Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg
Studiengänge Informatik und Wirtschaftsinformatik
Dr. G. Tapken
Dr. D. Gröger

WiSe 2024/25

4. Übungsblatt zur Mathematik 2

Lösung zu Aufgabe Ü 4.1

Da jedes Element der Matrix an genau einer Multiplikation beteiligt ist, ist die Matrix-Vektor-Multiplikation $O(n^2)$

Lösung zu Aufgabe Ü 4.2

a)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n-6)^2}{2\cdot 4^n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n)^2 - 12\cdot 2^n + 36}{2\cdot 4^n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} - 12\cdot 2^n + 36}{2\cdot 2^{2n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{12}{2^n}+\frac{36}{2^{2n}}}{2+\frac{1}{2^{2n}}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1-\frac{12}{2^n}+\frac{36}{2^{2n}}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2+\frac{1}{2^{2n}}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b)

$$\underbrace{0}_{=:c_n} \leq \underbrace{\frac{\left(\cos(n)\right)^2}{\sqrt{n}}}_{=b_n} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{:=d_n}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} c_n &= \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \\
\lim_{n\to\infty} d_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0
\end{aligned}$$

Damit gilt nach dem Sandwich-Theorem

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\cos(n)\right)^2}{\sqrt{n}} = 0$$

c)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n^2 - \sqrt{n^4+3n^2+2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^2-\sqrt{n^4+3n^2+2}\right)\cdot\left(n^2+\sqrt{n^4+3n^2+2}\right)}{n^2+\sqrt{n^4+3n^2+2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4-\left(n^4+3n^2+2\right)}{n^2+\sqrt{n^4+3n^2+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-3n^2-2}{n^2+\sqrt{n^4+3n^2+2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-3-\frac{2}{n^2}}{1+\sqrt{1+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-3-\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{1+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}}\right)} = \frac{-3}{2}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} c_n &= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{42}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} \left(-\frac{1}{n}\right)^k\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \left(1 - \binom{42}{1} \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{42} \binom{42}{k} \left(-\frac{1}{n}\right)^k\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\binom{42}{1} \cdot \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{42} \binom{42}{k} \left(-\frac{1}{n}\right)^k\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \binom{42}{1} + \sum_{k=2}^{42} \binom{42}{k} \left(-\frac{1}{n}\right)^k \cdot (-n) \\
&= \binom{42}{1} + \sum_{k=2}^{42} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\binom{42}{k} \left(-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\right)}_{=0} = 42
\end{aligned}$$

e) Für alle $n \in \mathbb{N}$ so dass

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^n \geq (2)^n$$

damit ist unsere Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also mindestens so groß wie eine divergente und immer positive geometrische Folge und ist damit selber divergent.

f)

$$\underbrace{\sqrt[n]{\sqrt[n]{1}}}_{a_n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n!}}}_{=f_n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n^n}}}_{c_n}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \\
\lim_{n\to\infty} c_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1
\end{aligned}$$

Damit gilt nach dem Sandwich-Theorem

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{n!}} = 1$$