Razones Trigonométricas en un Triángulo Rectángulo

Elaborado por: ALEX BRAVO

1 Introducción

El presente documento tiene como finalidad estudiar las relaciones que existen entre las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos de un triángulo.

Debemos tener presente que **NO** vamos a estudiar el concepto de *función trigonométrica*, puesto que para un mejor abordaje del mencionado tema, es necesario tener presente la noción de razón trigonométrica. Una vez aclarado eso, nuestro objetivo es realizar un estudio de las razones trigonométricas de ángulos agudos de un triángulo rectángulo y poner en práctica con un listado de ejercicios.

Presentamos a continuación, la siguiente definición:

Definición 1.1 (Razones trigonométricas de un ángulo agudo)**.** *Dado un ángulo agudo $\angle A$ de un triángulo rectángulo cualquiera. Entonces:*

1. *El **SENO** es el cociente entre las longitudes del cateto opuesto al ángulo $\angle A$ del triángulo rectángulo y su hipotenusa. A este cociente, lo vamos a representar por* $\operatorname{sen}\angle A$.
2. *El **COSENO** es el cociente entre las longitudes del cateto adyacente al ángulo $\angle A$ del triángulo rectángulo y su hipotenusa. A este cociente, lo vamos a representar por* $\cos\angle A$.
3. *La **TANGENTE** es el cociente entre las longitudes del cateto opuesto y el cateto adyacente al ángulo $\angle A$ del triángulo rectángulo. A este cociente, lo vamos a representar por* $\tan\angle A$.

Ahora, motivados por la existencia de los inversos multiplicativos de números reales positivos, tenemos la siguiente definición:

Definición 1.2 (Cotangente, secante y cosecante de un ángulo agudo)**.** *Dado un ángulo agudo $\angle A$, la **cotangente** de $\angle A$, que vamos a representar por $\cot\angle A$, es el inverso multiplicativo de $\tan\angle A$, es decir,*

$$\cot\angle A = \frac{1}{\tan\angle A}.$$

*La **secante** de $\angle A$, que vamos a representar por* $\sec\angle A$*, es el inverso multiplicativo de* $\cos\angle A$*, es decir,*

$$\sec\angle A = \frac{1}{\cos\angle A}$$

*Finalmente, la **cosecante** de $\angle A$, que vamos a representar por* $\csc\angle A$*, es el inverso multiplicativo de* $\operatorname{sen}\angle A$*, es decir,*

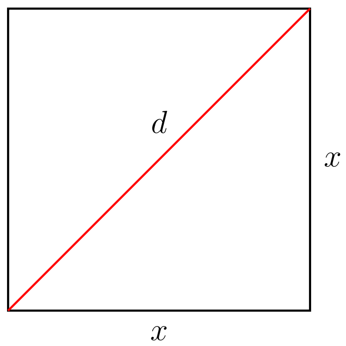
$$\csc\angle A = \frac{1}{\operatorname{sen}\angle A}$$

Observación. La definición anterior es posible pues para cualquier ángulo agudo θ, se verifica que

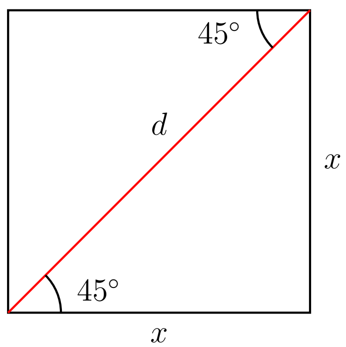
$$0 < \operatorname{sen}\theta < 1, \quad 0 < \cos\theta < 1 \quad \text{y} \quad \tan\theta > 0.$$

Con la finalidad de tener una mejor comprensión del tema, a continuación presentamos dos ejercicios con su resolución:

Ejercicio 1. El objetivo del siguiente ejercicio es deducir el valor del seno, coseno y tangente de cualquier ángulo que mida 45°. Para ello, consideremos un cuadrado de lado x y diagonal d, como se muestra en la figura:



Solución. Notemos que la diagonal divide al cuadrado en dos triángulos isósceles, es decir, triángulos rectángulos donde los dos ángulos agudos son de 45°.



