Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg
Studiengänge Informatik und Wirtschaftsinformatik
Dr. G. Tapken
Dr. D. Gröger

WiSe 2024/25

2. Wiederholungsblatt zur Mathematik 2

Lösung zu Aufgabe W 2.1

a) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n^2}$ ist divergent, denn:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{n} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Da die rechte Reihe die harmonische Reihe ist, ist unsere Reihe nach dem Minorantenkriterium divergent.

b) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^5}{n!}}_{=A_n}$ ist konvergent, denn

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^5}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^5} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{(n+1)\cdot n^5} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+4n^3+6n^2+4n+1}{n^5} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{6}{n^3} + \frac{4}{n^4} + \frac{1}{n^5} \right) = 0 < 1
\end{aligned}$$

Woraus die Konvergenz nach den Quotientenkriterium folgt.

c) Da der Konvergenzradius der ursprünglichen Potenzreihe gleich 2 ist, gilt: $w = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}$ und $q = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2}$

Wir formen die neue Potenzreihe erstmal um:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x-5}{3} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{a_n}{3^n}}_{=b_n} \cdot (x-5)^n$$

Wurzelmethode

$$w_0 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{a_n}{3^n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \qquad \Rightarrow \qquad r_0 = \frac{1}{w_0} = 6$$

Quotientenmethode

$$q_0 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \qquad \Rightarrow \qquad r_0 = \frac{1}{q_0} = 6$$

Lösung zu Aufgabe W 2.2

a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{2x^2+3x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{2x^2+3x}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2}{2x^2+3x}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2+3x}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2+\frac{3}{x}}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) **Variante 1:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x-1|}{|x|-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}|x-1|}{\lim\limits_{x\to 0}(|x|-1)}=\frac{\left|\lim\limits_{x\to 0}(x-1)\right|}{-1}=\frac{|-1|}{-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

Variante 2:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{|x-1|}{|x|-1}=?\\
&\lim_{x\searrow 0}\frac{|x-1|}{|x|-1}=\lim_{x\searrow 0}\frac{-(x-1)}{x-1}=\lim_{x\searrow 0}\frac{-1}{1}=-1\\
&\lim_{x\nearrow 0}\frac{|x-1|}{|x|-1}=\lim_{x\nearrow 0}\frac{-(x-1)}{-x-1}=\lim_{x\nearrow 0}\frac{-x+1}{-x-1}=\frac{\lim\limits_{x\nearrow 0}(-x+1)}{\lim\limits_{x\nearrow 0}(-x-1)}=\frac{1}{-1}=-1\\
&\lim_{x\to 0}\frac{|x-1|}{|x|-1}=-1
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe W 2.3

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch 0 nach unten beschränkt:

IA: n=1: $a_1=1\geq 0$

IS z.z. $\underbrace{a_n\geq 0}_{=\text{IV}} \quad\Rightarrow\quad a_{n+1}\geq 0$

$$a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}\overset{\text{IV}}{\geq} 0$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch 1 nach oben beschränkt:

IA: n=1: $a_1=1\leq 1$

IS z.z. $\underbrace{a_n\leq 1}_{=\text{IV}} \quad\Rightarrow\quad a_{n+1}\leq 1$

$$a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}\overset{\text{IV}}{\leq}\frac{1}{1+0}=1$$

b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht monoton, da:

$$\begin{aligned}
a_1&=1\\
a_2&=\frac{1}{1+a_1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\\
a_3&=\frac{1}{1+a_2}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

und damit $a_1>a_2$ und $a_2<a_3$

c) Was kann man über die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. den potentiellen Grenzwert aussagen? Da die Folge zwar beschränkt aber nicht monoton ist, kann man alleine daraus keine Konvergenz folgen. Falls der Grenzwert aber existieren sollte, müsste gelten:

$$
\begin{aligned}
&& a := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \\
\iff && a = \frac{1}{1+a} \\
\iff && a(1+a) = 1 \\
\iff && a^2 + a - 1 = 0
\end{aligned}
$$

mit Hilfe der Mitternachtsformel erhält man:

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Da wir wissen, dass die Folge den Bereich zwischen 0 und 1 nicht verlässt, müsste der Grenzwert (falls er existiert) den folgenden Wert haben:

$$a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$$

Um wirklich beweisen zu können, dass die Folge konvergiert, müsste man die Folge in eine explizite Darstellung bringen, was bei dieser Folge aber nicht einfach ist und hier auch nicht verlangt ist.

