$$x(n)=x_1(n)*x_2(n)=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)\cdot x_2(n-k) =$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(n-k)\cdot x_2(k)$$

Z-перетв. визнач.

$$X(Z)=X_1(Z)\cdot X_2(Z)$$

Лекція 8

05.11.10

Z-перетворення (продовження)

Властивості:

5) властивість диференціювання

Якщо $X(Z)$ є Z-перетв. послід. $x(n)$, то Z-перетв. виразу $n\cdot x(n)$ можна знайти продиференціювавши $X(Z)$

$$n\,x(n) \to -\frac{dX(Z)}{dZ}$$

Взаємозв'язок Z-перетв. з перетв. Лапласа

Сигнали, неперервні в часі, в основному описуються з допомогою перетворення Лапласа. Якщо $Z=e^{sT}$ і $S=d+j\omega T$, то

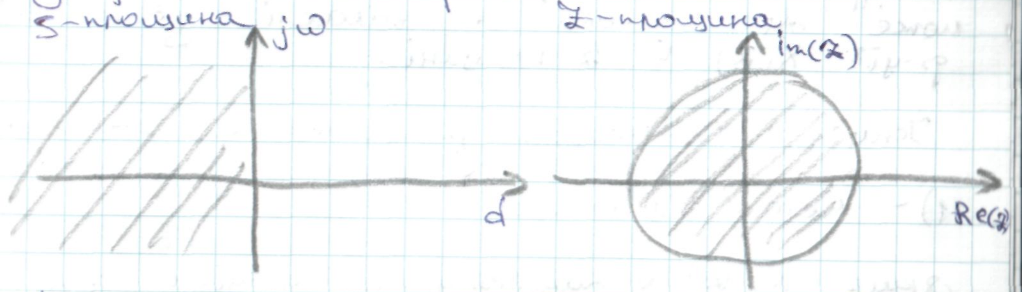
$$Z=e^{d+j\omega T}=e^{d}\cdot e^{j\omega T}$$

З ост. виразу,

$$|Z|=e^{d}, \quad \varphi=\omega T=\frac{2\pi f}{F_D}$$

F_D – частота дискретизації

Так як $\omega\in[-\infty;+\infty]$, S-площина відображається в Z-площину, як зображено на рис.



Вся вісь $j\omega$ на S-площині відображається в одиничне коло на Z-площині. Ліва сторона відображається всередину кола, права – на зовнішню сторону кола одиничного радіусу. Якщо виражати це через частотну характеристику, то вісь $j\omega$ має найбільше значення на S-площині. В цьому вип. $d=0$ і частотні точки на S-площині зв'язані з частотними точками на Z-пл. співвідношенням $Z=e^{j\omega T}$.

Обернене Z-перетворення

Процес знаходження послідовності по відповідній ф-ції змінної Z, наз. оберненим Z-перетворенням:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(Z) Z^{n-1} dZ \quad (1)$$

де інтеграл у (1) представляє собою криволінійний інтеграл по замкнутому контуру C. Для простоти, контуром C може бути коло в області збіжності ф-ції X(Z) в Z-площині.

Існує 4 способи знаходження Z-перетв.:

1) - метод лишків

якщо X(Z) є раціональною ф-цією змінної Z, то вираз (1) можна оцінити з допомогою теореми про лишки, яка встановлює, що:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(Z) Z^{n-1} dZ =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_C F_n(Z) dZ = \text{сума лишків } F_n(Z)$$

$$F_n(Z) = X(Z) \cdot Z^{n-1}$$

$$n \in [-\infty ; +\infty]$$

2) - метод неперервного ділення

Нехай X(Z) визначається співвідношенням:

$$X(Z) = \frac{a_0 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_m Z^{-m}}{b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots + b_m Z^{-n}} \quad (2)$$

$$m \leq n$$

Тоді діленням чисельника на знаменник отримаємо

$$X(Z) = x_0 + X_1 Z^{-1} + X_2 Z^{-2} + \dots \quad (3)$$

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n) Z^{-n} \quad (4)$$

Тоді з (3) і (4) отримуємо

$$X(Z) = X(0) + X(1) Z^{-1} + \dots$$

$$x(n) = \begin{cases} x_n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

3) - розклад ф-ції $X_1(Z^{-1})$ в степеневий ряд

Нехай X(Z) є Z-перетв. послід x(n). Визначимо $X_1(Z^{-1})$ наст. чином

$$X_1(Z^{-1}) = X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) Z^{-n}$$

Розклад ф-ції $X_1(Z^{-1})$ в ряд Тейлора в околі точки $Z^{-1}=0$ дає:

$$x_1(Z^{-1}) = h_0 + h_1 Z^{-1} + h_2 Z^{-2} \ldots \qquad (5)$$

де h_k – коеф. розкладу ф-ції в ряд Тейлора

$$h_k = \frac{1}{k!} \frac{d^{(k)}(x_1(Z^{-1}))}{(dZ^{-1})^k}\Bigg|_{Z^{-1}=0}$$

Порівнюючи (5) і (4) можемо записати

$$x(n) = \begin{cases} h_n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Приклад:

