3-1-2-minta mentes permutációk

Az $1, \ldots, n$ természetes számoknak egy $p_1, p_2, \ldots, p_n$ permutációját 3-1-2-minta mentesnek nevezzük, ha nincs három olyan $1 \leq i < j < k \leq n$ index, hogy $p_i > p_j$, $p_i > p_k$ és $p_j < p_k$ teljesülne.

Feladat

Ijunk olyan programot, amely kiszámítja egy adott 3-1-2-minta mentes permutáció lexikografikus rendezés szerinti rákövetkezőjét!

Bemenet

A standard bemenet első sora egy egész számot tartalmaz, az n $(1 \leq n \leq 100\,000)$ értékét. A második sor pontosan n pozitív egész számot tartalmat egy-egy szóközzel elválasztva, az $1, \ldots, n$ természetes számoknak egy 3-1-2-minta mentes $p_1, p_2, \ldots, p_n$ permutációját. Feltehetjük, hogy a bemenet nem a $n, n-1, \ldots, 1$ monoton csökkenő sorozat.

Kimenet

A standard kimenet első sora n egész számot tartalmazzon (egy-egy szóközzel elválasztva), azt a 3-1-2-minta mentes prmutációt, amely a bemenetben adott permutáció rákövetkezője a lexikografikus rendezésben.

Példa

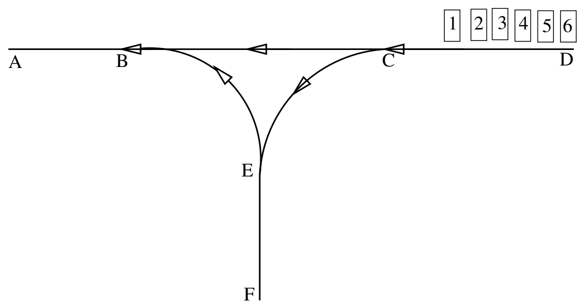
Bemenet	Kimenet
`5` `2 3 5 4 1`	`2 4 3 1 5`

Korlátok

Időlimit: 0.1 mp.
Memórilimit: 32 MiB
Pontozás: a tesztesetek 30%-ában $n < 100$

Megoldás

Tekintsük az alábbi három verem műveletet.



1. ábra.

Verembe Az `C-D` szakaszon lévő számsorozat első eleme átmegy az `E-F` szakasz elejére.

Átmegy Az `C-D` szakaszon lévő számsorozat első eleme átmegy az `A-B` szakaszon lévő számsorozat végére.

Vereből Az `E-F` szakaszon lévő számsorozat első eleme átmegy az `A-B` szakaszon lévő számsorozat végére.

Állítás

Egy $\pi = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ akkor és csak akkor 3-1-2-minta mentes, ha előállítható az $1, \dots, n$ sorozatból verem műveletekkel.

Bizonyítás

Ha a $\pi = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ számsorozatot veremmel állítottuk elő, akkor nem lehet benne 3-1-2 minta, azaz olyan $1 \le i < j < k \le n$ index, hogy $p_i > p_j$, $p_i > p_k$ és $p_j < p_k$, mivel akkor, amikor p_i kikerült az `A-B` szakasz végére, akkor p_j-nek és p_k-nak a veremben kellett lennie, de ekkor p_k előbb állna, mint p_j.
Forditva, legyen π egy 3-1-2-minta mentes permutáció. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy π előállítható veremmel. Nyilvánvaló, hogy $n = 2$ esetén mindkét permutáció 3-1-2-minta mentes és előállítható veremmel. Tfh. bármely $m < n$-re minden m elemű 3-1-2-minta mentes permutáció előállítható veremmel.
Tekintsük a π permutációnak a $\pi = \alpha, 1, \beta$ felbontását. Tehát α az 1 szám előtti, β pedig az utáni számsorozat. α és β is 3-1-2-minta mentes, tehát az indukciós feltevésünk szerint előállítható veremmel. Ha az α sorozat legnagyobb eleme k, akkor a 3-1-2-minta mentesség miatt a $2, \dots, k$ számok mindegyike előfordul α-ban, tehát α a $2, \dots, k$ számok egy 3-1-2-minta mentes permutációja, így indukciós feltevésünk szerint előállítható veremmel a $2, \dots, k$ bemenetből. Hasonlóan, β előállítható veremmel a $k+1, \dots, n$ számsorozatból. Jelölje $[\alpha]$ azon verem műveletek sorozatát, amelyekkel α előállítható, $[\beta]$ pedig a β-t előállító műveletsor. Ekkor az
`Verembe`,$[\alpha]$,`Veremből`,$[\beta]$
műveletsor az $1, 2, \dots, k, k+1, \dots, n$ bemenetből a π számsort állítja elő. ■
Megjegyezzük, hogy a verem műveletekkel történő előállítás egyértelmű, ha nem engedünk meg `Verembe; Veremből` kombinációt, hanem helyette `Átmegy` műveletet használunk.
Bonsuk fel a bemeneti π számsorozatot az n szám előfordulása alapján: $\pi = \alpha, u, n, \beta$
Ha β üres sorozat, akkor a megoldás α, n, u. Egyébként β a 3-1-2-minta mentes tulajdonság miatt monoton csökkenő sorozat, tehát $\pi = \alpha, u, n, n-1, \dots, v, \gamma$ alakban írható, ahol v a legkisebb olyan elem, amelyre $u < v$. Megmutatjuk, hogy ekkor a

$$\rho = \alpha, v, u, \gamma, v+1, \dots, n$$

permutáció π-t követő, 3-1-2-mentes permutáció lesz.
Tekitnsük a π veremmel történő előállításának azt a pillanatát, amikor az u szám bekerül a kimeneti sorozatba (`Átvisz`, vagy `Veremből` művelettel). Ekkor a veremben a γ sorozat van, a `C-D` bemeneten pedig a $v, \dots, n$ sorozat. Hiszen n csak így kerülhet u-t követő elemként a π sorozatba. Tehát a ρ permutáció is előállítható veremmel, tehát 3-1-2-minta mentes. Az is világos, hogy ρ hátrább van a lexikografikus rendezésben, mint π, mert $v > u$. Mivel a γ sorozat minden eleme kisebb, mint v, ezért nem lehet olyan 3-1-2-minta mentes permutáció, amely π és ρ között lenne.
Tehát a feladat megoldásához elegendő meghatározni a u és v értékek inxedét a bemeneti sorozatban.

Megvalósítás C++ nyelven

```
#include <iostream>
#include <stack>
#define maxN 100001

using namespace std;

int main(){
   int n;
   cin>>n;
   int P[n];
   int ui=0; P[0]=n;
   for(int i=1; i<=n; i++){
      cin>>P[i];
      if(P[i-1]<P[i]) ui=i-1;
   }
   //P[ui+1]=n;
```

```
    int u=P[ui];
    int vi=ui+1;
    while (P[vi]>u) vi++;
    vi--;
    //v=P[j]
    for(int i=1;i<ui;i++)
       cout<<P[i]<<"␣";
    cout<<P[vi]<<"␣"<<u;;
    for(int i=vi+1;i<=n;i++)
       cout<<"␣"<<P[i];
    for (int x=P[vi]+1;x<=n;x++)
       cout<<"␣"<<x;
    cout<<endl;
    return 0;
}
```