1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Multitud de fenómenos naturales y sociales se comportan linealmente, es decir, una causa doblemente intensa produce un efecto doblemente intenso, una misma causa que actúa por un espacio de tiempo dos veces más largo produce un efecto dos veces mayor. Y aún cuando muchos fenómenos se comportan así tan sólo aproximadamente, se tratan como si fueran lineales para facilitar su estudio inicial. Un muelle se alarga al colgarle un peso y su alargamiento es doble cuando se cuelga un peso doble. Un coche a una velocidad de 60 km/h recorre 1 km en un minuto y, naturalmente, 2 km en 2 minutos. Si el precio del kilo de azúcar es de 90 pesetas, es claro que, a menos que haya una oferta especial, por 2 kilos tendré que pagar 180 pesetas.

Esto explica que la matemática de las aplicaciones a los fenómenos naturales y sociales sea muy fundamentalmente lineal en un primer acercamiento a los fenómenos y que los sistemas de ecuaciones lineales, en particular, constituyan el esqueleto básico de estas aplicaciones. De hecho, se dice que la mayor parte del tiempo que los ordenadores actuales dedican a resolver problemas matemáticos que tienen que ver con la industria y el comercio, se emplea en el tratamiento de sistemas de ecuaciones lineales, sobre todo en lo que constituye la programación lineal.

De aquí se deriva el enorme interés por conseguir métodos rápidos, eficaces y económicos que simplifiquen al máximo las tareas del ordenador. Teniendo en cuenta que éste tiene que trabajar, por ejemplo, en la optimización del aprovechamiento de las rutas de una gran compañía aérea o telefónica, con sistemas de ecuaciones lineales con más de 800 000 variables, es fácil comprender que cualquier simplificación, en el tratamiento de tales sistemas, por trivial que parezca, puede representar un ahorro de miles de horas de ordenador.

En este tema se introduce uno de los métodos más interesantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales, el método de Gauss, sumamente simple en su concepción y fácilmente implementable con el ordenador. Aunque trataremos aquí sistemas sencillos, de pocas variables, el método es el mismo aunque el número de variables sea gigantesco.

En este apartado se reflexiona sobre el significado de las soluciones de una ecuación con varias incógnitas. Para ello nos valdremos de su representación gráfica.

La ecuación $3x + 5 = 7$ tiene por solución $x = \frac{2}{3}$ porque $3 \cdot \frac{2}{3} + 5 = 7$.

La ecuación $t^2 - 6t + 5 = 0$ tiene dos soluciones: $t = 1$ y $t = 5$.

Y la ecuación $z^4 - 7z^2 + 12 = 0$ tiene cuatro:

$$z = 2, \quad z = -2, \quad z = \sqrt{3} \quad \text{y} \quad z = -\sqrt{3}.$$

Hay ecuaciones con muchas, e incluso con infinitas soluciones (por ejemplo, $sen\ x = 0$). Otras ecuaciones no tienen solución (por ejemplo, $x + 3 = x$).

Resolver una ecuación es encontrar todas sus soluciones o advertir que no tiene ninguna.

La ecuación $x - 2y = 2$ tiene infinitas soluciones. Por ejemplo,

$$x = 2 \quad , \quad y = 0$$

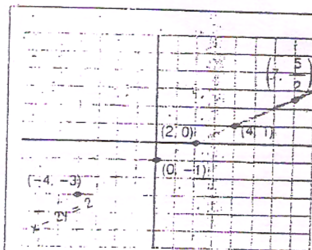
es una de ellas. Otras son

$$x = 4 \ , \ y = 1 \quad ; \quad x = 7 \ , \ y = \frac{5}{2} \quad ; \quad x = 0 \ , \ y = -1 \quad ;$$

$$x = -4 \ , \ y = -3 \ ; \quad \text{etc.}$$

Cada una de ellas puede ser interpretada como un punto de coordenadas (x, y):

$$(2, 0) \quad , \quad (4, 1) \quad , \quad \left(7, \frac{5}{2}\right) \quad , \quad (0, -1) \quad , \quad (-4, -3) \ , \quad \ldots$$



Los puntos de esta recta son las soluciones de la ecuación

$x - 2y = 2.$

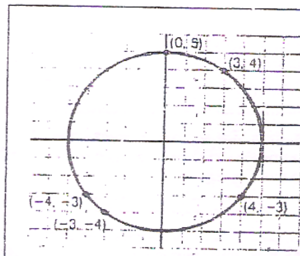
Por eso decimos que ésta es la ecuación de la recta.

Todas las soluciones de esta ecuación están situadas sobre una recta. Por eso decimos que $x - 2y = 2$ es la *ecuación de una recta.*

Análogamente, $x^2 + y^2 = 25$ es la ecuación de una circunferencia, pues sus soluciones

$$(0, 5) \quad , \quad (-3, 4) \quad , \quad (3, 4) \quad , \quad (4, -3) \quad , \quad (-4, -3) \ , \quad \ldots$$

están situadas en la circunferencia de centro (0, 0) y radio 5. Cualquier punto de la circunferencia es solución de la ecuación.



$x^2 + y^2 = 25$ es la ecuación de esta circunferencia porque las soluciones de la ecuación son puntos de la circunferencia.

Las soluciones de las ecuaciones con tres incógnitas

$$x + 3y + 2z = 5$$

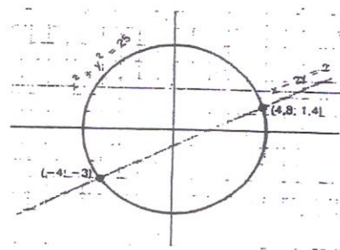
son ternas de valores: $x = 2, \quad y = 1, \quad z = 0,$ por ejemplo. Las ternas de números (2, 1, 0) se interpretan como puntos de un espacio tridimensional. Como verás este curso, la ecuación anterior es de un plano, lo cual quiere decir que los puntos (x, y, z) cuyas coordenadas cumplen la condición $x + 3y + 2z = 5$ (es decir, las soluciones de esta ecuación) están situados sobre un plano y lo llenan por completo.

La expresión $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ como ya verás, es la ecuación de una esfera (sus soluciones están sobre la superficie esférica de centro (0, 0, 0) y radio 3).

Como acabamos de ver, cada una de las ecuaciones

$$x - 2y = 2 \quad , \quad x^2 + y^2 = 25$$

tiene infinitas soluciones que se sitúan, respectivamente, en la recta y en la circunferencia dibujadas.



Cuando hablamos del sistema formado por ambas ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}\right\}$$

nos interesamos, exclusivamente, por las soluciones comunes a las dos, es decir, por los puntos de corte de las dos líneas. En este caso son $(-4 ; -3)$ y $(4{,}8 ; 1{,}4)$.

Solución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas es, pues, un par de números que son una solución de cada una de las ecuaciones que forman el sistema.

Las soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 5 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 9 \end{aligned}\right\}$$

son los puntos de corte del plano de arriba (mira el margen) con la superficie esférica de abajo. Están situados, por tanto, sobre una circunferencia.

Los puntos comunes al plano y a la esfera, es decir, los de la circunferencia a trazos, son las soluciones del sistema.

Sistemas de ecuaciones lineales

Las ecuaciones

$$2x - 5y + 4 = 0 \quad , \quad x - 3y + 5z = 2 \quad , \quad 5x - 3y + z - 5t = 0$$

tienen la peculiaridad de que las incógnitas aparecen todas con grado 1: no están elevadas a ninguna potencia, ni bajo ningún radical, ni multiplicadas unas por otras, ... Se llaman **ecuaciones lineales**.

No son ecuaciones lineales, por ejemplo:

$$2x - 3y + \sqrt{z} = 5 \quad ; \quad 3xy - 2z = 0 \quad ; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas representa un conjunto de dos o más rectas. Su resolución consiste en saber si todas ellas tienen algún punto común y localizarlo.

Si nos movemos en dos dimensiones, cada ecuación lineal con dos incógnitas significa una recta.

Si el sistema de ecuaciones lineales es de tres incógnitas, su resolución consiste en localizar puntos comunes a varios planos. Para ecuaciones con más incógnitas no hay interpretación geométrica elemental.

En el espacio, las ecuaciones lineales con tres incógnitas significan planos.

Los sistemas de ecuaciones lineales son especialmente interesantes, y a ellos dedicaremos nuestra atención en este tema y en los demás temas de este bloque. Por eso, en adelante, la expresión *sistema de ecuaciones* o, simplemente, *sistema*, la utilizaremos como sinónimo de *sistema de ecuaciones lineales*.

Dos ecuaciones se llaman equivalentes cuando tienen las mismas soluciones. Por ejemplo:

$$x - 3y = 7 \text{ es equivalente a } 5x - 15y = 35$$

pues toda solución de la primera es solución de la segunda y viceversa.

$$x + 3y + 2z = 5 \text{ es equivalente a } 3x + 9y + 6z = 15$$

por la misma razón.

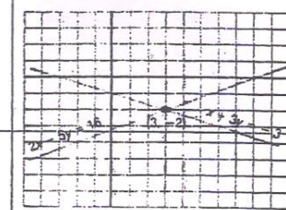
Si a los dos miembros de una ecuación los multiplicamos (o dividimos) por un número cualquiera distinto de 0, la ecuación resultante es equivalente a la primera.

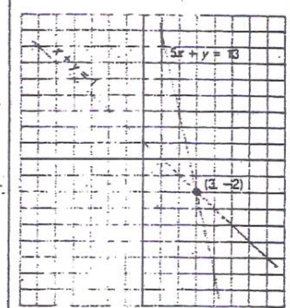
Sistemas equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones se llaman equivalentes cuando tienen las mismas soluciones. Por ejemplo

$$\left.\begin{aligned} 2x - 5y &= 16 \\ x + 3y &= -3 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 5x + y &= 13 \\ x + y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

lo son, pues ambos tienen la única solución $x = 3$, $y = -2$. (Observa que dos sistemas pueden ser equivalentes sin que lo sean las ecuaciones que los forman.)





Dos sistemas pueden ser equivalentes sin que lo sean las ecuaciones que los forman.

Transformaciones válidas en un sistema de ecuaciones

Para el estudio y resolución de un sistema de ecuaciones hay que realizar en ellas ciertas transformaciones que las simplifiquen y que mantengan sus soluciones. Consideraremos válida toda transformación que permita pasar de un sistema de ecuaciones a otro equivalente.

Por ejemplo, las transformaciones siguientes son válidas:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 5y &= 16 \\ x + 3y &= -3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 2x - 5y &= 16 \\ x + 3y &= -3 \\ -11y &= 22 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 2x - 5y &= 16 \\ y &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Consiste en añadir una nueva ecuación que se obtiene restándole a la primera el doble de la segunda.

Consiste en suprimir la segunda (puesto que se ha utilizado para formar la tercera) y dividir la tercera entre -11.

Justifica que las transformaciones ① y ② son válidas.

Observa que las transformaciones, además de válidas, han sido convenientes, pues ahora el sistema está prácticamente resuelto. Podíamos acabar de resolverlo con otras dos transformaciones válidas:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 5y &= 16 \\ y &= -2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 2x &= 6 \\ y &= -2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= -2 \end{aligned}\right\}$$

EJERCICIOS Nº1

Indica, de las siguientes ecuaciones, las que son lineales:

a) $x^2 + x - 5y + 2 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + 2xy - 10 = 0$;

c) $x + y + z = 2$;

d) $\sqrt{3x} - y = 4$

e) $\sqrt{3}x - 2y + 5 = 0$

f) $x + 3zy - 7 = 0$

Escribe dos ecuaciones equivalentes a cada una de las siguientes:

a) $2x + 3y + 5 = 0$;

b) $x - y + 2z = 0$;

c) $-x + 4y - 5z + 4 = 0$

d) $2x + y - 3z + 8 = 0$

Se dan varios pares de sistemas de ecuaciones. Todos ellos son equivalentes. Algunos, por razones muy fáciles de ver: señálalos y di cuál es la razón. Otros tendrás que resolverlos para ver que son equivalentes. Hazlo.

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=7 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+2y=10 \\ 6x-3y=21 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=7 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x=12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=7 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x-3y=17 \\ x-y=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y-z=5 \\ x+y=7 \\ 2x+2y-z=12 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y-z=5 \\ x+y=7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y-z=5 \\ x+y=7 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=7 \\ z=2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y-z=5 \\ x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+5y-3z=13 \\ x+y-z=5 \\ 2y-z=4 \end{cases}$

4. Indica y explica, mediante razonamientos lógicos y ejemplos, cuáles de las siguientes transformaciones son válidas y cuáles no (es decir, cuáles transforman un sistema en otro equivalente y cuáles no):

a) Sustituir el sistema de ecuaciones por la suma de todas ellas.

b) Sustituir dos de las ecuaciones del sistema por su suma.

c) Sustituir una de las ecuaciones por el resultado de sumarla con otra.

d) Sustituir una de las ecuaciones por el resultado de restarle otra.

e) Sumarle $3x + 1$ al primer miembro de cada ecuación.

5. Prueba que si (x_0, y_0, z_0) es solución de dos ecuaciones, también lo es de la ecuación suma.

6. Inventa un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas con solución entera y busca otros dos sistemas equivalentes a él.

7. Inventa un sistema de ecuaciones equivalente a cada uno de los siguientes:

a) $\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y-z=0 \\ x-y+z=-4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-3y+5z=-4 \\ x-2y+z=-3 \\ 2x+z=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+2z=5 \\ -x+2y-3z=0 \\ 2x+3y-4z=4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x+2y+4z=\frac{5}{4} \\ 2x+y+z=0 \\ x+2y+3z=\frac{5}{4} \end{cases}$

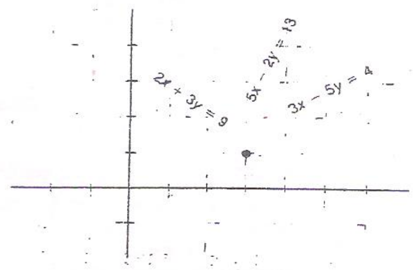
Sistemas de ecuaciones con solución y sin solución

En este apartado veremos qué significado geométrico tiene el hecho de que un sistema de ecuaciones tenga o no soluciones.

Los sistemas de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 9 \\ 3x - 5y &= 4 \end{aligned}\right\} \qquad \text{y} \qquad \left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 9 \\ 3x - 5y &= 4 \\ 5x - 2y &= 13 \end{aligned}\right\}$$

tienen por solución $x = 3$, $y = 1$ (compruébalo). Eso significa que las tres rectas pasan por el punto (3, 1).

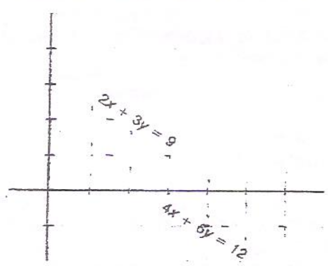


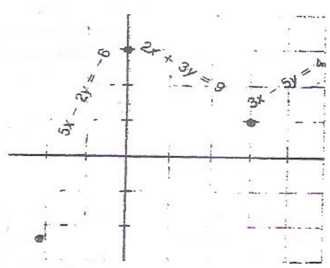
Observa que el segundo sistema de ecuaciones es prácticamente igual que el primero, pues las dos primeras ecuaciones coinciden y la tercera se obtiene sumando, término a término, las anteriores. Esta tercera ecuación *no dice nada nuevo*, pues lo que *dice* se sabía ya por las otras dos: si sabemos que $2x + 3y = 9$ y que $3x - 5y = 4$, entonces, sin necesidad de que se nos diga, sabemos que $5x - 2y = 13$.

