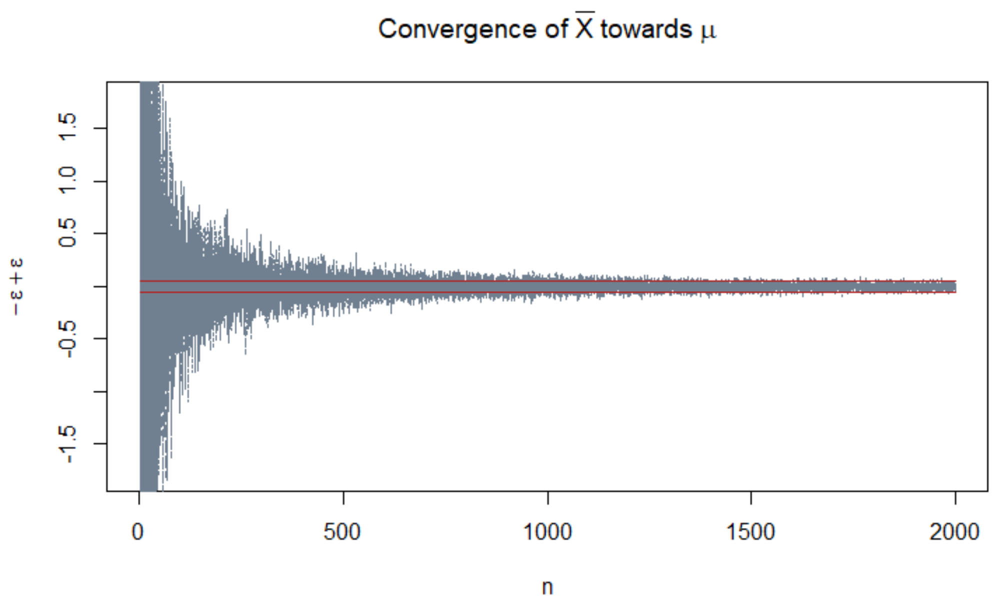
Godinez Bravo Diego
Inferencia Estadística
Tarea 6

CIMAT

1. En este ejercicio, asistido por una computadora, visualizará los conceptos de convergencia estudiados en clase.

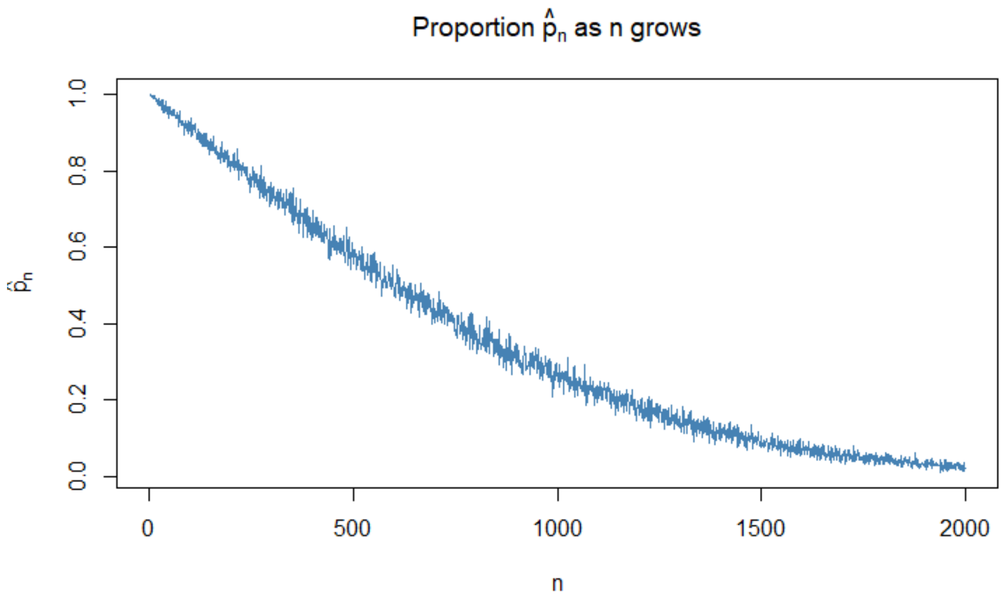
a) Lea el artículo:
Pierre Lafaye de Micheaux & Benoit Liquet (2009). Understanding Convergence Concepts: A Visual-Minded and Graphical Simulation-Based Approach, The American Statistician, 63:2, 173-178, DOI: 10.1198/tas.2009.0032.
El paper está en la carpeta donde está la tarea. No hay que entregar nada para este inciso.

