Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg
Studiengänge Informatik und Wirtschaftsinformatik
Dr. G. Tapken
Dr. D. Gröger

WiSe 2024/25

8. Übungsblatt zur Mathematik 2

Lösung zu Aufgabe Ü 8.1

a) Da $f'(x) = 3 \cdot x^2 + 2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \quad f$ streng monoton wachsend und damit injektiv.
Da $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \Rightarrow \quad f$surjektiv.
D.h. die Funktion f ist bereits bijektiv und damit invertierbar. Es ist also keine Einschränkung nötig.

b) Nach dem Satz von der Umkehrfunktion gilt:

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3 \cdot 1^2 + 2} = \frac{1}{5}$$

c) Hier müssen wir zunächst die richtige Formel herleiten. Das kann man beispielsweise tun, indem man die Formel aus dem Satz von der Umkehrfunktion ableitet:

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)''(y) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}\left(\frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}\right)\\ =& \frac{0 - 1 \cdot f''\left(f^{-1}(y)\right) \cdot \left(\left(f^{-1}\right)'(y)\right)}{\left(f'\left(f^{-1}(y)\right)\right)^2}\end{aligned}$$

Und nun noch für die erste Ableitung von f^{-1} die Formel aus dem Satz von der Umkehrfunktion einsetzen

$$\left(f^{-1}\right)''(y) = -\frac{f''\left(f^{-1}(y)\right)}{\left(f'\left(f^{-1}(y)\right)\right)^3}$$

Um dies nun an der Stelle $y = 2$ auswerten zu können, brauchen wir noch die zweite Ableitung der Funktion f, also $f''(x) = 6x$ und erhalten:

$$\left(f^{-1}\right)''(2) = -\frac{f''\left(f^{-1}(2)\right)}{\left(f'\left(f^{-1}(2)\right)\right)^3} = -\frac{f''(1)}{\left(f'(1)\right)^3} = -\frac{6}{5^3} = -\frac{6}{125}$$

Lösung zu Aufgabe Ü 8.2

Wir kennen die Taylorreihe für die e-Funktion:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

D.h. nach dem Satz von Taylor gilt

$$e^x = T_N(f(x) = e^x, x_0 = 0, x) + R_{N+1}(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + R_{N+1}(x)$$

Wir müssen also nur noch schauen, für welches N der Fehler $R_{N+1}(x)$ kleiner als $5 \cdot 10^{-5}$ ist. Für die Lagrange-Form des Restgliedes gilt: $R_{N+1}(x) = \frac{f^{N+1}(\xi)}{(N+1)!} \cdot (x-0)^{N+1}$ für ein ξ zwischen x und x_0. Da $x \in [0,1]$ ist, ist wenn $\frac{f^{N+1}(\xi)}{(N+1)!} < 5 \cdot 10^{-5}$ für jedes $\xi \in [0,1]$ gilt, die Bedingung sicher erfüllt. Da jede Ableitung von e^x wieder gleich e^x ist, gilt:

$$R_{N+1}(x) = \frac{f^{N+1}(\xi)}{(N+1)!} \cdot (x-0)^{N+1} = \frac{e^{\xi}}{(N+1)!} \cdot (x-0)^{N+1} \leq \frac{e^1}{(N+1)!} \overset{!}{\leq} 5 \cdot 10^{-5}$$

Das löst man nun nach N auf

$$(N+1)! \geq \frac{e^1}{5 \cdot 10^{-5}} = \underbrace{2 \cdot 10^4 \cdot e}_{5 \cdot 10^4 \leq \ldots \leq 10^5} \quad \overset{\text{Fakultäten ausprobieren}}{\Longleftrightarrow} \quad N \geq 8$$

$(8! = 40320, 9! = 362880)$

Damit ist das gesuchte Polynom:

$$e^x \approx T_8(e^x, x_0 = 0, x) = \sum_{k=0}^{8} \frac{x^k}{k!}$$

z.B. für $x = 1$ ergibt sich dann:

$$e^1 \approx \sum_{k=0}^{8} \frac{1}{k!} = \frac{109601}{40320} = 2{,}71827 \pm 0{,}00005$$

Lösung zu Aufgabe Ü 8.3

a) $f(10) = -\frac{1}{250} \cdot 10^3 + \frac{1}{10} \cdot 10^2 = -4 + 10 = 6$

b)

$$\begin{aligned}
& & f(t) &\overset{!}{=} 0 & & \\
&\Leftrightarrow & -\frac{1}{250}t^3 + \frac{1}{10}t^2 &= 0 & & \\
&\Leftrightarrow & t^2 \cdot \left(-\frac{1}{250}t + \frac{1}{10}\right) &= 0 & & \\
&\Leftrightarrow & -\frac{1}{250}t + \frac{1}{10} &= 0 & \vee \quad & t = 0 \\
&\Leftrightarrow & \frac{1}{10} &= \frac{1}{250}t & \vee \quad & t = 0 \\
&\Leftrightarrow & \frac{250}{10} &= t & \vee \quad & t = 0 \\
&\Leftrightarrow & t &= 25 & \vee \quad & t = 0
\end{aligned}$$

