Якщо $z_k = e^{j\theta_k}$ є ϕ (полюсом) ф-ції $H(z) \cdot H(z^{-1})$, то $z_k^{-1} = e^{-j\theta_k}$ також є ϕ (полюсом)

Лекція 15 (продовження)

Для ЦФ, ф-ції передачі ~~яких~~ представляють собою ф-ції від z^{-1}.

ЦФ, який описується передаточною ф-цією вигляду

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}$$

назив. ЦФ із скінченною імпульсною характ. (СІХ-фільтр)

ЦФ який задається у вигляді раціональної ф-ції

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{M} a_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^{N} b_j z^{-j}}$$

, наз. ЦФ із нескінченною імпульсною х-кою (НІХ-фільтр)

Для фільтрів зі СІХ ~~пов'язані~~ відсутні проблеми, пов'язані з їх стійкістю і фізичною реалізованістю, так як всі СІХ-фільтри є стійкі і фізично реалізуються.

Всі НІХ-фільтри є стійкими, якщо всі полюси $H(z)$ розміщені всередині одиничного кола в z-площині, і фізично реалізовані, якщо b_L ($b_0 = b_1 = \dots = b_{L-1} = 0$) є перший ненульовий коеф. знаменника, а в чисельнику $a_0 = a_1 = \dots = a_{L-1} = 0$.

Тому в більшості вип. вибирають $b_0 = 1$. В цьому вип. загальний вираз для передат. ф-ції фільтра з НІХ можна представити у вигляді

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{M} a_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{N} b_j z^{-j}} \qquad (1)$$

Розрахунок НІХ-фільтрів

Подібність передат. ф-цій ЦФ та аналогових призводить до того, що одним із найбільш використовуваних підходів до проектув. ЦФ з НІХ є знаходження цифрових аналогів відповідних аналогових фільтрів.

Розрахунок НІХ-фільтрів склад. з 2 етапів.

1) отримання перед. ф-ції $H(s)$ аналогового фільтру, яка задовільняє заданим ТУ

2) реалізація процедури переходу, яка перетворює ф-цію $H(s)$ у відпов. $H(z)$ для отримання методу розрах. НІХ-фільтру (ЦФ) із технічними характеристиками, що відповідають заданим ТУ.

Так як розраховані на 1) етапі аналогові фільтри задовільняють вимогам обробки сигналу, то необхідно мати впевненість, що ЦФ мають всі необхідні властивості, включаючи частотні х-ки. Тому бажано, щоб процедура переходу на етапі 2) задовільняла наступним умовам:

1) уявна вісь s-площини $\{s = j\omega \mid -\infty < \omega < \infty\}$

повинна відображатися в одиничне коло в z-площині

$$\{z = e^{j\theta} \mid -\pi \le \theta \le \pi\}$$

Дана умова необхідна для збереження частотних х-к аналогових фільтрів

2) ліва половина S-площини, яка $\{Re[S] < 0\}$, відображається в частину z-площини всередині одиничного кола $\{|z| < 1\}$.

Ця умова необхідна для збереження стійкості аналогових фільтрів.

Методи чисельного інтегрування

В даному методі похідна апроксимується скінченними різницями. В результаті цього диференційне р-ня замінюється на різницеве р-ня, що описує цифровий фільтр. Дана операція приводить до заміни S на z в передаточній ф-ції фільтра

$$S = f(z)$$

Метод Ейлера апроксимує похідну по часу неперервної ф-ції dy/dt скінченною різницею вигляду

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=nT} = \frac{y(n) - y(n-1)}{T}, \quad (2)$$

де T - час дискретизації, а

$y(k) = y(t)\Big|_{t=kT}$ для всіх k.

В операторній формі р-ня (2) може бути записане, як

$$S = \frac{1 - z^{-1}}{T} = f(z) \quad (3)$$

З (3) отримуємо

$$z = \frac{1}{1 - ST} \quad (4)$$

Приклад. Нехай маємо перед. ф-цію аналогового фільтра з апроксимацією Бесселя 2-го порядку

$$H(S) = \frac{K}{S^2 + 3S + 3} \quad \text{(ФНЧ Бесселя)}$$

Перейдемо до $H(z)$ з допомогою перетв. Бесселя

$$H(z) = H(S)\Big|_{S = \frac{1 - z^{-1}}{T}} =$$

$$= \frac{K}{\left(\frac{1 - z^{-1}}{T}\right)^2 + 3\left(\frac{1 - z^{-1}}{T}\right) + 3} =$$

