Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg
Studiengänge Informatik und Wirtschaftsinformatik
Dr. G. Tapken
Dr. D. Gröger WiSe 2024/25

1. Wiederholungsblatt zur Mathematik 2

Lösung zu Aufgabe W 1.1

a) Die Folge $a_n := (-1)^n \cdot n + n^2$ ist monoton wachsend, denn

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \left((-1)^{n+1} \cdot (n+1) + (n+1)^2\right) - \left((-1)^n \cdot n + n^2\right) \\
&= (-1)^{n+1} \cdot (n+1) - (-1)^n \cdot n + (n+1)^2 - n^2 \\
&= (-1)^{n+1} \cdot (n+1) + (-1)^{n+1} \cdot n + \left(n^2 + 2n + 1 - n^2\right) \\
&= (-1)^{n+1} \cdot (n+1+n) + (2n+1) \\
&= (2n+1) \cdot \left((-1)^{n+1} + 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 2(n+1) > 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

d.h. die Differenz $a_{n+1} - a_n$ ist immer ≥ 0 und damit ist die Folge monoton wachsend.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n + 4^n} = ?$ Wir schätzen den Grenzwert in beide Richtungen ab:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n + 4^n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n + 6^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 6^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n} = 1 \cdot 6 = 6 \\
&\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n + 4^n} \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n} = \lim_{n\to\infty} 6 = 6 \\
\Longrightarrow \quad &\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n + 4^n} = 6
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe W 1.2

a) Wir sollen überprüfen, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch 2 nach unten beschränkt ist.

Variante 1: D.h. wir müssen überprüfen, ob $a_n \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

$$\begin{aligned}
& a_n \geq 2 \\
\iff \quad & \frac{5n+1}{3n-1} \geq 2
\end{aligned}$$

Wir möchten nun den Nenner loswerden, das kann man tun indem man mit dem Nenner multipliziert. Da $3n - 1 > 0$ für jedes $n \in N$ bleibt das Ungleichheitszeichen wie es war.

$$\begin{aligned}
\iff \quad & 5n+1 \geq 2 \cdot (3n-1) \\
\iff \quad & 5n+1 \geq 6n-2 \\
\iff \quad & 3 \geq n
\end{aligned}$$

D.h. die Beschränktheit durch 2 nach unten gilt nur für $n \leq 3$ (also nicht für <u>alle</u> $n \in \mathbb{N}$), d.h. die Folge ist nicht durch 2 nach unten beschränkt.

Variante 2: Wir können zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht durch 2 nach unten beschränkt ist, indem wir einfach ein entsprechendes Gegenbeispiel angeben. Z.B $a_4 = \frac{5\cdot4+1}{3\cdot4-1} = \frac{21}{11} < \frac{22}{11} = 2$

b) Wir sollen überprüfen, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend ist. D.h. wir müssen überprüfen, ob $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

$$\begin{aligned} & a_{n+1} < a_n \\ \Longleftrightarrow\quad & \frac{5(n+1)+1}{3(n+1)-1} < \frac{5n+1}{3n-1} \\ \Longleftrightarrow\quad & \frac{5n+6}{3n+2} < \frac{5n+1}{3n-1} \end{aligned}$$

Wir möchten nun die Nenner loswerden, das kann man tun indem man mit den Nennern multipliziert. Da $3n+21 > 0$ und $3n-1 > 0$ für jedes $n \in N$ bleibt das Ungleichheitszeichen wie es war.

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow\quad & (5n+6)\cdot(3n-1) < (5n+1)\cdot(3n+2) \\ \Longleftrightarrow\quad & 15n^2+18n-5n-6 < 15n^2+3n+10n+2 \\ \Longleftrightarrow\quad & 15n^2+13n-6 < 15n^2+13n+2 \\ \Longleftrightarrow\quad & -6 < 2 \end{aligned}$$

Die letzte Zeile beinhaltet eine immer wahre Aussage, damit ist auch die Aussage der ersten Zeile immer wahr, damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tatsächlich streng monoton fallend.

c) Wir sollen überprüfen, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

Variante 1: Eine Möglichkeit die Konvergenz zu zeigen, ist es den Grenzwert bestimmen zu können.

$$a := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+1}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)} = \frac{5}{3}$$

Wir konnten einen Grenzwert bestimmen, daher ist die Folge natürlich konvergent.

Variante 2: Eine weitere Möglichkeit auf Konvergenz zu schliessen ist das Wissen, dass jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge konvergent ist. Die Monotonie haben wir in b) gezeigt, also brauche wir nun noch die Beschränktheit nach unten zu zeigen. D.h. es reicht beispielsweise zu zeigen, dass $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} & a_n \geq 1 \\ \Longleftrightarrow\quad & \frac{5n+1}{3n-1} \geq 1 \end{aligned}$$

Wir möchten nun den Nenner loswerden, das kann man tun indem man mit dem Nenner multipliziert. Da $3n-1 > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ bleibt das Ungleichheitszeichen wie es war.

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow\quad & 5n+1 \geq 3n-1 \\ \Longleftrightarrow\quad & 2n \geq -2 \\ \Longleftrightarrow\quad & n \geq -1 \end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, damit ist auch die erste Zeile für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr, daher ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch 1 nach unten beschränk.