Si intentas resolver estos otros dos sistemas

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 9 \\ 4x + 6y &= 12 \end{aligned}\right\} \qquad \text{y} \qquad \left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 9 \\ 3x - 5y &= 4 \\ 5x - 2y &= -6 \end{aligned}\right\}$$

llegarás a expresiones *disparatadas*: no tienen solución.



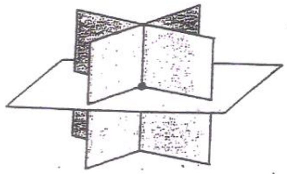


En el primer caso las rectas son paralelas y no tienen punto de corte. En el segundo caso la tercera recta no pasa por el punto en que se cortan las dos primeras.

Observa que, en el primer caso, si $2x + 3y$ es igual a 9, entonces $4x + 6y$ tendría que ser 18. Como se nos dice que es 12, las dos ecuaciones son contradictorias o **incompatibles**.

En el segundo caso, si $2x + 3y$ es igual a 9 y $3x - 5y$ es igual a 4, entonces $5x - 2y$ tendría que ser 13. Pero como se nos dice que $5x - 2y$ es igual a -6, la tercera ecuación contradice a las dos primeras.

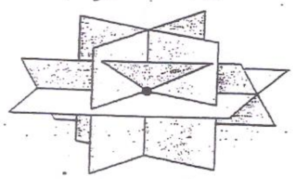
Los sistemas de ecuaciones con solución se llaman **compatibles** y los que no tienen solución, **incompatibles**.



- El sistema

$$\left.\begin{array}{rl} 2x + y - z = & 11 \\ x - 3y \quad = & -20 \\ 4x + 2y + 5z = & 8 \end{array}\right\}$$

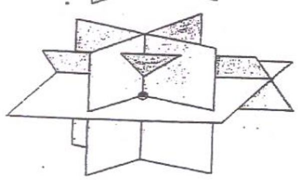
tiene como solución $x = 1$, $y = 7$, $z = -2$. Compruébalo. Eso significa que los tres planos se cortan en el punto $(1, 7, -2)$.



Añadiendo otra ecuación formamos un nuevo sistema:

$$a)\quad \left.\begin{array}{rl} 2x + y - z = & 11 \\ x - 3y \quad = & -20 \\ 4x + 2y + 5z = & 8 \\ 7x \quad + 4z = & -1 \end{array}\right\}$$

o bien este otro:



$$b)\quad \left.\begin{array}{rl} 2x + y - z = & 11 \\ x - 3y \quad = & -20 \\ 4x + 2y + 5z = & 8 \\ 7x \quad + 4z = & 3 \end{array}\right\}$$

En *a)* la cuarta ecuación se ha obtenido a partir de las otras tres, sumándolas. Por tanto, lo que *dice* es consecuencia de lo que *dicen* las otras. El sistema sigue teniendo la misma solución (este cuarto plano pasa por el punto de corte de los otros tres).

En *b)*, la cuarta ecuación es contradictoria con las otras tres, pues de las tres primeras se deduce, como ya hemos visto antes, que $7x + 4z = -1$. Por tanto, el sistema es incompatible (el cuarto plano no pasa por el punto en que se cortan los otros tres).

- El sistema

$$\left.\begin{array}{rl} 2x + 3y + 7z = & 7 \\ x - 3y - 10z = & -1 \end{array}\right\}$$

tiene infinitas soluciones. Para resolverlo pasa z al segundo miembro y calcula x e y en función de z. Obtendrás $x = 2 + z$, $y = 1 - 3z$. Las infinitas soluciones se pueden expresar del siguiente modo:

$$x = 2 + \lambda \quad , \quad y = 1 - 3\lambda \quad , \quad z = \lambda$$

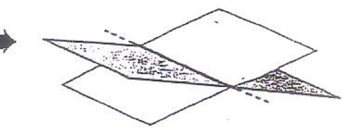
para cualquier número λ.

> λ (lambda)
>
> Letra griega correspondiente a la *l* latina

Se dice que se ha obtenido la solución general en función del *parámetro* λ. Dando valores a λ se obtienen soluciones particulares:

para $\lambda = 0 \rightarrow (2, 1, 0)$; para $\lambda = 1 \rightarrow (3, -2, 1)$; para $\lambda = -5 \rightarrow (-3, 16, -5)$; ...

son los infinitos puntos de la recta en que se cortan los dos planos.



Este sistema, que es compatible, pues tiene solución, se llama **indeterminado** por tener infinitas soluciones.

Un sistema de ecuaciones con tres incógnitas puede ser compatible o incompatible según que todos los planos tengan o no puntos en común. Pero si todos los planos se cortan a lo largo de una recta, el sistema, compatible, tendrá infinitas soluciones y será, pues, indeterminado.

En general

Un sistema de ecuaciones puede tener solución (**compatible**) o no tenerla (**incompatible**).

Los sistemas compatibles pueden tener una solución (**determinados**) o infinitas (**indeterminados**).

Resolver un sistema es dar sus soluciones o concluir que no tiene solución.

Los métodos que aprenderemos, en este tema y en los siguientes, para resolver ecuaciones consisten, en esencia, en llegar rápida y eficazmente, mediante transformaciones válidas, desde el sistema inicial a su solución, o a la conclusión de que no la tiene.

Compatibles:

- **determinados** (una solución);
- **indeterminados** (infinitas soluciones).

Incompatibles: sin solución.

EJERCICIOS

Resuelve e interpreta geométricamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

8. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

Resuelve e interpreta geométricamente:

12. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ **13.** $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y + z = 5 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$

16. *a)* Resuelve

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

b) Añade una tercera ecuación de modo que siga siendo compatible.

c) Añade una tercera ecuación de modo que sea incompatible.

Interpreta geométricamente lo que has hecho en cada caso.

17. *a)* Resuelve

$$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 5 \\ x - y - z = 7 \end{array}\right\}$$

Comprueba que tiene infinitas soluciones (es indeterminado).

b) Añade una tercera ecuación para que sea *compatible determinado*.

c) Añade una tercera ecuación de modo que siga siendo *indeterminado*.

d) Añade una tercera ecuación, de modo que sea *incompatible*.

Interpreta geométricamente lo que has hecho en cada caso.

Un sistema de ecuaciones presenta forma escalonada cuando cada ecuación comienza con una incógnita menos que la anterior

Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} x-5y+2z-4t&=5\\ 2y\quad+6t&=2\\ z-2t&=-1\end{aligned}\right\}\text{Ⓐ}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x-5y+3z+t&=0\\ y-z+t&=0\\ z-t&=0\end{aligned}\right\}\text{Ⓑ}$$

Estos sistemas son especialmente cómodos de resolver. Para resolver los dos anteriores conviene pasar la t al segundo miembro. Hazlo.

Solución de Ⓐ:

$x=-15t+12$, $y=-3t+1$, $z=2t-1$

Solución de Ⓑ:

$x=-2t$, $y=0$, $z=t$.

Con sencillas transformaciones podemos pasar un sistema a otro de forma escalonada equivalente.

Justifica las transformaciones que se hacen en el siguiente ejemplo.

$$\left.\begin{aligned} x+y-2z+t&=5\\ x-y-z+2t&=0\\ 2x+y+z-t&=3\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x+y-2z+t&=5\\ -2y+z+t&=-5\\ -y+5z-3t&=-7\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x+y-2z+t&=5\\ -2y+z+t&=-5\\ 2y-10z+6t&=14\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x+y-2z+t&=5\\ -2y+z+t&=-5\\ -9z+7t&=9\end{aligned}\right\}$$

Ahora, *resuélvelo.*

Ya está puesto en forma escalonada

Los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y&=11\\ 5y&=10\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 4x-3y+2z&=7\\ 5y+2z&=-3\\ 4z&=-6\end{aligned}\right\}$$

son extraordinariamente fáciles de resolver.

El primero:

$$y=\frac{10}{5}=2;\quad 2x+3\cdot 2=11\qquad 2x=5\qquad x=\frac{5}{2}$$

Solución: $\left(\frac{5}{2},\ 2\right)$

El segundo se resuelve análogamente: de la tercera ecuación se obtiene el valor de z que se sustituye en la segunda, en la que, ahora, se puede obtener el valor de y. Etc. (Hazlo tú.)

Este proceso por el cual en cada paso calculamos una incógnita cuyo valor se sustituye en la ecuación anterior, es factible por la forma *escalonada* del sistema: cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior.

Sería, pues, muy deseable poder transformar cualquier sistema de ecuaciones en otro que tenga forma escalonada. Veamos, con unos ejemplos, cómo puede hacerse.

$$\left.\begin{aligned} A:\ x-3y&=4\\ B:\ 3x-7y&=7\end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} A'&=A:\\ B'&=B-3A:\end{aligned}\quad \left.\begin{aligned} x-3y&=4\\ 16y&=-5\end{aligned}\right\}$$

Ya está puesto en forma escalonada. Ahora es fácil llegar a la solución: $\left(\frac{49}{16},\ -\frac{5}{16}\right)$

$\left(-\frac{7}{2};\ -\frac{5}{2}\right)$

$$\begin{aligned} A&:\\ B&:\\ C&:\end{aligned}\quad \left.\begin{aligned} x+5y-3z&=7\\ 2x-y+z&=11\\ 4x+3y-4z&=3\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} A'&=A:\\ B'&=B-2A:\\ C'&=C-4A:\end{aligned}\quad \left.\begin{aligned} x+5y-3z&=7\\ -11y+7z&=-3\\ -17y+8z&=-25\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} A''&=A':\\ B''&=17B':\\ C''&=-11C':\end{aligned}\quad \left.\begin{aligned} \cancel{x}+5y-3z&=7\\ -187y+119z&=-51\\ 187y-88z&=275\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} A'''&=A'':\\ B'''&=B''/17:\\ C'''&=C''+B'':\end{aligned}\quad \left.\begin{aligned} \cancel{x}+5y-3z&=7\\ -11y+7z&=-3\\ 31z&=224\end{aligned}\right\}$$

- Este procedimiento se llama **método de Gauss**. Observa que, en todo el proceso, las ecuaciones y las incógnitas se han mantenido en su sitio. Sólo se han modificado los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes. Por tanto, todas las modificaciones se podían haber hecho trabajando exclusivamente con estos números:

El método de Gauss consiste en transformar el sistema en otro escalonado y, después, resolverlo de abajo arriba.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \\ 4 & 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{a} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 7 \\ 0 & -11 & 7 & -3 \\ 0 & -17 & 8 & -25 \end{pmatrix} \xrightarrow{b}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 7 \\ 0 & -187 & 119 & -51 \\ 0 & 187 & -88 & 275 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 7 \\ 0 & -11 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 31 & 224 \end{pmatrix}$$

Estas *cajas de números* se llaman **matrices**. Los números correspondientes a cada ecuación están en las **filas** de la matriz. Los coeficientes de cada incógnita, en las **columnas**.

Es la matriz asociada al sistema de ecuaciones.

- Al proceso por el cual eliminamos algunos términos se le suele llamar *hacer ceros*. Para conseguir *hacer ceros* hasta llegar a un sistema escalonado manejando siempre números enteros, efectuamos con las filas de la matriz estas operaciones:

  — multiplicar una fila por un número distinto de cero. (Ejemplo: transformación (b) anterior);

  — sumar a una fila el resultado de multiplicar otra por un número. (Ejemplo: transformación (a) anterior).

Estas dos transformaciones, a las que se suele llamar **elementales**, garantizan que el nuevo sistema sea equivalente al anterior.

Estas dos transformaciones, (a) y (b), son básicas.

(a) Aprovechando que el primer elemento es un 1, hacemos ceros con mucha facilidad en el resto de la columna.

(b) En la matriz resultante

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 7 \\ 0 & & & -3 \\ 0 & & & -25 \end{pmatrix}$$

deseamos hacer un cero en alguno de los cuatro lugares señalados. Como no se puede conseguir multiplicando una de las dos filas por un número entero, igualamos los dos coeficientes de la y multiplicando la segunda ecuación por 17 y la tercera por -11. (Se podía haber hecho lo mismo con los coeficientes de z multiplicando la segunda fila por 8 y la tercera por 7.)

- Hay ocasiones en que el elemento de la diagonal principal que tomamos como base para hacer ceros en el resto de la columna ya es 0. En ese caso conviene cambiar esa ecuación con una de las siguientes. Por ejemplo

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ -x + 3y = 1 \end{array}\right\}$$

El sistema no se modifica si cambiamos el orden de las ecuaciones. Hay ocasiones en que conviene efectuar un cambio de este tipo que, en definitiva, consiste en mover una de las filas de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{0} & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$z = -1$; $5y - 2 = 3 \rightarrow y = 1$; $x + 2 - 2 = 2 \rightarrow x = 2$

La transformación ha consistido, simplemente, en cambiar de lugar dos ecuaciones. Obviamente, no hay ningún problema en hacerlo.

- Hay otras ocasiones en que, para aprovechar ceros que ya hay, conviene cambiar el orden de las incógnitas. En tal caso tendremos que dejar constancia de *dónde ha ido a parar* cada una de ellas. Por ejemplo.

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 + & 2 + & 5 = & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{aligned} x + 2y + 5z &= -1 \\ -x + 3y &= 4 \\ 3x + y &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Podemos cambiar el orden de las incógnitas. Consiste en permutar las columnas de la matriz, pero, en tal caso, hay que dejar constancia de dónde queda cada una.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} z & x & y \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} z & x & y \end{array} \end{array}$$

$$y = 1 \;;\; x = -1 \;;\; z = -\frac{2}{5}$$

- Por último, digamos que puesto que en cada cambio hay un elemento de la diagonal principal que tomamos como base para hacer ceros los que están bajo él en su misma columna, es muy cómodo que ese elemento sea 1 ó -1. Cuando no lo es, conviene buscarlo o, incluso, *fabricarlo*. Por ejemplo:

Para *hacer ceros* en la primera columna vamos a llevar el número 1 que ocupa el lugar a_{22} al lugar a_{11}. Por eso intercambiamos las dos primeras filas.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 5 & 4 \\ 6 & & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I}]{1^a \longleftrightarrow 2^a} \begin{pmatrix} 6 & & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 8 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Completamos el proceso anterior intercambiando las dos primeras columnas.

$$\begin{pmatrix} 6 & & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 8 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II}]{x \longleftrightarrow y} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & 6 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ y & x & z & t \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ y & x & z & t \end{array} \end{array} \xrightarrow[\text{III}]{\substack{2^a - 4^a \\ 4^a + 3 \times 1^a}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 16 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ y & x & z & t \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 4 & 4 & 5 & 3\\ 0 & 3 & 4 & 1 & 7\\ 0 & 16 & 10 & 9 & 7\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ y & x & z & t\end{array}\end{array} \xrightarrow[\text{(IV)}]{2^{\text{a}} - 3^{\text{a}}} \begin{array}{c}\begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 4 & -4\\ 0 & 3 & 4 & 1 & 7\\ 0 & 16 & 10 & 9 & 7\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ y & x & z & t\end{array}\end{array}$$

Con este paso *fabricamos* un 1 en el lugar a_{22} que nos sirva de base para hacer ceros en la segunda columna.

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 4 & -4\\ 0 & 3 & 4 & 1 & 7\\ 0 & 16 & 10 & 9 & 7\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ y & x & z & t\end{array}\end{array} \xrightarrow[\text{(V)}]{\substack{3^{\text{a}} - 3\times 2^{\text{a}}\\ 4^{\text{a}} - 16\times 2^{\text{a}}}} \begin{array}{c}\begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 4 & -4\\ 0 & 0 & 4 & & 19\\ 0 & 0 & 10 & & 71\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ y & x & z & t\end{array}\end{array}$$

Se *hacen ceros* en la segunda columna.

