp\left(\lim_{x \to x_0} \underline{g(x)} \cdot \ln\big(\underline{f(x)}\big)\right)$$

$\to \infty, 0$ bzw. 0

$\to 1, 0$ bzw. ∞

$\to 0, -\infty$ bzw. ∞

Dies führt wieder auf den Fall $\pm 0 \cdot \infty$ von 1).

4) Für Grenzwerte der Form $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ gilt dieser Satz genauso.

Beispiele: $n \in \mathbb{N}, \alpha > 0$

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{\alpha \cdot x}}{x^n} = \infty$ erneut beweisen

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{\alpha \cdot x}}{x^n} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{e^{\alpha \cdot x} \cdot \alpha}^{\text{Kettenregel}}}{n \cdot x^{n-1}} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\alpha^2 \cdot e^{\alpha \cdot x}}{n(n-1)\, x^{n-2}} = \ldots$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\alpha^n \cdot e^{\alpha \cdot x}}{n!\, \underbrace{x^0}_{1}} = \frac{\alpha^n}{n!} \lim_{n \to \infty} e^{\alpha \cdot x} = \infty$$

2) $$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \overset{\text{"}1^\infty\text{"}}{=} \lim_{x \to \infty} e^{x \cdot \ln(1 + \frac{1}{x})} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \ln(1 + \frac{1}{x})} = e^1, e, \text{ da} \implies$$

NR: $$\lim_{x \to \infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \overset{\text{"}\infty \cdot 0\text{"}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot (-x^{-2})}{-x^{-2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$\frac{1}{x} = x^{-1}$

3) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\sqrt{x}}_{\to\infty} \Big(\underbrace{\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} - 1}_{\to 0}\Big)$

"$\infty \cdot 0$"

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{"0"}{0} \ldots$

Oft anders einfacher: $\to \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} = \frac{a^2-b^2}{a+b}$

$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{x+1+x} = \frac{1}{2x+1} \to 0$

4) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim \frac{e^x \pm e^{-x}(-1)}{e^x \mp e^{-x}(-1)} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (Ausgangsform)

$\hookrightarrow$ ST!: Kürzen des dom. Terms, hier also e^x: (oder multiplizieren mit Kehrwert)

$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x} \cdot e^{-x}}{(e^x + e^{-x}) \cdot e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + \underbrace{e^{-2x}}_{\to e^{-\infty} \to 0}} \to \frac{1}{1}$

Aufgabe A 4.12

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2-7x+3}{7x^3+800x+9}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2-7x+3}{7x^3+800x+9} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \frac{6x^2+6x-7}{21x^2+800} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \frac{12x+6}{42x} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}$

$(1+x)^{\frac12}$ $\quad x\cdot\frac12$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac12(1+x)^{-\frac12}-1}{2x}\underset{l.2}{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}}\lim_{x\to0}\frac{-\frac12(1+x)^{-\frac32}}{4}=\frac{-\frac12}{4}=-\frac18$$

$\to 1$

c) $\lim\limits_{x\searrow0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

$$\overset{\text{"}\infty-\infty\text{"}}{=}\lim_{x\searrow0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}\lim_{x\searrow0}\frac{e^x-1}{\underbrace{1\cdot(e^x-1)+x\cdot e^x}_{\text{Produktregel}}}=\lim_{x\searrow0}\frac{e^x-1}{(1+x)\cdot e^x-1}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}\lim_{x\searrow0}\frac{e^x}{1\cdot e^x+(1+x)e^x}$$

$$=\lim_{x\searrow0}\frac{1}{1+1+x}=\lim_{x\searrow0}\frac{1}{2+x}=\frac12$$

Aufgabe A 4.13

Was ist von folgender Anwendung der Regel von de l'Hospital zu halten?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin(x)}{x^2}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot x+\cos(x)}{2\cdot x}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2-\sin(x)}{2}$$

und dieser Grenzwert existiert nicht. Also existiert $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin(x)}{x^2}$ *nicht.*

Grenzwert schwankt hin und her

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin(x)}{x^2}\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\cos(x)}{2x}\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2-\sin(x)}{2}=\lim\left(1-\tfrac12\sin(x)\right)$$ existiert nicht!

Hieraus folgt nicht, dass auch $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin(x)}{x^2}$ nicht existiert, den l'Hospital ist eine Implikation.

$$\boxed{\exists\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\Longrightarrow\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

und hier ist ihre Vorraussetzung nicht erfüllt

Tatsächlich gilt mit Standardtrick:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin(x)}{x^2}}{1}=\frac{1+0}{1}=1$$

4.5 Taylor-Entwicklung

Da endliche Potenzreihen von Computern besonders gut verarbeitet werden können, möchten wir am liebsten jede Funktion als Potenzreihe darstellen oder zumindest eine Näherung durch eine endliche Potenzreihe.
Da Potenzreihen beliebig oft differenzierbar sind, ist dieses Vorhaben sicher nur für oft differenzierbare Funktionen erfolgversprechend.

Gegeben sei eine durch eine Potenzreihe darstellbare Funktion f mit einem gegebenen x_0 aber noch unbekannten $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-x_0)^k$$

$$f(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x_0-x_0)^k = a_0$$

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-x_0)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a_k \cdot (x-x_0)^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x-x_0)^{k-1}$$

$$f'(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x_0-x_0)^{k-1} = a_1$$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot (x-x_0)^{k-2}$$

$$f''(x_0) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot (x_0-x_0)^{k-2} = a_2 \cdot 2 \cdot 1 = a_2\ 2!$$

$$f^{(3)}(x) = \sum_{k=3}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot (x-x_0)^{k-3}$$

$$f^{(3)}(x_0) = \sum_{k=3}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot (x_0-x_0)^{k-3} = a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = a_3 \cdot 3!$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots (k-n+1) \cdot (x-x_0)^{k-n}$$

$$f^{(n)}(x_0) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots (k-n+1) \cdot (x_0-x_0)^{k-n} \quad = a_n \cdot n!$$

Allgemein gilt: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right)$

Beachte: $f^{(0)}(x) := f(x)$

Definition 4.18 (Taylorpolynom)
Für eine n-mal differenzierbare Funktion f heißt

$$T_n(f, x_0, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

das n-te Taylorpolynom *von f um x_0.*

Satz 4.19 (Satz von Taylor)
Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei $(n + 1)$-mal stetig differenzierbar (d.h. $(n + 1)$-mal differenzierbar und $f^{(n+1)}$ stetig) und $x_0 \in]a, b[$.
Dann gilt für alle $x \in [a, b]$ die Taylor-Formel:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_{n+1}(x)$$

Rest bzw. Abweichung der Gleichung

und es existiert ein ξ zwischen x und x_0 mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad \text{Lagrange-Form d. Restgliedes}$$

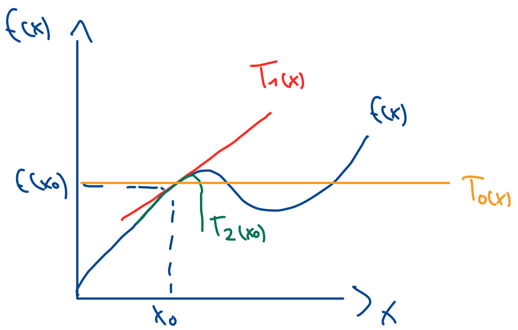
Bem: Manchmal wird das Restglied, das zum n-ten Taylor-Polynom gehört auch mit R_n statt mit R_{n+1} bezeichnet

Spezialfälle:

$n=0$: $T_0(f, x, x_0) = f(x_0)$

$n=1$: $T_1(f, x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

stellt die Gleichung für die Tangente an Graph f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ dar: Linearisierung
(lin. Approximation von $f(x)$)



T(x) wird immer genauer

$n=2$: $T_2(f, x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2$ => stellt die Gleichung der Schmiegparabel für Graph f in $(x_0, f(x_0))$ dar.

Beispiel:
Gegeben $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$.
Gesucht ist das Taylorpolynom T_3 mit Entwicklungspunkt x_0 und Abschätzung des Fehlers für $x \in [-1, 1]$.

$$T_{3(x)} = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3$$

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$f'(x) = \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\cos(x)(-\sin(x)) - 2\sin(x) \cdot (\cos(x)) \\ &= -4\sin(x) \cdot \cos(x) \overset{0}{\Rightarrow} f''(0) = 0 \\ &= -4 f(x) \end{aligned}$$

$$f'''(x) = -4 f'(x) \Rightarrow f''(0) = -4$$

$$f^{IV}(x) = -4 f''(x) \Rightarrow f^{IV}(\xi) = -4 \cdot \sin(\xi) \cdot \cos(\xi)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_3(x) &= 0 + 1x + \frac{0}{2} x^2 + \frac{-4}{6} x^3 \\ &= x - \frac{2}{3} x^3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R_4(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot (x - \underbrace{x_0}_{0})^4$$

Lagrange-Restglied mit einem passenden ξ zwischen x und $x_0 = 0$

$$= \frac{16 \sin(\xi) \cos(\xi)}{24} x^4$$

$$\Rightarrow |R_4(x)| = \underbrace{\left|\frac{16}{24}\right|}_{= \frac{2}{3}} \underbrace{\sin(\xi)\cos(\xi)}_{\underbrace{\frac{1}{2}\sin(2\xi)}_{\leq \frac{1}{2}}} \underbrace{|x^4|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{3}$$

Additionstheorem $\Rightarrow$ $\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos(b) \pm \sin(b) \cdot \cos(a)$

Sehr schlechte Abschätzung im Verhältnis zu den Werten $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$

Aufgabe A 4.14
Berechnen Sie die Taylor-Polynome T_1 und T_2 der Funktion $f(x) = \exp\left(2 \cdot \sin(\frac{x}{2})\right)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$f(x) = \exp(2\sin(\frac{x}{2}))$, $x_0 = 0$

$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$T_2(x) = \quad " \quad + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2$

$f'(x_0) = e^{2\sin(\frac{x}{2})} \cdot 2\cos(\frac{x}{2}) \frac{1}{2} = \cos(\frac{x}{2}) \cdot f(x)$

$f'(0) = e^{2\sin(0)} \cdot \cos(\frac{0}{2}) = 1$

$T_1(x) = 1 + x$

$f''(x) = -\sin(\frac{x}{2}) \cdot \frac{1}{2} f(x) + \cos(\frac{x}{2}) \cdot \underbrace{f'(x)}_{\cos(\frac{x}{2}) \cdot f(x)}$

$f(0) = 1$, $f'(0) = \cos(\frac{0}{2}) \cdot f(0) = 1 \cdot 1 = 1$, $f''(0) = \underbrace{-\frac{1}{2}\sin(\frac{0}{2})}_{0} \cdot \underbrace{f(0)}_{1} + \underbrace{\cos(\frac{0}{2})}_{1} \cdot \underbrace{f'(0)}_{1} = 1$

$T_1(x) = 1 + x$, $T_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

Definition 4.20 (Taylorreihe)
Ist eine Funktion f beliebig oft differenzierbar, so heißt die Potenzreihe

$$T(f, x_0, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

die Taylorreihe *von f mit Entwicklungspunkt x_0.*

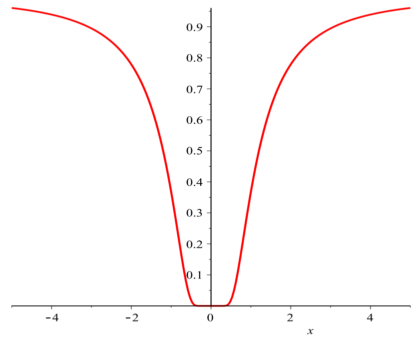
Bemerkung:

1) Es sind keine allgemeinen Aussagen über die Konvergenz der Taylorreihe möglich (also ob der Konvergenzradius $r > 0$ bzw. wie groß)).

2) Im Falle der Konvergenz der Taylorreihe gilt nicht notwendigerweise $T(f, x_0, x) = f(x)$.

Bsp.: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{sonst} \end{cases}$$



$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0}$$

$$\overset{y := \frac{1}{x}}{=} \lim_{y \to \infty} y \cdot e^{-y^2} = \lim_{y \to \infty} \frac{y}{e^{y^2}} = 0$$

$$x \neq 0: f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) \cdot \left(-(-2) \cdot x^{-3}\right) = 2x^3 e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^{-3} e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4} \overset{y := \frac{1}{x}}{=} \lim_{y \to \infty} \frac{2y^4}{e^{y^2}} = 0$$

Ebenso: $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow T(f, x, 0) = 0 \neq f(x)$ für alle $x \neq 0$

3) Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ für die für jedes $x_0 \in D$ gilt: $T(f, x_0, x)$ konvergiert für alle $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ und dort gilt $T(f, x_0, x) = f(x)$ heißen analytisch. Viele der Funktionen, mit denen man „normalerweise“ zu tun hat, sind analytisch.

z.B. alle Polynome, alle rationalen Funktionen (außer in den nicht definierten Stellen), $e^x, \ln(x), \sin(x), \cos(x), \tan(x), \arcsin(x), \arccos(x), \arctan(x), \ldots$

Beispiel:
Man kann zeigen, dass

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k \qquad \text{für} \quad x \in]0,2]$$

die Potenzreihendarstellung des Logarithmus ist.

Daraus erhält man insbesondere

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$ alt. harmonische Reihe

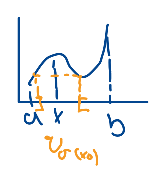
4.6 Anwendungen der Differentialrechnung

1) Bestimmung von Minima und Maxima.
2) Bestimmung von Nullstellen mit dem Newton-Verfahren
3) Die Ableitung als lokale Änderungsrate wird zur Beschreibung vieler technischer und wirtschaftlicher Zusammenhänge benötigt.
4) Die zeitliche Änderung gekoppelter Größen kann man mit Hilfe impliziter Differentiation berechnen.

