Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg
Bachelor-Studiengänge
Informatik und Wirtschaftsinformatik

WiSe 2023/24

Prüfungsfach: Mathematik 2
Aufgabensteller: Dr. D. Gröger
Prüfungstermin: 22.01.24
Arbeitszeit: 90 Minuten
Zugelassene Hilfsmittel:
Formelsammlung, gedrucktes Skript, selbstgeschriebene Formelsammlung (1 A4-Blatt)

Prüfungsteilnehmer
(bitte in Druckbuchstaben)

Name: ______

Vorname: ______

Studiengruppe: ______

Matrikel-Nr.: ______

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ	Note
Punkte								

Probeklausur

Hinweise:

- Diese Prüfung besteht aus 6 Aufgaben.
- Alle Angabenblätter sind abzugeben.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben bitte auf den Angabenblättern (auch Rückseite benutzen).
- Alle Ergebnisse sind zu begründen und durch die entsprechenden Rechenschritte nachzuweisen.
- Schreiben Sie bitte mit einem nichtradierbaren Stift (z.B. Kugelschreiber, Füllfeder) in der Farbe blau oder schwarz.

Probeklausur

Aufgabe 1

a) Kreuzen Sie die richtige Antwort an und begründen Sie diese: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x\cdot \ln|x|}} =$

☐ $-\infty$ ☐ -1 ☒ 0 ☐ 1 ☐ $\sqrt[3]{2}$ ☐ 2 ☐ ∞ ☐ nicht definiert

Begründung:

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x\cdot \ln|x|}} = \frac{x}{x^{1/3}(\ln|x|)^{1/3}} = \frac{x^{2/3}}{(\ln|x|)^{1/3}} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{\ln|x|}}$$

$$\lim_{x\to 0} \ln|x| = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x\cdot \ln|x|}} = \sqrt[3]{0} = 0$$

b) Kreuzen Sie die richtige Antwort an und begründen Sie diese: $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a} =$

☐ $-\frac{1}{a}$ ☐ $-\frac{\sin(a)}{a}$ ☐ 0 ☒ $\cos(a)$ ☐ 1 ☐ $\frac{\cos(a)}{a}$ ☐ ∞ ☐ nicht definiert

Begründung: $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a}$ ist per Definition die Ableitung von $\sin(x)$ an der Stelle $x=a$, folglich gleich $\cos(a)$.

c) Betrachten Sie die Folge $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ mit $n \in \{1,2,3,\ldots\}$.

i) Zeigen oder widerlegen Sie: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt (nach oben/unten, gegebenenfalls Schranken angeben)

ii) Bestimmen Sie den Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls er existiert.

i) Wegen $|\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist die Folge (a_n) nach oben durch 1 und nach unten durch -1 beschränkt.

ii) Wegen der Stetigkeit der Funktion $\sin(x)$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \sin\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\right) = \sin(0) = 0.$$

Probeklausur

Aufgabe 2
Kreuzen Sie die richtigen Lösungen an und begründen Sie Ihre Wahl

a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^n}$ ist

☒ konvergent ☐ divergent

Begründung: etwa mit dem Wurzelkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|A_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 \cdot 0 = 0 =: W$$

Wegen $W < 1$ folgt die Konvergenz.

b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ ist

☐ konvergent ☒ divergent

Begründung: mit dem notwendigen Kriterium:

$$\lim_{n\to\infty} |A_n| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$$

$\Rightarrow (|A_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ [und gleichzeitig $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$] ist keine Nullfolge

$\Rightarrow$ Reihe divergiert

c) Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \cdot \left(\frac{x-1}{3}\right)^n$ ist:

☐ 0 ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{2}{3}$ ☒ $\frac{3}{2}$ ☐ 2 ☐ 3

Begründung:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \left(\frac{x-1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 3^n} \cdot (x-1)^n \Rightarrow a_n = \frac{2^n}{n^2 3^n}$$