b) Implemente el método para visualizar la convergencia en probabilidad descrito en la sección 2.1 del artículo. La función debería recibir el número de realizaciones M, el número máximo de elementos de la sucesión que se considera $n_{\max}$, M muestras de la sucesión trunca $X_1, X_2, \ldots, X_{n_{\max}}$ y el error ϵ. Debería reproducir la Figura 3 del paper, sin incluir a_n, y regresar al vector $(\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_{n_{\max}})$.



Convergencia de $\bar{X}$ a μ en probabilidad; donde $X_n = \bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Se realizaron $M = 500$ trayectorias, considerando $\epsilon = 0.05$ y, tomando $n_{max} = 2000$; se graficaron únicamente 10 trayectorias.

c) Implemente el método para visualizar la convergencia casi segura descrito en la sección 2.1 del artículo. La función debería recibir el número de realizaciones M, el número máximo de elementos de la sucesión que se considera $n_{\max}$, M muestras de la sucesión trunca $X_1, X_2, \ldots, X_{n_{\max}}$, el error ϵ y el parámetro $K \in (0,1)$ descrito en el ejemplo de la página 175. Debería reproducir la Figura 3 del paper y regresar al vector $(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{K \cdot n_{\max}})$.



Evolución de la proporción $\hat{p}_n$ a medida que n aumenta; donde $\hat{p}_n = \frac{1}{M} \#(|x_n^j - x^j| > \epsilon)$. Se realizaron $M = 500$ trayectorias, considerando $\epsilon = 0.05$ y, tomando $n_{max} = 2000$; se graficaron únicamente 10 trayectorias.

2. Demuestre que la sucesión del inciso e) del Ejercicio 1 converge en probabilidad y casi seguramente, pero que no converge en L^2. Demuestre que la sucesión del inciso f) del Ejercicio 1 converge en L^2.

Solución

Sea X_n una sucesión de variables aleatorias y sea X una variable aleatoria, decimos que

X_n converge a X en media cuadrática (L_2), denotado por $X_n \xrightarrow{L_2} X$, si

$$\lim_{n\to\infty} E\Big[(X_n - X)^2\Big] = 0$$

Sucesión inciso f.

En este caso tenemos que $Y_1, \dots, Y_n$ son variables aleatorias independientes con distribución $Y_1 \sim N(0,1)$; y se define $X_1 = X_2 = 1$, donde

$$X_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sqrt{2n\log(\log n)}} \quad n \geq 3$$

Por lo tanto

$$E\Big[(X_n - X)^2\Big] = E\Big[(X_n)^2\Big]$$

$$= E\Big[\Big(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sqrt{2n\log(\log n)}}\Big)^2\Big]$$

$$= E\Big[\Big(\frac{(\sum_{i=1}^n Y_i)^2}{(\sqrt{2n\log(\log n)})^2}\Big)\Big]$$

$$= \frac{1}{2n\log(\log n)}\ E\Big[\Big(\sum_{i=1}^n Y_i\Big)^2\Big]$$

Sean $Z_1, ..., Z_k$ variables aleatorias independientes tales que $Z_i \sim N(0,1)$, entonces

$$X = Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_k^2 = \sum_{i=1}^k Z_i^2$$

entonces $X \sim \chi^2$ con k grados de libertad

En este caso podemos definir $Z = Y_1^2 + Y_2^2 + ... + Y_n^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2$; por lo tanto

$$= \frac{1}{2n\log(\log n)}\ E\Big[Z\Big]$$

donde $Z \sim \chi^2$ con n grados de libertad.
Entonces

$$= \frac{1}{2n\log(\log n)}\ n$$

$$= \frac{n}{2n\log(\log n)}$$

$$= \frac{1}{2\log(\log n)}$$

Al tomar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\log(\log n)} = 0$$

De esta manera podemos decir que X_n converge en media cuadrática (L_2).