1) Bestimmung von Maxima/Minima

Definition 4.21 (Lokales/Relatives Extremum)
Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion

i) *f besitzt in $x_0 \in]a,b[$ ein* relatives/lokales Maximum, *falls es eine Umgebung $\mathcal{U}_\delta(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ gibt, so dass $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall\, x \in \mathcal{U}_\delta(x_0)$*



ii) *Falls $f(x_0) > f(x) \quad \forall\, x \in \mathcal{U}_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$, so spricht man von einem* strengen/isolierten Maximum.

Die Definitionen für ein Minimum sind analog.

Ein Minumum oder Maximum heißt auch Extremum.

Definition 4.22 (Globales/Absolutes Extremum)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

f besitzt in $x_0 \in D$ ein globales/absolutes Maximum, *falls $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall\, x \in D$.*

Die Definition für ein Minimum ist analog.

Satz 4.23
Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und in $]a, b[$ differenzierbar.

i) *Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[$*
$\Longrightarrow$ *f ist streng monoton wachsend*
$\Longrightarrow$ *f hat in b ein globales, isoliertes Maximum und in a ein globales, isoliertes Minimum*

ii) *Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a, b[$*
$\Longrightarrow$ *f ist monoton wachsend*
$\Longrightarrow$ *f hat in b ein globales Maximum und in a ein globales Minimum*

Für $f'(x) < 0$ bzw. $f'(x) \leq 0$ gelten analoge Aussagen.

Beweisskizze:
Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 4.7) und die Definitionen für ein globales Maximum (Def. 4.22) bzw. ein isoliertes Maximum (Def. 4.21). ∎

Satz 4.24 (Notwendige Bedingung für lokales/relatives Extremum)
$f :]a, b[\to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in]a, b[$ ein lokales Extremum und sei in x_0 differenzierbar, dass gilt:

$$f'(x_0) = 0$$

Beweisskizze:
Über die Definition der Differenzierbarkeit (Def. 4.1) und die Definition für ein lokales Extremum (Def. 4.21). ∎

Bemerkung:
Ein Punkt x_0 in dem f differenzierbar ist und $f'(x_0) = 0$ gilt, heißt *stationärer/kritischer Punkt.*

Satz 4.25 (Hinreichende Bedingung für lokales/relatives Extremum)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in]a, b[$. Wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt: f in x_0 n-mal stetig differenzierbar, sowie

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq n-1$$

und

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

dann folgt:

i) *Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.*

ii) *Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.*

iii) *Ist n ungerade, so hat f in x_0 kein lokales Extremum.*

Beweis:
Nach dem Satz von Taylor gilt für eine n-mal stetig differenzierbare Funktion f (d.h. die n-te Ableitung von $f$existiert und ist stetig) und ein ξ zwischen x und x_0:

$$f(x) = T_{n-1}(x) = R_n(x)$$

$$= f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}_{=0} (x-x_0)^k + \frac{f^n(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

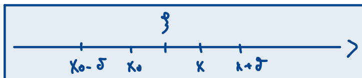
mit einem ξ zwischen x und x_0

$$\Rightarrow f(x_0) - f(x) = -\frac{f^n(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

Fall i) x gerade, $f^k(x_0) < 0$

Nach Satz 3.5 gibt es eine Umgebung $U_\delta(x_0) =]x_0-\delta, x_0+\delta[$, so dass

$f^n(x_0) < 0$, $\forall x \in U_\delta(x_0)$



$\Rightarrow f^n(\xi) < 0$

$$\Rightarrow f(x_0) - f(x) = \underbrace{-f^n(\xi)}_{<0} \cdot \underbrace{(x-x_0)^n}_{\geq 0,\ \text{da } n \text{ gerade}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n!}}_{>0} \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x_0) \geq f(x), \forall x \in U_\delta(x_0)$$

Fall ii) Ebenso! (anderes VZ)

Fall iii) n ungerade

$$f(x_0) - f(x) = \underbrace{-f^n(\xi)}_{\text{hat das VZ von } f^n(x_0)} \cdot \overbrace{(x-x_0)^n}^{\begin{cases} <0, & \text{falls } x<x_0 \\ >0, & \text{falls } x>x_0 \end{cases}}$$

$\Rightarrow f(x_0) - f(x)$ wechselt in $x > x_0$ das VZ

$\Rightarrow f$ hat in x_0 kein lokales Extremum

Bemerkung: Man kann ein lokales Extremum auch über folgende Bedingung erkennen: Sei $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$, f sei differenzierbar und f' sei stetig. Weiter sei $x_0 \in \,]a,\, b[$.

i) f hat in x_0 ein lokales Maximum, genau dann wenn (mindestens) eine der folgenden beiden Zeilen gilt:

$f(x_0 - \epsilon) < f(x_0)$	$f(x_0)$	$f(x_0 + \epsilon) < f(x_0)$
$f'(x_0 - \epsilon) > 0$	$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0 + \epsilon) < 0$

für ein $\epsilon > 0$, so dass $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subseteq [a, b]$ und es gibt kein $x_1 \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \setminus \{x_0\}$ mit $f'(x_1) = 0$.

ii) f hat in x_0 ein lokales Minimum, genau dann wenn (mindestens) eine der folgenden beiden Zeilen gilt:

$f(x_0 - \epsilon) > f(x_0)$	$f(x_0)$	$f(x_0 + \epsilon) > f(x_0)$
$f'(x_0 - \epsilon) < 0$	$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0 + \epsilon) > 0$

für ein $\epsilon > 0$, so dass $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subseteq [a, b]$ und es gibt kein $x_1 \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \setminus \{x_0\}$ mit $f'(x_1) = 0$.

Vorgehen beim Lösen von Extremwertproblemen

1) Aufstellen der Ziel-/Hauptfunktion, d.h. die Funktion bestimmen, die maximiert/minimiert werden soll. (In seltenen Fällen auch schon gegeben)
   Dabei sollten Sie beachten, dass keine nicht definierten Variablen auftreten dürfen. Eine solche Definition kann auch über eine Skizze erfolgen.

2) Falls die Hauptfunktion zwei Variablen enthält, muss man eine davon eliminieren. Aufstellen der Nebenbedingung/-funktion und nach einer der Variable auflösen. In die Hauptfunktion einsetzen, die nun nur noch von einer Variablen abhängt.

3) Definitionsbereich D der noch übrig gebliebenen Variablen angeben.
   Ev. ist für die Bestimmung der einen Grenze die andere Variable und die Nebenbedingung notwendig.

4) Hauptfunktion nach der einzigen Variablen ableiten.

5) Nullstellen der Ableitung bestimmen.

6) Für jede dieser Nullstellen prüfen, ob sie im Definitionsbereich liegt und damit für die Extremalstelle in Frage kommt.

7) Bestimmung des globalen Maximums/Minimums. Sei n die Anzahl der in Frage kommender Stellen im Inneren des Defintionsbereiches:

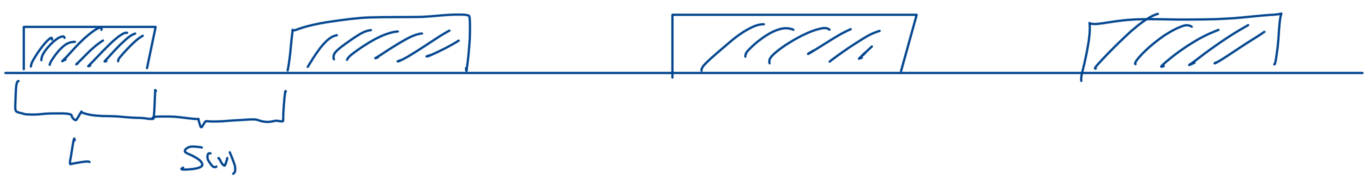
   $\mathbf{n = 0}$
   Falls D abgeschlossen ist, ist der gesuchte Extremwert in einem der Randpunkte. Über die Funktionswerte kann man herausfinden welcher es ist. Oder darüber, ob die 1. Ableitung immer > 0 (Funkt. streng monoton wachsend) oder immer < 0 (Funktion streng monoton fallend) ist.
   Falls D offen ist, wird das globale Maximum/Minimum nicht angenommen.
   $D =]a,b[$

   $\mathbf{n = 1}$
   Falls D abgeschlossen ist, kommen die beiden Randpunkte und der eine Punkt im Inneren in Frage. Man kann über das Berechnen der Funktionswerte den gesuchten Extremwert finden. Oder man untersucht den Punkt im Inneren mit Hilfe von Satz 4.25 oder der darauffolgenden Bemerkung. Wenn man ein globales Maximum sucht und man bei dem einen Punkt im Inneren ein lokales Maximum hat, dann ist das auch das globale Maximum (für Minimum analog)
   Falls D offen ist, ist entweder der Punkt im Inneren der gesuchte Punkt oder das gesuchte Extremum wird nicht angenommen. Man kann den Punkt im Inneren mit Hilfe von Satz 4.25 oder der darauffolgenden Bemerkung untersuchen und so folgern, ob es sich um den gesuchten Punkt handelt (oder ob der eben nicht existiert). Man kann prinzipiell über die Funktionswerte gehen, d.h. man bestimmt den Funktionswert des Punktes im Inneren und vergleicht ihn mit den Grenzwerten von $f(x)$ in Richtung der Ränder (falls die denn existieren), falls einer oder beide Grenzwerte nicht existieren, muss man den Punkt im Inneren dann doch einzeln untersuchen.

n ≥ 2
Falls D abgeschlossen ist, kommen die beiden Randpunkte und die Punkte im Inneren in Frage. Falls die Funktionswerte nicht allzu schlimm zu berechnen sind, sollte man diese für alle in Frage kommenden Punkte bestimmen und damit den gesuchten Punkt finden. Prinzipiell kann man die inneren Punkte auch mit den obigen Methoden untersuchen, was aber hier alleine nicht ausreicht,...
Falls D offen ist, ist entweder einer der kritischen Punkte im Inneren der gesuchte Punkt oder das gesuchte Extremum wird nicht angenommen. Man sollte versuchen die Funktionswerte und die Grenzwerte der Funktionswerte in den Rändern zu bestimmen und dann daraus den gesuchten Punkt. Sollte einer der Grenzwerte nicht existieren, dann muss man Satz 4.25 oder die darauffolgenden Bemerkung anwenden,...

8) Antwortsatz schreiben

Beispiel:
Gesucht ist die Geschwindigkeit v, für die die Anzahl der Fahrzeuge pro Sekunde, die einen festen Punkt passieren können (=Passierrate= $N(v)$) maximal wird.



L = mittlere Autolänge $= 4{,}5\,[m]$

$S(v)$ = Bremsweg $= v \cdot t_R + v^2 \cdot \frac{1}{2a}$

t_R = Reaktionszeit $= 0{,}8\,[s]$

a = Bremsbeschleunigung $= 7\,\frac{m}{s^2}$

t_1 = benötigte Zeit für Bremsweg + Autolänge

$$= \frac{L + v \cdot t_R + v^2 \cdot \frac{1}{2a}}{v}$$

Zeiteinheit

$$N(v) = \frac{1}{t_1}$$

$$= \frac{v}{L + t_R \cdot v + \frac{1}{2a} \cdot v^2}, \quad v \in D_N =]0, \infty[$$

$$\Rightarrow N'(v) = \frac{1 \cdot (L + t_R \cdot v + \frac{1}{2a} \cdot v^2) - (v \cdot (t_R + \frac{2}{2a} \cdot v))}{(L + t_R \cdot v + \frac{1}{2a} \cdot v^2)^2} = \frac{L + \cancel{t_R v} + \frac{1}{2a} \cdot v^2 - \cancel{t_R v} - \frac{2}{2a} v^2}{(L + t_R \cdot v + \frac{1}{2a} \cdot v^2)^2} = \frac{L - \frac{1}{2a} v^2}{(L + t_R \cdot v + \frac{1}{2a} \cdot v^2)^2}$$

Ansatz: $N'(v) = 0 \Leftrightarrow L - \frac{1}{2a} \cdot v^2 = 0 \Leftrightarrow L = \frac{1}{2a} v^2 \Leftrightarrow 2aL = v^2 \Leftrightarrow v = \pm\sqrt{2aL}$

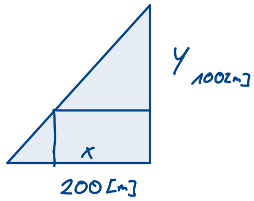
gehört nicht $\notin D_N$

Vergleich der Werte:

$\lim_{v \searrow 0} N(v) = \lim_{v \searrow 0} \frac{v}{L + t_R \cdot v + \frac{1}{2a} v^2}$

$\lim_{v \nearrow \infty} N(v) = \lim_{v \nearrow \infty} \frac{v}{L + t_R \cdot v + \frac{1}{2a} v^2} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{v \nearrow \infty} \frac{1}{t_R + \frac{1}{a} v} = 0$, $N(\sqrt{2aL}) \approx 0{,}54 > 0$ $\Rightarrow$ Also max. Passierrate für $v = \sqrt{2aL} \approx 8\left[\frac{m}{s}\right] \approx 30\left[\frac{km}{h}\right]$

Beispiel:



Gesucht ist ein eingeschriebenes Rechteck mit max. Inhalt!

$A(x,y) = x \cdot y$

1. Nebenbedingung: $\frac{y}{200-x} = \frac{100}{200}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(200-x) = 100 - \frac{1}{2}x$

$\Rightarrow A = A(x) = x \cdot (100 - \frac{1}{2}x) = 100x - \frac{1}{2}x^2$

2. $D_A =]0,200[$

3. $A'(x) = 100 - x = 0 \Rightarrow x = 100 \in D_A$

4. Vergleich der Werte

$\lim\limits_{x \searrow 0} A(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} x \cdot (100 - \frac{1}{2}x) = 0$

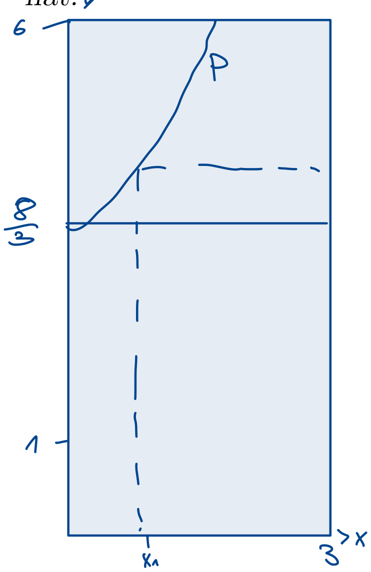
$\lim\limits_{x \nearrow 200} A(x) = \lim\limits_{x \nearrow 200} 100x - \frac{1}{2}x^2 = 0$

$A(100) = 100 \cdot (100 - \frac{1}{2} \cdot 100) = 5000$

Also wird A maximal für $x = 100$ und $y = 100 - \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$ [m]!