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 4 & -4\\ 0 & 0 & 4 & & 19\\ 0 & 0 & 10 & & 71\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ y & x & z & t\end{array}\end{array} \xrightarrow[\text{(VI)}]{z \longleftrightarrow t} \begin{array}{c}\begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 4 & 0 & -4\\ 0 & 0 & -11 & 4 & 19\\ 0 & 0 & -55 & 10 & 71\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ y & x & t & z\end{array}\end{array}$$

Puesto que -55 es múltiplo de -11, con este paso traemos esos números al lugar donde toca el turno de *hacer ceros*.

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 4 & 0 & -4\\ 0 & 0 & -11 & 4 & 19\\ 0 & 0 & -55 & 10 & 71\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ y & x & t & z\end{array}\end{array} \xrightarrow[\text{(VII)}]{4^{\text{a}} - 5\times 3^{\text{a}}} \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 4 & 0 & -4\\ 0 & 0 & -11 & 4 & 19\\ 0 & 0 & 0 & -10 & -24\end{pmatrix}$$

Ya está el sistema puesto en forma escalonada.

El método de Gauss consiste en transformar un sistema de ecuaciones en otro escalonado. Para conseguirlo se efectúan, según convengan, cuatro transformaciones elementales:

— Multiplicar una ecuación por un número distinto de 0.

— Sumar a una ecuación otra multiplicada por un número.

— Intercambiar ecuaciones.

— Cambiar el orden de las incógnitas.

Cada una de estas transformaciones da lugar a un sistema equivalente al anterior. Todas ellas pueden realizarse directamente sobre la matriz asociada al sistema. Sólo la última exige la cautela de anotar dónde va a parar cada incógnita, y de no cambiar de lugar la última columna.

Si hay alguna fila formada toda ella por ceros, se suprime.

El sistema de ecuaciones, o su matriz asociada, adopta finalmente una de las formas siguientes:

Una fila de ceros

$$(0\ 0\ 0\ 0 \quad 0)$$

corresponde a una ecuación del tipo

$$0\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z + 0\cdot t = 0$$

lo cual, por ser evidentemente válido para cualesquiera valores de x, y, z, t, no aporta nada y se puede suprimir.

representan números distintos de cero

representan números cualesquiera

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \square & \square & \square & & \square \\ 0 & & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & & \square \end{array}\right)$$

Hay tantas ecuaciones válidas como incógnitas.
De forma escalonada, vamos obteniendo un valor numérico para cada incógnita.
El sistema tiene solución única.

Es, por tanto, un sistema **compatible** y **determinado**.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \square & \square & \square & & \square \\ 0 & & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & & \square & \square \end{array}\right)$$

Hay menos ecuaciones válidas que incógnitas.
Las incógnitas que están de más se pasan al segundo miembro, con lo que las demás se darán en función de ellas.

El sistema es **compatible, indeterminado**: tiene infinitas soluciones.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \end{array}\right)$$

Si aparece una fila de ceros, salvo el último, distinto de 0, quiere decir que se ha llegado a una ecuación del tipo

$0x + 0y + 0z + \ldots + 0t = K \neq 0$

Lo cual es una igualdad imposible.

El sistema es **incompatible**: no tiene solución.

JERCICIOS RESUELTOS

Resolver por el método de Gauss el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x - 5y + 3z &= 4 \\ x - 2y + z &= 3 \\ 5x + y + 7z &= 11 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Aquí termina el método de Gauss. No obstante se puede seguir por el mismo procedimiento hasta que las incógnitas queden absolutamente despejadas, tal como hacemos a continuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \; 2^a - 3^a \; \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \; \begin{matrix} 1^a - 2\times 2^a - 3^a \\ 2^a \times (-1) \end{matrix} \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 0 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

ii. Resolver por el método de Gaus el sistema $\left.\begin{array}{r} x - 3y + 7z = 10 \\ 5x - y + z = 8 \\ x + 4y - 10z = -11 \end{array}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & -10 & -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 14 & -34 & -42 \\ 0 & 7 & -17 & -21 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 7 & -17 & -21 \\ 0 & 14 & -34 & -42 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 7 & -17 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 7 & -17 & -21 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible, pero indeterminado. Queda así: $\left\{\begin{array}{r} x - 3y = 10 - 7z \\ 7y = -21 + 17z \end{array}\right.$

$$y = -3 + \frac{17}{7}z \qquad x = 3\left(-3 + \frac{17}{7}z\right) + 10 - 7z = 1 + \frac{2}{7}z$$

La solución es $\left\{\begin{array}{l} x = 1 + \frac{2}{7}\lambda \\ y = -3 + \frac{17}{7}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$ que también se puede poner $\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -3 + 17\lambda \\ z = 7\lambda \end{array}\right.$

iii. Resolver por el método de Gauss el sistema $\left\{\begin{array}{r} x - 3y - 2z = 7 \\ 2x - y + 15z = 3 \\ x - 8y - 21z = 11 \end{array}\right.$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 15 & 3 \\ 1 & -8 & -21 & 11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 19 & -11 \\ 0 & -5 & -19 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 19 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Es un sistema incompatible, pues se ha llegado a la ecuación $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -7$ lo cual es imposible.

iv Discutir el siguiente sistema para los distintos valores de K.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + Kz = 1 \\ Kx + (K-1)y + z = K \\ x + y + z = K + 1 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & K & 1 \\ K & K-1 & 1 & K \\ 1 & 1 & 1 & K+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & K & 1 \\ 0 & -1 & 1-K^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-K & K \end{pmatrix}$$

Si $K = 1$, la última fila es $(0\ 0\ 0\ 1)$. El sistema es **incompatible**.

Si $K \neq 1$, $z = \dfrac{K}{1-K}$; $y = K^2 + K$; $x = \dfrac{K^3 - K^2 - 2K + 1}{1 - K}$

...or tanto, si $K = 1$ el sistema es **compatible, determinado**, y su solución es

$$\left(\frac{K^3 - K^2 - 2K + 1}{1 - K} \;,\quad K^2 + K, \quad \frac{K}{1 - K} \right)$$

...ención: no hay infinitas soluciones sino infinitos sistemas (uno para cada valor de K). Y cada uno de ...los tiene **solución única** (salvo el correspondiente a $K = 1$, que no tiene solución). Por ejemplo, para ... $= 2$, el sistema es

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + \;\; z = 2 \\ x + y + \;\; z = 3 \end{array}\right\}$$ cuya solución, única, es $x = -1$, $y = 6$, $z = -2$.

...RCICIOS

... Resuelve e interpreta:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

Sol.: $(1, -2, 3)$

19. Resuelve e interpreta:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases}$$

Sol.: Incompatible

20. Resuelve:

$$\begin{cases} x + y + w = 6 \\ x + z - w = -3 \\ y + z + w = 4 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$$

Sol.: $(1, 2, -1, 3)$

...esuelve por el método de Gauss los sistemas de ecuaciones dados en los ejercicios siguientes:

A B C

21 $\begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases}$

Sol.: $(1, 2, -1)$.

25. $\begin{cases} x + y - z + 4w = -3 \\ 2x - y + 4z - 5w = 13 \\ -x + y - 4z - w = -6 \\ 3x + 4y + z + w = 12 \end{cases}$

Sol.: $(1, 2, 2, -1)$.

29. $\begin{cases} x + y + w = 6 \\ x + z - w = -1 \\ y + z + w = 6 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

Sol.: $(1, 2, 1, 3)$.

22 $\begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}$

Sol.: $(-1, 1, -2)$.

26. $\begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + y - z + w = 0 \\ x - y - z - w = 2 \\ x + y + z + w = 0 \end{cases}$

Sol.: $(1, 0, 0, -1)$.

30. $\begin{cases} x - 2y + z - 3w = 0 \\ x - 3y + z + 2w = -2 \\ 5x - 3y + 2z + 2w = 5 \\ 3x - 2y - 4z = -13 \end{cases}$

Sol.: $(1, 2, 3, 0)$.

23 $\begin{cases} 3x + 4y - 7z = -20 \\ 3x - y + z - 2w = -16 \\ 4x + y - z + w = -19 \\ x + y - z + 9w = -4 \end{cases}$

Sol.: $(-5, 4, 3, 0)$.

27. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + w = 4 \\ x + y + z + w = 5 \\ y + z + w = 4 \end{cases}$

Sol.: $(1, 4, 1, -1)$.

31. $\begin{cases} x - 2y + 3z + 4w = -16 \\ 2x - y + z - w = 9 \\ x - y + 3z + 2w = -7 \\ 3x - y + 2z - 3w = 19 \end{cases}$

Sol.: $(5, 3, -1, -3)$.

24 $\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ z - w = -1 \\ -x + w = 3 \end{cases}$

Sol.: indeterminado.

28. $\begin{cases} x + 2y - 3z + 4w = 7 \\ x - y + 3z + w = -5 \\ 2x + y - z - w = 8 \\ 5x - y = 0 \end{cases}$

Sol.: $(1, 5, 0, -1)$.

32. $\begin{cases} x + y - 3z + w = 0 \\ x - y + z + w = 2 \\ x + 2y - 5z - w = -3 \\ x - 2y + 3z - 9w = -7 \end{cases}$

33. $\begin{cases} 4x-3y+7z-7w=11 \\ x+y=1 \\ y-z=1 \\ y+z+w=1 \end{cases}$

Sol.: $(-1, 2, 1, -2)$.

34. $\begin{cases} x-y+z+w=4 \\ x-2y-3z-4w=-15 \\ x-y+2z+w=6 \\ \cancel{2x+4y-z-w=2} \end{cases}$

Sol.: $(1, 1, 2, 2)$.

35. $\begin{cases} x-y+3z=0 \\ 3x-2y-5z+7w=-32 \\ x+2y-z+3w=18 \\ x-3y+z+2w=-26 \end{cases}$

Sol.: $(1, 10, 3, 0)$.

36. $\begin{cases} x+y+z+w=13 \\ x-5y-2z-w=-39 \\ 2x+7y+3z+w=58 \\ 2x+3y-4z+w=6 \end{cases}$

Sol.: $(1, 6, 4, 2)$.

37. $\begin{cases} 3x+4y-5z+w=3 \\ 2x-3y-z-w=6 \\ 3x-4y+2z+8w=18 \\ 2x-y+3z-6w=-1 \end{cases}$

Sol.: $(2, -1, 0, 1)$.

38. $\begin{cases} x+y+2z+3w=0 \\ 3x+2y-3z=8 \\ x+4y-7z+2w=4 \\ \cancel{x-y-z-w=-2} \end{cases}$

Sol.: $(2, 1, 0, -1)$.

39. $\begin{cases} 3x+5y+7z+w=34 \\ 2x+3y+4z+w=20 \\ -2x+3y+5z=19 \\ 3x-y+z-w=4 \end{cases}$

Sol.: $(1, 2, 3, 0)$.

40. $\begin{cases} x+y+z=12 \\ x+3y+5z-w=47 \\ 2x+3y+4z+w=46 \\ 3x+5y-7z+w=7 \end{cases}$

Sol.: $(-2, 9, 5, 3)$.

41. $\begin{cases} x-y-3z+w=-12 \\ 2x+y-z-2w=1 \\ x+y+z+w=10 \\ x-y-z-w=-6 \end{cases}$

Sol.: $(2, 3, 4, 1)$.

42. $\begin{cases} 4x+3y+2z+w=3 \\ x+2y+3z+4w=7 \\ 2x-2y+z-w=0 \\ \cancel{x-2y+2z-w=1} \end{cases}$

Sol.: $(0, 0, 1, 1)$.

43. $\begin{cases} 3x+6y-2z+5w=33 \\ x+4y-5z+6w=10 \\ x+2y+3z-3w=22 \\ x+4y-5z-2w=10 \end{cases}$

Sol.: $(1, 6, 3, 0)$.

44. $\begin{cases} -x+y+2z+w=-4 \\ x+3y+2z+w=-18 \\ x+4y+z+2w=-20 \\ 3x+y+5z-7w=-32 \end{cases}$

Sol.: $(-4, -3, -2, -1)$.

Aplica el método de Gauss para averiguar si los sistemas de ecuaciones de los siguientes ejercicios tienen o no solución. En caso afirmativo, encuéntrala.

45. $\begin{cases} x-2y=-3 \\ -2x+3y+z=4 \\ 2x+y-5z=4 \end{cases}$

Sol.: $(1+2\lambda, 2+\lambda, \lambda)$.

46. $\begin{cases} x+3y-z=-5 \\ 2x-y+5z=7 \\ x+10y-8z=9 \end{cases}$

Sol.: Incompatible.

47. $\begin{cases} x+3y+4z=1 \\ 2x+2y=4 \\ 2x+4y+4z=3 \end{cases}$

Sol.: $(5+4\lambda, -1-4\lambda, 2\lambda)$.

48. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$

Sol.: $(1, 5-\lambda, \lambda)$.

49. $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+y-2z=-3 \\ x+4y-72z=-13 \end{cases}$

Sol.: Compatible det.

50. $\begin{cases} x-y+2z=2 \\ -x+3y+z=3 \\ x+y+5z=7 \end{cases}$

Sol.: Compatible indet.

51. $\begin{cases} 4x-y+z=4 \\ x-y+4z=1 \\ 2x+y-7z=3 \end{cases}$

Sol.: incompatible.

52. $\begin{cases} 4x-y+5z=-25 \\ 7x+5y-z=17 \\ 3x-y+z=-21 \end{cases}$

Sol.: $(-4, 9, 0)$.

53. $\begin{cases} -x+2y-3z=-2 \\ -x+8y-27z=0 \\ x-y-z=1 \end{cases}$

Sol.: Incompatible.

54. $\begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ x+z=1 \\ 4x-y+5z=5 \end{cases}$

Sol.: $(1-\lambda, \lambda-1, \lambda)$.

55. $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x-2y-z=3 \\ 4x-5y-z=9 \end{cases}$

Sol.: $(1-\lambda, -1-\lambda, \lambda)$.

56. $\begin{cases} 2x-5y+3z=0 \\ -x+y-z=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$

Sol.: $(0, 0, 0)$.

NAVARRO ABALO

EJERCICIOS DEL TEMA

57 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método de Gauss:

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x+5y-4z+3w=12 \\ x+y+z+w=6 \\ 5x-y+5z-w=6 \\ 4x+3y-2z-w=2 \end{array}\right.$; b) $\left\{\begin{array}{l} x-7y-z+2w=-17 \\ 2x+5y+z+w=10 \\ 5x+11y+3z+2w=23 \\ 4x+3y+z+2w=5 \\ -2x+3y+z+w=6 \end{array}\right.$; c) $\left\{\begin{array}{l} x+y+2z-4w=7 \\ y+z+3w=-17 \\ 2x-y+z=-3 \\ 3x+y+2z+5w=-31 \end{array}\right.$

Sol.: (1, 1, 1, 3). **Sol.:** (0, 2, 1, −1). **Sol.:** (−1, −2, −3, −4).

58 Resuelve por el método de Gauss:

a) $\left\{\begin{array}{l} x+5y+2z-2w=-10 \\ x-2y-z=-7 \\ x-7y+z=-15 \\ w=10 \end{array}\right.$; b) $\left\{\begin{array}{l} 2x+5y=16 \\ x+3y-2z=-2 \\ x+z=4 \end{array}\right.$; c) $\left\{\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ 2x-y-z=5 \\ x+2y+z=-3 \end{array}\right.$

Sol.: (−2, 2, 1, 10). **Sol.:** (−2, 4, 6). **Sol.:** (1, −1, −2).

59 Discute y resuelve:

a) $\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=9 \\ x-y-z=-10 \\ 2x-y+z=5 \end{array}\right.$; b) $\left\{\begin{array}{l} 3x+2y+5z-w=49 \\ 2x-y-z+w=2 \\ x+y-3z-2w=-11 \\ w=0 \end{array}\right.$; c) $\left\{\begin{array}{l} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+3z=2 \\ x+y-z=1 \end{array}\right.$

Sol.: (−1, 1, 8). **Sol.:** (5, 2, 6, 0). **Sol.:** Incompatible.