3. Justifique que $X_n \xrightarrow{p} 1$ en cada uno de los siguientes casos.
¿En qué casos $X_n \xrightarrow{L_2} 1$?

Solución

Sea X_n una sucesión de variables aleatorias y sea X una variable aleatoria, decimos que

X_n converge en probabilidad, denotado por $X_n \xrightarrow{p} X$, si para cada $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

X_n converge a X en media cuadrática (L_2), denotado por $X_n \xrightarrow{L_2} X$, si

$$\lim_{n\to\infty} E\Big[(X_n - X)^2\Big] = 0$$

a) $X_n = 1 + nY_n$, con $Y_n \sim Bernoulli(\frac{1}{n})$

Para comprobar que $X_n \xrightarrow{p} 1$ debemos corroborar que $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$.

Dado que $\epsilon > 0$, podemos expresar la expresión $P(|X_n - X| > \epsilon)$ como sigue

$$P(|X_n - X| > 0)$$

donde $X_n = 1 + nY_n$

Por lo tanto

$$P(|1 + nY_n - 1| > 0) = P(|nY_n| > 0)$$

Sabemos que $Y_n \sim Bernoulli(\frac{1}{n})$; por lo que $P(Y_n = 1) = \frac{1}{n}$ y $P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, entonces

$$P(|nY_n| > 0) = \frac{1}{n}$$

Al tomar el límite

$$\lim_{n\to\infty} P(|nY_n| > 0) = 0$$

De esta manera, se tiene convergencia en probabilidad $X_n \xrightarrow{p} 1$.

Por otro lado, si $X_n \xrightarrow{L_2} 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} E\Big[(X_n - 1)^2\Big] = 0$.

Considerando que $X_n = 1 + nY_n$

$$E\Big[(1 + nY_n - 1)^2\Big] = E(nY_n)^2$$

$$n^2 E(Y_n)^2$$

En este caso

$$E(Y_n)^2 = 1^2\Big(\frac{1}{n}\Big) + 0^2\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n}$$

Por lo tanto

$$E\Big[(X_n - 1)^2\Big] = n$$

Al tomar el límite

$$\lim_{n\to\infty} E\Big[(X_n - 1)^2\Big] = \infty$$

Por lo que X_n *no* converge a 1 en media cuadrática (L_2).

b) $X_n = \frac{Y_n}{logn}$, con $Y_n \sim Poisson(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i})$

Tenemos que si $\lim_{n\to\infty} E\Big[(X_n - X)^2\Big] = 0$, entonces X_n converge a X en media cuadrática, en este caso

$$E\Big[(X_n - X)^2\Big] = E\Big[(X_n)^2\Big]$$

dado que $X_n = \frac{Y_n}{logn}$

$$E\Big[\Big(\frac{Y_n}{logn}\Big)^2\Big] = \frac{1}{(logn)^2} E(Y_n)^2$$

Sabemos que $Y_n \sim Poisson(\lambda)$, por lo tanto

$$E(Y_n)^2 = \lambda + \lambda^2$$

De esta manera

$$E\Big[(X_n - X)^2\Big] = \frac{\lambda + \lambda^2}{(logn)^2}$$

con $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$

Al tomar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda + \lambda^2}{(logn)^2} = 0$$

Por lo tanto podemos decir que X_n converge a 1 en media cuadrática (L_2), y por ende se tiene convergencia en probabilidad.

$X_n \xrightarrow{L_2} X$ implica que $X_n \xrightarrow{P} X$.

c) $X_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$, con las Y_i's variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas y $Y_i \sim N(0,1)$.

De acuerdo a la desigualdad de Chebyshev

$$P(|X-\mu| \geq t) \leq \frac{E(X-\mu)^2}{t^2} = \frac{\sigma^2}{t^2}$$

En este caso

$$P(|X_n - X| \geq \epsilon) \leq \frac{Var(X_n)}{\epsilon^2}$$

sea $X_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$

$$P\Big(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - 1| \geq \epsilon\Big) \leq \frac{Var(X_n)}{\epsilon^2}$$

Sean $Z_1, ..., Z_k$ variables aleatorias independientes tales que $Z_i \sim N(0,1)$, entonces

$$X = Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_k^2 = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2$$

entonces $X \sim \chi^2$ con k grados de libertad

Considerando

$$Z = Y_1^2 + Y_2^2 + ... + Y_k^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$$

Entonces

$$Var(X_n) = \frac{1}{n^2} Var(Z)$$

Dado que $Z \sim \chi^2$, entonces $Var(Z) = 2n$

$$Var(X_n) = \frac{1}{n^2} 2n = \frac{2}{n}$$

Por lo tanto tenemos que

$$P(|X_n - X| \geq \epsilon) \leq \frac{2}{n\epsilon^2}$$

Al tomar el límite

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - 1| \geq \frac{2}{n\epsilon^2} = 0$$

Por lo tanto se comprueba que X_n converge en probabilidad a 1.