Aufgabe A 4.15

Eine rechteckige Glasplatte mit den Seiten 3 Einheiten in x-Richtung und 6 Einheiten in y-Richtung liegt mit der unteren linken Ecke im Ursprung. Nun zerbricht die Platte längs eines Parabelstücks der Form: $p(x) = x^2 + \frac{8}{3}$. Aus dem Reststück soll eine rechteckige Scheibe so herausgeschnitten werden, dass diese maximalen Flächeninhalt hat.



$\Rightarrow A(x) = (3-x)\cdot p(x) = (3-x)\cdot\left(x^2+\frac{8}{3}\right) = 3x^2+8-x^3-\frac{8}{3}x$

$= -x^3+3x^2-\frac{8}{3}x+8$

$D_A = [0, ?]$

Ansatz $p(x)=6 \Leftrightarrow x^2+\frac{8}{3} = 6 \Leftrightarrow x^2 = \frac{10}{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{10}{3}}$

juckt nicht

$\Rightarrow D_A = \left[0, \sqrt{\frac{10}{3}}\right]$

$A'(x) = -3x^2+6x-\frac{8}{3}$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2+6x-\frac{8}{3}$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-4\cdot(-3)(-\frac{8}{3})}}{-6}$

$x_1 = \frac{-6+\sqrt{4}}{-6} = \frac{-6+2}{-6} = \frac{2}{3}$

$x_2 = \frac{-6-\sqrt{4}}{-6} = \frac{-6-2}{-6} = \frac{4}{3}$

$A(0) = 8$

$A\left(\frac{2}{3}\right) = \ldots < 8$

$A\left(\frac{4}{3}\right) = \ldots < 8$

$A\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = \ldots < 8$

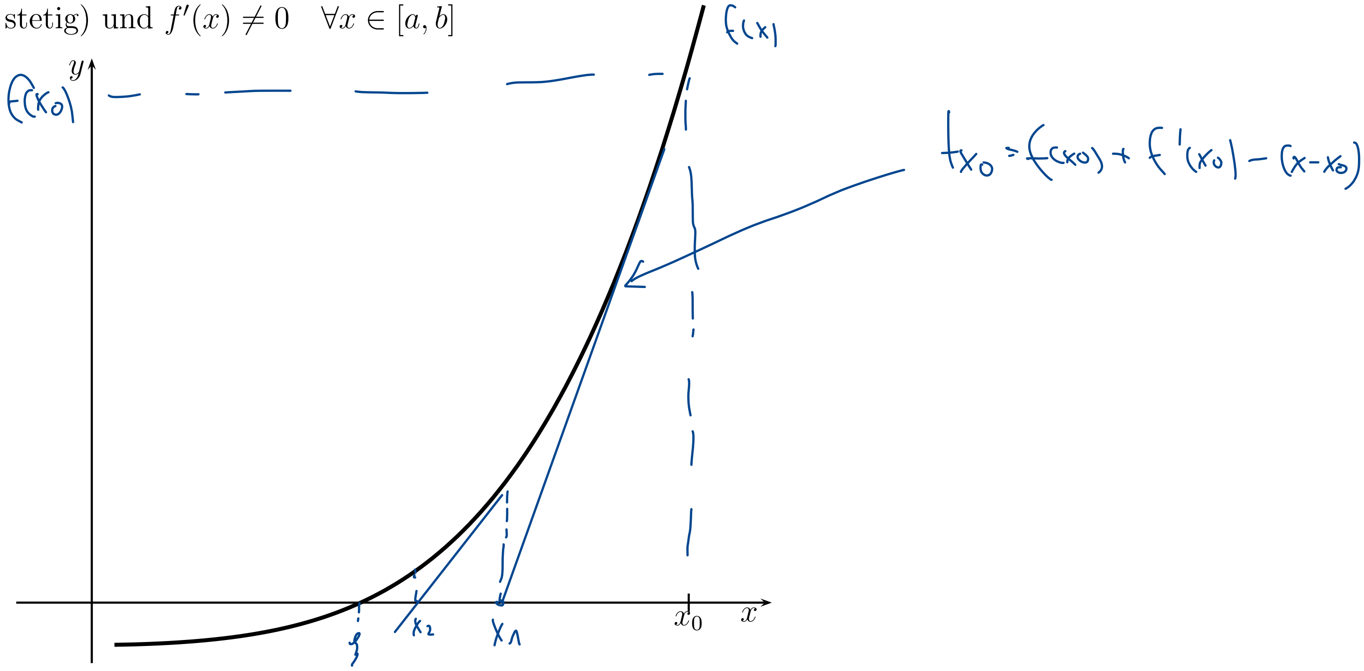
$\Rightarrow$ Das globale Maximum von $A(x)$ wird für $x=0$ angenommen.

2) Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren ist ein Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen einer differenzierbaren Funktion f.

Man verwendet, dass eine differenzierbare Funktion f in der Nähe eines Punktes x_0 durch die Tangente an f im Punkt x_0 genähert werden kann.

Sei $f : [a, b] \Rightarrow \mathbb{R}$, stetig differenzierbar (d.h. f differenzierbar und die erste Ableitung ist stetig) und $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$



zur Berechnung von x_1:

Ansatz: $f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow f'(x_0)(x - x_0) = -f(x_0)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Wir definieren die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(n)}{f'(n)}$$

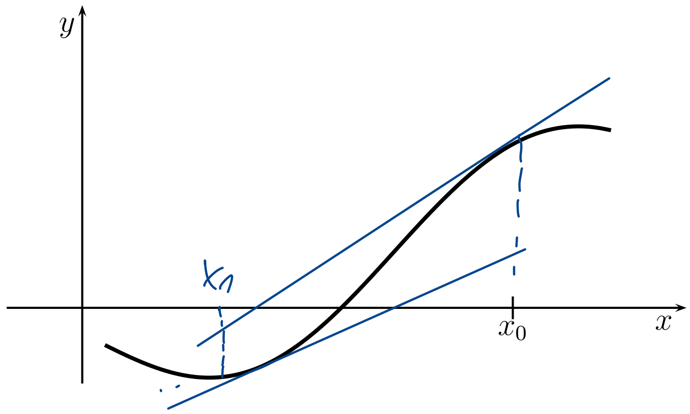
Falls $(x_n)_{n \geq 1}$ konvergiert, so gilt:

Stetig, somit lim in den Bruch ziehen

$$\xi := \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) = \lim_{n \to \infty} x_n - \frac{f(\lim x_n)}{f'(\lim x_n)}$$

$$= \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)} \Rightarrow f(\xi) = 0$$

Bem:
Im Allgemeinen braucht das Newton-Verfahren nicht zu konvergieren



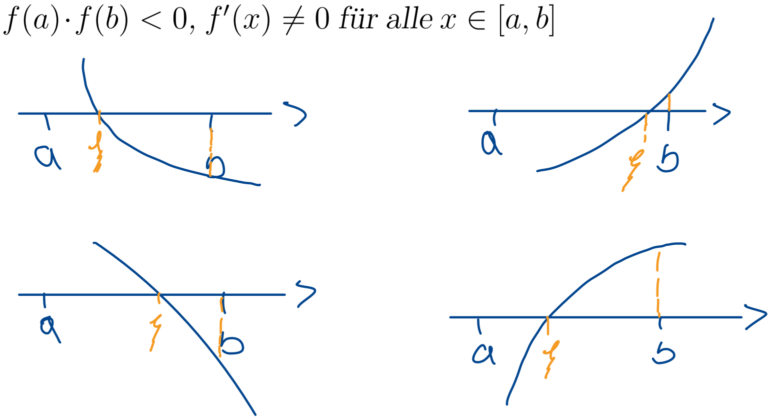
hier funktioniert Newton Verfahren mit x_0 als Anfangspunkt nicht

Satz 4.26 (Hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Newton-Verfahrens)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und

a) $f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in]a, b[$

oder

b) $f''(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in]a, b[$



dann gilt:

i) Es gibt genau ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = 0$

ii) Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $x_0 \in [a, b]$ und

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

konvergiert monoton

	$f(a) > 0$	$f(a) < 0$
a) $f''(x) \geq 0 \ \wedge \ f(x_0) > 0$	*wachsend*	*fallend*
b) $f''(x) \leq 0 \ \wedge \ f(x_0) < 0$	*fallend*	*wachsend*

Bedingung für Startwert

gegen ξ.

Beispiel:
Wir wollen $\sqrt{2}$ bestimmen, also die positive Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - 2$.

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2$$

Wähle $a=1, b=2$. Dann sind die Vorraussetzung von Satz 4.26 erfüllt $(f(a)\cdot f(b) < 0, f'(x) \neq 0)$, und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend bei Startwert $x_0 = 2$ $(f''(x) \geq 0 \wedge f(x_0) > 0)$ $(f(a) < 0)$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{2}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12} = 1{,}41\overline{6}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \frac{17}{12} - \frac{\left(\frac{17}{12}\right)^2 - 2}{2\cdot\frac{17}{12}} = \frac{577}{408} = 1{,}4142157\ldots$$

Vergleich mit exaktem Wert von $\sqrt{2} = 1{,}41421356$

Infimum = kleinste untere Schranke
Supremum - größte untere Schranke

5 Integralrechnung

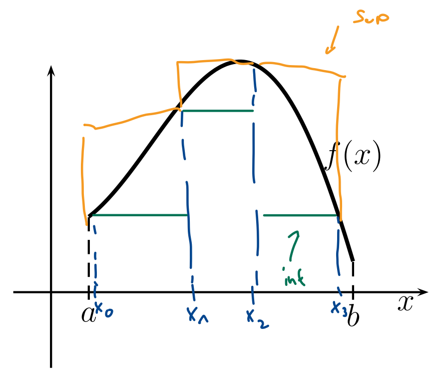
Stammfunktion

5.1 Bestimmtes und unbestimmtes Integral

Das bestimmte Integral tritt bei der Berechnung von krummlinig berandeten Flächen auf.

Gesucht: Flächeninhalt zwischen $f(x)$ ($f(x) \geq 0 \;\forall\, x \in [a, b]$), der x-Achse und $x = a, x = b$.

Idee: Approximation der Fläche durch Rechtecksflächen.



Definition 5.1 (Zerlegung, Feinheit)
Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein endliches, abgeschlossenes Intervall. Dann nennt man die Menge

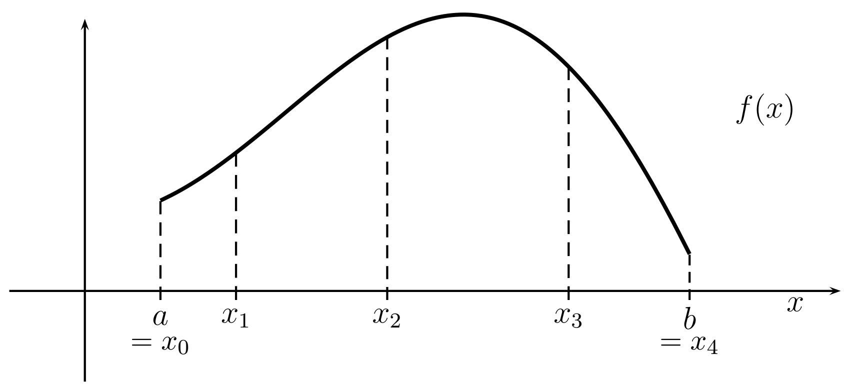
$$Z_n := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \,|\, a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$$

Zerlegung *oder* Partition *von* $[a, b]$.
$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ *(*$1 \leq j \leq n$*) ist die Breite des* j*-ten Teilintervalls und*
$F_{z_n} := \max\limits_{1 \leq j \leq n} (\Delta x_j)$ *heisst* Feinheit *der Zerlegung* Z_n

Definition 5.2 (Untersumme, Obersumme)
Sei $[a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und Z_n eine Zerlegung von $[a, b]$. Sei $\eta_j := \inf\limits_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$ und $\xi_j := \sup\limits_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$, dann ist:

$$U_{z_n} := \sum_{j=1}^{n} \eta_j \cdot \Delta x_j \quad \text{die Untersumme von } f \text{ bzgl. der Zerlegung } Z_n$$

$$O_{z_n} := \sum_{j=1}^{n} \xi_j \cdot \Delta x_j \quad \text{die Obersumme von } f \text{ bzgl. der Zerlegung } Z_n$$



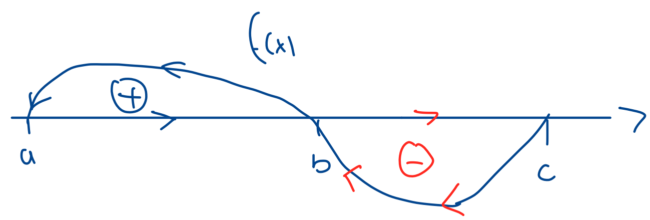
Definition 5.3 (Integral)
Falls der Grenzwert $S = \lim\limits_{F_{Z_n}\to 0} U_{Z_n} = \lim\limits_{F_{Z_n}\to 0} O_{Z_n}$ *existiert, nennt man* S *das* bestimmte Integral *von* f *über* $[a, b]$ *und schreibt:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;[= \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f\,dx$$

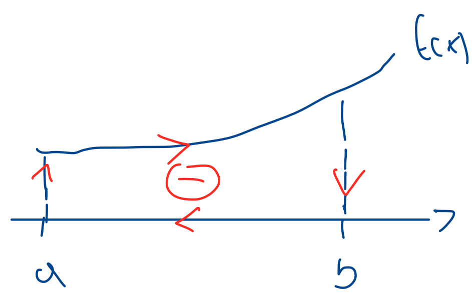
Zudem nennt man f *dann integrierbar über* $[a, b]$*. Weiter heißt* a *untere Integrationsgrenze,* b *obere Integrationsgrenze,* $[a, b]$ *Integrationsintervall/–bereich,* f *Integrand und* x *(bzw.* t*) Integrationsvariable.*

Bemerkung: Es gibt auch „negative Flächen".

