1. Übungsblatt zur Mathematik 2 – Lösungen

Lösung zu Aufgabe Ü1.1

a) Die Wagen dürfen beliebig eingereiht werden, d.h.

Variante 1:

- 5 Plätze für die Wagen der 2. Klasse aussuchen $\binom{10}{5}$
- aus den verbliebenen 5 Plätzen 3 Plätze für die Wagen der 1. Klasse aussuchen $\binom{5}{3}$
- die letzten beiden Plätze sind für die Gepäckwagen $\binom{2}{2} = 1$

Damit ergeben sich

$$\text{Anzahl} = \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2!} = 10 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 = 2520$$

Variante 2:

- Wir ordnen die 10 Wagen beliebig an; ergibt 10! Möglichkeiten
- Da die Wagen des gleichen Typs aber nicht unterschieden werden sollen, haben wir oben Möglichkeiten unterschieden, die als eine gezählt werden sollen, d.h. identisch aussehende Varianten müssen rausgerechnet werden, deswegen muss durch die Fakultäten der jeweils gleichartigen Wagen geteilt werden, also durch $2! \cdot 3! \cdot 5!$

Damit ergibt sich

$$\text{Anzahl} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = 10 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 = 2520$$

b) Die Wagen der zweiten Klasse müssen hintereinander eingereiht werden, d.h. wir betrachten die Wagen der 2. Klasse als einen Riesenwagen neben den restlichen 5 normalen Wagen und haben dann

- $\binom{6}{1}$ Möglichkeiten den Platz für den Riesenwagen auszusuchen
- Aus den verbliebenen 5 Plätzen 3 Plätze für die Wagen der 1. Klasse aussuchen $\binom{5}{3}$
- Die letzten beiden Plätze sind für die Gepäckwagen $\binom{2}{2} = 1$

Damit ergibt sich

$$\text{Anzahl} = \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = 6 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 6 \cdot 5 \cdot 2 = 60$$

Lösung zu Aufgabe Ü1.2

Wie viele 12-stellige Zahlen, bei denen die Ziffer 9 höchstens zweimal auftritt und die Summe der beiden ersten Ziffern genau 7 beträgt, lassen sich aus den Ziffern 1, 2, …, 9 bilden?

- Es gibt 6 Möglichkeiten, so dass die Summe der ersten beiden Ziffern 7 ergibt $\big((1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\big)$.
- Nun müssen wir die Bedingung höchstens zwei 9er in den 12 Stellen erfüllen, da in den ersten beiden Stellen keine 9 möglich ist, bedeutet dies höchstens zweimal 9 in den restlichen 10 Stellen. Wir zerlegen das auf die 3 disjunkten Fälle

keine 9:	an jeder der 10 Stellen hat man jeweils 8 Möglichkeiten (Ziffern 1,2,3,4,5,6,7,8), damit gibt es 8^{10} Möglichkeiten
genau eine 9:	zunächst sucht man sich den Platz der einzigen 9, $\binom{10}{1}$ Möglichkeiten, aus und an allen anderen neun Stellen hat man jeweils 8 Möglichkeiten, das ergibt $\binom{10}{1} \cdot 8^9$
genau zweimal 9:	Zunächst sucht man sich die Plätze der beiden 9er, $\binom{10}{2}$ Möglichkeiten, aus und an allen anderen acht Stellen hat man jeweils 8 Möglichkeiten, das ergibt $\binom{10}{2} \cdot 8^8$

Damit erhält man:

$$6 \cdot \left(8^{10} + \binom{10}{1} \cdot 8^9 + \binom{10}{2} \cdot 8^8\right) = 6 \cdot 8^8 \cdot 189 \approx 1{,}9 \cdot 10^{10}$$