Usando el Teorema de Pitágoras, observamos que

$$d = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}x,$$

pues es claro que $x > 0$. Por tanto, por definición de las razones trigonométricas y dado que $x > 0$ (pues es una longitud), tenemos que

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{x}{d} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Así mismo,

$$\cos 45^\circ = \frac{x}{d} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Y finalmente, se tiene que

$$\tan 45^\circ = \frac{x}{x} = 1.$$

□

Ejercicio 2. Si se conoce que la longitud de uno de los catetos de un triángulo rectángulo es un octavo de la longitud de la hipotenusa. Encontrar el valor de la *cotangente* de uno de los ángulos agudos del triángulo.

Solución. Si denotamos por z la longitud del cateto del problema, entonces la hipotenusa mide $8z$. De este modo, si θ es el ángulo opuesto al cateto cuya longitud es z, se sigue que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{z}{8z} = \frac{1}{8},$$

pues $z > 0$. Ahora, usando el Teorema de Pitágoras, encontramos el valor del cateto adyacente del ángulo θ, cuyo valor es

$$\sqrt{(8z)^2 - z^2} = \sqrt{63z^2} = 3\sqrt{7}z$$

Por tanto,

$$\tan\theta = \frac{z}{3\sqrt{7}z} = \frac{1}{3\sqrt{7}}.$$

Finalmente, dado que la cotangente es el inverso multiplicativo de la tangente, concluimos que

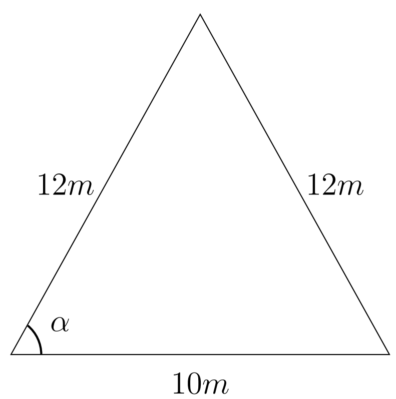
$$\cot\theta = 3\sqrt{7}.$$

□

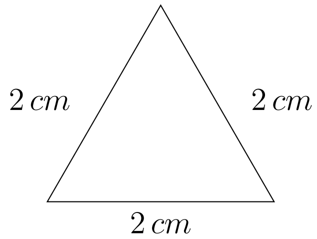
En la siguiente sección se presentan un listado de 10 ejercicios, cuya finalidad es poner en práctica la teoría aprendida sobre las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

2 Ejercicios propuestos

1. La siguiente figura representa a un triángulo isósceles. Encontrar el valor del ángulo α indicado.

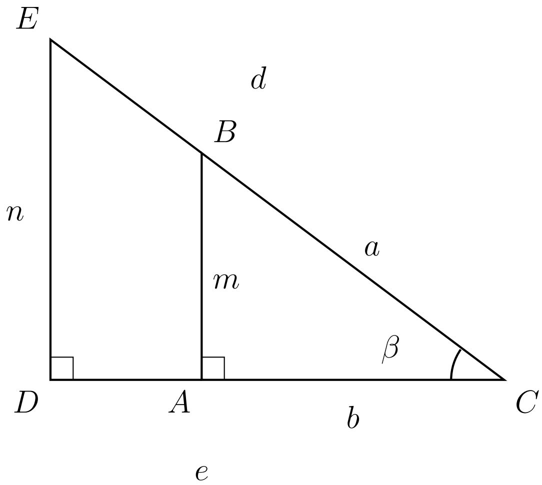


2. El objetivo del siguiente ejercicio es deducir las principales razones trigonométricas para los ángulos de 30° y 60°. Para ello, considere la siguiente figura:



- Trazar la altura del triángulo.
- Calcular el valor de dicha altura.
- Calcular el valor del sen, cos y tan de los ángulos de 30° y 60°.

3. Dados los triángulos rectángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ECD$. ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde a la definición de seno del ángulo β? Justifique por completo su respuesta.