- Gegenuhrzeigersinn entspricht mathematisch positiv
- Uhrzeigersinn entspricht mathematisch negativ

a)


$\int_a^b f(x)\,dx > 0$, $\int_b^c f(x)\,dx < 0$

b)


$\int_b^a f(x)\,dx < 0$

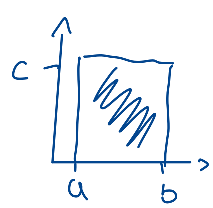
Die Randkurve zu $\int_a^b f(x)\,dx$ wird im math. „negativen" Sinn durchlaufen, wenn

entweder $a < b$ und $\forall x \in [a;b]: f(x) \le 0$

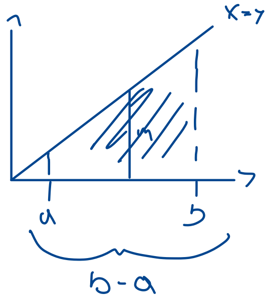
oder $a > b$ und $\forall x \in [a;b]\ f(x) \ge 0$

Bsp

1) $\int_a^b \underbrace{c}_{f(x)\equiv}\,dx = c \cdot b-a$



$$\int_a^b x \, \mathrm{d}x =$$



$= \text{Trapezfläche}$
$= \text{Mittellinie} \cdot \text{Höhe}$
$= m \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot (b-a)$
$\Rightarrow \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ äquidistant in n Teilintervalle der Länge $\Delta x_j = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ für alle $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$x_j := a + \frac{b-a}{n} \cdot j \qquad \text{für } j \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

Damit ergibt sich die Obersumme zu:

$$\begin{aligned}
O_{Z_n} &= \sum_{j=1}^{n} \xi_n \cdot \Delta x_j = \sum_{j=1}^{n} \xi_n \cdot \Delta x \\
&= \Delta x \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(a + \frac{b-a}{n} \cdot j \right) \\
&= \Delta x \cdot \sum_{j=1}^{n} a + \Delta x \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot j \\
&= \frac{b-a}{n} \cdot n \cdot a + \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} j \\
&= (b-a) \cdot a + \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{(n+1) \cdot n}{2} \\
&= (b-a) \cdot a + (b-a)^2 \cdot \frac{(n+1)}{2 \cdot n} \\
\lim_{n \to \infty} O_{Z_n} &= \lim_{n \to \infty} \left((b-a) \cdot a + (b-a)^2 \cdot \frac{(n+1)}{2 \cdot n} \right) \\
&= (b-a) \cdot a + (b-a)^2 \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{(b-a)}{2} \cdot (2a + (b-a)) \\
&= \frac{(b-a)}{2} \cdot (a+b) \\
&= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

Rechnung für Untersumme analog.

Satz 5.4 (Eigenschaften des bestimmten Integrals)

i) $\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

ii) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

iii) $\int\limits_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *Homogenität des Integrals*

iv) $\int\limits_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *Additivität des Integrals*

v) $\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

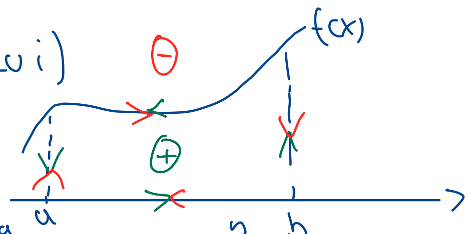
vi) $f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in [a,b] \quad \Longrightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *Monotonie des Integrals*

vii) $m \leq f(x) \leq M \quad \forall\, x \in [a,b] \Longrightarrow \quad m \cdot (b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M \cdot (b-a)$

Bemerkung: Die Aussage iii) und iv) aus dem obigen Satz ergeben zusammen die Linearität des Integrals.

Beweisskizze/Veranschaulichung:
Folgt aus den entsprechenden Eigenschaften der Summen bzw. der Grenzwerte.

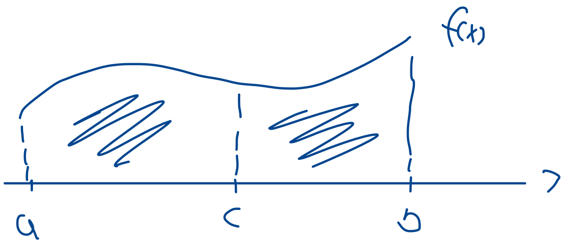
zu i)



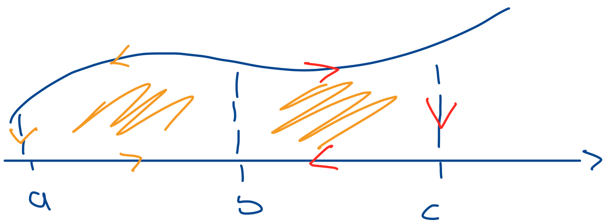
$\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$

$\int\limits_a^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^a f(x)\,dx \Rightarrow 0$

zu ii) Fall 1: $a<c<b$



klar!



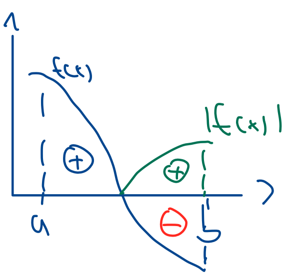
algebraisch.

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

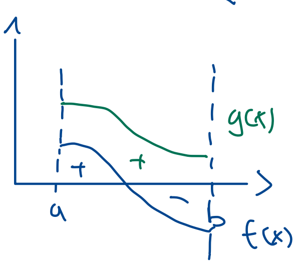
$$= \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

$$+\int_c^b f(x)\,dx$$

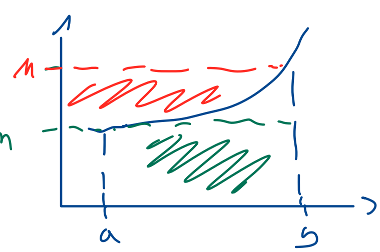
zu v)



zu vi)



zu vii)



Aufgabe A 5.1

a) *Vereinfachen Sie den Ausdruck*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}t + \int_b^c f\,\mathrm{d}y + \int_c^a f\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_a^c f(t)\,dt - \int_a^c f(x)\,dx = 0$$

b) *Es ist bekannt, dass* $\int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 17$ *und* $\int\limits_0^{8} f(x)\,\mathrm{d}x = 12$. *Bestimmen Sie* $\int\limits_8^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$

$\int\limits_0^{10} = \int\limits_0^{8} + \int\limits_8^{10} \Rightarrow \int\limits_8^{10} = \int\limits_0^{10} - \int\limits_0^{8} = 17 - 12 = 5$

Aufgabe A 5.2

Verwenden Sie die Gleichung $\int\limits_0^a x^2 \mathrm{d}x = \frac{a^3}{3}$ *zur Berechnung der folgenden Integrale*

a) $\int\limits_0^2 6x^2 \mathrm{d}x$

$6\int\limits_0^2 = \frac{2^3}{3} = 6 \cdot \frac{8}{3} = 16$

b) $\int\limits_1^2 6x^2 \mathrm{d}x$

$= 6 \cdot \int\limits_1^2 x^2 dx = 6 \cdot \left(\int\limits_0^2 x^2\,dx - \int\limits_0^1 x^2 dx \right)$

$= 16 - \frac{1}{3} \cdot 6 = 14$

c) $\int\limits_0^2 (t^2 - t)\mathrm{d}t$

$\int\limits_0^2 t^2 dt - \int\limits_0^2 t\,dt =$ Nach Bsp 2 $\int\limits_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} = \frac{2}{3}$

Satz 5.5 (Hinreichende Bedingungen für die Integrierbarkeit)

i) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f über $[a, b]$ integrierbar.

ii) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton, so ist f über $[a, b]$ integrierbar.

Bem.:
Satz 5.5 besagt insbesondere, dass auch unstetige Funktionen integrierbar sein können.

Beweis:

z.z. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ F_{Z_n}\to 0}} U_{Z_n} = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ F_{Z_n}\to 0}} O_{Z_n}$

Wähle die Zerlegung Z_n äquidistant

$\Rightarrow O_{Z_n} - U_{Z_n} = \frac{b-a}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \underbrace{\xi_j}_{\sup\limits_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)} - \underbrace{\eta_j}_{\inf\limits_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)}$

i) f stetig, $[a,b]$, abgeschlossen

$\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig (s. nach Def 3.3)

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Daher folgt für alle Z_n mit $\frac{b-a}{n} < \delta$

$|\xi_j - \eta_j| = \xi_j - \eta_j < \varepsilon$ für $j = 1, 2, \ldots, n$

$\Rightarrow O_{Z_n} - U_{Z_n} < \frac{b-a}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n}\varepsilon = (b-a)\cdot\varepsilon$

$\Rightarrow \varepsilon > 0$ kann bel. klein gewählt werden

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (O_{Z_n} - U_{Z_n}) = 0$

ii) Sei etwa f monoton wachsend

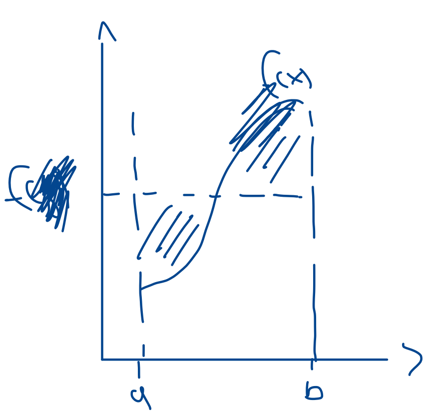
$\Rightarrow \xi_j = f(x_j), \; \eta_j = f(x_{j-1}) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$

$\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} (\xi_j - \eta_j)$

Satz 5.6 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Die Funktion f sei stetig auf $[a, b]$. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{(b-a)} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

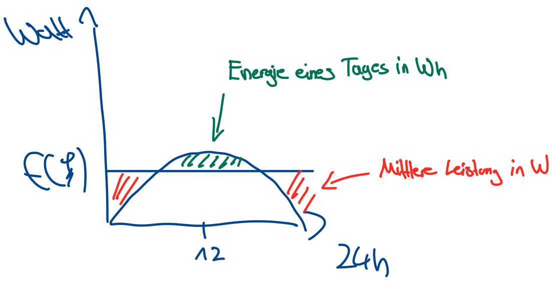
Beweisskizze:



Breite · Höhe

$\underbrace{(b-a) \cdot f(\xi)}_{\text{Rechtecksfläche}}$

Bsp.: Photovoltaikanlage



Satz 5.7 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dann ist F differenzierbar für alle $x \in]a, b[$ und es gilt

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = f(x)$$

Beweis: Für alle $x_0 \in [a, b]$:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(x)\,dt$$

$$= \frac{\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{x - x_0} = \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x - x_0} \overset{\text{Satz 5.6}}{=} f(\xi(x))$$

$$f \text{ stetig} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \left(f(\xi(x)) = f(x) = F'(x_0) \right)$$

Bemerkung: Es gibt unstetige Funktionen f, die integrierbar sind. Für unstetige Funktionen f gilt die Aussage des Hauptsatzes aber nicht.

Definition 5.8 (Stammfunktion)
Die Funktion F heißt Stammfunktion *von f, falls $F' = f$ ist.*

Bemerkung:

1) Ist f stetig auf $[a, b]$, so ist $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ eine Stammfunktion von f.

2) Sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f, so ist $F_1 - F_2 \equiv \text{const.}$

3) Wenn F eine Stammfunktion von f ist, so gilt:

$$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b := F(b) - F(a)$$

Beweis: $\int_a^b f(t)\,dt \overset{1)}{=} F_0(b) - \underbrace{F_0(a)}_{0} \overset{2)}{=} F(b) - F(a)$

Beispiel: $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$ (früheres Bsp.)

Jetzt viel einfacher: $f(x) = x$, wähle $F(x) = \frac{1}{2}x^2$

$\Rightarrow \int_a^b x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$

Definition 5.9 (Unbestimmtes Integral)
$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F \mid F' = f\}$ *(das ist eine ganze Menge von Funktionen) heißt das* unbestimmte Integral *von* f.

Bemerkung:
Statt $\{F \mid F' = f\}$ schreibt man auch $F + c$ wobei F eine Stammfunktion von f ist und $c \in \mathbb{R}$.

Tabelle mit wichtigen Stammfunktionen

f	$F(x)$
x^α $\quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\mathbf{e}^x$	$\mathbf{e}^x$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)$

$\boxed{e^{\lambda x}\ (\lambda \neq 0) \Rightarrow \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}}$

5.2 Technik der Integration

Da die Integration in gewissem Sinne die Umkehrung der Differentiation ist, lassen sich aus Differentiationsregeln Integrationsregeln herleiten.