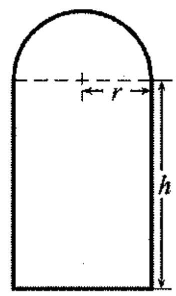
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2 3^{n+1}}}{\frac{2^n}{n^2 3^n}} = \frac{n^2 2^{n+1} 3^n}{(n+1)^2 2^n 3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

$$\Rightarrow q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{q} = \frac{3}{2}$$

Probeklausur

Aufgabe 3
Ein Rundbogenfenster hat die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis (vgl. Skizze). Das Glas im rechteckigen Bereich lässt $\frac{1}{3}$ des Lichts durch, das Glas im kreisförmigen Bereich $\frac{2}{3}$. Der Umfang des gesamten Fensters (ohne die Zwischenstrebe unter dem Halbkreis) soll 6 Meter betragen. Mit welchen Maßen muss man das Fenster bauen, damit möglichst viel Licht hindurchgelassen wird?



Der Umfang des gesamten Fensters (ohne Zwischenstrebe) ist

$$\frac{1}{2}\cdot 2\pi r + 2r + 2h = (\pi+2)r + 2h$$

Die Nebenbedingung lautet also

$$(\pi+2)r + 2h = 6. \qquad (*)$$

Klar ist $r \geq 0$ und

$$h \geq 0$$
$$\Longleftrightarrow 2h \geq 0 \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} 6-(\pi+2)r \geq 0 \Longleftrightarrow r \leq \frac{6}{\pi+2}.$$

Die zu maximierende Zielfunktion lautet

$$Z = \frac{1}{3}\cdot\underbrace{2rh}_{\text{Rechtecksfläche}} + \frac{2}{3}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\pi r^2}_{\text{Halbkreisfläche}}$$

$$= \frac{1}{3}r\cdot 2h + \frac{1}{3}\pi r^2$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{3}r\cdot(6-(\pi+2)r) + \frac{1}{3}\pi r^2$$

$$= 2r - \cancel{\frac{1}{3}\pi r^2} - \frac{2}{3}r^2 + \cancel{\frac{1}{3}\pi r^2}$$

$$\Rightarrow \quad Z(r) = 2r - \frac{2}{3}r^2, \qquad r\in\left[0,\frac{6}{\pi+2}\right].$$

$$Z'(r) = 2 - \frac{4}{3}r \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad r = 2\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

Jedoch ist $\frac{3}{2} \notin \left[0,\frac{6}{\pi+2}\right]$, denn $\frac{3}{2} > \frac{6}{\pi+2} \Longleftrightarrow 3\pi+6 > 12 \Longleftrightarrow \pi > 2$ ✓

Also liegt ein Randextremum vor:

$$Z(0) = 0,\quad Z\left(\frac{6}{\pi+2}\right) \underset{h=0}{\overset{(*)}{=}} \frac{1}{3}\pi\left(\frac{6}{\pi+2}\right)^2 > 0,$$

d.h. Maximum für $r = \frac{6}{\pi+2}$, $h = 0$ Meter.

Probeklausur

Aufgabe 4
Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie zu $f(x)$ das Taylor-Polynom $T_4(x)$ der Ordnung 4 mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 0$$
$$f''(x) = 12x^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad f''(1) = 8$$
$$f'''(x) = 24x \quad \Rightarrow \quad f'''(1) = 24$$
$$f^{IV}(x) = 24 \quad \Rightarrow \quad f^{IV}(1) = 24$$

Dann ist noch $f(1) = 0$, und es folgt:

$$T_4(x) = \sum_{n=0}^{4} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$
$$= 0 + 0\cdot(x-1) + \frac{8}{2!}(x-1)^2 + \frac{24}{3!}(x-1)^3 + \frac{24}{4!}(x-1)^4$$
$$= 4(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$$

b) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graph von f an der Stelle $x_0 = 1$.

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$
$$= f(1) + f'(1)\cdot(x-1)$$
$$= 0$$

Das folgt auch unmittelbar aus a). Die x-Achse ist also die Tangente!

c) Berechnen Sie den Inhalt der von dem Graph von f und der x-Achse eingeschlossene Fläche.