Знайти обернене Z-перетв. для ф-ції

$$X(Z) = \frac{1}{1-\beta Z^{-1}}$$

$$X_1(Z^{-1}) = h_0 + h_1 Z^{-1} + h_2 Z^{-2} + \ldots h_k Z^{-k} + \ldots$$

$$h_0 = X_1(Z^{-1})\Big|_{Z^{-1}=0} = 1 \qquad (x^{n\prime} = n x^{n-1})$$

$$h_1 = \frac{1}{1!} \frac{dX_1(Z^{-1})}{dZ^{-1}}\Bigg|_{Z^{-1}=0} = \frac{\beta}{(1-\beta Z^{-1})^2}\Bigg|_{Z^{-1}=0} = \beta$$

$$h_2 = \frac{1}{2!} \frac{d^2 X_1(Z^{-1})}{(dZ^{-1})^2}\Bigg|_{Z^{-1}=0} = \frac{1}{2}\beta \frac{d}{dZ^{-1}}\left(\frac{1}{(1-\beta Z^{-1})^2}\right)\Bigg|_{Z^{-1}=0} =$$

$$= \frac{\beta}{2}(-2)\frac{(-\beta)}{(1-\beta Z^{-1})^3}\Bigg|_{Z^{-1}=0} = \beta^2$$

$$X(Z^{-1}) = 1 + \beta Z^{-1} + \beta^2 Z^{-2} + \beta^3 Z^{-3} + \ldots$$

$$\underline{x(n) = \beta^n u(n)}, \quad \text{(для східчикової ф-ції)}$$

4) – метод розкладу на прості дроби

Якщо ф-ція $X(Z)$ записана у вигляді множників, то її розклад на прості дроби має вигляд

$$X(Z) = \frac{\xi_1}{1-p_1 Z^{-1}} + \frac{\xi_2}{1-p_2 Z^{-1}} + \ldots + \frac{\xi_n}{1-p_n Z^{-1}}$$

$$X(Z) = \frac{a_0 + a_1 Z^{-1} + \ldots + a_m Z^{-m}}{b_0 + b_1 Z^{-1} + \ldots + b_m Z^{-m}}$$

$$b_0 + b_1 Z^{-1} + \ldots + b_n Z^{-n} = 0$$

$$b_0(Z^{-1} - p_1)(Z^{-1} - p_2)(\ldots)\ldots(Z^{-1} - p_n)$$

Де робимо припущення, що $p > n$, а полюси є різними: $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$.

ξ_i є лишком ф-ції $X(Z)$ в полюсі, що знаходиться в точці при $Z = p_i$. Для того, щоб знайти ξ_i, необхідно обчислити вираз

$$\xi_i = (1 - p_i z^{-1}) X(z) \Big|_{z = p_i}$$

Приклад.

Знайти обернене Z-перетв.

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 0{,}25 z^{-1} - 0{,}375 z^{-2}}$$

Перепишемо дану ф-цію у вигляді

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 0{,}25 z - 0{,}375}$$

$$z^2 - 0{,}25 z - 0{,}375 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{0{,}25 \pm \sqrt{0{,}0625 + 1{,}5}}{2} = 0{,}25 \pm \frac{1{,}25}{2};$$

$$p_1 = -0{,}5 \qquad p_2 = 0{,}75$$

Так як порядок чис. менший, ніж порядок знаменника, то розклад ф-ції в правильні дроби матиме вигляд:

$$X(z) = \frac{z}{(z + 0{,}5)(z - 0{,}75)} = \frac{\xi_1 z}{(z + 0{,}5)} + \frac{\xi_2 z}{(z - 0{,}75)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{\xi_1}{z + 0{,}5} + \frac{\xi_2}{z - 0{,}75}$$

Щоб знайти ξ_1, домножимо ліву і праву част. ост. р-ня на $z + 0{,}5$ і зробимо заміну $z = -0{,}5$

$$\frac{X(z)(z + 0{,}5)}{z} = \xi_1 + \xi_2 \frac{z + 0{,}5}{z - 0{,}75} \Big|_{z = -0{,}5}$$

$$\xi_1 = \frac{1}{(z - 0{,}75)} \Big|_{z = -0{,}5} = -\frac{1}{1{,}25}$$

аналогічно

$$\xi_2 = \frac{1}{(z + 0{,}5)} \Big|_{z = 0{,}75} = \frac{1}{1{,}25}$$

Підставивши ці значення, отримаємо:

$$X(z) = -\frac{4}{5}\left(\frac{z}{z + 0{,}5}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{z}{z - 0{,}75}\right)$$

З таблиць:

$$Z^{-1}\left(-\frac{4}{5}\,\frac{z}{z + 0{,}5}\right) = -\frac{4}{5}(-0{,}5)^n$$

$$Z^{-1}\left(\frac{4}{5}\,\frac{z}{z - 0{,}75}\right) = \frac{4}{5}(0{,}75)^n$$

$$x(n) = \frac{4}{5}\left[(0{,}75)^n - (0{,}5)^n\right]$$

$$n = 0, 1 \ldots$$