Satz 5.10 (Partielle Integration)
f, g seien stetig differenzierbare Funktionen, dann gilt:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x) \cdot g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis:

$$(f \cdot g)'(x) = \frac{d}{dx}\left(f(x) \cdot g(x)\right) \overset{\text{Produktr.}}{=} (f \cdot g)'(x) - f'(x) \cdot g(x)$$

$$\Rightarrow \int f(x) \cdot g'(x)\,dx = \underbrace{\int (f \cdot g)'(x)\,dx}_{f(x) \cdot g(x)} - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx$$

Bsp.:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Setze $f(x) = x$, $g'(x) = \cos(x)$

$\Rightarrow f'(x) = 1$; $g(x) = \sin(x)$

$\Rightarrow x \cdot \sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x)\,dx$

$= x \cdot \sin(x) + \cos(x) + c$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} x \cdot \cos(x)\,dx = \Big[x \cdot \sin(x) + \cos(x)\Big]_0^{\pi/2} = \overbrace{\frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{1} + \overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{0} - \left(0 + \underbrace{\cos(0)}_{1}\right)$$

$= \frac{\pi}{2} - 1$

Bsp: $\int x \cdot \ln(x)\, dx$

setze $f(x) = x$, $g'(x) = \ln(x)$

$\Rightarrow f'(x) = 1$, $g(x) = ?$

setze $f(x) = \ln(x)$, $g'(x) = x$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

$$\Rightarrow \ln(x) \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2}_{1/2\, x} dx$$

$$= 1/2\, x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Bsp.:

$$\int \Big(\sin(x)\Big)^2 \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Setze $f(x) = \sin^2(x)$, $g'(x) = \cos(x)$

$\Rightarrow f'(x) = 2\sin(x)\cdot\cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$

$\Rightarrow \int (\sin(x))^2 \cos(x)\,dx = \sin^2(x)\cdot\sin(x) - \int 2\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)$

$= \sin^3(x) - 2\underbrace{\int \sin^2(x)\cdot\cos(x)\,dx}_{X}$

$\Rightarrow X = \sin^3(x) - 2X \Rightarrow 3X = \sin^3(x) \Rightarrow X = \int \sin^2(x)\cdot\cos(x)\,dx = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$

Aufgabe A 5.3

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int (e^x - e^{-x})\,\mathrm{d}x = e^x + e^{-x} + C$

$\cancel{\tfrac{1}{3}}\cdot\cancel{3}\, x^3$

b) $\displaystyle\int x^3 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$

Setze $f(x) = \ln(x)$, $g'(x) = x^3$

$f'(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = \frac{1}{4}x^4$

$\Rightarrow \int x^3\cdot\ln(x)\,dx = \ln(x)\cdot\frac{1}{4}x^4 - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{4}x^4\,dx$

$= \ln(x)\cdot\frac{1}{4}x^4 - \int \frac{1}{4}x^3\,dx$

$= \frac{1}{4}x^4\ln(x) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}x^4 + C = \frac{1}{4}x^4\left(\ln(x) - \frac{1}{4}\right) + C$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$

Setze $f(x) = x^2$, $g'(x) = \cos(x)$

$f'(x) = 2x$ $= \sin(x)$

$\int x^2\cdot\cos(x)\,dx \Rightarrow x^2\cdot\sin(x) - \int 2x\,\sin(x)\,dx$

NR: $\int x\cdot\sin(x)\,dx$

$f(x) = x$, $g'(x) = \sin(x)$

$f'(x) = 1$, $g(x) = -\cos(x)$

$$\Rightarrow \int x \cdot \sin(x)\,dx = -x\cos(x) - \int -\cos(x)\,dx$$
$$= -x\cos(x) + \sin(x) + c$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot \sin(x) - 2\cdot\left(-x\cos(x) + \sin(x)\right) + c$$
$$\Leftrightarrow x^2 \cdot \sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + c$$
$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos(x)\,dx = \left[x^2 \cdot \sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} + 2\frac{\pi}{2}\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} - 2\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

d) $\int x \cdot \ln^2(x)\,dx$

Setze $f(x) = \ln^2(x)$, $g'(x) = x$

$\Rightarrow f'(x) =$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

Satz 5.11 (Substitutionsregel)
Sei f stetig und g stetig differenzierbar auf $[a,b]$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$ (d.h. g ist invertierbar). Dann gilt:

$\hookrightarrow g =$ injektiv

$$\int_a^b f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \left(\int f(t)\,dt \,\Big|_{t=g(x)} \right)$$

Beweis: Sei F eine Stammfunktion von f, so gilt:

$$\Rightarrow \int f(t)\,dt = F(t) + c$$

Mit $t = g(x)$ folgt

$$\int f(t)\,dt \,\Big|_{t=g(x)} = F(g(x)) + c$$

Wegen $\frac{d}{dx} F(g(x)) \overset{\text{Kettenregel}}{=} f(g(x)) \cdot g'(x)$

gilt aber auch $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + c$

In der Praxis:

Substituiere $t = g(x) \Rightarrow \frac{dt}{dx} = g'(x)$

$dt = g'(x)\,dx$

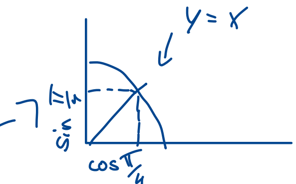
Es gibt zwei mögliche Anwendungsarten der Substitutionsregel.

1) **Substitution bei evidenter innerer Ableitung**

Bsp.: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln|\sin(x)|\Big]_{\pi/4}^{\pi/2}$

$$= \ln\big(\underbrace{|\sin(\tfrac{\pi}{2})|}_{=1}\big) - \ln\big(\underbrace{|\sin(\tfrac{\pi}{4})|}_{\frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}}\big)$$

$$= 0 - \left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot \ln(2) = \tfrac{1}{2} \cdot \ln(2)$$



trig. Pyth. $2\sin^2(\frac{\pi}{4}) = 1$

$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Bsp.: $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = ?$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) \qquad \frac{1}{t}$$

Ist von der Gestalt Satz 5.11 für $f(g(x)) = \frac{1}{g(x)}$, $g(x) = \sin(x)$ $\Rightarrow g'(x) = \cos(x)$

$$\Rightarrow \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt \Big|_{t=\sin(x)} = \ln|t| + c \Big|_{t=\sin(x)} = \ln|\sin(x)| + c$$

2) **Substitution ohne evidente innere Ableitung**
In den Fällen in dem eine innere Ableitung nicht vorhanden oder nicht zu erkennen ist, geht man etwas formaler vor. Man wählt sich eine Funktion $t(x)$. Damit alle anderen vorkommenden x-Terme und $\mathrm{d}x$ durch Funktionen von t ersetzt werden können, Invertiert man $t(x)$ und löst die Ableitung $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ nach $\mathrm{d}x$ auf.

Bsp.: $\int_0^1 (3x^2 - 5)^3 \cdot x\,\mathrm{d}x = ?$

Substituiere $t = 3x^2 - 5$ $\Rightarrow \frac{dt}{dx} = 6x \Rightarrow dx = \frac{dt}{6x}$

$$\Rightarrow \int (3x^2-5)^3 \cdot x\,dx = \int t^3 \cancel{x} \cdot \frac{dt}{6\cancel{x}} = \frac{1}{6}\int t^3\,dt = \frac{1}{24} t^4\,dt + c = \frac{1}{24}(3x^2-5)^4 + c$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (3x^2-5)^3 \cdot x\,dx = \left[\frac{1}{24}(3x^2-5)^4\right]_0^1 = \frac{1}{24}\left((-2)^4 - (-5)^4\right) = -\frac{203}{8}$$

Aufgabe A 5.4

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitution:

a) $\int (e^{e^x} \cdot e^x)\,\mathrm{d}x$

Substituire $t = e^x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^t \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^t}$

$\Rightarrow \int e^{e^x} \cdot e^x dx = \int e^t \cdot \cancel{e^x} \cdot \frac{dt}{\cancel{e^x}} = \int e^t dt = e^t + c \underset{\text{Rücksubst.}}{=} e^{e^x} + c$

b) $\int_0^2 \sqrt[4]{40 \cdot x + 1}\,\mathrm{d}x$

Substituire $t = 40x + 1 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 40 \quad \Rightarrow dx = \frac{dt}{40}$

$\int_0^2 \sqrt[4]{40x+1}\, dx = \int_{t(0)=1}^{t(2)=81} \sqrt[4]{t}\ \frac{dt}{40} = \frac{1}{40} \int_1^{81} \underbrace{\sqrt[4]{t}}_{t^{\frac{1}{4}}} dt = \frac{1}{40} \left[\frac{1}{\frac{5}{4}} t^{\overset{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}+1}} \right]_1^{81} = \frac{1}{\cancel{40}_{10}} \cdot \frac{\cancel{4}}{5} \left[t^{\frac{5}{4}} \right]_1^{81}$

$= \frac{1}{50} \left(81^{\frac{5}{4}} - 1^{\frac{5}{4}} \right)$

$= \frac{1}{50} \left(3^5 - 1 \right)$

$= \frac{242}{50}$

c) $\int \sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\,\mathrm{d}x$

Substituiere $t = \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{3}{2} \Rightarrow dx = \frac{dt}{\frac{3}{2}}$

$\int \sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) dx = \int \sin(t) \frac{dt}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \int \sin(t)\, dt = \frac{2}{3} \left(-\cos(t)\right) \cancel{dx}$

$= -\frac{2}{3} \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + c$

Allgemein gilt:

Satz: Sei F eine Stammfunktion von f ; $a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c \qquad | a \neq 0$

$\int \sin(x) dx = -\cos(\underset{ax+b}{x}) + c$

$= \frac{1}{a} \cdot$

Beispiel für Substitution und partielle Integration in Kombination

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x$$

Substituiere $t = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\,dt$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin(\sqrt{x})\,dx = \int_{t(0)=0}^{t(\frac{\pi^2}{4})=\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cdot 2\underbrace{\sqrt{x}}_{t}\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cdot t\,dt$$

Setze $f(t) = t$; $g'(t) = \sin(t)$

$f'(t) = 1$; $g(x) = \cos(t)$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(t)\cdot t\,dt = \left[-t\cos(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1\cdot(-\cos(t))\,dt$$

$$= -\frac{\pi}{2}\cdot 0 - (-0) + \underbrace{\left[\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{1} = 1$$

Insgesamt: $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin(\sqrt{x})\,dx = 2\cdot 1 = 2$

Nicht offensichtliche Substitutionen:

i) $$\int_{x_0}^{x_1} f(\sin(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\tan(\frac{x_0}{2})}^{\tan(\frac{x_1}{2})} f\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

ii) $$\int_{x_0}^{x_1} f(\cos(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\tan(\frac{x_0}{2})}^{\tan(\frac{x_1}{2})} f\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Denn $t = \tan(\frac{x}{2}) \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \left(1+\tan^2(\frac{x}{2})\right)\cdot\frac{1}{2}$

$= \frac{1+t^2}{2} \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$\sin(x) \overset{!}{=} \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = 2\cdot\frac{\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}}{1+\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}}$

$$\overset{\cdot \cos(\frac{x}{2})}{=} 2 \frac{\sin(\frac{x}{2}) \cdot \cos(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) \cdot \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{\sin(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})}{1} \checkmark$$

$f(\frac{1}{t}) = F(\ln(t))$

Bsp.

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} \overset{t=\tan(\frac{x}{2})}{=} \int \frac{1}{\frac{\cancel{2}t}{\cancel{1+t^2}}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{1+t^2}} \, dt = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \ln|t| + c = \ln(|\tan(\tfrac{x}{2})|) + c$$

Satz Logarithmische Integration

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln(|g(x)|) + c$$

Beweis: $t = g(x) \Rightarrow \frac{dt}{dx} = g'(x) \Rightarrow dx = \frac{dt}{g'(x)}$

$$\Rightarrow \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \frac{\cancel{g'(x)}}{t} \cdot \frac{dt}{\cancel{g'(x)}} = \int \frac{dt}{t} = \ln(|t|) + c = \ln(|g(x)|) + c$$

Bsp.

$$\int \frac{2x+1}{3x^2+3x+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{6x+3}{3x^2+3x+1} dx = \frac{1}{3} \ln(|3x^2+3x+1|) + c$$

$$\int \underbrace{\frac{x+1}{x^2+1}}_{\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctan(x) + c$$

Integration rationaler Funktionen:
Es sei eine rationale Funktion $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ mit Polynomen $P(x)$ und $Q(x)$ gegeben. Jede solche rationale Funktion kann explizit integriert werden. Die Bestimmung von $\int R(x)\,\mathrm{d}x$ wird in 4 Schritten durchgeführt.

1) **Polynomdivision:** Durch eine Polynomdivision mit Rest wird R in die Form

$$R(x) = P_1(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q(x)}, \quad \mathrm{grad}(\tilde{P}) < \mathrm{grad}(Q)$$

gebracht.

2) **Faktorisierung**: Der Nenner $Q(x)$ wird über $\mathbb{R}$ vollständig faktorisiert. Man kann zeigen, dass sich jedes Polynom vollständig in Linearfaktoren und quadratische Faktoren ohne reelle Nullstelle zerlegen lässt, d.h.

$$\begin{aligned} Q(x) &= A\,(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{\nu_m} \\ &\quad (x^2+r_1x+s_1)^{\mu_1}(x^2+r_2x+s_2)^{\mu_2}\cdot\ldots\cdot(x^2+r_lx+s_l)^{\mu_l} \end{aligned}$$

mit

- $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$
- $(r_i, s_i) \neq (r_j, s_j)$ für $i \neq j$
- $x^2 + r_jx + s_j \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq l$ und
- $\mathrm{grad}(Q) = \sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i + \sum\limits_{j=1}^{l} 2\mu_j$

3) **Partialbruchzerlegung:** Der Bruch $\frac{\tilde{P}}{Q}$ mit $\tilde{P}$ und Q wie oben lässt sich als Summe einfacher Ausdrücke darstellen.