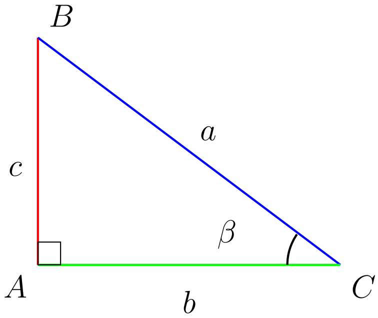


a) $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{e}{d}$ y $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{b}{a}$.

b) $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{n}{d}$ y $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{m}{a}$.

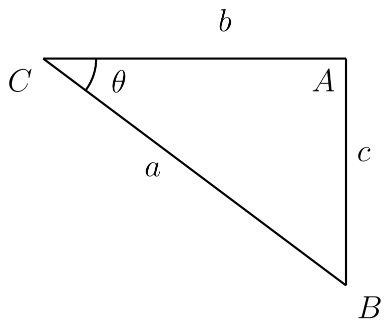
c) $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{m}{b}$ y $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{n}{e}$.

4. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa la definición de *tangente* del ángulo β dado el triángulo $\triangle ABC$? Justifique su respuesta.

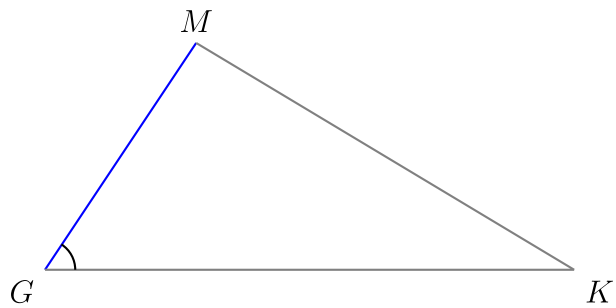


(a) $\frac{b}{a}$
(b) $\frac{b}{c}$
(c) $\frac{c}{b}$

5. Si la *cosecante* del ángulo θ es $\left(\frac{b}{c}\right)$, dado el triángulo $\triangle BCD$, ¿cuál es el valor de *seno* del ángulo θ?

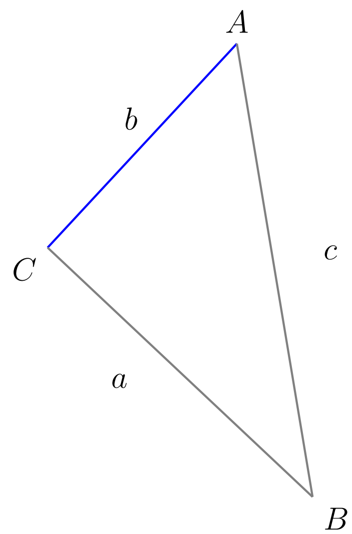


6. Determinar la altura correspondiente al lado GK del triángulo $\triangle GMK$, si se conoce que $GM = 15$ y $\cos \angle G = 0{,}8$.



7. Encontrar la longitud del cateto adyacente y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, si se conoce que la razón trigonométrica $\operatorname{sen} \angle A = \frac{3}{5}$ y la longitud del cateto opuesto a $\angle A$ es 9.

8. Considere la siguiente figura cuyo ángulo recto es en C. Calcular las razones trigonométricas sen, cos y tan del ángulo A, si el lado $c = 12cm$ y el lado $b = 7cm$



El objetivo de los siguientes ejercicios es mostrar la aplicación de las razones trigonométricas en problemas prácticos:

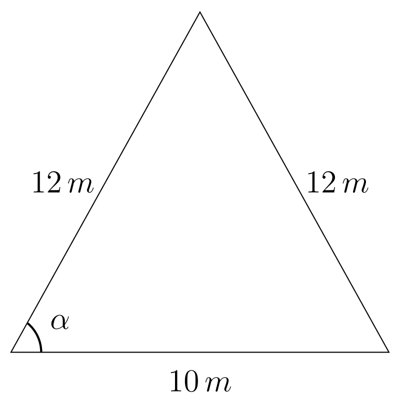
9. Suponga que un individuo se ubica a $5\,m$ de la base de un edificio y el ángulo con el que observa la parte más alta de una torre es de $32°$. Calcular la altura de la torre, si la persona tiene una estatura de $1,72\,m$.