60 Discute y resuelve:

a) $\left\{\begin{array}{l} x+z=4 \\ -x+2y+z=6 \\ y+z=-3 \end{array}\right.$; b) $\left\{\begin{array}{l} x-y+2z=-4 \\ 3x-5y+8z=-14 \\ x+3y-2z=0 \end{array}\right.$; c) $\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=3 \\ 3x+8y-7z=-1 \\ x+3y-4z=-3 \end{array}\right.$

Sol.: Incompatible **Sol.:** (1, −3, −4). **Sol.:** Incompatible.

Determina, aplicando el método de Gauss, para qué valor o valores del parámetro a cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones es:

$A \rightarrow$ Compatible determinado. $B \rightarrow$ Compatible indeterminado. $C \rightarrow$ Incompatible.

Calcula la solución o soluciones en los supuestos A y B.

61 $\left.\begin{array}{l} 4x+2y=a \\ x+y-z=2 \\ ax+y+z=1 \end{array}\right\}$ **Sol.:** $a=3 \rightarrow B$; $a=3 \rightarrow A$

62 $\left.\begin{array}{l} 2x-y+3z=2 \\ 5x-y+az=6 \\ x+y+2z=2 \end{array}\right\}$ **Sol.:** $a=8 \rightarrow B$; $a=8 \rightarrow A$

63 $\left.\begin{array}{l} x+2y-z=4 \\ 3x-y+z=9 \\ 4x+y+a\cdot z=13 \end{array}\right\}$ **Sol.:** $a=0 \rightarrow B$; $a=0 \rightarrow A$

64 $\left.\begin{array}{l} x-3y+2z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ -3x+a\cdot y-3z=0 \end{array}\right\}$ **Sol.:** $a=4 \rightarrow B$; $a=4 \rightarrow A$

65 $\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ a\cdot x+3y-2z=0 \\ -x-4z=3 \end{array}\right\}$ **Sol.:** $a=\frac{5}{2} \rightarrow C$; $a=\frac{5}{2} \rightarrow A$

PROPUESTO EN SELECTIVIDAD

66 Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las siguientes preguntas:

a) Un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas, ¿puede ser incompatible? Razónalo.

b) Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, ¿puede ser compatible determinado? ¿Puede ser incompatible? Si alguna respuesta es negativa, razonarlo; si es afirmativa, mostrar un ejemplo.

c) Un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas. ¿Puede ser incompatible? En caso afirmativo, mostrar un ejemplo.

d) Un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, ¿puede ser compatible y determinado? En caso afirmativo, poner un ejemplo.

67 Siendo a y b números dados, di cuándo será compatible el sistema $\begin{cases} x + y + z = a \\ -x - y - z = b \end{cases}$

Si lo es, ¿será determinado? Razonarlo.

68 Dado el sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$$

a) Añadir una ecuación lineal de modo que el sistema resultante sea incompatible.

b) Añadir una ecuación lineal al sistema dado de modo que el sistema resultante sea compatible e indeterminado. Resolver el sistema así formado.

69 Estudiar la naturaleza del siguiente sistema de ecuaciones según los valores de a y resolverlo cuando tenga solución:

$$\begin{cases} 3x-2y+z=3 \\ 2x+y-z=1 \\ 4x-5y+3z=a \end{cases}$$

70 Estudiar en función de los valores del parámetro a la compatibilidad del siguiente sistema en R. Obtener, si es posible, una solución con $z = a$.

$$\begin{cases} x+y+2t=3 \\ 3x-y+z-t=1 \\ 5x-3y+2z-4t=a \\ 2x+y+z+t=2 \end{cases}$$

71 Discutir según los valores del parámetro k y resolver en los casos que proceda, el sistema:

$$\begin{cases} x-3y+5z=2 \\ 2x-4y+2z=1 \\ 5x-11y+9z=k \end{cases}$$

72 Estudiar y resolver el sistema según los valores de t:

$$\begin{cases} tx+2z=6 \\ 3x+y=0 \\ 2x+tz=6 \end{cases}$$

73 Resolver el sistema en función de a y luego hallar el valor de a para que $x + y = 1$:

$$\begin{cases} x \cos a + y \operatorname{sen} a = 1 \\ x \operatorname{sen} a - y \cos a = 1 \end{cases}$$

2 MATRICES

Cuando uno trabaja ordenadamente con sistemas de ecuaciones lineales, pronto se percata de que está escribiendo muchas veces los mismos símbolos superfluamente.

Del sistema

$$\begin{cases} 3x+4y-5z=\ \ 7 \\ 8x+\quad\ +6z=-3 \\ 2x+3y+5z=\ \ 8 \end{cases}$$

la información esencial queda perfectamente expresada así

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 8 & 0 & 6 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{array}$$

con el consiguiente ahorro de esfuerzo. Así es como se introdujo en matemáticas la noción de matriz como una tabla de números. Una vez más se pone de manifiesto la potencia y eficacia de la simbolización bien escogida.

Las matrices se pueden sumar, multiplicar por un número, multiplicar entre sí bajo ciertas condiciones y vienen a resultar como una ampliación de la noción de número, que está llena de sentido y se presta a un gran número de aplicaciones muy interesante, como verás al comienzo de este tema.

Nuestra cultura está llena de matrices de números. El horario de los trenes que ves en cada una de nuestras estaciones es una matriz de doble entrada, la tabla de cotizaciones de la Bolsa en cada uno de los días de la semana es otra,... En matemáticas, las matrices que aparecen tienen en general una estructura muy rica por tener un sentido muy preciso y muy informativo la suma de dos de ellas, su producto y otras muchas operaciones que con ellas se pueden llevar a cabo. Esto ha conducido a un gran desarrollo, originado a fines del siglo pasado, del álgebra lineal que ha tenido una intensa repercusión en campos tales como las ecuaciones diferenciales, el análisis funcional, la optimización,... y, consiguientemente, en muchos aspectos de la economía y de la física actuales.

Cuando las matrices son de pequeño tamaño, como las que en este tema se presentan, su manejo se puede realizar con lápiz y papel de modo sencillo. Pero no es infrecuente, en las aplicaciones prácticas, encontrarse con matrices de miles de filas y columnas. El ordenador, que es el lápiz y papel de la nueva matemática de la segunda mitad del siglo XX, puede tratar tales matrices, y los sistemas de ecuaciones asociados, en fracciones de segundo, haciendo posible en nuestro tiempo lo que era un sueño hace cincuenta años.

1 Matrices. Nomenclatura

Las siguientes tablas numéricas son matrices:

> Estas cajas de números tienen un enorme interés teórico y práctico.
>
> Estudiémoslas con atención.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7/4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4/3 & \sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}, \quad (1 \;\; 3 \;\; 7 \;\; 11 \;\; -5), \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 3/4 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Observa que son *cajas* rectangulares formadas por **filas** y **columnas**. La primera es una matriz de 3 filas y 4 columnas. Su **dimensión** es 3×4.

La segunda es una matriz de dimensión 1×5 (1 fila, 5 columnas). A este tipo de matrices se las llamas **vectores fila**. Esta es un vector fila de dimensión 5.

La tercera es un **vector columna** de dimensión 4 (matriz de dimensión 4×1).

La cuarta es una matriz de dimensión 3×3. También se le llama **matriz cuadrada** de orden 3.

Para un estudio general, a las matrices se las suele designar así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Observa que los términos de la matriz tienen dos subíndices: el primero indica la fila, el segundo la columna. Así, el término a_{32} es el que está en la 3ª fila, 2ª columna. Para simplificar, se puede poner

$$(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \; ; \quad \text{o bien} \quad A_{m,n} = (a_{ij})$$

y cuando no hay duda del número de filas y de columnas se pone, simplemente, (a_{ij}).

Definiciones

- Dos matrices son **iguales** cuando coinciden término a término.
- Se llama **traspuesta** de una matriz A, y se designa por A', a la matriz que se obtiene al cambiar en A las filas por las columnas y las columnas por las filas:

$$A_{m,n} = (a_{ij}) \qquad A'_{n,m} = (a_{ji}).$$

Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

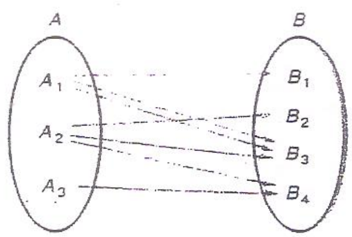
El consumo en kg de pan, carne y mantequilla de una familia, durante 1980, 1981, 1982 y 1983 se puede disponer así:

	Pan	Carne	Mantequilla
80	430	157	8
81	390	162	6
82	410	169	10
83	360	180	9

Una chica contabiliza las horas semanales que dedica a *«clases»*, *«estudio y lectura»*, *«televisión»*, *«salidas, amigos, excursiones...»*, día a día del siguiente modo:

	Cl.	Est.	T.V.	Am.
L	6	2	1	2
M	5	3	2	1
X	8	1	0	2
J	6	1	2	1
V	5	4	0	4
S	1	2	3	6
D	0	2	4	6

En un país, A, hay 3 aeropuertos internacionales: A_1, A_2, A_3. En el país B hay cuatro: B_1, B_2, B_3, B_4. Una persona que quiera ir el lunes de A a B dispone de los siguientes vuelos:



	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	0	2	0
A_2	0	1	1	1
A_3	0	0	0	1

En estos tres ejemplos se utilizan las matrices para describir estructuradamente masas de números. En todos ellos sabemos perfectamente lo que significa cada número. También sabemos encontrar fácilmente el número que necesitamos.

Estos ejemplos, muy ingenuos, te permiten imaginar aplicaciones mucho más importantes: en el primero supón el consumo, no de una familia, sino de todo un país. En lugar de tres artículos pueden ser muchos cientos. Y se pueden tener datos de lo consumido, mes a mes, durante muchos años. Imagina la inmensa matriz a que da lugar esta masa de datos.

Pero, como veremos en el próximo apartado, las matrices sirven no sólo para archivar estructuradamente muchos datos, sino también para operar con ellos de forma notablemente cómoda.

EJERCICIOS

1. Escribe las matrices traspuestas de:

   a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$; *b)* $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

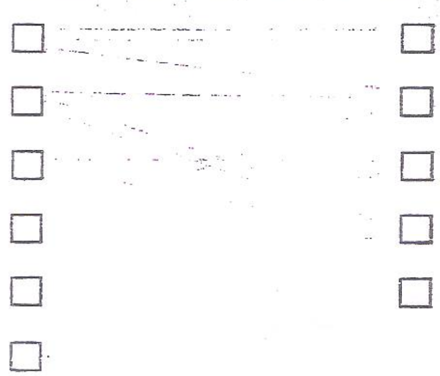
2. Encuentra las traspuestas de:

   $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. Con las matrices de los ejercicios anteriores comprueba que:

   $(A^t)^t = A$; $(B^t)^t = B$;
   $(X^t)^t = X$; $(Y^t)^t = Y$.

4. Escribe una matriz que refleje la situación:



Operaciones con matrices

Las matrices pueden sumarse, ser multiplicadas por un numero y multiplicarse entre sí. Cada una de estas operaciones tiene sus peculiaridades y su interpretación.

Para que dos matrices puedan sumarse es necesario que tengan la misma dimensión. En tal caso se suman término a término:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 & -4 \\ 7 & 2 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo I anterior, el consumo de varias familias relativo a los mismos productos durante los mismos años se puede sumar matricialmente y obtener, así, la matriz de consumo de una barriada.

En el ejemplo II, la chica puede sumar su dedicación semanal durante las diez semanas lectivas de un trimestre.

Para multiplicar un número por una matriz se multiplica por él cada término de la matriz.

$$K \cdot (a_{ij}) = (K\, a_{ij})$$

Por ejemplo:

$$5 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 25 & 5 \\ 35 & 10 & 20 & 15 \\ -5 & 25 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Si el ejemplo I anterior se tratara, no de una familia concreta sino de una familia *standard*, multiplicando la matriz por el número de familias de una provincia, se obtendría la matriz de consumo provincial.

En el ejemplo II, la chica puede suponer que todas las semanas serán aproximadamente igual y obtener la matriz de dedicación trimestral multiplicando por 12 la semanal.

EJERCICIO

5. Siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

calcula $E = 2A - 3B + C - 2D$

Sol.: $E = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{pmatrix}$

mismo que con los números, para ltiplicar dos matrices escribiremos $4 \times B$, $A \cdot B$ o simplemente AB

Así como la suma de matrices y el producto por un número se definen de forma muy sencilla, el producto de matrices es complicado. Por eso empecemos multiplicando dos matrices muy especiales.

El producto de un vector fila por un vector columna, ambos de la misma dimensión, es un número que se obtiene multiplicándolos término a término y sumando los resultados:

$$(2 \quad 3 \quad 5 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 4 =$$

$$= 2 + 21 + 0 + 4 = 27$$

$$(a_1 \; a_2 \; a_3 \; \dots \; a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n$$

Dos matrices cualesquiera no se pueden multiplicar salvo que el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda. Para multiplicar dos matrices así multiplicaremos cada uno de los vectores fila de la primera por cada uno de los vectores columna de la segunda. Veámoslo con un ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 2 \\ 0 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-5) + 1 \cdot 0 \\ 7 \cdot 1 + 2 \cdot 7 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 4 & 7 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) + 3 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 5 \cdot 7 + 0 \cdot 0 + 8 \cdot 4 & -1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 0 \cdot (-5) + 8 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 27 & -17 \\ 33 & -9 \\ 66 & 9 \end{pmatrix}$$

licho de otra forma: la primera tiene tantas columnas como filas tiene la segunda.

$A_{3,4} \times B_{4,2} = C_{3,2}$

Observa que:

— Los vectores fila de la primera son de la misma dimensión que los vectores columna de la segunda.

— El producto es una matriz con tantas filas como la primera y tantas columnas como la segunda.

— El elemento c_{11} de la matriz producto se obtiene multiplicando la primera fila de A por la primera columna de B.
Análogamente, c_{32} se obtiene multiplicando la tercera fila de A por la segunda columna de B.

Para multiplicar dos matrices $A_{m,n} \cdot B_{n,p}$, es necesario que el número de columnas de A coincida con el número de filas de B. El producto es otra matriz $C_{m,p}$ cuyos elementos se obtienen del siguiente modo:

(Fila i) × (Columna j) = Elemento ij

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

EJEMPLOS

Los consumos anuales de cuatro familias α, β, γ y δ, en pan, carne y mantequilla vienen dados en la matriz A. Los precios de esos mismos productos en los años 1980, 1981, 1982, 1983 y 1984 vienen dados en la matriz B. La matriz $A \cdot B$ nos da el gasto total (en esos productos) de cada familia en cada año:

Consumos

$$A_{4,3} \quad \begin{array}{c} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{pan} & \text{carne} & \text{mant.} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 430 & 157 & 8 \\ 545 & 210 & 1 \\ 120 & 80 & 3 \\ 860 & 110 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Precios

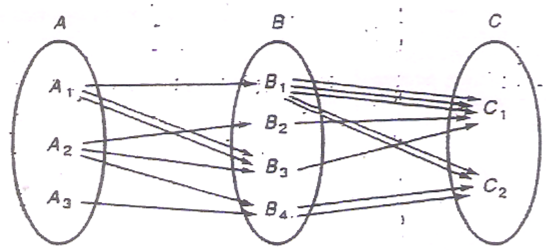
$$B_{3,5} \quad \begin{array}{c} \\ \text{pan} \\ \text{carne} \\ \text{mant.} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 80 & 81 & 82 & 83 & 84 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 81 & 87 & 95 & 100 & 105 \\ 770 & 700 & 750 & 800 & 860 \\ 840 & 910 & 800 & 1\,000 & 1\,050 \end{pmatrix} \end{array}$$

Gastos

$$C_{4,5} = A_{4,3} \cdot B_{3,5}: \quad \begin{array}{c} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 80 & 81 & 82 & 83 & 84 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 162\,440 & & & & \\ 206\,685 & & \dots & & \\ 73\,840 & & & & \\ 154\,360 & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Completa la matriz $A \cdot B$. Razona que la matriz producto nos da el gasto de cada familia en cada año.