Jeder Faktor $(x-x_i)^{\nu_i}$ des Nenners liefert den Beitrag

$$\frac{A_{i,1}}{x-x_i} + \frac{A_{i,2}}{(x-x_i)^2} + \ldots + \frac{A_{i,\nu_i}}{(x-x_i)^{\nu_i}} \qquad A_{i,k} \in \mathbb{R}$$

Jeder Faktor $(x^2+r_jx+s_j)^{\mu_j}$ des Nenners liefert den Beitrag

$$\frac{B_{j,1}x + C_{j,1}}{x^2+r_jx+s_j} + \frac{B_{j,2}x + C_{j,2}}{(x^2+r_jx+s_j)^2} + \ldots + \frac{B_{j,\mu_j}x + C_{j,\mu_j}}{(x^2+r_jx+s_j)^{\mu_j}} \qquad B_{j,k}, C_{j,k} \in \mathbb{R}$$

Insgesamt erhält man also eine Zerlegung

$$\frac{\tilde{P}(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{\nu_i}\frac{A_{i,k}}{(x-x_i)^k}\right) + \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{\mu_j}\frac{B_{j,k}x + C_{j,k}}{(x^2+r_jx+s_j)^k}\right)$$

Zur Bestimmung der Konstanten $A_{i,k}$, $B_{j,k}$ und $C_{j,k}$ gibt es mehrere Methoden. Eine davon ist der Koeffizientenvergleich. Hier multipliziert man die Gleichung mit $Q(x)$ und erhält dann für jede der Potenzen $x^0, x^1, \ldots$ durch Vergleich der Koeffizienten jeweils eine lineare Gleichung. Das lineare Gleichungssystem löst man z.B. mit dem Gauß-Verfahren.

Integration rationaler Funktion

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

1. Polynomdivision

$$R(x) = P_1(x) + \frac{\overline{P}(x)}{Q(x)} \quad \text{mit } \operatorname{Grad}(\overline{P}) < \operatorname{Grad}(Q)$$

Bsp. $\rightarrow \quad \int \frac{x^6 + 5x^4 + 7x^2 + 5 - 2x^5 - 8x^3 - 5x}{1 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x}$

1. Schritt:

$$\underbrace{(x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 5x + 5)}_{P(x)} : \underbrace{(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1)}_{Q(x)}$$

$= x^2 + 3$

$$- (x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + x^2)$$
$$3x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 5x + 5$$

$$- (x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + x^2)$$
$$3x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 5x + 5$$
$$- (3x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 6x + 3$$
$$x + 2 = \overline{P}(x)$$

Polynomdivision endet,
da Grad von $x+2$ < Grad von $Q(x)$

$$\Longrightarrow \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = x^2 + 3 + \frac{x+2}{Q(x)}$$

2. Faktorisierung von Q(x)

$$Q(x) = A(x - x_1)^{\nu_1} \cdot (x - x_2)^{\nu_2} \ldots\ldots (x - x_m)^{\nu_m} \cdot (x^2 - r_1 x + s_1)^{\mu_1} \cdot (x^2 + r_2 + s_2)^{\mu_2} \cdot \ldots \cdot (x^2 + r x_l + s_l)^{\mu_l}$$

Wobei die Polynome $x^2 + r_j x + s_j$ $(j = 1, \ldots, l)$ <u>keine</u> reelen Nst hat.

2. Schritt

$$Q(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$$

Durch probieren: $x_1 = 1$

$$(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1) : (x - 1) = x^3 - x^2 + x - 1$$
$$-(x^4 - x^3)$$
$$-x^3 + 2x^2 - 2x + 1$$
$$-(-x^3 + x^2)$$
$$-x^2 - 2x + 1$$
$$-(-x^2 - x)$$
$$-x + 1 \quad => 0$$

Durch erneutes Probieren:

$$
\begin{array}{l}
(x^3-x^2+x-1):(x-1)=x^2+1 \\
\underline{-(x^3-x^2)} \\
\qquad x-1 \\
\quad \underline{-(x-1)} \\
\qquad 0
\end{array}
$$

3. Partialbruchzerlegung

Jeder Faktor $(x-x_i)^{\nu_i}$ von $Q(x)$ liefert den Beitrag

$$\frac{A_{i,1}}{x-x_i}+\frac{A_{i,2}}{(x-x_i)^2}+\dots+\frac{A_{i,\nu_i}}{(x-x_i)^{\nu_i}} \quad \text{mit } A_{i,k}\in\mathbb{R}$$

Jeder Faktor $(x^2+r_j\cdot x+s_j)^{\mu_j}$ von $Q(x)$ liefert den Beitrag

$$\frac{B_{j,1}+C_{j,1}}{x^2+r_jx+s_j}+\frac{B_{j,2}+C_{j,2}}{(x^2+r_jx+s_j)^2}+\dots+\frac{B_{j,\mu_j}+C_{j,\mu_j}}{(x^2+r_jx+s_j)^{\mu_j}} \quad \text{mit } B_{j,k}, C_{j,k}\in\mathbb{R}$$

Insgesamt:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{\nu_i}\frac{A_{i,k}}{(x-x_i)}\right)+\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{\mu_j}\frac{B_{j,k}x+C_{j,k}}{(x^2+r_jx+s_j)^k}\right)$$

Ermittlung der unbestimmten A, B, C durch Koeffizientenvergleich nach Multiplikation beider Seiten mit $Q(x)$

zu 3) Partialzerlegung

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x+2}{(x-1)^2\cdot(x^2+1)}\overset{!}{=}\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\quad\Big|\cdot Q(x)$$

$$\Longleftrightarrow x+2=A_1\underbrace{(x-1)(x^2+1)}_{x^3-x^2+x-1}+A_2(x^2+1)+\underbrace{\underbrace{(x-1)^2}_{x^2-2x+1}(Bx+C)}_{Bx^3+(C-2B)x^2+(B-2C)x+C}$$

$$\Longleftrightarrow x+2=(A_1+B)x^3+(-A_1+A_2+C-2B)x^2+(A_1+B-2C)x-A_1+A_2+C$$

Koeffizientenvergleich:

$$
\begin{array}{lrl}
\text{in } x^0: & -A_1+A_2+C & =2 \\
x^1: & A_1+B-2C & =1 \\
x^2: & -A_1+A_2-2B+C & =0 \\
x^3: & A+B & =0
\end{array}
\Longleftrightarrow
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & B & C \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
-1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
-1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

.....

$$\Rightarrow A_1 = -1, \quad A_2 = \frac{3}{2}, \quad B = 1, \quad C = -\frac{1}{2}$$

Also $$\frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{\frac{3}{2}}{(x-1)^2} + \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2+1}$$

4) Integration der Partialbrüche

a) $$\int \frac{A}{(x-x_0)^k}\,dx = \begin{cases} A \cdot \ln|x-x_0| + c, & k=1 \\ \frac{-A}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{k-1}}, & k \neq 1 \end{cases}$$

$$\int (x-x_0)^{-k}\,dx = \frac{1}{-k+1(x-x_0)^{-k+1}} + c$$

$$\int x^k\,dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + c$$

$$\int (x-x_0)^k\,dx$$

[Subst. $t := x - x_0 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 1$

$dt = dx$

$$= \int t^k\,dt = \frac{1}{k+1} t^{k+1} + c$$
$$= \frac{1}{k+1}(x-x_0)^{k+1} + c$$

$$Bx + C = \frac{B}{2}(2x+r) + C - \frac{Br}{2}$$

b) $$\int \frac{Bx+C}{(x^2+rx+s)^k}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+r}{(x^2+rx+s)^k}\,dx + \left(C - \frac{Br}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+rx+s)} \quad k$$

wobei $$\int \frac{2x+r}{(x^2+rx+s)^k}\,dx$$

[Subst. $t = x^2 + rx + s \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 2x + r \Rightarrow dt = (2x+r)\,dx$ keine Betragsstriche nötig, da keine Nst.

$$= \int \frac{dt}{t^k} = \begin{cases} \ln(t), & k=1 \\ -\frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{t^{k-1}}, & k \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \ln(x^2+rx+s), & k=1 \\ -\frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{(x^2+rx+s)^{k-1}}, & k \neq 1 \end{cases}$$

4) **Integration:** Nun sind noch die Integrale $\int \frac{A}{(x-x_0)^k}\mathrm{d}x$ und $\int \frac{Bx+C}{(x^2+rx+s)^k}\mathrm{d}x$ zu berechnen.

a)

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^k}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} A \cdot \ln|x-x_0| + c & \text{für } \; k=1 \\[2ex] \dfrac{-A}{k-1} \cdot \dfrac{1}{(x-x_0)^{k-1}} + c & \text{für } \; k \neq 1 \end{cases}$$

b)

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+rx+s)^k}\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\int \frac{2x+r}{(x^2+rx+s)^k}\,dx + \left(C - \frac{Br}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+rx+s)^k}$$

wobei:

$$\int \frac{2x+r}{(x^2+rx+s)^k}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln|x^2+rx+s| + c & \text{für } \; k=1 \\[2ex] \dfrac{-1}{k-1}\,\dfrac{1}{(x^2+rx+s)^{k-1}} + c & \text{für } \; k \neq 1 \end{cases}$$

und

$$\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+rx+s)^k}}_{=:I_k} = \underbrace{\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4s-r^2}} \cdot \arctan\left(\dfrac{2x+r}{\sqrt{4s-r^2}}\right) + c & \text{für } \; k=1 \\[2ex] \dfrac{2(2k-3)}{(4s-r^2)(k-1)} \cdot I_{k-1} + \dfrac{1}{(4s-r^2)(k-1)}\,\dfrac{2x+r}{(x^2+rx+s)^{k-1}} & \text{für } \; k \neq 1 \end{cases}}$$

$\longrightarrow I_{k-1} \longrightarrow I_{k-2} \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_1,\ k \neq 1$

Rekursionsformel

Zum Beweis für $k=1$

$$x^2+rx+s=\left(x+\frac{r}{2}\right)^2+\underbrace{s-\frac{r^2}{4}}$$

>0, da x^2+rx+s keine reelle Nst hat

$$\int\frac{dx}{x^2+rx+s}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{r}{2}\right)^2+s-\frac{r^2}{4}}=\frac{1}{s-\frac{r^2}{4}}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{r}{2}}{\sqrt{s-\frac{r^2}{4}}}\right)^2+1}$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Subst. } t=\dfrac{x+\frac{r}{2}}{\sqrt{s-\frac{r^2}{4}}}\Rightarrow\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{s-\frac{r^2}{4}}}\\ \Rightarrow dx=\sqrt{s-\frac{r^2}{4}}\,dt\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{s-\frac{r^2}{4}}\int\frac{\sqrt{s-\frac{r^2}{4}}}{t^2+1}\,dt=\frac{1}{\sqrt{s-\frac{r^2}{4}}}\arctan(t)+c$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4s-r^2}}\arctan\frac{2x+r}{\sqrt{4s-r^2}}+c$$

4. Beispiel

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int x^2 + 3\,dx + \int \frac{-1}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{3}{2}}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + 3x - \ln|x-1| + \frac{-\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx}_{\ln(x^2+1)} - \underbrace{\int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1}\,dx}_{\frac{1}{2}\arctan x}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + 3x - \ln(x-1) - \frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\arctan(x) + c$$

Bsp.: $\displaystyle\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^6+5x^4+7x^2+5-2x^5-8x^3-5x}{1+x^4-2x^3+2x^2-2x}\ \mathrm{d}x$

1.Schritt: Polynomdivision

$(x^6-2x^5+5x^4-8x^3+7x^2-5x+5):(x^4-2x^3+2x^2-2x+1)$

3.Schritt: Partialbruchzerlegung

4.Schritt: Integration

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 5x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} \ \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x^2 + 3) \ \mathrm{d}x + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{(x-1)} \ \mathrm{d}x + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{3}{2}}{(x-1)^2} \ \mathrm{d}x + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x - \frac{1}{2}}{(x^2+1)} \ \mathrm{d}x$$

Bemerkung:

1) Das Hauptproblem bei der Integration rationaler Funktionen liegt in Schritt 2), also der Faktorisierung des Nenners.
   Falls man die Nullstellen nicht exakt bestimmen kann, berechnet man das Integral meistens gleich numerisch (vgl. CR)

2) Eine Partialbruchzerlegung ist manchmal auch bei der Bestimmung eines Wertes einer Summe hilfreich.

Aufgabe A 5.5

Stimmen die folgenden Aussagen? Wenn nein, weswegen nicht?

a) $\frac{x(x^2+4)}{x^2-4}$ *kann man in die Form* $\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}$ *(mit* $A, B \in \mathbb{R}$*) bringen.*

b) $\frac{x^2+4}{x(x^2-4)}$ *kann man in die Form* $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}$ *(mit* $A, B, C \in \mathbb{R}$*) bringen.*

c) $\frac{x^2+4}{x^2(x-4)}$ *kann man in die Form* $\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x-4}$ *(mit* $A, B \in \mathbb{R}$*) bringen.*

Aufgabe A 5.6

Bestimmen Sie

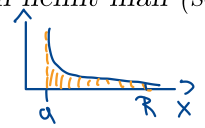
$$\int_0^1 x^3 \cdot \arctan(x)\,\mathrm{d}x$$

5.3 Uneigentliche Integrale

Bisher ist $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nur für beschränkte Intervalle $[a,\,b]$ und für auf $[a,\,b]$ beschränkte Funktionen f definiert.

Definition 5.12 (Uneigentliche Integrale I)
Sei f eine beschränkte Funktion. Dann nennt man (sofern die Grenzwerte existieren)

- $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_a^R f(x)\,\mathrm{d}x$



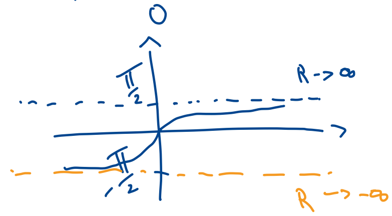
- $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim\limits_{r\to-\infty} \int\limits_r^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim\limits_{r\to-\infty} \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_r^R f(x)\,\mathrm{d}x$

uneigentliche Integrale *von f über* $[a,\,\infty[$, $]-\infty,\,b]$ *bzw.* $]-\infty,\,\infty[$.