10. Desde una determinada distancia, una bandera situada en la parte superior de una torre se observa con un ángulo de elevación de $50°$. Si nos acercamos $18\,m$ en dirección de la torre, la bandera se logra observar ahora con un ángulo de elevación de $80°$. Calcular la altura a la que se encuentra la bandera.

Para finalizar la presentación, se muestra una solución alternativa a los ejercicios.

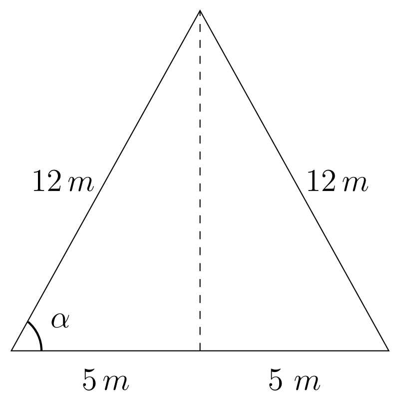
3 Solución de los ejercicios propuestos

1. La siguiente figura representa a un triángulo isósceles. Encontrar el valor del ángulo indicado.

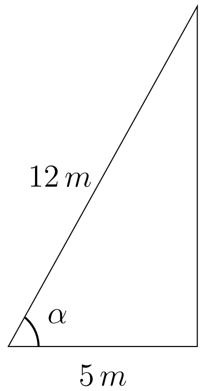


Solución. Es importante tener en cuenta las propiedades de un triángulo isósceles, es por ello que procedemos de la siguiente manera:

(a) Trazamos la altura del tríangulo, lo cual nos va a permitir obtener en la base dos segmentos de igual longitud, en este caso de $5m$ cada uno, como se muestra en la imagen a continuación.



(b) Observamos que hemos obtenido dos triángulos rectángulos, nos enfocaremos en el del lado izquierdo puesto que ahí se encuentra nuestra incógnita a encontrar: el ángulo α. Para ello, tenemos el siguiente gráfico:



(c) Recordando que la razón trigonométrica que relaciona el cateto adyacente y la hipotenusa de un triángulo rectángulo es el coseno, tenemos lo siguiente:

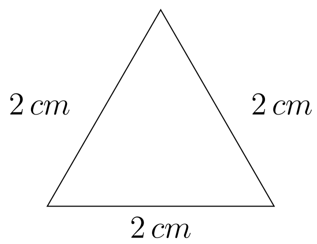
$$\cos\alpha = \frac{5}{12}.$$

De esto, logramos obtener que

$$\alpha = 65{,}38^\circ.$$

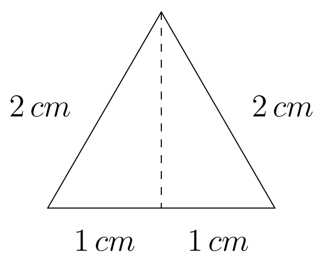
□

2. El objetivo del siguiente ejercicio es deducir las principales razones trigonométricas para los ángulos de 30° y 60°. Para ello, considere la siguiente figura:



- Trazar la altura del triángulo.

Solución. Se divide la base en dos partes iguales de $1cm$ cada uno, obteniendo lo siguiente:



□

- Calcular el valor de dicha altura.

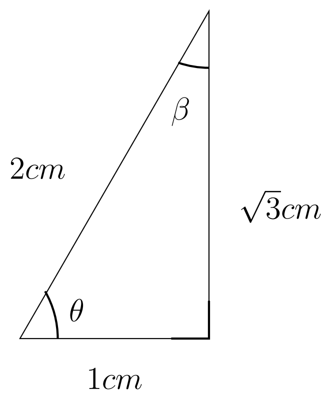
  Solución. Si denotamos por h a la altura del triángulo, entonces usamos el Teorema de Pitágoras para encontrar dicho valor. Es así que,

  $$2^2 = 1^2 + h^2,$$

  por lo cual $h = \sqrt{3}$. □

- Calcular el valor del sen, cos y tan de los ángulos de 30° y 60°.