Mediante los grafos que ves a la derecha se dan los vuelos del país A al país B y los del país B al país C, especificando los aeropuertos de salida y de llegada. Estas posibilidades se describen mediante las matrices M y N.

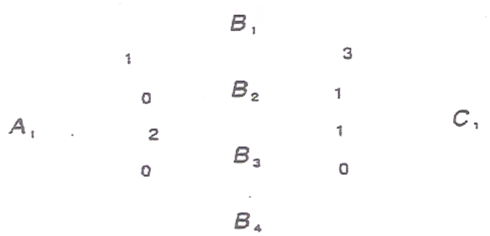


Veamos que el número de combinaciones que hay saliendo de cada aeropuerto de A y llegando a cada uno de C, haciendo escala en un aeropuerto de B, se obtiene mediante el producto $M \cdot N$.

Por ejemplo, para ir de A_1 a C_1 se puede hacer pasando por B_1 de $1 \times 3 = 3$ formas distintas; pasando por B_2, 0 (no hay vuelo de A_1 a B_2); pasando por B_3, de $2 \times 1 = 2$ formas distintas; y pasando por B_4, de 0 formas; total: $3 + 2 = 5$.

Observa que lo que se ha hecho ha sido multiplicar la primera fila de M por la primera columna de N.

$$M \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad N \quad \begin{array}{c} \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$



$$\left.\begin{array}{c} 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 \end{array}\right\} 3 + 0 + 2 + 0 = 5$$

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

El 0 de la matriz producto, por ejemplo, significa que no se puede ir de A_3 a C_1 por ningún camino.

EJERCICIOS

6. Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

efectúa todos los posibles productos entre ellas. (Incluyendo $D \cdot D$, hay 6 posibles multiplicaciones.)

7. Recordemos la chica que había contabilizado las horas semanales dedicadas a distintas tareas (ejemplo II de la pág. 32).

	Cl.	Est.	T.V.	Am.
L	6	2	1	2
M	5	3	2	1
X	8	1	0	2
J	6	1	2	1
V	5	4	0	4
S	1	2	3	6
D	0	2	4	6

Ella valora *cada hora* dedicada a las distintas tareas del siguiente modo:

Clase	—	2 puntos
Estudio	—	3 puntos
T.V.	—	1 punto
Amigos	—	4 puntos
Total:		10 puntos

Su tía Filomena hace una valoración distinta:

Clase	4 puntos
Estudio	4 puntos
T.V.	0 puntos
Amigos	2 puntos
Total:	10 puntos

He aquí la matriz correspondiente a las dos valoraciones:

$$\begin{array}{l} \text{Cl.} \\ \text{Est.} \\ \text{T.V.} \\ \text{Am.} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula el producto de las dos matrices y di el significado de algunas de sus casillas.

¿Cuál es el día cuyas actividades, en conjunto, valora más la chica?

¿Y cuál valora más su tía?

8. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

calcula:

a) $A + B$; *b)* $B + A$; *c)* $A - B$;

d) $3A - 2B$; *e)* $A \cdot B$; *f)* $B \cdot A$

Sol. (de *d* como ejemplo): $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

9. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

comprueba que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

10. Calcula $A^2 = A \cdot A$ sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Siendo A la matriz del ejercicio anterior, calcula

a) A^3; *b)* A^4; *c)* A^n.

Sol. (de *a* como ejemplo): $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

12. Intenta conseguir una matriz I de *tres filas y tres columnas* que multiplicada por cualquiera otra A la deje igual. Es decir, tal que

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

cualquiera que sea la matriz $A_{3,3}$. Compruébalo.

13. Si has resuelto el ejercicio anterior sabrás generalizarlo para matrices cuadradas $n \times n$. Hazlo.

Estas matrices I se llaman *matrices unidad*.

Algebra de matrices

Las matrices de dimensión $m \times n$ pueden sumarse y el resultado es otra matriz $m \times n$. Además la suma cumple las siguientes propiedades:

1. **Asociativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$.
2. **Conmutativa:** $A + B = B + A$.
3. La matriz $\mathbf{0}_{m,n}$ cuyos elementos son todos 0 hace de **matriz nula**, pues sumada a cualquier otra la deja igual:

$$A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A.$$

4. **Toda matriz tiene** una **opuesta**. La opuesta de $A_{m,n} = (a_{ij})$ es $(-a_{ij})$, pues $(a_{ij}) + (-a_{ij}) = \mathbf{0}$.

Las operaciones que acabamos de estudiar tienen unas propiedades que les confieren una estructura interesante. Veámoslas.

Estas cuatro propiedades se resumen diciendo que el conjunto de matrices de dimensión $m \times n$. ($M_{m,n}$) forman *grupo abeliano* respecto a la suma.

1. $a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$.
2. $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$.
3. $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$.
4. $1 \cdot A = A$.

Estas cuatro propiedades, junto con las anteriores, se resumen diciendo de $M_{m,n}$ es un *espacio vectorial* respecto a la suma y al producto por números.

1. **Asociativa:** $(A_{m,n} \times B_{n,p}) \times C_{p,q} = A_{m,n} \times (B_{n,p} \times C_{p,q})$.
2. La multiplicación **no es conmutativa**.

La propiedad asociativa nos permite prescindir de paréntesis cuando multipliquemos matrices. Y la carencia de la propiedad conmutativa obliga a indicar el orden en que han de ser multiplicadas dos matrices. Por tanto, utilizaremos expresiones del siguiente tipo: «el resultado lo multiplicaremos, *por la izquierda*, por la matriz A».

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\\0&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&5&0&3\\1&0&4&6\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1\\6\\2\\7\end{pmatrix}$$

Comprueba que

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

Para convencerte de que el producto de matrices no es conmutativo:

- Si $A = \begin{pmatrix}1&3\\2&1\\0&4\end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix}-1&5&0&3\\1&0&4&6\end{pmatrix}$

  $A \times B$ puede efectuarse, $B \times A$ no.

- Si $A = \begin{pmatrix}1&3\\2&1\\0&4\end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix}4&5&-2\\0&3&4\end{pmatrix}$

  $A \times B$ y $B \times A$ pueden efectuarse pero son de dimensiones diferentes.

- Si $A = \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&1\\4&1&0\end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix}15&1&3\\0&1&4\\-4&0&0\end{pmatrix}$

  $A \times B$ y $B \times A$ son ambas matrices 3×3, pero son distintas.

3. La matriz $I_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ tiene la siguiente peculiaridad:

   cualquiera que sea $A_{m,3}$ se verifica que $A_{m,3} \times I_3 = A_{m,3}$;

   y cualquiera que sea $B_{3,p}$ se verifica que $I_3 \times B_{3,p} = B_{3,p}$.

   La afirmación es válida para cualquier I_n. Éstas se llaman **matrices unidad.**

La matriz $\begin{pmatrix}1&0&0&\dots&0\\0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\dots&1\end{pmatrix}$

es la *matriz unidad* de ese álgebra.

$A \times (B + C) = A \times B + A \times C.$

$(B + C) \times D = B \times D + C \times D.$

Las matrices cuadradas de un cierto orden, $M_{n,n}$, además de sumarse y multiplicarse por números, pueden multiplicarse entre sí y se cumplen todas las propiedades que hemos visto hasta ahora. Todo ello se resume diciendo que $M_{n,n}$, con las operaciones suma, producto y producto por números es un **álgebra**.

Pero aún nos queda un detalle:

os preguntamos por la existencia de atriz inversa de otra

Dada una matriz cuadrada A de orden n, ¿existirá otra, A^{-1}, tal que

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I?$$

Por ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ la matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ cumple que

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I \qquad \text{(compruébalo).}$$

omprueba que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene versa viendo que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a lugar a un sistema de ecuaciones incompatible.

La pregunta que nos hacemos es si podemos garantizar la existencia de A^{-1}, cualquiera que sea la matriz A. La respuesta es que no. Sin embargo, sí se puede conseguir, en muchos casos y, como veremos en el próximo apartado, es muy interesante conseguirlo.

14. Calcula x; y, z, t para que se cumpla

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sol.: 5/2; 3/2; 0 y 2 respectivamente.

15. Para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

comprueba las igualdades

a) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

b) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

c) $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

16. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

Encuentra una matriz X que cumpla

$3 \cdot X - 2 \cdot A = 5 \cdot B$ **Sol.:** $\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -17/3 \end{pmatrix}$

17. Encuentra dos matrices, A y B, de dimensión 2×2 que cumplan:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol.: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

18. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son matrices:

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Sol.: $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

19. Averigua cómo ha de ser una matriz X que cumpla

$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$ **Sol.:** $X = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

20. Efectúa las siguientes operaciones con las matrices dadas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $A+B+C$; b) $(A \cdot B)+(A \cdot C)$;

c) $(A-B) \cdot C$; d) $A \cdot B \cdot C$

21. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ comprueba que

$$(A - I)^2 = 0$$

) todos

Forma matricial de un sistema de ecuaciones

El sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} -x+\ y+\ z=-\ 1 \\ x\qquad -3z=-18 \\ 2x-5y+3z=\ \ 52 \end{array}\right\}$$

puede ponerse así (compruébalo):

> Los sistemas de ecuaciones pueden ser tratados de forma muy elegante por medio de las matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -18 \\ 52 \end{pmatrix}$$

> Para ello se tiene en cuenta el producto de matrices y el hecho de que dos matrices son iguales si coinciden término a término.

Esta es la forma matricial del sistema de ecuaciones. Para abreviar, se puede poner del siguiente modo:

$$A \cdot X = C$$

> $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$
>
> $C = \begin{pmatrix} -1 \\ -18 \\ 52 \end{pmatrix}$

Podríamos resolver con mucha facilidad esta ecuación matricial si conociéramos la inversa, A^{-1}, de la matriz A, pues multiplicando los dos miembros por A^{-1} a la izquierda, se puede despejar X:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot C$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot C$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot C$$

$$X = A^{-1} \cdot C$$

El problema sigue siendo, como antes, el calcular A^{-1} a partir de A.

Vamos a *darle la vuelta* al problema.

Hemos dicho: «*si supiéramos calcular* A^{-1}, *sabríamos resolver el sistema*». Podemos pensar: «*como sabemos resolver el sistema (método de Gauss), quizá a partir de ahí podamos calcular* A^{-1}».

> Puesto que sabemos del apartado anterior que
>
> $A^{-1} = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$,
>
> se resuelve la ecuación anterior multiplicando matrices:
>
> $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -18 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$
>
> Es decir: $x = 3,\ y = -5,\ z = 7$.

Vamos a aplicar, de nuevo, el método de Gauss buscando el significado matricial de cada paso.

$$\left(\begin{array}{rrrr} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -18 \\ 2 & -5 & 3 & 52 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I}]{\substack{2^a + 1^a \\ 3^a + 2 \times 1^a}} \left(\begin{array}{rrrr} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -19 \\ 0 & -3 & 5 & 50 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -19 \\ 0 & -3 & 5 & 50 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II}]{3^a + 3 \times 2^a} \left(\begin{array}{rrrr} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -19 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -19 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}]{2^a - 2 \times 3^a} \left(\begin{array}{rrrr} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{array}\right)$$

El método de Gauss, en rigor, acaba tras los dos primeros pasos. Los pasos III, IV y V los damos para acabar de despejar las incógnitas. Al final el sistema está completamente resuelto:

$$x = 3, \quad y = -5, \quad z = 7$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}]{1^a - 2^a + 3^a} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{V}]{\substack{(-1) \times 1^a \\ (-1) \times 3^a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Esfuérzate en entender, en cada caso, qué tiene que ver *el cambio realizado en las filas de la matriz* con *la matriz del cambio* por la que se multiplica a la izquierda.

Veamos cómo cada uno de los pasos anteriores puede ser realizado multiplicando la matriz de partida por una cierta matriz a la que llamaremos **matriz del cambio**.

Paso	Cambio en las filas	Matriz del cambio	Comprobación
I	$2^a + 1^a$ $3^a + 2 \times 1^a$	$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -18 \\ 2 & 5 & 3 & 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -19 \\ 0 & -3 & 5 & 50 \end{pmatrix}$
II	$3^a + 3 \times 2^a$	$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -19 \\ 0 & -3 & 5 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$
III	$2^a - 2 \times 3^a$	$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix}$
IV	$1^a - 2^a + 3^a$	$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix}$
V	$(-1) \times 1^a$ $(-1) \times 3^a$	$M_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

En resumen, el paso ha sido:

$$M_5 \cdot M_4 \cdot M_3 \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -18 \\ 2 & 2 & 3 & 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

El producto $M_5 \cdot M_4 \cdot M_3 \cdot M_2 \cdot M_1 = M$ es una matriz 3×3 que compendia todos los cambios realizados.

Si prescindimos de la columna de los términos independientes, el cambio total realizado por la matriz de los coeficientes ha sido

$$M \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Comprueba que

$$M_5 \cdot M_4 \cdot M_3 \cdot M_2 \cdot M_1$$

es la matriz

$$\begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

que, según vimos en el apartado anterior, es la inversa de A.

Por tanto M es la matriz inversa de A. Es decir:

$$A^{-1} = M = M_5 \cdot M_4 \cdot M_3 \cdot M_2 \cdot M_1$$

Sin embargo, podemos encontrar una regla práctica para calcular A^{-1}, más cómoda que la de obtener las matrices M, y multiplicarlas. Consiste en *imponer a la matriz identidad los mismos cambios a los que hay que someter a* A *para obtener* I. Veamos por qué:

REGLA PRÁCTICA PARA CALCULAR A^{-1}.

Para cualquier matriz B, el producto $M \cdot B$ consiste en someter a B a los mismos cambios a los que se ha sometido A. Recíprocamente, si a las filas de una matriz B las sometemos a los mismos cambios que se han efectuado a las de A, el resultado es la matriz $M \cdot B$.

Lo dicho para una matriz cualquiera, B, es válido para la matriz identidad:

$$A \xrightarrow{\text{sometida a ciertos cambios}} I \qquad M \cdot A = I \Rightarrow M = A^{-1}$$

$$I \xrightarrow{\text{sometida a los mismos cambios}} A^{-1} \qquad M \cdot I = A^{-1} \cdot I = A^{-1}$$

Es interesante advertir que, según lo anterior, sólo se podrá obtener A^{-1} cuando A pueda transformarse en I. Y eso ocurre cuando todas las filas de A sean linealmente independientes.

EJEMPLO

Queremos calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para ello, colocamos la matriz A y, a continuación y separada por una línea vertical, la matriz identidad

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A} \quad \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\right)$$

Ahora sometemos a la matriz A a los cambios que convengan para transformarla en I y vamos sometiendo, simultáneamente, a I a los mismos cambios. Cuando A se haya transformado en I, I se habrá transformado en A^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3^a - 2 \times 1^a \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3^a - 2 \times 2^a$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad 1^a + 2^a \quad \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \quad \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Es correcto.}$$

EJERCICIOS

22. Resuelve de forma matricial el siguiente sistema de ecuaciones sabiendo que la inversa de la matriz formada por los coeficientes de la ecuación es la dada:

$$\left.\begin{array}{r} x \qquad +z=10 \\ 2x+3y \qquad =17 \\ 3x+4y+z=32 \end{array}\right\} ; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Sol.: $x = 1,\ y = 5,\ z = 9.$

23. Calcula la matriz inversa de aquellas de las siguientes matrices para las que se pueda:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$; *d)* $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

En cada caso, comprueba el resultado viendo si el producto de la matriz por su inversa es la matriz unidad.

