Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg
Studiengang IN, IW
R. Wörle, Dr. G. Tapken

2. Übungsblatt zur Mathematik 2 – Lösungen

Lösung zu Aufgabe Ü2.1

Die Umrechnungsformel von Celsius (=C) in Fahrenheit (=F) ist: $F = \frac{9}{5}C + 32$

a)

$$\begin{array}{lcccccl}
 & 80 & \leq & T_C & \leq & 115 & | \cdot \frac{9}{5} \\
\Leftrightarrow & 80 \cdot \frac{9}{5} & \leq & T_C \cdot \frac{9}{5} & \leq & 115 \cdot \frac{9}{5} & \\
\Leftrightarrow & 144 & \leq & T_C \cdot \frac{9}{5} & \leq & 207 & | + 32 \\
\Leftrightarrow & 144 + 32 & \leq & T_C \cdot \frac{9}{5} + 32 & \leq & 207 + 32 & \\
\Leftrightarrow & 176 & \leq & T_F & \leq & 239 &
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lcccccl}
 & 40 & \leq & T_F & \leq & 46 & | - 32 \\
\Leftrightarrow & 40 - 32 & \leq & T_F - 32 & \leq & 46 - 32 & \\
\Leftrightarrow & 8 & \leq & T_F - 32 & \leq & 14 & | \cdot \frac{5}{9} \\
\Leftrightarrow & 8 \cdot \frac{5}{9} & \leq & (T_F - 32) \cdot \frac{5}{9} & \leq & 14 \cdot \frac{5}{9} & \\
\Leftrightarrow & 4,\overline{4} & \leq & T_c & \leq & 7,\overline{7} &
\end{array}$$

Lösung zu Aufgabe Ü2.2

Behauptung: Die Aussage

$$xy \leq x^2 + y^2$$

gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Fall 1: $x \cdot y \leq 0$ (d.h. $(x \leq 0 \ \wedge \ y \geq 0) \ \vee \ (x \geq 0 \ \wedge \ y \leq 0)$)

Die Aussage ist wahr, da $x \cdot y \leq 0$ und $x^2 + y^2 \geq 0$

Fall 2: $x \cdot y > 0$ (d.h. $(x < 0 \ \wedge \ y < 0) \ \vee \ (x > 0 \ \wedge \ y > 0)$)

Variante 1: 2. Binomische Formel

z.z. $\quad xy \leq x^2 + y^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad$ z.z. $\quad x^2 + y^2 - xy \geq 0$

Wir schätzen ab:

$$x^2 + y^2 - xy > x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0$$

Variante 1: Ungleichung geom./arithm. Mittel

Wir wissen, dass für positive a, b gilt:

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{1}{2} \cdot (a + b)$$

Wir wählen $a = x^2, b = y^2$ und erhalten

$$\Leftrightarrow \qquad \sqrt{x^2 \cdot y^2} \leq \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow \qquad |x| \cdot |y| \leq \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2)$$

da $x \cdot y > 0$

$$\Leftrightarrow \qquad x \cdot y \leq \frac{1}{2} \cdot \underbrace{(x^2 + y^2)}_{\geq 0}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x \cdot y \leq x^2 + y^2$$

Lösung zu Aufgabe Ü 2.3

Variante 1:

$$\left|\frac{3-2x}{1+x}\right| \leq 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad -4 \leq \frac{3-2x}{1+x} \leq 4$$

Fall 1: $\boldsymbol{x > -1}$

$$
\begin{aligned}
& && -4 \leq \frac{3-2x}{1+x} \leq 4 \\
&\Leftrightarrow && -4\cdot(1+x) \leq 3-2x \leq 4\cdot(1+x) \\
&\Leftrightarrow && -4-4x \leq 3-2x \leq 4+4x \\
&\Leftrightarrow && -4-4x \leq 3-2x \quad \wedge \quad 3-2x \leq 4+4x \\
&\Leftrightarrow && -7 \leq 2x \quad \wedge \quad -1 \leq 6x \\
&\Leftrightarrow && -\frac{7}{2} \leq x \quad \wedge \quad -\frac{1}{6} \leq x \\
&\Leftrightarrow && x \geq -\frac{1}{6} \\
&\Rightarrow && \mathbb{L}_1 =]-1;\infty[\cap \left[-\frac{1}{6};\infty\right[= \left[-\frac{1}{6};\infty\right[
\end{aligned}
$$