Para corroborar que X_n converge a X en media cuadrática (L_2) debemos comprobar que

$$\lim_{n\to\infty} E\Big[(X_n - X)^2\Big] = 0$$

Desarrollando

$$E\Big[(X_n - X)^2\Big] = E[X_n^2 - 2X_n + 1]$$

$$E[X_n^2] - E[2X_n] + E[1]$$

Calculamos cada uno de los elementos.

Considerando que $Y_i's$ son variables independientes, entonces

$$E[X_n^2] = E(X_n)E(X_n)$$

Dado que $X_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$

$$E(X_n) = \frac{1}{n} E(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2)$$

Sea $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$, $Z \sim \chi^2$

$$E(Z) = n$$

Por lo tanto

$$E(X_n) = \frac{1}{n} n = 1$$

Entonces

$$E[X_n^2] = E(X_n)E(X_n) = 1$$

$$E[2X_n] = 2E[X_n] = 2$$

$$E[1] = 1$$

Finalmente

$$E\Big[(X_n - X)^2\Big] = E[X_n^2] - E[2X_n] + E[1] = 1 - 2 + 1 = 0$$

Por lo que

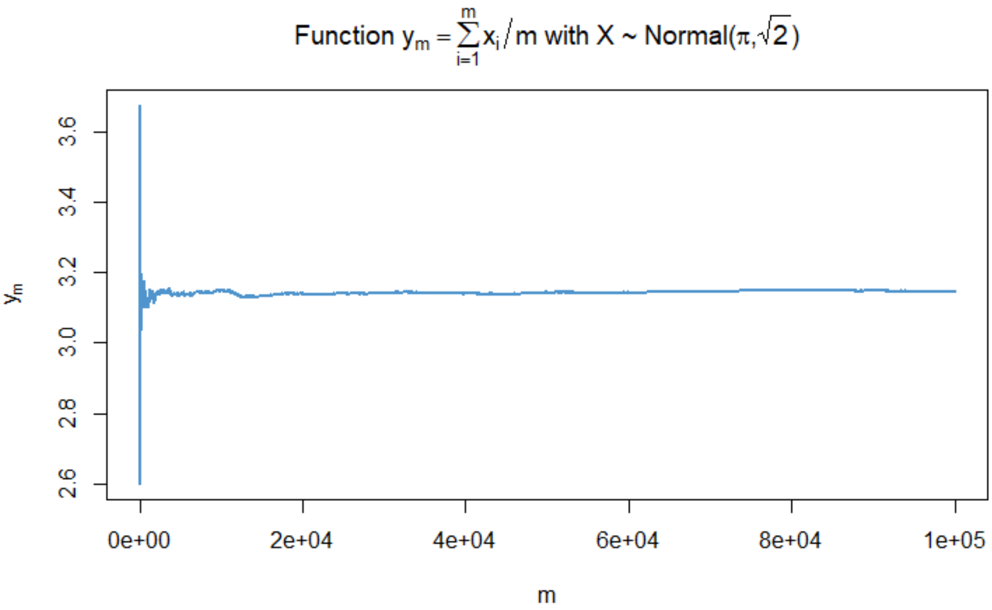
$$\lim_{n \to \infty} 0 = 0$$

De esta manera podemos decir que X_n converge a 1 en media cuadrática (L_2).

4. En este ejercicio corroborará mediante simulaciones la Ley de Grandes Números (LGN).

a) Simule una muestra $\{x_1,\ldots,x_n\}$ de una variable aleatoria $Normal(\pi,\sqrt{2})$ de tamaño $n = 10^5$. Defina $y_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{m}$ y grafique esta cantidad como función de m. ¿Qué observa? ¿Cómo está relacionado con la LGN?

Resultados



Función y_m con $X \sim Normal(\pi,\sqrt{2})$ y tamaño de muestra $n = 10^5$.