D.h. die obige Funktion beschreibt die Anzahl der Erkrankten im Intervall $[0, 25]$

c)

$$f'(t) = -\frac{3}{250} \cdot t^2 + \frac{2}{10} \cdot t$$

$$
\begin{aligned}
& & f'(t) &\overset{!}{=} 0 \\
&\Leftrightarrow & -\frac{3}{250}\cdot t^2+\frac{2}{10}\cdot t &= 0 \\
&\Leftrightarrow & t\cdot\left(-\frac{3}{250}\cdot t+\frac{2}{10}\right) &= 0 \\
&\Leftrightarrow & -\frac{3}{250}\cdot t+\frac{2}{10} &= 0 & \vee\quad t=0 \\
&\Leftrightarrow & \frac{2}{10} &= \frac{3}{250}\cdot t & \vee\quad t=0 \\
&\Leftrightarrow & \frac{2\cdot 250}{10\cdot 3} &= \frac{3}{250}\cdot t & \vee\quad t=0 \\
&\Leftrightarrow & t &= \frac{50}{3} & \vee\quad t=0
\end{aligned}
$$

D.h. in $t=0$ bzw. $t=\frac{50}{3}$ sind kritische Punkte. Damit könnte die maximale Anzahl der Erkrankten könnte in $t=0, t=\frac{30}{3}$ bzw. $t=25$ (also in den kritischen Punkten bzw. in den Randpunkten) erreicht werden.
Da wir die Funktionswerte in $t=0$ und $t=25$ in der Teilaufgabe b) bereits als 0 bestimmt haben, reicht es zu zeigen, dass in $t=\frac{50}{3}$ die Anzahl positiv ist, um dort das globale Maximum gefunden zu haben.

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{50}{3}\right) &= -\frac{1}{250}\left(\frac{50}{3}\right)^3+\frac{1}{10}\left(\frac{50}{3}\right)^2 \\
&= -\frac{5^3\cdot 10^3}{250\cdot 27}+\frac{5^2\cdot 10^2}{90}=\frac{-500+750}{27}=\frac{250}{27}>0
\end{aligned}
$$

Prinzipiell könnt man auch anders überprüfen, ob in $t=\frac{50}{3}$ das globale Maximum liegt (z.B. über die 2.Ableitung), da wir den Funktionswert aber ohnehin haben wollen, wäre das hier nicht sinnvoll.

Die maximale Anzahl der Erkrankten wird $t=\frac{50}{3}\approx 16,7$ Tagen mit einer Anzahl von $\frac{250}{27}\approx 9,26$ Personen erreicht.

d) Die größte Änderung der Anzahl, ist also die Suche nach dem t, dass ein Maximum von $|f'|$ liefert.

$$
f''(t) = -\frac{6}{250}\cdot t+\frac{2}{10}
$$

$$
\begin{aligned}
& & f''(t) &\overset{!}{=} 0 \\
&\Leftrightarrow & -\frac{6}{250}\cdot t+\frac{2}{10} &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \frac{2}{10} &= \frac{6}{250}\cdot t \\
&\Leftrightarrow & t &= \frac{6\cdot 10}{250\cdot 2}=\frac{25}{3}
\end{aligned}
$$

Damit ist in $\frac{25}{3}$ die einzige kritische Stelle. Das betragsmäßige Maximum von f' kann also in dem Punkt oder in einem der beiden Randpunkte $t=0$ bzw. $t=25$ liegen. Da wir hier nicht wissen, ob wir ein Maximum oder ein Minimum suchen, ist der Weg über die Funktionswerte der einzig sinnvolle.

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= 0 \\
f'\left(\frac{25}{3}\right) &= -\frac{3}{250} \cdot \left(\frac{25}{3}\right)^2 + \frac{2}{10} \cdot \left(\frac{25}{3}\right) \\
&= -\frac{25}{30} + \frac{5}{3} = \frac{-25+50}{25} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} \\
f'(25) &= -\frac{3}{250} \cdot 25^2 + \frac{2}{10} \cdot 25 = \frac{-75+50}{10} = \frac{-25}{10} = -\frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

Da $\left|-\frac{5}{2}\right| = 2{,}5 > \frac{5}{6}$ ist die größte Änderung am letzten Tag ($t = 25$) der Epidemie.