2)

1. Heap mit n Elementen hat $h = \lfloor \log n \rfloor$.

~~$2^h \leq n < 2^h$~~

$2^h \leq n < 2^{h+1}$

$h \leq \log n < h+1$

$\Rightarrow h = \lfloor \log n \rfloor$

2. Heap mit n Elementen hat höchstens $\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \rceil$ viele Knoten der Höhe h.

IA: $h = 0$

Anzahl Blätter in h: $n - \lfloor \frac{(n-1)-1}{2} \rfloor + 1 =$

$= n - \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 1 =$

$= \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

IV: Behauptung gilt für ~~alle~~ $h-1$:

IS: H wird durch Streichen aller Blätter zu H'

Beobachtung: jeder Knoten in H' mit $h-1$ hat neue Höhe h

Nach IV gibt es maximal $\lceil \frac{n - \frac{n}{2}}{2^{h-1+1}} \rceil = \lceil \frac{\frac{n}{2}}{2^h} \rceil \leq \lceil \frac{\frac{n}{2}}{2^h} \rceil =$

$= \lceil \frac{n}{2^{h+1}} \rceil$

3.

$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{(1-x)\cdot 0 - 1\cdot(-1)}{(1-x)^2}$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad | \cdot x$

$\sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2} \quad$ für $x \neq 1$

nach 3. ja dürfte man tauschen, aber nur in derselben Höhe