De acuerdo a la ley de grandes números, si $\bar{X}_n$ es el promedio de n variables aleatorias independientes con media μ y varianza σ^2, entonces para cualquier $\epsilon > 0$

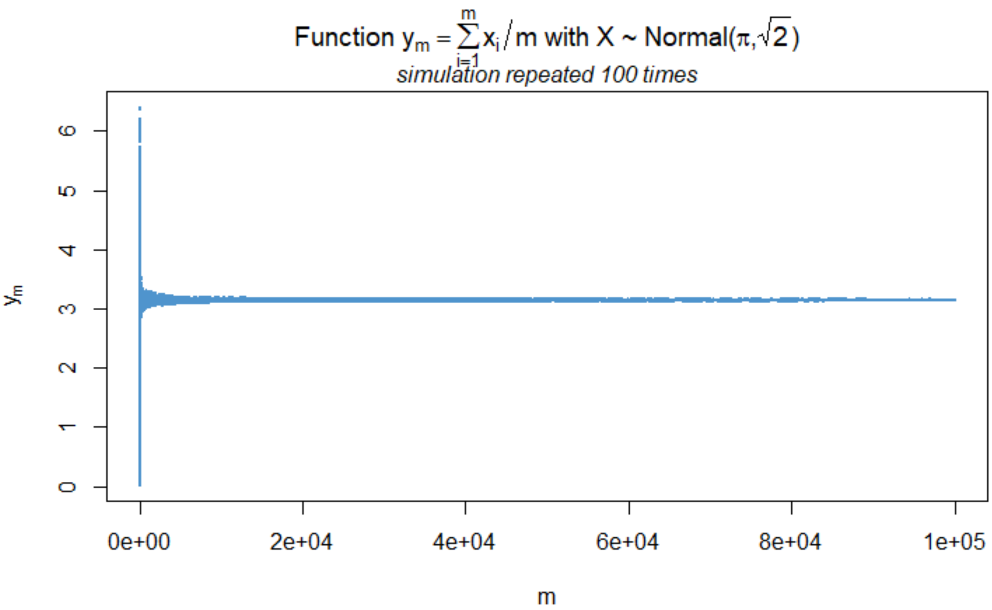
$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) = 0$$

esto es, a medida que aumenta el tamaño de muestra, la media tiende a acercarse a la media de la distribución.

En este caso podemos observar que a medida que aumenta n, el valor del estadístico y_m se aproxima en mayor medida al valor π, el cual corresponde al valor de la media de la distribución $Normal(\pi,\sqrt{2})$, lo cual coincide con la ley de los grandes números.

b) Repita el procedimiento anterior 100 veces y grafique las y_m de cada iteración sobre una misma gráfica. ¿Qué observa?

Resultados

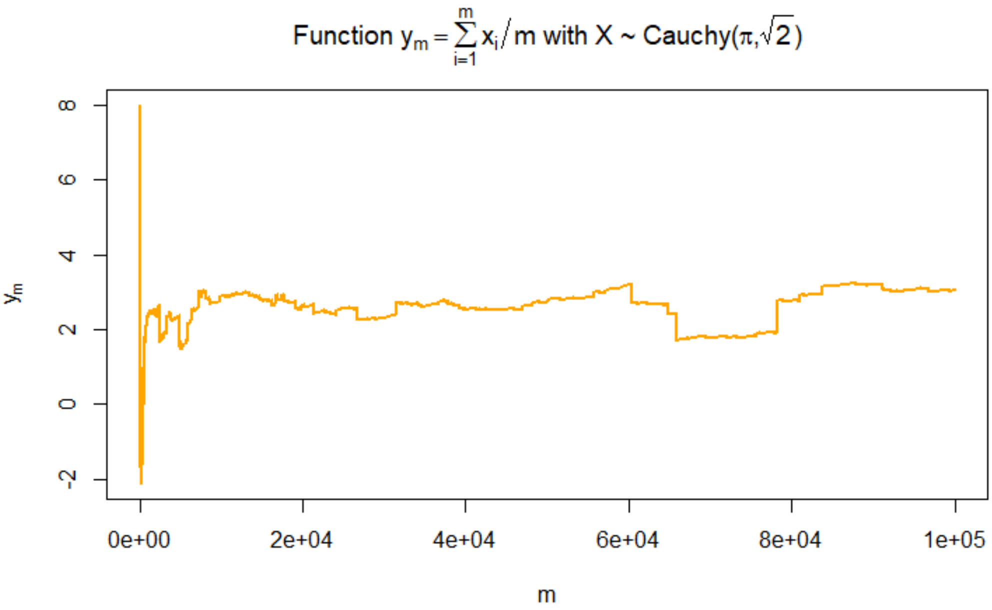


Función y_m con $X \sim Normal(\pi, \sqrt{2})$ y tamaño de muestra $n = 10^5$. Simulación realizada 100 veces.