24. Calcula la matriz inversa en caso de que pueda hacerse:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Si el cálculo es posible, comprueba el resultado viendo si el producto de la matriz por su inversa es la matriz unidad.

25. Calcula las matrices inversas de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ {}^{3}/_{2} & {}^{1}/_{2} & {}^{3}/_{4} & {}^{13}/_{8} \\ 0 & 0 & {}^{1}/_{2} & {}^{-1}/_{4} \\ 0 & 0 & 0 & {}^{1}/_{2} \end{pmatrix} ;$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} {}^{-2}/_{7} & {}^{2}/_{7} & {}^{1}/_{7} \\ {}^{-1}/_{7} & {}^{-6}/_{7} & {}^{4}/_{7} \\ {}^{6}/_{7} & {}^{1}/_{7} & {}^{-3}/_{7} \end{pmatrix}$$

26. Calcula las matrices inversas de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ;$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ;$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 & 1 \\ -3 & -12 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & -3 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

27. Resuelve de forma matricial el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x \qquad =1 \\ y+z=2 \\ x \quad +z=4 \end{array}\right\} \qquad \textbf{Sol.: } (1, -1, 3).$$

28. Resuelve matricialmente:

$$\left.\begin{array}{r} x+\ y \qquad = 8 \\ y+z=13 \\ x+2y \qquad =13 \end{array}\right\} \qquad \textbf{Sol.: } (3, 5, 8).$$

29. Resuelve matricialmente:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y \qquad =-\ 2 \\ 10x-5y+9z=\ 48 \\ y-\ z=-\ 4 \end{array}\right\} \qquad \textbf{Sol.: } (2, -2, 2).$$

30. Escribe en forma matricial el sistema de ecuaciones y resuélvelo:

$$\begin{cases} 2x-\ y=\ 7 \\ x-2y=11 \end{cases}$$

Rango de una matriz. Teorema de Rouché

Para saber si un sistema de ecuaciones tiene o no tiene solución hay que ver si los términos independientes pueden ser *consecuencia* de los coeficientes de las incógnitas, es decir, si dando a las incógnitas valores particulares, pueden resultar tales coeficientes. Esto se realiza comparando la matriz de los coeficientes con la matriz que se obtiene añadiendo a ésta los términos independientes (**matriz ampliada**). Para proceder a esta comparación debemos preparar el camino estudiando algunas propiedades de las líneas de una matriz.

Un nuevo concepto —*rango de una matriz*— está estrechamente relacionado con la resolubilidad del sistema de ecuaciones cuyos coeficientes son los términos de dicha matriz.

Las filas de una matriz pueden ser consideradas como vectores. Es posible que sean **linealmente independientes** (L. I.) y es posible que unos **dependan linealmente** de otros. Por ejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ Sus dos filas son linealmente independientes.

$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 3 \\ 1 & -17 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$ Las dos primeras filas son L.I. Las otras dos dependen linealmente de las primeras ($3^a = 5 \times 1^a - 4 \times 2^a$; $4^a = 1^a + 2^a$).

$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ Las dos primeras filas son L.I. La otra depende linealmente de ellas ($3^a = 1^a - 2^a$).

Se llama rango de una matriz al número de filas L.I.

Por tanto, el rango de las tres matrices anteriores es 2.

Las transformaciones a las que se somete una matriz cuando aplicamos el método de Gauss no modifican su rango. Vamos a intentar relacionar la existencia de solución en un sistema de ecuaciones con el rango de su matriz asociada.

Convéncete de esta afirmación poniéndote ejemplos o revisando algunos anteriores. Después, intenta demostrarla.

También las columnas de una matriz pueden ser consideradas como vectores. Podríamos definir rango de la matriz como el número de columnas linealmente independientes, pero nos queda la duda de si esa definición puede contradecir en algún caso la anterior. Es decir: ¿es posible que en una matriz el número de filas linealmente independientes sea distinto que el número de columnas linealmente independientes? El siguiente teorema nos asegura que no.

En una matriz el número de filas L.I. coincide con el número de columnas L.I.

En la página 45, como ampliación, se demuestra esta propiedad.

Por eso podemos dar una nueva definición de rango:

Rango de una matriz es el número de filas, o de columnas, linealmente independientes.

Ya estamos en condiciones de dar un criterio para saber, antes de resolverlo, si un sistema tiene o no solución:

Matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

La condición necesaria y suficiente para que tenga solución el sistema

$$\begin{matrix} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \ldots + a_{1n}\, x_n = c_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + \ldots + a_{2n}\, x_n = c_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + a_{m3}\, x_3 + \ldots + a_{mn}\, x_n = c_m \end{matrix}$$

es que el rango de la matriz de los coeficientes, A, coincida con el rango de la matriz ampliada, A'.

Al poner el sistema en forma vectorial

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m3} \end{pmatrix} x_3 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{pmatrix}$$

se ve que si el sistema tiene solución, existen unos números

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots \quad x_n$$

que al multiplicarlos por las columnas de la matriz A, su suma nos da la columna de los términos independientes. Ésta es, por tanto, combinación lineal de las anteriores y por eso no se aumenta el rango de A al ampliarla con esta columna:

$$ran\,(A') = ran\,(A)$$

El argumento recíproco es similar.

EJERCICIOS RESUELTOS

I. Calcular el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 2 & 11 & -6 & 17 \\ 5 & -1 & 24 & -37 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 2 & 11 & -6 & 17 \\ 5 & -1 & 24 & -37 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 & 4 \\ 17 & 2 & 11 & -6 \\ -37 & 5 & -1 & 24 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 53 & 130 & 62 \\ 0 & -106 & -260 & -124 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 53 & 130 & 62 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango es 2.

II. En un sistema incompatible, ¿qué relación hay entre los rangos de las matrices A y A'?

— Si el sistema es incompatible, $ran\,(A) \neq ran\,(A')$.

— Puesto que A' es el resultado de ampliar A con una columna más, el número de vectores columna L. I. es, a lo sumo, una unidad más, es decir $ran\,(A') \leq ran\,(A) + 1$.

— Por tanto, en este caso, es $ran\,(A') = ran\,(A) + 1$.

EJERCICIOS

31. Calcula el rango de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix}$$

Sol.: $ran\,(A) = 3$; $ran\,(B) = 2$.

32. Calcula el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 13 \\ 1 & -2 & 3 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Sol.: $ran\,(A) = 3$; $ran\,(B) = 2$.

33. Calcula a y b para que $ran\,(A) = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 4 & b \end{pmatrix}$$ **Sol.:** $a = 2$, $b = 0$.

34. Calcula a y b para que $ran\,(B) = 1$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 2 & 3 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

Sol.: $a = -\dfrac{3}{2}$; $b = \dfrac{3}{2}$.

35. Calcula el rango de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Sol.: $ran\,(A) = 3$; $ran\,(B) = 3$.

PARA AMPLIAR

El número de filas L. I. de una matriz coincide con el número de columnas L. I.

Lo que viene a continuación no es una demostración general, pues se prueba que una matriz de dimensión 5×4 cuya cuarta columna depende linealmente de las tres primeras, que son L. I., tiene, a lo sumo, tres filas L. I.:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \\ a^{IV} & b^{IV} & c^{IV} & d^{IV} \end{pmatrix}$$

Supongamos que la cuarta columna, **d**, es combinación lineal de las tres primeras:

$$\mathbf{d} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c}$$

Sustituyamos los elementos de la cuarta columna por su expresión en función de los elementos de las tres primeras.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & \alpha\,a + \beta\,b + \gamma\,c \\ a' & b' & c' & \alpha\,a' + \beta\,b' + \gamma\,c' \\ a'' & b'' & c'' & \alpha\,a'' + \beta\,b'' + \gamma\,c'' \\ a''' & b''' & c''' & \alpha\,a''' + \beta\,b''' + \gamma\,c''' \\ a^{IV} & b^{IV} & c^{IV} & \alpha\,a^{IV} + \beta\,b^{IV} + \gamma\,c^{IV} \end{pmatrix}$$

Observa que la primera fila puede ponerse

$$a \cdot (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \alpha) + b \cdot (0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; \beta) + c \cdot (0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; \gamma)$$

Análogamente, la segunda fila se pone

$$a' \cdot (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \alpha) + b' \cdot (0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; \beta) + c' \cdot (0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; \gamma)$$

y lo mismo las otras tres. Las filas se pueden poner todas como combinación lineal de los vectores fila

$$(1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \alpha), \quad (0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; \beta) \quad \text{y} \quad (0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; \gamma).$$

Significa que sólo tres de las cinco filas, a lo sumo, serán L. I. Del mismo modo se probaría que el número de columnas L. I. es menor o igual que el de filas.
Luego el número de filas L. I. coincide con el número de columnas L. I.

EJERCICIOS DEL TEMA

36 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calcula A^2, A^3, A^4 y A^5. *b*) ¿Cómo crees que será A^n? **Sol.:** $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

37 ¿Es posible que dos matrices A y B no cuadradas puedan ser multiplicadas por los dos lados $A \cdot B$ y $B \cdot A$? ¿Qué condición deben cumplir?

38 ¿Cómo debe ser una matriz A para que pueda calcularse A^2?

39 *a*) Demuestra que $A_{m,n} \cdot \mathbf{0}_{n,p} = \mathbf{0}_{m,p}$.

b) ¿Es posible que $A_{m,n} \cdot B_{n,p} = \mathbf{0}_{m,p}$ si $B_{n,p}$ no es la matriz $\mathbf{0}_{n,p}$? Pon un ejemplo.

40 Encuentra la expresión de la potencia *enésima* de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{Sol.: } A^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

41 Calcula A^n $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **Sol.:** $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \binom{n+1}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

42 Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, resuelve el sistema

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases} \qquad \textbf{Sol.: } X = \begin{pmatrix} 8/3 & 5/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \; ; \quad Y = \begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

43 Encuentra las matrices A y B para que se verifiquen las igualdades

$$8A - 5B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}; \quad 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \textbf{Sol.: } A = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 0 \\ 6 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 0 \\ 10 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

44 Calcula el rango de la matriz $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ **Sol.:** $ran\,(A) = 2$.

45 Calcula el rango de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

Sol.: $ran\,(A) = 4$; $ran\,(B) = 4$.

PROPUESTO EN SELECTIVIDAD

46 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *calcular* A^7.

47 *a)* Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 + A = I$. Calcular (simplificada) la matriz $(A + I)^2 - (A + I)$. (I es la matriz unidad.)

b) Hallar todas las matrices simétricas de segundo orden, A, que verifiquen $A^2 = I$. (I es la matriz unidad.)

48 Interpretar geométricamente en R^3 un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas y con el rango de la matriz de sus coeficientes igual a 2.

49 La matriz formada por los coeficientes de las incógnitas, ampliada con los términos independientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, tiene de rango 3. ¿El sistema es necesariamente compatible? Razonarlo.

50 Sea $A = (2\ \ 1\ \ 5)$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Escribir los productos $A \times B$ y $B \times A$.

51 Hallar las matrices A y B cuadradas de segundo orden que verifican:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad 2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

52 Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ y supongamos que $ran(A) \neq ran(B)$. ¿Cuánto vale $ran(B) - ran(A)$? ($ran(A)$ es el rango de A).

53 Determinar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ explicando cómo se ha hecho.

54 Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$. Encontrar una matriz cuadrada triangular B tal que $A = B \cdot B'$. ¿Hay una sola? (Una matriz triangular es de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ y B' es la traspuesta de B).

55 Si la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ¿puede la matriz $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d-a & e+b & f+c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ tener también rango 2? Razónese.

56 Dada una matriz A, ¿existe una matriz B, tal que el producto $A \cdot B$, o bien el $B \cdot A$, sea una matriz de una sola fila? Poner un ejemplo con $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

3 DETERMINANTES

¿Qué determina el determinante de una matriz? En una matriz cuadrada A hay varios aspectos sumamente interesantes que el determinante ayuda a esclarecer de una forma rápida:

1. ¿Existirá una matriz B tal que $AB = I$? Es decir, ¿tendrá A una inversa?
2. De las columnas de A, ¿habrá alguna que sea combinación lineal de las demás?
3. De las filas de A, ¿habrá alguna que sea combinación lineal de las demás?

Como verás en este tema, un único número, llamado el determinante de la matriz A, det (A), obtenido de una forma un tanto enrevesada a partir de los elementos de la matriz, permite contestar a todas estas preguntas:

1. La matriz A tiene inversa cuando, y sólo cuando, $\det(A) \neq 0$.
2. En la matriz A, alguna columna es combinación lineal de las otras cuando, y sólo cuando, $\det(A) = 0$.
3. En la matriz A alguna fila es combinación lineal de las otras cuando, y sólo cuando, $\det(A) = 0$.

Para una matriz no cuadrada, el determinante de las diferentes matrices cuadradas que se pueden formar tomando una parte de sus filas y columnas ordenadamente, caracterizan aspectos esenciales de la matriz, que se refieren al número de filas o columnas que son combinación lineal de otras, lo cual es una información muy importante para la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales asociados a las matrices.

Por esto, la noción y el cálculo del determinante son muy fundamentales en todo el álgebra lineal. Gracias al estudio del determinante de la matriz de coeficientes de un sistema lineal, quedan caracterizados los sistemas con solución única, los que no tienen solución y los que tienen un conjunto infinito de soluciones. Además, como veremos en el tema que sigue, el cálculo de unos cuantos determinantes en la matriz del sistema nos permite despejar directamente cualquiera de las incógnitas del sistema que se desee.

Si las columnas de la matriz A de dimensión 3×3 son vectores en el espacio, el determinante de A nos informa si los extremos de estos vectores están en un plano que pasa por el origen o bien si ellos tres, junto con el origen, son los cuatro vértices de un tetraedro en el espacio.

Determinantes de segundo y tercer orden

Vamos a avanzar algo más en la mecánica de la resolución de sistemas de ecuaciones. Para ello aprenderemos un nuevo instrumento: el *determinante* de una matriz cuadrada.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & a_{11}x + a_{12}y = c_1 \\ (2) & a_{21}x + a_{22}y = c_2\end{array}\right\}$$

podemos proceder así:

$$\left.\begin{array}{lll}(1)\cdot a_{22} & & a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = c_1 a_{22} \\ (2)\cdot a_{12} & & a_{21}a_{12}x + a_{22}a_{12}y = c_2 a_{12}\end{array}\right\}$$

Restando: $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x + 0y = c_1 a_{22} - c_2 a_{12}$

Y despejando: $x = \dfrac{c_1 a_{22} - c_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$

Procediendo de forma similar se obtendría

$$y = \frac{a_{11}c_2 - a_{21}c_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

En esta solución aparecen tres números (el denominador común y los dos numeradores), que asociaremos a tres matrices:

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a_{11} & & & a_{12} \\ & \searrow a_{22} & - & a_{21} \nearrow \end{matrix}$$

$$c_1 a_{22} - c_2 a_{12} \rightarrow \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22}\end{pmatrix} \quad \begin{matrix} c_1 & & & a_{12} \\ & \searrow a_{22} & - & c_2 \nearrow \end{matrix}$$

$$a_{11}c_2 - a_{21}c_1 \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2\end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a_{11} & & & c_1 \\ & \searrow c_2 & - & a_{21} \nearrow \end{matrix}$$

Cada uno de esos números se obtiene de su matriz multiplicando en cruz y restando los resultados. Se llaman **determinantes** de las matrices correspondientes.