Bsp.: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Bsp.: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} [\arctan(x)]_0^R$

$$= \lim_{R\to\infty} (\arctan(R) - \underbrace{\arctan(0)}_{0})$$



$$= \lim_{R\to\infty} \arctan(R) = \frac{\pi}{2}$$

f'(x) von $x^2 = 2x$

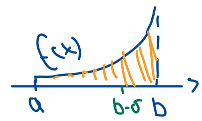
Bsp. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{r\to-\infty}\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\int_r^R \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$$\lim_{r\to-\infty}\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_r^R = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\lim_{R\to\infty} \ln(1+R^2)}_{\to\infty} - \underbrace{\lim_{r\to-\infty} \ln(1+r^2)}_{\to\infty}\Big)$$

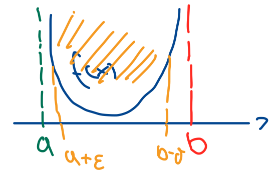
⟶ existiert nicht (da R und r unabhängig voneinander sind)

Definition 5.13 (Uneigentliche Integrale II)
Sei f eine in einer oder beiden Integrationsgrenze(n) unbeschränkte Funktion, dann nennt man (sofern die Grenzwerte existieren)

Polstelle



- $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim\limits_{\delta\searrow 0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x$ *(f in b unbeschränkt)*
- $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ *(f in a unbeschränkt)*
- $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\lim\limits_{\delta\searrow 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x$ *(f in a und b unbeschränkt)*



uneigentliche Integrale von f über $[a, b[,]a, b]$ bzw. $]a, b[$.

Bsp.: $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{\delta\searrow 0}\int\limits_0^{1-\delta}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

$= \lim\limits_{\delta\searrow 0}\left[\arcsin(t)\right]_0^{1-\delta} = \lim\limits_{\delta\searrow 0}\arcsin(1-\delta) - \underbrace{\arcsin(0)}_{=0}$

$= \arcsin\left(\lim\limits_{\delta\searrow 0} 1-\delta\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

arcsin stetig lim ↔ funktionssymbol

Aufgabe A 5.7
Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Wert:

a) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\int\limits_{\varepsilon+1}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ ⟶ $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c \quad (\alpha\neq 1)$

$\frac{1}{\sqrt{x}} \to x^{-1/2}$

$= \lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\left[2x^{1/2}\right]_{\varepsilon+1}^{1}$

$= \lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} 2(\sqrt{1}-\sqrt{\varepsilon}) = 2\Big(1-\underbrace{\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\sqrt{\varepsilon}}_{\sqrt{\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon}}\Big) = 2(1-0) = 2$

b) $\int\limits_0^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_0^R e^{-t}\,dt$

$$\lim_{R\to\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^R = \lim_{R\to\infty}\Big(\underbrace{-e^{-R}}_{=0} - \underbrace{(-e^{0})}_{=-1}\Big) = 1$$

Satz 5.14 (Integralkriterium für Reihen)
Es sei $f : [n_0, \infty[\to [0,\infty[$ stetig und monoton fallend ($n_0 \in \mathbb{Z}$). Dann gilt:

= Reihe konvergiert

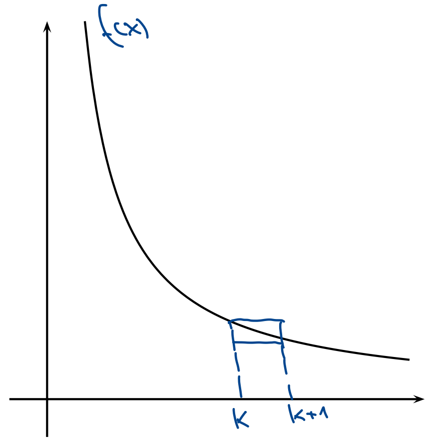
$$\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

Reihe existiert

uneig. Integral existiert

Beweis: Für $k \geq n_0$ ($k \in \mathbb{N}_0$) folgt aus der Monotonie von f:

$$f(k+1) \leq \int\limits_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(k)$$



Summiert man alle diese Ungleichungen für $k = n_0, \ldots, \infty$, so erhält man

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k+1) \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \int\limits_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} f(k)$$

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} f(k) \leq \int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) \quad (*)$$

Daher sind die Summe und das Integral entweder beide konvergent oder beide divergent.

Bsp.:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$, da

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} [\ln(x)]_1^R = \lim_{R\to\infty} \underbrace{\ln(R)}_{\infty} - \underbrace{\ln(1)}_{0} = \infty$$

2) Sei $\alpha > 1$, dann gilt: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R x^{-\alpha}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1}\right]_1^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^R = \frac{1}{1-\alpha}\Big(\underbrace{\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{\alpha-1}}}_{=0} - 1\Big) = \frac{1}{1-\alpha}(-1) = \frac{1}{\alpha-1} < \infty$$

Bemerkung: Insbesondere kann man das Integral zur Abschätzung des Wertes einer Summe verwenden. $\longrightarrow \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} f(k)$

Bsp.: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ soll auf einen maximalen Fehler von $\frac{1}{100}$ bestimmt werden.

$\longrightarrow$ Für jedes $N \geq n_0$ gilt: $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} f(k) = \sum\limits_{k=n_0}^{N} f(k) + \sum\limits_{N+1}^{\infty} f(k)$

Wobei nach (*) gilt:

$$\int_{N+1}^\infty f(x)\,dx \leq \sum_{N+1}^{\infty} f(x) \leq \int_N^\infty f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) \in \left[\sum_{k=n_0}^{N} f(k) + \int_{N+1}^\infty f(x)\,dx, \sum_{k=n_0}^{N} f(k) + \int_N^\infty f(x)\,dx\right]$$

Länge des Intervals ist gleich

$$\int_N^{N+1} f(x)\,dx \leq f(N)$$

Bsp.: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ soll auf einen maximalen Fehler von $\frac{1}{100}$ bestimmt werden.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad n_0 = 1, \quad f(N) \leq \frac{1}{100} \iff \frac{1}{N^2} \leq \frac{1}{100} \iff N \geq 10$$

Wähle $N = 10$:

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k^2} = 1{,}5498$$

$$\int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left[x^{-1}\right]_{10}^{R} = \underbrace{\lim_{R\to\infty} -\frac{1}{R}}_{=0} + \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\int_{11}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left[x^{-1}\right]_{11}^{R} = \ldots = \frac{1}{11}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \in \Big[\underbrace{1{,}5498 + \frac{1}{11}}_{1{,}6407}, \underbrace{1{,}5498 + \frac{1}{10}}_{1{,}6498}\Big]$$

Der exakte Wert ist $\frac{\pi^2}{6} = 1{,}6449 \Rightarrow$ Fehler $\leq \frac{1}{100}$

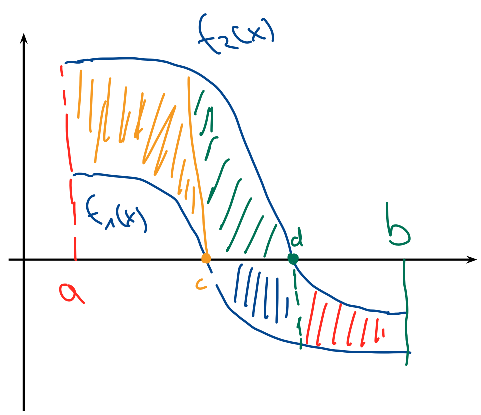
5.4 Anwendung der Integralrechnung

5.4.1 Flächenberechnung

Untere obere

Sind $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $f_1(x) \leq f_2(x)$ für $x \in [a, b]$, so ist der Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von f_1 und f_2 über dem Intervall $[a, b]$ gegeben durch

$$A = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,\mathrm{d}x$$



$$= \int_a^c f_2(x)\,dx - \int_a^c f_1(x)\,dx = \int_a^c \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx$$

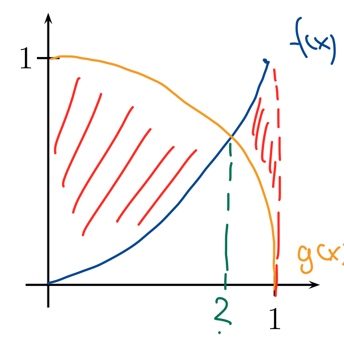
$$= \int_c^d f_2(x)\,dx$$

$$= \int_c^d -f_1(x)\,dx$$ weil Spiegelung

$$= \int_d^b -f_1(x)\,dx - \int_d^b -f_2(x)\,dx$$

$$\int_d^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx$$

Bsp.:
Gesucht sei die Fläche zwischen den Graphen der beiden Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 1 - x^2$ über dem Intervall $[0, 1]$.



Ansatz für ?: $f(x) = g(x)$

$x^2 = 1 - x^2$

$2x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{2} \iff x_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow A = \int_0^{1/\sqrt{2}} (g(x) - f(x))\,dx + \int_{1/\sqrt{2}}^1 (f(x) - g(x))\,dx$$

$$= \left[x - \frac{2}{3}x^3\right]_0^{1/\sqrt{2}} + \left[\frac{2}{3}x^3 - x\right]_{1/\sqrt{2}}^1$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \ldots = \frac{2\sqrt{2}-1}{3} = 0{,}609$$

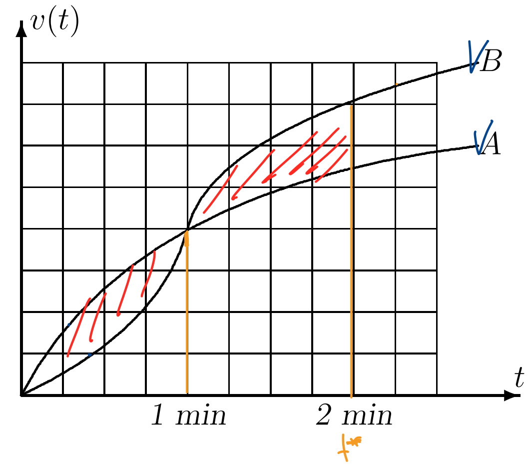
Aufgabe A 5.8

Zwei Radfahrer A und B starten nebeneinander und beschleunigen aus dem Stand. Die nebenstehende Skizze zeigt die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit.

a) *Welcher Radfahrer führt nach einer Minute?*

b) *Welche Bedeutung hat die von den beiden Kurven eingeschlossene Fläche?*

c) *Schätzen Sie ab, zu welcher Zeit die Radfahrer nebeneinander sind.*



a) A führt nach 1 min, da er in dieser Zeit immer schneller als B fährt

b) Ist der Vorsprung, den A nach 1 min hat:

$V(t) = \frac{ds(t)}{dt}$ ← Strecke ← Zeit

$$\int_0^1 (V_A(t) - V_B(t))\,dt = [S_A(t) - S_B(t)]_0^1 = S_A(1) - S_B(1) - \underbrace{(S_A(0) - S_B(0))}_{=0}$$

Stammfunktion von V_A

c) Die Fläche zwischen den Graphen von U_B und dem von U_A ab 1 min muss gleich sein der Fläch in B

Zugehöriger Zeitpunkt $t^* = 1{,}8$ min

Aufgabe A 5.9

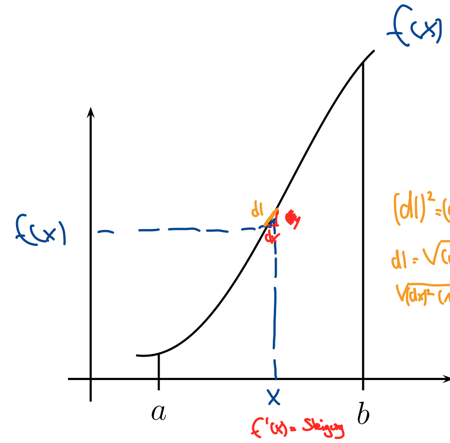
Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen

$$f_1(x) = x^2 \quad \text{und} \quad f_2(x) = 2x - x^2$$ => A $\frac{1}{3}$

eingeschlossen wird.

5.4.2 Bogenlänge

Für die Funktion $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ soll die Länge ℓ des Graphen von f im Intervall $[a, b]$ bestimmt werden, also die Länge von $G = \big\{(x,\ f(x)) \,|\, x \in [a,\, b]\big\}$.

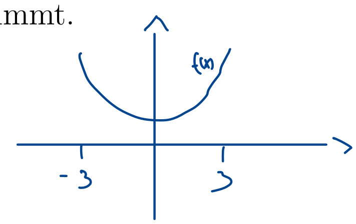


$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = dx\sqrt{1 + (f'(x))^2}$

$\boxed{\text{Bogenlänge } l = \int dl \implies l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}$

Bsp.:
Berechnung der Kurvenlänge des Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ über $[-3, 3]$.
Es handelt sich bei dieser Funktion um eine sogenannte Kettenlinie, weil sie der Form entspricht die eine an beiden Enden befestigte Kette unter Wirkung der Gravitation annimmt.