Bemerkung: Man könnte auch zuerst c) auf Variante 1 zeigen und weiss dann, dass a_n für ein genügend großes n weniger als $\frac{1}{6}$ vom Grenzwert a entfernt ist und damit einen Wert von weniger als $a+\frac{1}{6}=\frac{5}{3}+\frac{1}{6}=\frac{10+1}{6}=\frac{11}{6}$ annimmt. Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sicher nicht durch 2 nach unten beschränkt. Womit Teilaufgabe a) beantwortet wäre.

Lösung zu Aufgabe W 1.3

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+0} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Die letzte Reihe ist die verallgemeinerte harmonische Reihe mit $\alpha = 2 > 1$ und ist daher konvergent. Damit ist auch die ursprüngliche Reihe nach dem **Majorantenkriterium** konvergent.

b) $\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\frac{2^k}{k!}}_{=A_k}$

bekannte Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!} = e^2 < \infty$$

es handelt sich also um die Exponentialfunktion an der Stelle 2 und ist daher konvergent.

Quotientenkriterium

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{A_{k+1}}{A_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{2^k} = \lim_{k\to\infty}\frac{2}{k+1} = 0 < 1$$

Daher ist die gegebenen Reihe nach dem Quotientenkriterium konvergent.

Wurzelkriterium

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|A_k|} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{2^k}{(k)!}\right|} = 2\cdot\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{(k)!}} = 2\cdot\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{(k)!}} = 0 < 1$$

Daher ist die gegebenen Reihe nach dem Wurzelkriterium konvergent.

c)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{(n+2)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(x-\underbrace{1}_{=x_0}\right)^n\cdot\underbrace{\frac{1}{3^n\cdot(n+2)^3}}_{=a_n}$$

D.h. der Entwicklungspunkt ist 1. Wir bestimmen nun den Konvergenzradius:

Quotientenmethode

$$
\begin{aligned}
q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n\cdot(n+2)^3}{3^{n+1}\cdot((n+1)+2)^3}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)^3}{3\cdot(n+3)^3}\right| = \frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^3 \\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3}\right)^3 = \frac{1}{3}\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right)^3 \\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)}\right)^3 = \frac{1}{3}\cdot(1)^3 = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \qquad r = \frac{1}{q} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

Wurzelmethode

$$
\begin{aligned}
w = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{3^n\cdot(n+2)^3}\right|} = \frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[n]{n+2}\right)^3} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+2}}\right)^3 = \star \\
\star &\leq \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}\right)^3 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1}\right)^3 = \frac{1}{3} \\
\star &\geq \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+n}}\right)^3 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n}}\right)^3 \\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}\right)^3 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 1}\right)^3 = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \qquad w = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad r = \frac{1}{w} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

Lösung zu Aufgabe W 1.4

Statt die Lösung der Gleichung $\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}=1$ zu suchen, können wir die Nullstellen der Funktion $f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}-1$ suchen.

Da

$$
\begin{aligned}
f(6) &= \frac{1}{6-1}+\frac{4}{6-2}-1 = \frac{1}{5}+1-1 = \frac{1}{5} > 0 \\
f(8) &= \frac{1}{8-1}+\frac{4}{8-2}-1 = \frac{1}{7}+\frac{2}{3}-1 < 0
\end{aligned}
$$

liegt nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle im Intervall $]6,8[$ und damit im Intervall $[6,8]$.

Da

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{11}{10}\right) &= \frac{1}{\frac{11}{10}-1}+\frac{4}{\frac{11}{10}-2}-1 = 10-\frac{40}{9}-1 > 0 \\
f\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{\frac{3}{2}-1}+\frac{4}{\frac{3}{2}-2}-1 = 2-8-1 = -7 < 0
\end{aligned}
$$

liegt nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle im Intervall $\left]\frac{11}{10}, \frac{3}{2}\right[$ und damit im Intervall $\left]1, \frac{3}{2}\right]$.

Lösung zu Aufgabe W 1.5
Es ist die 41-igste Ableitung von $\big(\sin(x)\big)^2$ zu bestimmen.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \big(\sin(x)\big)^2 \\
f'(x) &= 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) \\
f''(x) &= 2\cdot\cos(x)\cdot\cos(x) + 2\cdot\sin(x)\cdot(-\sin(x)) = 2\cdot\Big((\cos(x))^2 - \big(\sin(x)^2\big)\Big) \\
f'''(x) &= 2\cdot(2\cdot\cos(x)\cdot(-\sin(x)) - 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)) = (-8)\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) = (-4)\cdot f'(x) \\
f^{(4)}(x) &= (-4)\cdot f''(x) \\
f^{(5)}(x) &= (-4)\cdot f'''(x) = (-4)^2\cdot f'(x)
\end{aligned}
$$

$$f^{(41)}(x) = (-4)^{20}\cdot f'(x) = 2^{41}\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$$

Lösung zu Aufgabe W 1.6

a)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1 = f(0)$$

b) $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}$$

$x = 0$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^2} \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{2x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{2} = 0 =: f'(0)
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos(x)}{x}-\frac{\sin(x)}{x^2}-0}{x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos(x)-\sin(x)}{x^3} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin(x)+\cos(x)-\cos(x)}{3x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{3x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{3} = -\frac{1}{3} =: f''(0)
\end{aligned}
$$