El nombre de *determinante* viene del de la matriz de los coeficientes,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

de una ecuación, porque según sea distinto de cero o igual a cero, el sistema tiene solución única o no, es decir, su valor *determina* la característica del sistema.

Para referirnos al determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ lo haremos de una de estas formas:

$$\det A \quad ; \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \quad ; \quad |A| \quad ; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

Las más frecuentes son las dos últimas, en las que el nombre de la matriz, o la propia matriz con todos sus elementos, se ponen entre barras.

El sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 3x - 5y &= 73 \\ 4x + 2y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

da lugar a los determinantes siguientes:

este determinante distinto de 0, ma tiene solución única.

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-5) = 6 + 20 = 26.$$

$$\begin{vmatrix} 73 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 73 \cdot 2 - 2 \cdot (-5) = 146 + 10 = 156.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 73 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 73 = 6 - 292 = - 286.$$

ueba que, ciertamente, estos va- le x e y son la solución del sis-

$$x = \frac{156}{26} = 6$$

$$y = \frac{-286}{26} = -11$$

arrollo de un determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$$

dos sumandos: $a \cdot d$ con signo $c \cdot b$ con signo *menos*.

s nos referiremos, reiteradamente, s justificaciones situadas en los ›nes.

Las siguientes propiedades pueden ser probadas de forma obvia (y te recomendamos que lo hagas) operando con los elementos de la matriz. Sin embargo, los comentarios que pondremos en algunas de ellas, para justificarlas, son de carácter más general, pues pretendemos utilizar argumentos que sean válidos también cuando tratemos con determinantes de orden superior.

1. El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta. Gracias a esto, *podemos hacer extensiva a las columnas toda propiedad relativa a las filas y viceversa*. Eso les ocurre a todas las propiedades siguientes.

en cada uno de los dos sumandos esarrollo del determinante hay un cero.

2. Si una matriz tiene una fila de ceros, su determinante es cero. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

el sumando con signo *más* pasa a signo *menos* y viceversa.

3. Si cambiamos las dos filas de una matriz, su determinante cambia de signo. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 14 = -2 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 12 = 2$$

el sumando con signo *más* coincide el de signo *menos* y se compensan.

4. Si una matriz tiene las dos filas iguales, su determinante es cero. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 35 - 35 = 0$$

⑤ Si multiplicamos cada elemento de una fila de una matriz por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por ese número. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 23 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 5\cdot 4 & 5\cdot 7 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 5\cdot 23 = 5\cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}$$

> Pues cada uno de los dos sumandos queda multiplicado por ese número.

⑥ Si una matriz tiene sus dos filas proporcionales, su determinante es cero. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5\cdot 4 & 5\cdot 7 \end{vmatrix} = 5\cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 5\cdot 0 = 0$$

> $$\begin{vmatrix} a & b \\ K\cdot a & K\cdot b \end{vmatrix} = K\cdot \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = K\cdot 0 = 0$$
>
> por la propiedad ⑤
>
> por la propiedad ④

⑦ Si una columna de una matriz es suma de dos, su determinante puede descomponerse en la suma de los determinantes de dos matrices del siguiente modo:

$$\begin{vmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$$

> $$\begin{vmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{vmatrix} = (a+a')\,d - (c+c')\,b =$$
> $$= (ad-cb) + (a'd-c'b) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$$

⑧ Si a una columna de una matriz le sumamos la otra columna multiplicada por un número, el determinante de la matriz no se altera. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+7\cdot 5 & 7 \\ 3+11\cdot 5 & 11 \end{vmatrix} \quad \text{(Compruébalo.)}$$

> $$\begin{vmatrix} a+K\cdot b & b \\ c+K\cdot d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K\cdot b & b \\ K\cdot d & d \end{vmatrix} =$$
> $$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$
>
> por la propiedad ⑦
>
> por la propiedad ⑥

Dete[illegible]

Los determinantes de orden 3 surgen, de forma análoga a los de orden 2, de un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & = & c_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & + & a_{23}z & = & c_2 \\ a_{31}x & + & a_{32}y & + & a_{33}z & = & c_3 \end{array}\right\}$$

En él se puede despejar cada una de las incógnitas eliminando las otras dos. Se obtienen así, mediante un camino *muy largo y engorroso*, como se indica en el margen, unas expresiones del tipo

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad , \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad , \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

en los cuales Δ es:

$$a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23} -$$
$$- a_{31}\,a_{22}\,a_{13} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33} - a_{11}\,a_{32}\,a_{23}$$

Esta larga lista de sumandos, cada uno con tres factores y un signo, la podemos asociar a la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

del siguiente modo:

> El alumno aficionado a las matemáticas y con una pertinacia a prueba de bomba, puede despejar la z del siguiente modo:
>
> $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{pmatrix}$$
>
> $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} & a_{11}c_2 \\ a_{11}a_{31} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} & a_{11}c_3 \end{pmatrix}$$
>
> Si a la segunda fila de esta segunda matriz se le resta la primera multiplicada por a_{21} se consigue una nueva matriz (a^*_{ij}) para la cual $a^*_{21} = 0$. Análogamente se puede conseguir que $a^*_{31} = 0$.
> En la nueva matriz
>
> $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} & c_1 \\ 0 & a^*_{22} & a^*_{23} & c^*_2 \\ 0 & & a^*_{33} & c^*_3 \end{pmatrix}$$
>
> podemos hacer un cero en el elemento señalado procediendo de forma similar. Se llega así a una nueva matriz cuya última fila permite despejar z. En su denominador aparece Δ.
>
> Si además de la z, quieres despejar la x y la y, ... ¡allá tú!

- **En cada producto hay un factor de cada fila y uno de cada columna.** Compruébalo viendo que en cada producto hay tres elementos, de los cuales los segundos subíndices son siempre 1, 2 y 3, dados en este orden, y los primeros subíndices son también 1, 2, 3, dados en órdenes cualesquiera.

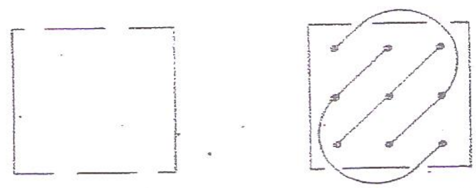
- **Están todos los posibles productos formados siguiendo la regla anterior.** Compruébalo viendo que los primeros subíndices forman todas las permutaciones de 1, 2, 3:

  123 , 132 , 213 , 231 , 312 y 321

> Permutaciones de un conjunto son todas las posibles ordenaciones que podemos formar con sus elementos. En este caso hay 6 sumandos porque
>
> $P_3 = 3! = 6$

- **La mitad de ellos tienen signo *más*, la otra mitad signo *menos*.**

Para recordar los seis factores con sus signos, se utiliza la siguiente regla **(Regla de Sarrus):**



PRODUCTOS CON SIGNO + PRODUCTOS CON SIGNO −

Las 8 propiedades que enunciábamos para determinantes de orden 2, son válidas para los de orden 3. Sólo hay que hacer levísimas modificaciones. (Por ejemplo, cuando se habla de una fila y *la otra fila*, habrá que decir, simplemente, *otra fila*.) Algo parecido cabe decir de las justificaciones de las propiedades: sólo hay que modificar expresiones del tipo *los dos sumandos* y decir *los sumandos*.

Es un buen ejercicio, antes de seguir leyendo, que enuncies esas 8 propiedades, y las justifiques de forma válida para determinantes de orden 3.

Hemos de dar otras dos propiedades muy importantes. Pero para ello, antes se necesitan algunos nuevos conceptos.

> $$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \rightarrow \\ \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 3 & & & 8 & \\ 1 & 7 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & & & 1 & \\ 4 & & & 5 & \end{pmatrix} \end{array}$$
>
> En esta matriz 4×5 hemos seleccionado un menor de orden 3. Su valor es
>
> $$\begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -15$$

Si en una matriz $m \times n$ seleccionamos r filas y r columnas ($r \leq m$ y $r \leq n$), se forma una submatriz cuadrada de orden r. El determinante de esa submatriz se llama **menor** de la matriz inicial.

Si la matriz inicial es cuadrada, $n \times n$, se puede obtener un menor de orden $n - 1$ suprimiendo la fila y la columna de un cierto elemento. Se le llama **menor complementario** del elemento en cuestión. Al menor complementario del elemento a_{ij} lo designaremos por α_{ij}.

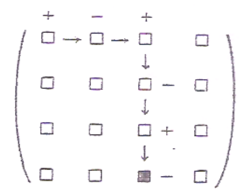
Se llama **adjunto** de un elemento a_{ij}, y se designa por A_{ij}, al número $(-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$. Es decir, el adjunto de un elemento es igual a su menor complementario con su signo o con signo cambiado según que $i + j$ (la suma de los índices de su fila y su columna) sea par o impar.

> $$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 & 11 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & \boxed{-1} & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$
>
> El menor complementario de $a_{32} = -1$ es
>
> $$\alpha_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 198 \ ;$$
>
> Su adjunto $A_{32} = (-1)^{3+2}\, \alpha_{ij} = -198$.

En la práctica, para decidir el signo del adjunto de un elemento, es muy cómoda la siguiente regla:

+	−	+
−	+	⊖
+	−	+

En el cuadro aparece el signo que corresponde a cada lugar. Pero si quisiéramos saber el signo correspondiente al lugar señalado con un círculo, sin necesidad de construir la tabla de signos, iríamos recorriendo los elementos, desde el primero hasta el señalado, en dirección horizontal o vertical (nunca oblicua), diciendo *«más, menos, más, menos, ...»*. En cada lugar se dice el signo correspondiente.



Al elemento señalado le corresponde signo menos. Quiere decir que su adjunto es su menor complemento **cambiado de signo.**

Esta regla es válida para determinantes de cualquier orden.

A las ocho propiedades anteriores vamos a añadir estas dos:

⑨ **Si los elementos de una fila (o columna) se multiplican por sus respectivos adjuntos y se suman los resultados, se obtiene el determinante de la matriz inicial.** Por ejemplo, para la segunda fila:

Se dice que el determinante **está desarrollado** por los elementos de esa línea.

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = |A|$$

Determinante desarrollado por la segunda fila.

Demostración

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} =$$

$$= a_{21}\cdot(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{22}\cdot(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) + a_{23}\cdot(a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32}) =$$

$$= -a_{21}\cdot(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{22}\cdot(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{23}\cdot(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) =$$

$$= -a_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.$$

NOTA: Se podía haber razonado de forma más general del siguiente modo, que da idea de cómo se procede para determinantes de orden mayor:

Puesto que en $|A|$ están todos los posibles productos de tres elementos, uno de cada fila y de cada columna, si sacamos factor común a_{21}, estará multiplicado por todos los posibles productos de dos factores en los que no intervenga ni la segunda fila ni la primera columna. Es decir, α_{21}. (Este razonamiento debería completarse viendo que cada sumando tiene el signo que le corresponde.)

10. **Si los elementos de una fila (o columna) se multiplican por los respectivos adjuntos de otra, el resultado de la suma es 0.** Por ejemplo:

$$a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} = 0$$

Estas dos propiedades son, también, válidas para determinantes de orden 2, pero resultan ridículas en ese contexto, pues el adjunto de cada elemento es, simplemente, otro elemento con su signo o con el signo cambiado.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\alpha A_{31} + \beta A_{32} + \gamma A_{33} =$$

$$= \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - \beta \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + \gamma \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

Si α, β, γ son, respectivamente, a_{21}, a_{22}, a_{23}, el determinante final tiene la segunda y la tercera filas iguales. Es, por tanto, 0.

EJERCICIOS RESUELTOS

Calcular el valor de los siguientes determinantes:

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ Es cero porque tiene una fila de ceros.

$\begin{vmatrix} 2 & 20 \\ 5 & 50 \end{vmatrix} = 0$ Es cero porque sus dos columnas son proporcionales.

$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} = 33 - 35 = -2.$

$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 71 \\ 2 & 5 & 25 \\ 3 & 7 & 37 \end{vmatrix} = 0$ Es cero porque la tercera columna se obtiene multiplicando la primera por 10 y sumándole la segunda.

$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 - 24 - 140 - 9 = -168.$

$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -70$ Cuando una matriz cuadrada está puesta en forma escalonada (o triangular), su determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal (como podemos comprobar).

Calcular el determinante $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 17 \\ 4 & 13 & -2 \\ 1 & -6 & 3 \end{vmatrix}$ desarrollando por una de sus líneas. Calcularlo, también, haciendo el desarrollo por otra línea distinta de la anterior.

Desarrollando por los elementos de la primera columna:

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 13 & -2 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 17 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 17 \\ 13 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 27 - 4 \cdot 105 + 1 \cdot (-223) = -562.$$

Desarrollando por los elementos de la segunda fila:

$$-4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 17 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} + 13 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 17 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -4 \cdot 105 + 13 \cdot (-8) + 2 \cdot (-19) = -562.$$

Se obtiene el mismo resultado, como era de esperar. Al mismo se llegaría si desarrolláramos por cualquier otra línea, o lo calculáramos por la regla de Sarrus.

EJERCICIOS

1. Calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 3 & 33 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 373 & 141 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Sol.: 17, 0 y 0, respectivamente.

2. Calcula:

$$a) \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad ; \quad b) \begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix}$$

3. Calcula:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 45 & 10 & 37 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

Sol.: 0, 0 y -114, respectivamente.

4. Calcula el valor de:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 10 & 497 & 1\,533 \\ 0 & 10 & 8\,931 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

Sol.: 2; 1 000.

5. Calcula el siguiente determinante desarrollándolo por varias de sus líneas y por la regla de Sarrus, y comprueba que obtienes, siempre, el mismo resultado:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 10 \end{vmatrix}$$

Sol.: 135.

Calcula el valor de los determinantes propuestos en los siguientes ejercicios:

6. $$a) \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad ; \quad b) \begin{vmatrix} 4 & 3 & 14 \\ -1 & 7 & 12 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Sol.: a) 5; b) 0.

7. $$a) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad ; \quad b) \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 6 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

Sol.: a) 0; b) 48.

8. $$a) \begin{vmatrix} 9 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad b) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Sol.: a) 7; b) -6.

9. $$a) \begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad ; \quad b) \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Sol.: a) 3; b) 14.

10. $$a) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad b) \begin{vmatrix} 3 & 0 & -740 \\ 4 & 0 & 820 \\ 1 & 0 & 384 \end{vmatrix}$$

Sol.: a) -42; b) 0.

11. $$a) \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad ; \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & 0 \\ -2 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Sol.: a) 54; b) 126.

12. $$a) \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad ; \quad b) \begin{vmatrix} -1 & 19 & 9 \\ -2 & 38 & 6 \\ -3 & 57 & 9 \end{vmatrix}$$

Sol.: a) 31; b) 0.

13. $$a) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad b) \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Sol.: a) 11; b) 13.

14. Expresa como determinante de orden 2 la igualdad $sen^2 x + cos^2 x = 1$.

15. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

calcula, sin desarrollar:

$$a) \begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad ; \quad b) \begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad ;$$

$$c) \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$$

Sol.: a) 3; b) 1; c) 1.

16. Comprueba la igualdad

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ 2x & x+y & 2y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-y)^3$$

17. Comprueba la igualdad

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)\,(c-b)\,(c-a)$$

18. Prueba, sin desarrollar, que

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

19. Prueba que el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 \\ 4 & 6 & 8 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 13 (sin desarrollarlo y teniendo en cuenta que 299, 468 y 741 son múltiplos de 13.

