

4. Tutoriumsblatt zur Mathematik 2

Aufgabe 9

Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie ((streng) monoton wachsend/fallend oder keine Monotonie), Beschränktheit (nach oben/unten beschränkt bzw. beides oder beides nicht) und Konvergenz

a) $a_n := n - \frac{1}{n}$

b) $b_n := \frac{n^2+n}{n^2}$

c) $c_n := (-1)^n \cdot \frac{n^2+n}{n^2}$

Aufgabe 10

Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \sqrt{6 + a_n}$.

- a) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion die Ungleichung $a_n \leq 3$.
- b) Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) monoton wachsend ist.
- c) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 11

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^k$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$

Aufgabe 12

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren/divergieren:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$

b) $\frac{1}{11} + \frac{1}{101} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{10001} + \dots$

c) $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$