  Solución. Notemos que estamos trabajando con el siguiente triángulo rectángulo:



  No es difícil verificar que θ corresponde al ángulo de 60°, mientras que β corresponde al ángulo de 30°. En consecuencia, tenemos que

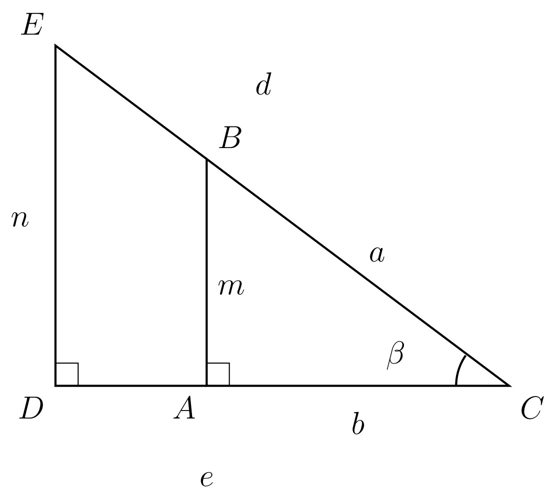
  $$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

  Por otro lado, se obtiene que

  $$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

  □

3. Dados los triángulos rectángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ECD$. ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde a la definición de seno del ángulo β? Justifique por completo su respuesta.



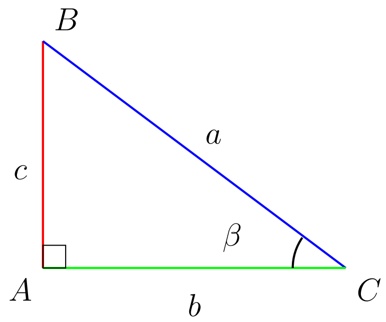
a) $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{e}{d}$ y $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{b}{a}$.

b) $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{n}{d}$ y $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{m}{a}$.

c) $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{m}{b}$ y $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{n}{e}$.

Solución. La respuesta correcta es la opción b). En efecto, recordar que si en primer lugar consideramos el triángulo ECD, entonces para β el cateto opuesto es n y la hipotenusa es d. Por otro lado, si ahora fijamos nuestra atención en el triángulo ABC, entonces el cateto opuesto para β es m, mientras que la hipotenusa es a. □

4. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa la definición de *tangente* del ángulo β dado el triángulo $\triangle ABC$? Justifique su respuesta.



(a) $\frac{b}{a}$

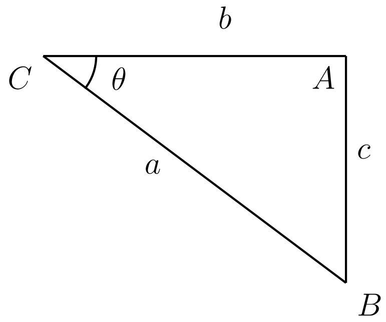
(b) $\frac{b}{c}$

(c) $\frac{c}{b}$

Solución. Conocemos que la tangente de un ángulo relaciona el cateto opuesto y el cateto adyacente. Con esto en mente, nos fijamos en β, de modo que el cateto opuesto correspondiente es c y el cateto adyacente es b. En consecuencia, la respuesta correcta es c)

□

5. Si la *cosecante* del ángulo θ es $\left(\frac{a}{c}\right)$, dado el triángulo $\triangle ABC$, ¿cuál es el valor de *seno* del ángulo θ?