Fall 2: $\boldsymbol{x < -1}$

$$
\begin{aligned}
& && 4 \leq \frac{3-2x}{1+x} \leq 4 \\
&\Leftrightarrow && -4\cdot(1+x) \geq 3-2x \geq 4\cdot(1+x) \\
&\Leftrightarrow && -4-4x \geq 3-2x \geq 4+4x \\
&\Leftrightarrow && -4-4x \geq 3-2x \quad \wedge \quad 3-2x \geq 4+4x \\
&\Leftrightarrow && -7 \geq 2x \quad \wedge \quad -1 \geq 6x \\
&\Leftrightarrow && -\frac{7}{2} \geq x \quad \wedge \quad -\frac{1}{6} \geq x \\
&\Leftrightarrow && x \leq -\frac{7}{2} \\
&\Rightarrow && \mathbb{L}_2 =]\infty;-1[\cap \left]-\infty;-\frac{7}{2}\right] = \left]-\infty;-\frac{7}{2}\right]
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich als gesamte Lösung

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \left[-\frac{1}{6};\infty\right[\cup \left]-\infty;-\frac{7}{2}\right] = \mathbb{R} \setminus \left]-\frac{7}{2};-\frac{1}{6}\right[$$

Die beiden Darstellungen sind gleichwertig (also ist keine offensichtlich schöner als die andere).

Variante 2:

$$\left|\frac{3-2x}{1+x}\right| \leq 4$$

Man schaut zunächst, wann Zähler und Nenner des im Betrag vorhandenen Bruchs ihr Vorzeichen ändern. Das ist bei $3-2x$ in $x=\frac{3}{2}$ und bei $1+x$ in $x=-1$ der Fall. Dies sind nun die Punkte an denen in die einzelnen Fälle zerlegt wird.

Fall 1: $\boldsymbol{x < -1}$ d.h. $|3-2x| = 3-2x$ und $|1+x| = -(1+x) = -1-x$

$$\left|\frac{3-2x}{1+x}\right| \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3-2x}{-1-x} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 3-2x \leq 4\cdot(-1-x)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3-2x \leq -4-4x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x \leq -7$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq -\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_1 = \left]-\infty; -\frac{7}{2}\right] \cap \left]-\infty; -1\right[= \left]-\infty; -\frac{7}{2}\right]$$

Fall 2: $\boldsymbol{-1 < x < \frac{3}{2}}$ d.h. $|3-2x| = 3-2x$ und $|1+x| = 1+x$

$$\left|\frac{3-2x}{1+x}\right| \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3-2x}{1+x} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 3-2x \leq 4\cdot(1+x)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3-2x \leq 4+4x$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 \leq 6x$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{6} \leq x$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_2 = \left[-\frac{1}{6}; \infty\right[\cap \left]-1; \frac{3}{2}\right[= \left[-\frac{1}{6}; \frac{3}{2}\right[$$

Fall 3: $\frac{3}{2} < x$ d.h. $|3-2x| = -(3-2x) = -3+2x$ und $|1+x| = 1+x$

$$\left|\frac{3-2x}{1+x}\right| \le 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-3+2x}{1+x} \le 4$$

$$\Leftrightarrow \quad -3+2x \le 4\cdot(1+x)$$

$$\Leftrightarrow \quad -3+2x \le 4+4x$$

$$\Leftrightarrow \quad -7 \le 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{7}{2} \le x$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_3 = \left[-\frac{7}{2};\infty\right[\cap \left[\frac{3}{2};\infty\right[= \left[\frac{3}{2};\infty\right[$$

Damit ergibt sich:

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3$$

$$\mathbb{L} = \left]-\infty;-\frac{7}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{6};\frac{3}{2}\right[\cup \left[\frac{3}{2};\infty\right[$$

$$\mathbb{L} = \left]-\infty;-\frac{7}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{6};\infty\right[$$