$$= \frac{KT^2}{(1 - z^{-1})^2 + 3T(1 - z^{-1}) + 3T^2} =$$

$$= \frac{KT^2}{1 - 2z^{-1} + z^{-2} + 3T - 3Tz^{-1} + 3T^2} =$$

$$= \frac{KT^2}{(1 + 3T + 3T^2) - (3T + 2)z^{-1} + z^{-2}}$$

$\theta = 0$

$z = e^{j\theta} = 1$ $\quad H(z)\Big|_{\theta=0} = \frac{K}{3}$

Для аналогового фільтру

$$H(s)\Big|_{\omega=0} = \frac{k}{3}$$

Отже, цифровий фільтр має таке ж посилення по постійному струму, що й початковий аналоговий фільтр.

Метод інваріантності імпульсної х-ки

Процедура переходу від АФ до ЦФ наз. методом інв. імп. х-ки. Ця процедура встановлює, що ІХ $h(n)$ результуючого ЦФ представляє собою вибірки ІХ $h(t)$ відпов. аналогового фільтра і визнач. наст. чином

$$h(n) = h(t)\Big|_{t=nT}$$

Процедура проектування НІХ-фільтрів цим методом складається з:

1) знаходження $H(s)$ аналогового фільтру

2) знаходження ІХ $h(t)$ аналогового фільтру, що представляє собою обернене перетв. Лапласа

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\}$$

3) визначення ІХ ЦФ у вигляді

$$h(n) = h(t)\Big|_{t=nT}$$

4) знаходження перед. ф-ції $H(z)$ ЦФ

з допомогою z-перетворення ІХ

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

Розкладемо перед. ф-цію $H(s)$ початкового (аналогового) фільтра

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^{M} a_i s^i}{\sum_{j=0}^{N} b_j s^j} = \sum_{j=0}^{N} \frac{\xi_j}{s-p_j} \quad (5)$$

$$N > M \geq 0$$

$b_N \neq 0$, $b_0 \neq 0$

p_j представляє собою j-полюс аналогового фільтра, а ξ_j – лишок ~~ф-ції~~ полюса p_j перед. ф-ції $H(s)$

Тоді імпульсну х-ку $h(t)$ аналогового фільтра можна отримати, виконавши обернене перетв. Лапласа виразу (5), в результаті якою отримаємо

$$h(t) = \sum_{j=0}^{N} \xi_j \cdot e^{p_j t}\, u(t) \quad (6)$$

де $u(t)$ представляє собою одиничну сходинкову послідовність. Тоді $h(n)$ відповідного ЦФ визначатиметься виразом

$$h(n) = h(t)\Big|_{t=nT} = \sum_{j=0}^{N} \xi_j e^{p_j nT} u(n) \quad (7),$$

де $u(n)$ – одинична сходинкова послід.

Передаточна ф-ція $H(z)$ результуючого ЦФ визначається шляхом знаходження z-перетв. імп. х-ки, заданої виразом (7)

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{N} \xi_j e^{p_j n T} u(n)\cdot z^{-n} =$$

$$=\sum_{j=0}^{N} \xi_j \sum_{n=0}^{\infty} e^{p_j n T} u(n) z^{-n} =$$

$$=\sum_{j=0}^{N} \frac{\xi_j}{1-z^{-1}e^{p_j T}}$$

Метод білінійного перетворення

Білінійне перетворення визначається наст. чином:

$$S=f(z)=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Знайдемо z^{-1}

$$S(1+z^{-1})=\frac{2}{T}(1-z^{-1})$$

$$S+Sz^{-1}=\frac{2}{T}-\frac{2}{T}z^{-1}$$

$$z^{-1}=\frac{\frac{2}{T}-S}{S+\frac{2}{T}}=\frac{2-ST}{2+ST}$$

Метод проектув. ЦФ на основі білінійного перетв. включає знаходження $H(S)$ АФ і застосування до неї білінійного перетв. для отримання перед. ф-ції $H(z)$

$$H(z)=H(S)\Big|_{S=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

При такому перетв. будуть зберігатися як частотні властивості, так і стійкість аналогових фільтрів.

Реалізація ІІХ-фільтрів

Передаточна ф-ція ІІХ-фільтра виражається виразом

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M} a_i z^{-i}}{1+\sum_{j=1}^{N} b_j z^{-j}} \qquad (1)$$

Існує 2 методи реалізації (1): прямий і непрямий. При прямому методі перед. ф-ція (1) реалізується повністю, а при непрямому розкладається на ряд ланок 1-го та 2-го порядків.