Solución. Como la cosecante es el inverso multiplicativo de seno, tenemos que:

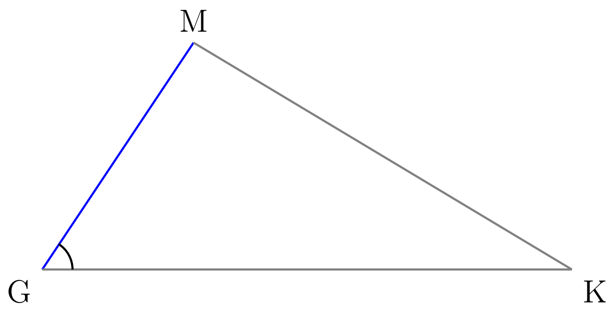
$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{a}{c}$$

entonces

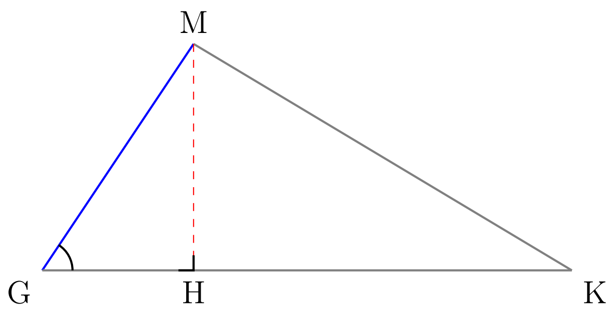
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{c}{a}$$

$\square$

6. Determinar la altura correspondiente al lado GK del triángulo $\triangle GMK$, si se conoce que $GM = 15$ y $\cos\angle G = 0{,}8$.



Solución. Notemos que si trazamos la altura del triángulo correspondiente, se obtiene que



Ahora bien, se ha obtenido un $\triangle$ rectángulo GMH. La idea es utilizar las hipótesis que tenemos, es así que

$$\cos\angle G = 0{,}8 = \frac{GH}{GM}$$

Por tanto, hemos obtenido que

$$0,8 \cdot GM = GH.$$

Usando el hecho de que $GM = 12$, se sigue que $GH = 9{,}6$. Finalmente, hallamos la altura usando el teorema de Pitágoras:

$$GM^2 = GH^2 + MH^2$$

Por tanto,

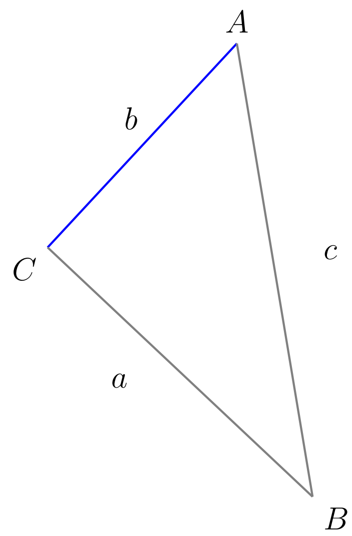
$$MH = \sqrt{12^2 - 9{,}6^2} = 7{,}2$$

$\square$

7. Encontrar la longitud del cateto adyacente y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, si se conoce que la razón trigonométrica $\operatorname{sen}\angle A = \frac{3}{5}$ y la longitud del cateto opuesto a $\angle A$ es 9.

   Solución. Usaremos la definición seno, es por ello que debemos en primer lugar, realizar lo siguiente:
$$\operatorname{sen}\angle A = \frac{3}{5} = \frac{3\cdot 3}{5\cdot 5} = \frac{9}{15}.$$
   De donde, podemos inferir que el valor de la hipotenusa es 15. Finalmente, por el Teorema de Pitágoras se obtiene el valor del cateto adyacente y viene dado por
$$a = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12.$$
$\square$

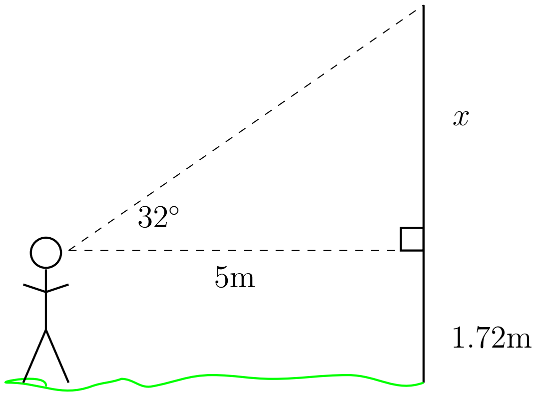
8. Considere la siguiente figura cuyo ángulo recto es en C. Calcular las razones trigonométricas sen, cos y tan del ángulo A, si el lado $c = 12cm$ y el lado $b = 7cm$