Lösung zu Aufgabe W 2.4

a) $f'(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ d.h. die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und streng monoton wachsend (da $f' > 0$).

b)

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \frac{e^0 - e^0}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 \\
f^{-1}(0) &= 0 \\
\left(f^{-1}\right)'(0) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{2}{e^0 + e^0} = \frac{2}{2} = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(\ln(2)) &= \frac{e^{\ln(2)} - e^{\ln(2)}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} \\
f^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) &= \ln(2) \\
\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{3}{4}\right) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right)} = \frac{1}{f'\left(\ln(2)\right)} = \frac{2}{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}} = \frac{2}{2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe W 2.5

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wird einer Person ein Medikament verabreicht. Die folgende Funktion mit dem Parameter $c > 0$ beschreibt modellhaft den Verlauf der Konzentration des Wirkstoffes im Blut nach Einnahme (in geeigneten Maßeinheiten):

$$k(t) = c\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-c\cdot t} \qquad \text{für } t \geq 0$$

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
k(t_0) &= k(0) = c \cdot 0 \cdot \mathrm{e}^{-0 \cdot t} = 0 \\
k(t_1) &= k(1) = c \cdot 1 \cdot \mathrm{e}^{-c \cdot 1} = c \cdot \mathrm{e}^{-c} = \frac{c}{\mathrm{e}^c} \\
k(t_2) &= k\left(\frac{1}{c}\right) = c \cdot \frac{1}{c} \cdot \mathrm{e}^{-c \cdot \frac{1}{c}} = 1 \cdot \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}
\end{aligned}$$

b) Wie verhält sich die Konzentration, wenn man „sehr lange wartet“?
D.h. gesucht ist der Limes für t gegen unendlich der Konzentration:

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = \lim_{t\to\infty} c \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-c \cdot t} \overset{①}{=} \lim_{s\to\infty} \frac{s}{\mathrm{e}^s} \overset{②}{=} 0$$

wobei ① $s = c \cdot t$ und ② da die Exponentialfunktion schneller wächst als jede Potenz.

c) Zu welchem Zeitpunkt ist die Konzentration maximal? WelchenWert hat die maximale Konzentration und wie ändert sich dieser Wert in Abhängigkeit vom Parameter c?

Wir suchen also das Maximum der Funktion k.

$$\begin{aligned}
k(t) &= c \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-c \cdot t} \\
k'(t) &= c \cdot \mathrm{e}^{-c \cdot t} - c^2 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-c \cdot t} = c \cdot \mathrm{e}^{-c \cdot t} \cdot (1 - c \cdot t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& & k'(t) &\overset{!}{=} 0 \\
&\Leftrightarrow & c \cdot \mathrm{e}^{-c \cdot t} \cdot (1 - c \cdot t) &= 0 \\
&\Leftrightarrow & (1 - c \cdot t) &= 0 \\
&\Leftrightarrow & c \cdot t &= 1 \\
&\Leftrightarrow & t &= \frac{1}{c}
\end{aligned}$$

Da das die einzige Stelle mit einer horizontalen Tangente ist , und wir aus a) bzw. b) wissen, dass $k\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}} > 0$ und $k(0) = 0$ sowie $\lim_{t\to\infty} k(t) = 0$, muss in $t = \frac{1}{c}$ das globale Maximum sein. Die Maximale Konzentration ist demzufolge $k\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}}$ und zwar unabhängig von c.

Lösung zu Aufgabe W 2.6
Sei OBdA (=Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, d.h für den anderen Fall wäre die Rechnung analog) $b \geq a$. Wir definieren:

$$\begin{aligned}
f : [a,b] &\to [0,1] \\
x &\mapsto \sin(x)
\end{aligned}$$

f ist stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in $]a,b[$.
Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert ein $\xi \in]a,b[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Da $f'(x) = \cos(x)$ und $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt also $-1 \leq f'(\xi) \leq 1$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \qquad -1 &\leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} &&\leq 1 \\
\Longleftrightarrow \qquad 0 &\leq \left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right| &&\leq 1 \\
\Longleftrightarrow \qquad 0 &\leq \frac{|f(b)-f(a)|}{|b-a|} &&\leq 1 \\
\Longleftrightarrow \qquad 0 &\leq |f(b)-f(a)| &&\leq |b-a|
\end{aligned}
$$