20. Prueba que se verifican las siguientes igualdades:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos 2\alpha \\ \cos\alpha & \cos 2\alpha & \cos 3\alpha \\ \cos 2\alpha & \cos 3\alpha & \cos 4\alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} tg\ a & sec\ a \\ sec\ a & tg\ a \end{vmatrix} = -1\ ;$$

$$\begin{vmatrix} \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos a \end{vmatrix} = sen^2 a\ ;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -sen\ \alpha \\ 0 & sen\ \alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1$$

Qué signo deve [illegible] que [illegible] determinante

En los determinantes de orden 2 y en los de orden 3 se han dado unas reglas fácilmente visualizables (producto en cruz, Sarrus, ...) para recordar qué sumandos intervienen y qué signos se les asocia.

Para que puedan ser generalizadas a determinantes de dimensión superior se necesitan reglas *menos plásticas*, más algebraicas. Tenemos una buena regla para saber qué sumandos intervienen: *todos los posibles productos de tres elementos que se pueden conseguir de modo que haya uno de cada fila y uno de cada columna*. En los determinantes de orden 2 hay, obviamente, dos. En los de orden tres, los sumandos son productos del tipo $a_{\alpha 1}\, a_{\beta 2}\, a_{\gamma 3}$, donde α, β y γ son los índices de las filas 1ª, 2ª y 3ª, dados en un orden cualquiera. Habrá, pues, tantos sumandos como permutaciones pueden hacerse con los elementos 1, 2, 3. Es decir, seis.

¿Y cómo asignar signo + ó − a cada uno de esos sumandos? Para ello sigamos con la idea de las permutaciones de los índices de las filas. Si los tres factores de cada sumando están ordenados según el índice de sus respectivas columnas, $a_{\alpha 1}\, a_{\beta 2}\, a_{\gamma 3}$, a cada sumando le corresponde una permutación: la de los índices de sus respectivas filas ($a_{\alpha 1}\, a_{\beta 2}\, a_{\gamma 3}$ α, β, γ).

En cada permutación vamos a contar cuántas discordancias hay con el orden natural. Por ejemplo:

2 1 3 : el 2 y el 1 están cambiados. Hay 1 inversión.

3 1 3 : el 3 está cambiado con 1 y con 2. Hay 2 inversiones.

2 3 1 : 2 con 1 y 3 con 1. Hay 2 inversiones.

Según esto hay permutaciones con un número par de inversiones: las llamaremos *de clase par*. Las otras son *de clase impar*.

Pues bien, volviendo a los determinantes, el sumando

$$a_{\alpha 1}\, a_{\beta 2}\, a_{\gamma 3}$$

tendrá signo + ó − según que la permutación $\alpha\, \beta\, \gamma$ sea, respectivamente, de clase par o impar.

Complicado, ¿verdad? Pero, por fortuna, de estas definiciones complicadas se deducen unas leyes sencillas, de modo que, finalmente, el cálculo de determinantes será algo fácil y mecánico.

Comprueba que en las definiciones de determinantes de orden 2 y de orden 3, los signos de cada producto responden a esta regla.

Determinantes de orden cualquiera

Profundizamos en el estudio de determinantes definiendo y aprendiendo a calcular los de orden cualquiera.

El determinante de una matriz de dimensión $n \times n$

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

es el resultado de sumar todos los posibles productos de n elementos, uno de cada fila y de cada columna, con su signo o con el signo cambiado según un cierto criterio.

De esta definición, que en esencia es la misma que se dio para determinantes de órdenes 2 y 3, se deducen las 10 propiedades anteriores. La idea de cada demostración es la misma que allí aparecía. Su concreción para que sean rigurosamente válidas requiere, en algunos casos, precisión en el manejo de algunos tecnicismos, por lo que prescindiremos de ellas.

Ahora vamos a ver cómo, a partir de esas propiedades, se deducen ciertas estrategias de cálculo por las que se puede obtener, con sencillez, un determinante cualquiera.

Para determinantes de órdenes 2 y 3 disponemos de reglas con las que el cálculo se efectúa con toda comodidad.

Un determinante de orden 4, desarrollado según la definición, tiene $4! = 24$ sumandos, cada uno de los cuales es un producto de 4 factores. Terrible. Si pretendemos calcularlo basándonos en la propiedad ⑨, nos encontramos en la necesidad de calcular cuatro determinantes de orden 3, salvo que tengamos la fortuna de que haya algunos ceros en una misma línea.

El desarrollo de un determinante de orden 4 por los elementos de una línea da lugar a varios determinantes de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 & 8 \\ & & & \\ 4 & 1 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 & 8 \\ 1 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} + -7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

El hecho de que haya un 0 en esa fila nos ha ahorrado un determinante de orden 3.

La idea del método que vamos a exponer es precisamente esa, pues si no tenemos ceros, *¡los fabricamos!* Ya sabemos cómo *hacer ceros* en la matriz asociada a un sistema de ecuaciones. En los determinantes, gracias a su propiedad ⑧ se puede proceder de forma muy parecida. Veámoslo sobre algunos ejemplos.

Si a una línea de una matriz le sumamos otra paralela multiplicada por un número, su determinante no varía.

EJEMPLOS

El siguiente determinante lo vamos a desarrollar por la columna señalada, aprovechando que:

— ya hay un cero;

— hay un 1 que permite *hacer más ceros*.

$$\begin{vmatrix} 7 & & 1 & 9 \\ 2 & & 6 & 3 \\ 5 & & 6 & 11 \\ -1 & & 2 & 8 \end{vmatrix} \overset{1^a - 4 \times 3^a}{\underset{4^a - 7 \times 3^a}{=}} \begin{vmatrix} -13 & 0 & -23 & -35 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ 5 & & 6 & 11 \\ -36 & 0 & -40 & -69 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -13 & -23 & -35 \\ 2 & 6 & 3 \\ -36 & -40 & -69 \end{vmatrix} = 1\,628$$

siguiente determinante lo vamos a desarrollar por los elementos de la última columna porque ya tiene dos eros.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} 3^a + 2 \times 2^a \\ = \\ 5^a + 3 \times 2^a \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -1 & \\ 11 & 7 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 16 & 3 & 11 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 11 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 16 & 3 & 11 \end{vmatrix} \begin{array}{c} 1^a + 4^a \\ 2^a + 3 \times 3^a \\ = \\ 4^a + 2 \times 3^a \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 17 & 6 & 6 & 0 \\ 14 & 10 & 13 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & \\ 18 & 5 & 17 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 17 & 6 & 6 \\ 14 & 10 & 13 \\ 18 & 5 & 17 \end{vmatrix} \overset{\substack{1^a - 3 \times 2^a; \\ 3^a - 2^a}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 6 & 0 \\ -16 & 10 & 3 \\ 3 & 5 & 12 \end{vmatrix} \overset{2^a + 6 \times 1^a}{=} - \begin{vmatrix} & 0 & 0 \\ -16 & -86 & 3 \\ 3 & 23 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -86 & 3 \\ 23 & 12 \end{vmatrix} = -1\ 101$$

Este paso se da, fundamentalmente, para *fabricar* un -1 en la primera casilla, que sirva como base para *hacer ceros* en esa línea. Ya ves que en los determinantes 3×3, también puede convenir *hacer ceros*.

EJERCICIOS

21. Calcula el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Sol.: -295.

22. Calcula

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Sol.: 12.

23. Calcula el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Sol.: $(x + 1)^4$.

24. Halla el valor correspondiente a

$$\begin{vmatrix} 15 & 1 & 14 & 4 \\ 6 & 12 & 7 & 9 \\ 10 & 8 & 11 & 15 \\ 3 & 13 & 12 & 16 \end{vmatrix}$$

Sol.: $-9\ 240$.

25. Desarrolla *haciendo ceros* previamente

$$\begin{vmatrix} m & m & m & m \\ m & c & c & c \\ m & c & b & b \\ m & c & b & a \end{vmatrix}$$

Sol.: $m(c - m)(b - c)(a - b)$.

26. Desarrolla:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d+e & e+c & c+d \\ d\cdot e & e\cdot c & c\cdot d \end{vmatrix}$$

Sol.: $(c - d)(c - e)(d - e)$.

27. Prueba, sin desarrollarlo, que el determinante siguiente es nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}$$

Sol.: Restando a cada fila la anterior, empezando por abajo, se obtienen, al menos, dos filas iguales; con lo que el determinante es nulo.

28. Calcula el valor correspondiente:

$$\begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \binom{3}{0} & \binom{4}{0} \\ \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \binom{5}{1} \\ \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \binom{5}{2} & \binom{6}{2} \\ \binom{3}{3} & \binom{4}{3} & \binom{5}{3} & \binom{6}{3} & \binom{7}{3} \\ \binom{4}{4} & \binom{5}{4} & \binom{6}{4} & \binom{7}{4} & \binom{8}{4} \end{vmatrix}$$

Sol.: 1.

El rango de una matriz y los determinantes

Rango de una matriz, recordémoslo, es el número de filas linealmente independientes, que coincide con el número de columnas linealmente independientes.

Vamos a aprender a obtener el rango de una matriz a partir de sus menores.

Ahora pretendemos utilizar lo que sabemos sobre los determinantes para el cálculo del rango de una matriz. Para ello debemos preguntarnos qué tiene que ver el valor de un determinante con el hecho de que sus líneas sean linealmente dependientes (L. D.) o linealmente independientes (L. I.). Conocemos un resultado:

Si una fila de una matriz es combinación lineal de las restantes, el determinante de la matriz es cero.

Pues en ese caso el determinante puede descomponerse en suma de otros, todos los cuales tienen dos filas proporcionales. Cada uno de ellos es cero y, por tanto, su suma también.

El enunciado recíproco a éste se puede formular así:

Si las filas de una matriz cuadrada son L. I., su determinante es distinto de cero.

Para probarlo, hagamos ceros en una matriz A hasta dejarla en forma triangular, A^*. Las transformaciones por las que se llega a esta situación son:

- Cambiar el orden de las filas.
- Cambiar el orden de las columnas.
- Multiplicar una fila por un número $K \neq 0$.
- Sumarle a una fila el resultado de multiplicar otra por un número.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & a^*_{13} & \dots & a^*_{1n} \\ 0 & a^*_{22} & a^*_{23} & \dots & a^*_{2n} \\ 0 & 0 & a^*_{33} & \dots & a^*_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a^*_{nn} \end{pmatrix}$$

El determinante de la segunda matriz es

$$a^*_{11} \cdot a^*_{22} \cdot a^*_{33} \cdot \dots \cdot a^*_{nn}$$

Observa que esas transformaciones afectan al determinante de la matriz del siguiente modo:

- Lo dejan igual o le cambian el signo.
- Lo multiplica por K.
- Lo deja igual.

En definitiva: $|A| \neq 0 \Leftrightarrow |A^*| \neq 0$.

Por tanto:

$$\text{Las filas de } A \text{ son L. I.} \Leftrightarrow \text{Las filas de } A^* \text{ son L. I.} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^*_{11},\ a^*_{22},\ a^*_{33},\ \dots,\ a^*_{nn}, \text{ son todas no nulas } \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |A^*| = a^*_{11} \cdot a^*_{22} \cdot a^*_{33} \cdot \dots \cdot a^*_{nn} \neq 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0.$$

Observa que en una matriz cuadrada de forma triangular su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal:

$$a^*_{11} \cdot a^*_{22} \cdot a^*_{33} \cdot \dots \cdot a^*_{nn}$$

Podemos decir, pues, que **la condición necesaria y suficiente para que un determinante sea distinto de 0 es que sus filas (y sus columnas) sean L. I.**

O lo que es equivalente:

La condición necesaria y suficiente para que un determinante sea cero es que sus filas sean linealmente dependientes, es decir, que alguna fila se pueda poner como combinación lineal de las demás.

La condición anterior da la posibilidad de una nueva definición de rango de una matriz cualquiera:

Rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos.

La matriz $\begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -1 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -15 & 10 \end{pmatrix}$

es de rango 3 porque tiene algún menor de orden 3 no nulo y los menores de orden 4 son todos nulos. Compruébalo.

Para calcular el rango de una matriz, como es lógico, no hay que empezar por obtener todos sus menores: esto sería una tarea larguísima. A título de curiosidad, digamos que una matriz 4×5 tiene 5 menores de orden 4, 40 menores de orden 3 y 60 de orden 2, aparte de los 20 números, que son los menores de orden 1. Veamos sobre un ejemplo cómo se puede proceder para el cálculo del rango de una matriz de forma rápida.

EJERCICIOS RESUELTOS

I. Calcular el rango de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -2 & 7 & 0 \\ 3 & 11 & 4 & 5 & 18 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ & -1 & & 7 & 0 \\ 3 & 11 & 4 & 5 & 18 \end{pmatrix}$$

Empezamos por destacar un menor de orden 2 no nulo (esto se hace *a ojo*). Procuramos, también, que sea lo más fácil posible. Está señalado en rojo. Esto nos garantiza que las dos primeras filas son L. I.

Veamos si la tercera depende linealmente de ellas o no. Para ello, añadimos los elementos -3 y -2 (en azul) y calculamos los siguientes determinantes de orden 3.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \ ; \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0 \ ; \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2ª col. 4ª col. 5ª col.

El que estos tres determinantes sean cero significa que las columnas señaladas son combinación lineal de las otras dos. Por tanto, la submatriz formada por las tres primeras es de rango 2. Significa que la tercera fila es combinación lineal de las otras dos. Y la tachamos.

A continuación hacemos con la cuarta fila lo que se ha hecho con la tercera: incluimos los elementos que completan las dos columnas básicas y formamos menores de orden 3:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ \cancel{-3} & \cancel{-1} & \cancel{-2} & \cancel{7} & \cancel{0} \\ & 11 & & 5 & 18 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ & -11 & \end{vmatrix} = 0 \ ; \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ & & 5 \end{vmatrix} = 0 \ ; \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ & & 18 \end{vmatrix} = 0$$

La cuarta fila es también combinación lineal de las dos primeras. La matriz es, pues, de rango 2.

II. Calculemos el rango de la matriz 4×5 que aparece arriba, en el margen izquierdo.

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -1 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -15 & 10 \end{pmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ ; \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -105$$

Hay un menor de orden 3 distinto de 0. El rango es, al menos, 3. Veamos si es 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -1 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ & & 5 & & 10 \end{pmatrix}$$

Ampliamos las tres columnas del menor de orden 3 no nulo, con un nuevo elemento de la cuarta fila.

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 10 & 5 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 15 & 8 & 6 \\ 2 & 15 & 8 & -1 \\ 1 & 15 & 8 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & 8 & 6 \\ 15 & 8 & -1 \\ 15 & 8 & -15 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 10 & -15 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & -15 & 22 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 3 & -15 & 22 \end{vmatrix} = 0$$

Con esto podemos asegurar que la cuarta fila es combinación lineal de las otras tres y, por tanto, que no habrá ningún menor de orden 4 distinto de 0. El rango es 3.

EJERCICIOS

Calcula el rango de las matrices propuestas en los siguientes ejercicios:

29. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **Sol.:** 4.

30. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ **Sol.:** 3.

31. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 5 & 11 \\ 5 & 6 & 9 & 11 \end{pmatrix}$ **Sol.:** 3.

32. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix}$ **Sol.:** 3.

33. $\begin{pmatrix} a & a+r & a+2r \\ a+3r & a+4r & a+5r \\ a+6r & a+7r & a+8r \end{pmatrix}$ $r \neq 0$. **Sol.:** 2.

34. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & 9 & 0 & -3 & -3 \\ -4 & -2 & 6 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 1/2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

35. *a*) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$; *b*) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; *d*) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

Sol.: *a*) 2; *b*) 3.
c) 2; *d*) 3.

36. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Sol.: Si n es par, el rango es n. Si n es impar, el rango es $n-1$.

37. ¿Qué condición deben cumplir los términos a, b, c y d para que el rango de

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ x & b & 0 & 0 \\ y & x & c & 0 \\ r & t & z & d \end{pmatrix}$$

sea 3?

Sol.: Alguno de ellos debe ser nulo.