   Solución. Resulta inmediato de la definición de razones trigonométricas de un ángulo. Sin embargo, en primer lugar debemos hacer uso del Teorema de Pitágoras para poder encontrar el valor de a. Así,
$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{12^2 - 7^2} = \sqrt{95}\, cm.$$
   Por tanto, tenemos que
$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{95}}{12}$$
   de la misma manera,
$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{7}{12}$$
   y finalmente, obtenemos
$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{95}}{7}$$
$\square$

9. Suponga que un individuo se ubica a $5\,m$ de la base de un edificio y el ángulo con el que observa la parte más alta de una torre es de $32°$. Calcular la altura de la torre, si la persona tiene una estatura de $1,72\,m$.

   Solucón. A partir de los datos, tenemos el siguiente gráfico:

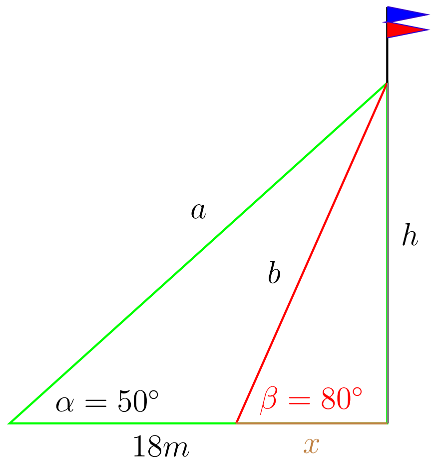
   

   Notamos que si denotamos por h a la altura de la torre, entonces la podemos calcular de la siguiente manera
   $$h = x + 1{,}72$$
   Por lo cual, nuestro objetivo es encontrar el valor de x. Si nos fijamos bien se ha formado un triángulo rectángulo. Ahora, utilizamos la razón trigonométrica tangente para relacionar el cateto opuesto y adyacente del ángulo $32°$. Así,
   $$\tan 32° = \frac{x}{5}$$
   lo que implica que
   $$x = 5 \cdot \tan 32° = 3{,}12m$$
   Finalmente, la altura de la torre viene dada por
   $$h = 3{,}12 + 1{,}72 = 4{,}84\,m.$$

   □

10. Desde una determinada distancia, una bandera situada en la parte superior de una torre se observa con un ángulo de elevación de $50°$. Si nos acercamos $18\,m$ en dirección de la torre, la bandera se logra observar ahora con un ángulo de elevación de $80\circ$. Calcular la altura a la que se encuentra la bandera.

    Demostración. Tenemos el siguiente gráfico en base a los datos del problema:



De este modo, empleamos en primer lugar la razón trigonmétrica tangente para α. Así,

$$\tan \alpha = \frac{h}{18 + x}$$

Luego, despejamos el valor de x, y así obtenemos que

$$x = \frac{h}{\tan \alpha} - 18 \tag{1}$$

Realizamos lo mismo para el ángulo β. Así tenemos que

$$\tan \beta = \frac{h}{x}$$

de donde

$$h = x \cdot \tan \beta$$

Reemplazamos (1) en la igualdad precedente con lo que obtenemos

$$h = \left(\frac{h}{\tan \alpha} - 18 \right) \cdot \tan \beta$$

Ahora, notar que $\tan \alpha$ y $\tan \beta$ son conocidos y la incógnita es h, de este modo, despejamos para obtener su valor. Por tanto,

$$\begin{aligned} h &= \frac{-18 \cdot \tan \beta}{1 - \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}} \\ &= \frac{-18 \cdot \tan 80°}{1 - \frac{\tan 80°}{\tan 50°}} \\ &= 27{,}16\, m \end{aligned}$$

Es decir, la altura a la que se encuentra la bandera es de $27{,}16\, m$. □