$l = \int_{-3}^{3} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = 2 \int_0^3 \sqrt{1 + (f(x))^2}\, dx$

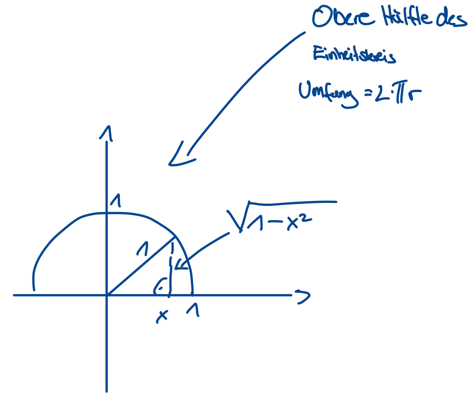
$f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \implies 1 + (f'(x))^2 = 1 + \big(\frac{1}{4}\underbrace{(e^x - e^{-x})^2}_{e^{2x} - \underbrace{2e^x \cdot e^{-x}}_{1} + e^{-2x}} = 1 + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x} = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x}$
$= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2$

$\implies l = 2 \int_0^3 \sqrt{\frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2}\, dx = 2 \cdot \int_0^3 \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\, dx = 2 \cdot \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right]_0^3$

$= 2\, \frac{1}{2}\big(e^3 - e^{-3} - \underbrace{(e^0 - e^0)}_{=0}\big) = e^3 - e^{-3}$

Aufgabe A 5.10

Berechnen Sie die Länge der Kurve $y = \sqrt{1-x^2}$ *mit* $x \in [-1,1]$



$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx}\, dx = 2\int_{0}^{1} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

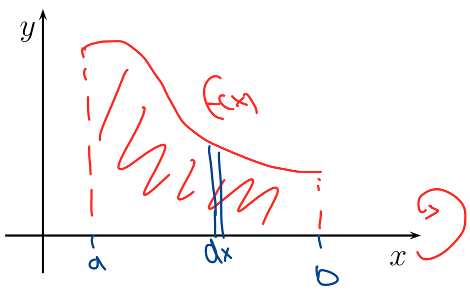
$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} \cdot (-\cancel{2}x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

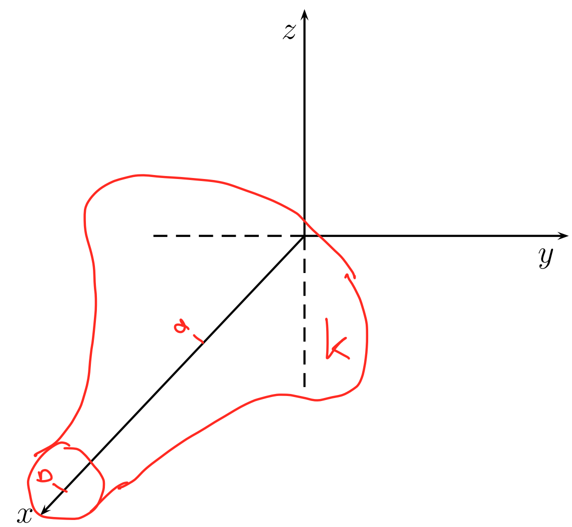
$$\Rightarrow 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow l = 2 \underbrace{\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx}_{\text{Uneigentliches Integral s. Beispiel nach Def. 5.3}} = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

5.4.3 Volumen/Mantelfläche von Rotationskörpern

a) **Rotation um die x-Achse**
Sei $f : [a, b] \to [0, \infty[$ eine Funktion. Lässt man die Fläche zwischen dieser Funktion und der x-Achse um die x-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper K.





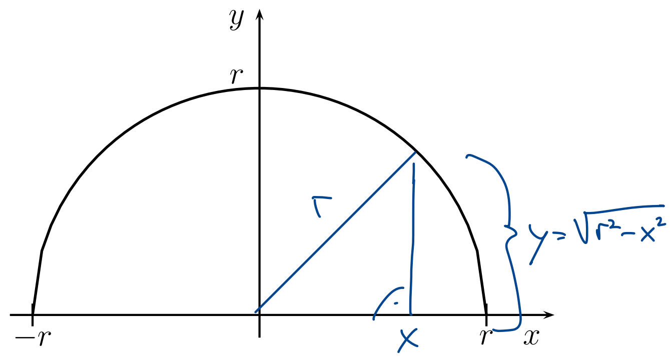
i) **Volumen**
zylindrisch
Diesen Körper kann man in dünne Scheiben der Dicke dx zerlegen, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen. Die Scheibe mit dem Mittelpunkt x hat den Radius $f(x)$ und die Dicke dx.

$\Rightarrow$ Scheibenvolumen $\pi (f(x))^2 \cdot dx = dV$

$\Rightarrow V = \int dV = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

Bsp.: Kugelvolumen

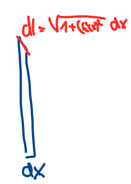
$$f: \begin{array}{ccc} [-r, r] & \to & [0, \infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{r^2 - x^2} \end{array}$$



$$\Rightarrow V = \pi \int_{-r}^{r} (f(x))^2 \, dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) \, dx$$

$$= 2\pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{1}{3} r^3 - 0 \right) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

ii) **Mantelfläche:**
Wir zerlegen den Rotationskörper K wieder in dünne, kreisförmige Scheiben der Dicke dx, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen.
Die Außenfläche der Scheibe mit Mittelpunkt dA beträgt:



$$dA = \underbrace{2 f(x) \cdot \pi}_{\text{Kreisumfang}} \cdot \underbrace{\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx}_{dl}$$

$$\boxed{\Rightarrow A = \int dA = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx}$$

Bsp.: Kugeloberfläche

$$\begin{array}{rccc} f: & [-r,r] & \to & [0,\infty[\\ & x & \mapsto & \sqrt{r^2-x^2} \end{array}$$

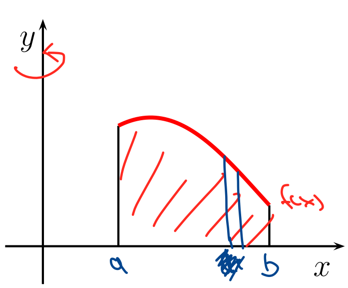
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}(r^2-x^2)^{1/2} = \cancel{\tfrac{1}{2}}(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-\cancel{2}x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

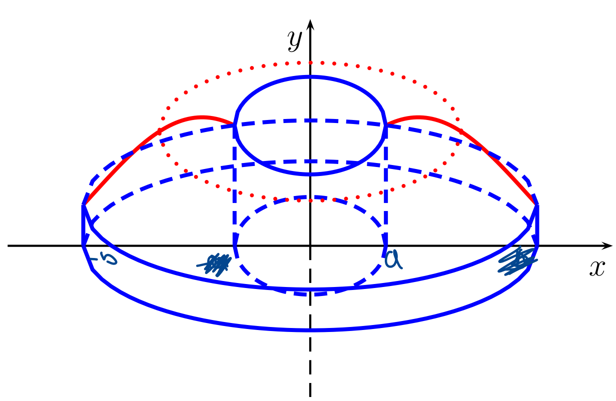
$$\Rightarrow 1+(f'(x))^2 = 1+\frac{x^2}{r^2-x^2} = \frac{r^2\cancel{-x^2}\cancel{+x^2}}{r^2-x^2} = \frac{r^2}{r^2-x^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} \Rightarrow f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2} = \cancel{\sqrt{r^2-x^2}}\cdot\frac{r}{\cancel{\sqrt{r^2-x^2}}} = r$$

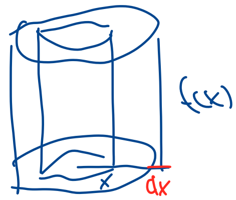
$$\Rightarrow A = 2\pi\int_{-r}^{r} r\,dx = 2\pi\cdot 2\int_0^r r\,dx = 4\pi\,[rx]_0^r = 4\pi(r^2-0) = 4\pi r^2$$

b) **Rotation um die y-Achse:**
Rotiert man die Fläche zwischen der Funktion $f : [a, b] \to [0, \infty[$ mit $0 \le a$ und der x-Achse um die y-Achse, so entsteht ebenfalls ein Rotationskörper.





i) **Volumen**
Diesen Körper zerlegt man in Hohlzylinder mit Innenradius x, Dicke dx und Höhe $f(x)$. Damit ergibt sich für das Volumen eines solchen Hohlzylinders:



$dV = V_{außen} - V_{innen}$

$= \pi \cdot (x+dx)^2 \cdot f(x) - \pi \cdot x^2 \cdot f(x)$

$= \pi \cdot f(x) \left((x+dx)^2 - x^2\right)$

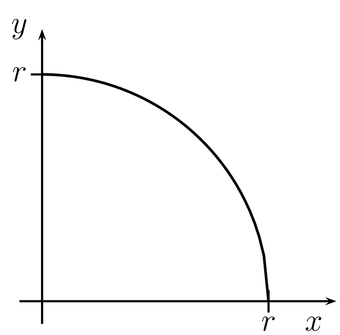
$x^2 + 2x\,dx + \underbrace{(dx)^2}_{<< 2x\,dx}$

$\approx \pi f(x)\, 2x\, dx$

$$\boxed{\Rightarrow V = \int dV = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\,dx}$$

Bsp.: Halbkugel

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,r] & \to & [0,\infty[\\ & x & \mapsto & \sqrt{r^2-x^2} \end{array}$$



$V = 2\pi \int_0^r x\sqrt{r^2-x^2}\,dx$

$\left[\text{Subst. } t = r^2 - x^2 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = -2x \Rightarrow dx = -\frac{dt}{2x}\right]$

$\Rightarrow t(0) = r^2,\ t(r) = 0$

$= 2\pi \int_{r^2}^{0} x\sqrt{t}\left(-\frac{dt}{2x}\right) = -\pi \int_{r^2}^{0} \sqrt{t}\,dt = \pi \int_0^{r^2} t^{1/2}\,dt = \pi \left[\frac{2}{3} t^{3/2}\right]_0^{r^2} = \frac{2}{3}\pi \left(\underbrace{(r^2)^{\frac{3}{2}}}_{r^3} - 0\right)$

$\Rightarrow \frac{2}{3}\pi r^3$

ii) **durch die Kurve entstandene Oberfläche**
Man zerlegt den Körper wiederum in Hohlzylinder mit Innenradius x, Dicke $\mathrm{d}x$ und Höhe $f(x)$.

$$dA = \underbrace{2\pi x}_{\text{Kreisumf.}} \cdot \underbrace{\sqrt{1+(f'(x))^2}}_{dl}$$

$$\boxed{A = \int dA = 2\pi \int_a^b x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx}$$

Bsp.: Halbkugel

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,r] & \to & [0,\infty[\\ & x & \mapsto & \sqrt{r^2-x^2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+(f'(x))^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} \quad \text{s.o.}$$

$$A = 2\pi \int_0^r x \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\, dx = 2\pi r \int_0^r \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\, dx$$

$$\left[\text{Subst. } t = r^2 - x^2 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = -2x, \; dx = -\frac{dt}{2x} \right]$$

$$= 2\pi r \int_{r^2}^0 \frac{x}{\sqrt{t}} \left(-\frac{dt}{2x}\right) = -\pi r \int_{r^2}^0 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \pi r \int_0^{r^2} t^{-\frac{1}{2}}\, dt = \pi r \left[2 t^{1/2} \right]_0^{r^2}$$

$$= 2\pi r \left((r^2)^{1/2} - 0 \right) = 2\pi r \cdot r = 2\pi r^2$$

Aufgabe A 5.11
Betrachten Sie die von den beiden Graphen der Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ *und* $g(x) = x$ *eingeschlossene Fläche. Wenn man diese Fläche um die* x*- bzw.* y*-Achse rotieren lässt, entsteht jeweils ein Rotationskörper.*

a) *Machen Sie eine Skizze und überlegen Sie sich bei welcher Rotation das Volumen des entstehenden Körpers größer wird.*

b) *Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der bei Rotation um die x-Achse entsteht.*

c) *Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der bei Rotation um die* y*-Achse entsteht.*

5.4.4 Mittelpunkt ebener Bereiche/Schwerpunkt

Es soll der geometrische Mittelpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ für das Gebiet

$$\Omega = \big\{(x, y)\,|\, a \leq x \leq b,\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\big\}$$

bestimmt werden. Das entspricht dem Schwerpunkt einer Platte mit der gegebenen geometrischen Form, konstanter Dicke und konstanter Dichte.

Berechnung von $\overline{x}$

Nach dem Hebelgesetz gilt:

$$\text{Kraft} \cdot \text{Kraftarm} = \text{Last} \cdot \text{Lastarm}$$

Damit rechnen wir:

$$\begin{aligned}
& \int_a^{\overline{x}} (f_2(x) - f_1(x)) \cdot (\overline{x} - x)\ \mathrm{d}x = \int_{\overline{x}}^b (f_2(x) - f_1(x)) \cdot (x - \overline{x})\ \mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\quad & \int_a^{\overline{x}} (f_2(x) - f_1(x)) \cdot (\overline{x} - x)\ \mathrm{d}x - \int_{\overline{x}}^b (f_2(x) - f_1(x)) \cdot (x - \overline{x})\ \mathrm{d}x = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \int_a^{\overline{x}} (f_2(x) - f_1(x)) \cdot (\overline{x} - x)\ \mathrm{d}x + \int_{\overline{x}}^b (f_2(x) - f_1(x)) \cdot (\overline{x} - x)\ \mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \cdot (\overline{x} - x) \,\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \cdot \overline{x} \,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \cdot x \,\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \cdot \overline{x} \,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \cdot x \,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{x} \cdot \underbrace{\int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \,\mathrm{d}x}_{=:A} = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \cdot x \,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{x} = \frac{1}{A} \cdot \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \cdot x \,\mathrm{d}x$$

Berechnung von $\overline{y}$

Wenn die Funktionen f_1 und f_2 invertierbar sind, kann man $\overline{y}$ analog zu $\overline{x}$ bestimmen. Ansonsten kann man das so machen:

Der y-Wert eines schmalen Streifens über dem Wert x ist

$$\frac{1}{2} \cdot (f_1(x) + f_2(x))$$

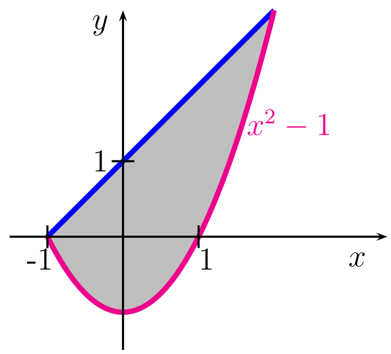
Man kann aus den Schwerpunkten von dünnen Streifen durch gewichtetes Mitteln den

Schwerpunkt der gesamten Platte bestimmen.

$$\overline{y} = \int_a^b \frac{1}{2} \cdot (f_1(x) + f_2(x)) \cdot \frac{f_2(x) - f_1(x)}{A} \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b \left(\left(f_2(x) \right)^2 - \left(f_1(x) \right)^2 \right) \, \mathrm{d}x$$

Bsp.:
Gesucht ist der Mittelpunkt der markierten Fläche:



Aufgabe A 5.12
Ermitteln Sie den Schwerpunkt einer halbkreisförmigen Platte, deren gerade Kante auf der x-Achse liegt.