Ansatz für Schnittpunkte mit x-Achse (Nullstellen):

$$f(x) = 0 \iff \underbrace{x^4 - 2x^2 + 1}_{(x^2-1)^2 \geq 0} = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm 1$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist daher

$$A = \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1)\,dx \overset{f \text{ gerade}}{=} 2\int_{0}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1)\,dx$$
$$= 2\left[\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{2}{3}x^3 + x\right]_0^1 = 2\left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{3} + 1\right) = 2\,\frac{3 - 10 + 15}{15} = \frac{16}{15}$$

Probeklausur

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit einer geeigneten Methode:

a) $$\int (2x+1)\cdot e^{2x}\,\mathrm{d}x$$

b) $$\int_a^b (3x-5)^{11}\,\mathrm{d}x$$

c) $$\int \frac{8t-12}{t^2-4t}\,\mathrm{d}t$$

a) Partielle Integration:

$$\int \underbrace{(2x+1)}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{g'(x)}\,dx = (2x+1)\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int 2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx$$

$$= \left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

$$= x\cdot e^{2x} + c$$

b) Substitution $t = 3x-5 \Rightarrow dt = 3\,dx$, $t(a) = 3a-5$, $t(b) = 3b-5$

$$\Longrightarrow \int_a^b (3x-5)^{11}\,dx = \frac{1}{3}\int_a^b (3x-5)^{11}\,3\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_{3a-5}^{3b-5} t^{11}\,dt = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{12}t^{12}\right]_{3a-5}^{3b-5}$$

$$= \frac{1}{36}\left((3b-5)^{12} - (3a-5)^{12}\right)$$

c) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{8t-12}{t^2-4t} = \frac{8t-12}{t(t-4)} \overset{!}{=} \frac{A}{t} + \frac{B}{t-4} = \frac{A(t-4)+Bt}{t(t-4)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 8t-12 = A(t-4)+Bt = (A+B)t - 4A$$

$$\Longleftrightarrow \quad A = 3,\ B = 5$$

$$\Rightarrow \int \frac{8t-12}{t^2-4t}\,dt = \int\left(\frac{3}{t} + \frac{5}{t-4}\right)dt$$

$$= 3\ln|t| + 5\ln|t-4| + c$$

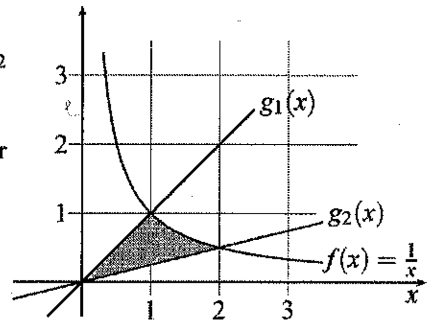
Probeklausur

Aufgabe 6

Betrachten Sie die Skizze.

a) Geben Sie die Geradengleichungen der Geraden g_1 und g_2 an.

b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der bei der Rotation der markierten Fläche um die x-Achse entsteht.



a) $g_1(x) = x$, $g_2(x) = \frac{1}{4}x$

b) Obere Begrenzungskurve: $\begin{cases} g_1(x), & 0 \le x \le 1 \\ f(x), & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Untere " : $g_2(x)$, $0 \le x \le 2$

$$\Rightarrow V = \pi \left(\int_0^1 (g_1(x))^2\,dx + \int_1^2 (f(x))^2\,dx \right) - \pi \int_0^2 (g_2(x))^2\,dx$$

$$= \pi \left(\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 x^{-2}\,dx - \int_0^2 \left(\tfrac{1}{4}x\right)^2 dx \right)$$

$$= \pi \left(\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[-x^{-1}\right]_1^2 - \tfrac{1}{16}\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^2 \right)$$

$$= \pi \left(\tfrac{1}{3} - 0 - \tfrac{1}{2} + 1 - \tfrac{1}{16}\left(\tfrac{8}{3} - 0\right) \right)$$

$$= \pi \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} \right)$$

$$= \pi \cdot \frac{2 + 3 - 1}{6}$$

$$= \pi \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\pi$$