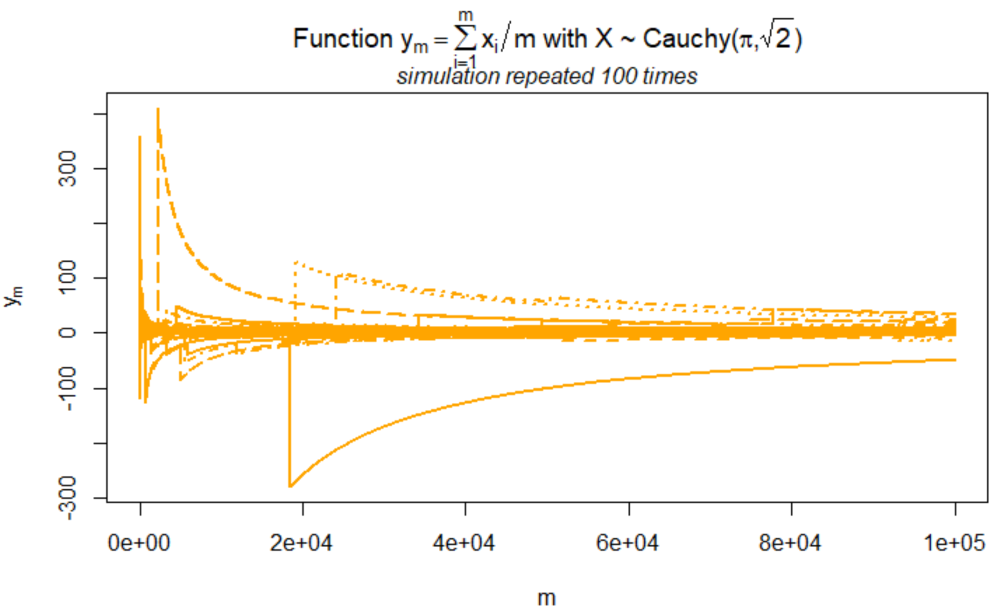
Al realizar la simulación 100 veces, podemos observar que, de manera general, el estadístico muestral y_m tiende a converger hacia el valor π, el cual sabemos que es el valor de la media poblacional. Por lo tanto, a pesar de que exista variación en los valores hacia los cuales y_m puede converger entre muestras, en promedio, se observa que este converge hacia valores cercanos a la media poblacional π.

c) Repita los dos incisos anteriores para una distribución $Cauchy(\pi, \sqrt{2})$. ¿Qué observa?

Resultados



Función y_m con $X \sim Cauchy(\pi, \sqrt{2})$ y tamaño de muestra $n = 10^5$. Simulación realizada 100 veces.



Función y_m con $X \sim Cauchy(\pi, \sqrt{2})$ y tamaño de muestra $n = 10^5$. Simulación realizada 100 veces.

Al llevar a cabo la simulación considerando una distribución $Cauchy(\pi, \sqrt{2})$, observamos una mayor variabilidad en los valores hacia los cuales converge el estadístico y_m, esto podría estar relacionado con el hecho de que la distribución *Cauchy* no posee momentos finitos, lo cual implica que no tiene valor esperado ni varianza definidos.

Considerando esto, es claro que las propiedades de la distribución afectan el cálculo de la media muestral. Al realizar el experimento repetidas ocasiones, se observa que la convergencia del estadístico y_m hacia la media problacional es más lenta y menos predecible.

5. En este ejercicio corroborará mediante simulaciones el Teorema Clásico de Límite Central (TCLC).

a) Escriba la siguiente función en R. Simule una muestra de tamaño n de una variable aleatoria $Exponencial(\lambda)$ y calcule el estadístico $Z_n = \frac{\sqrt{n}(X_n - \lambda^{-1})}{\lambda^{-1}}$. Repita lo anterior m veces. La función deberá tomar como parámetros n, m, y λ y regresar un vector de tamaño n conteniendo la muestra de Z_n.

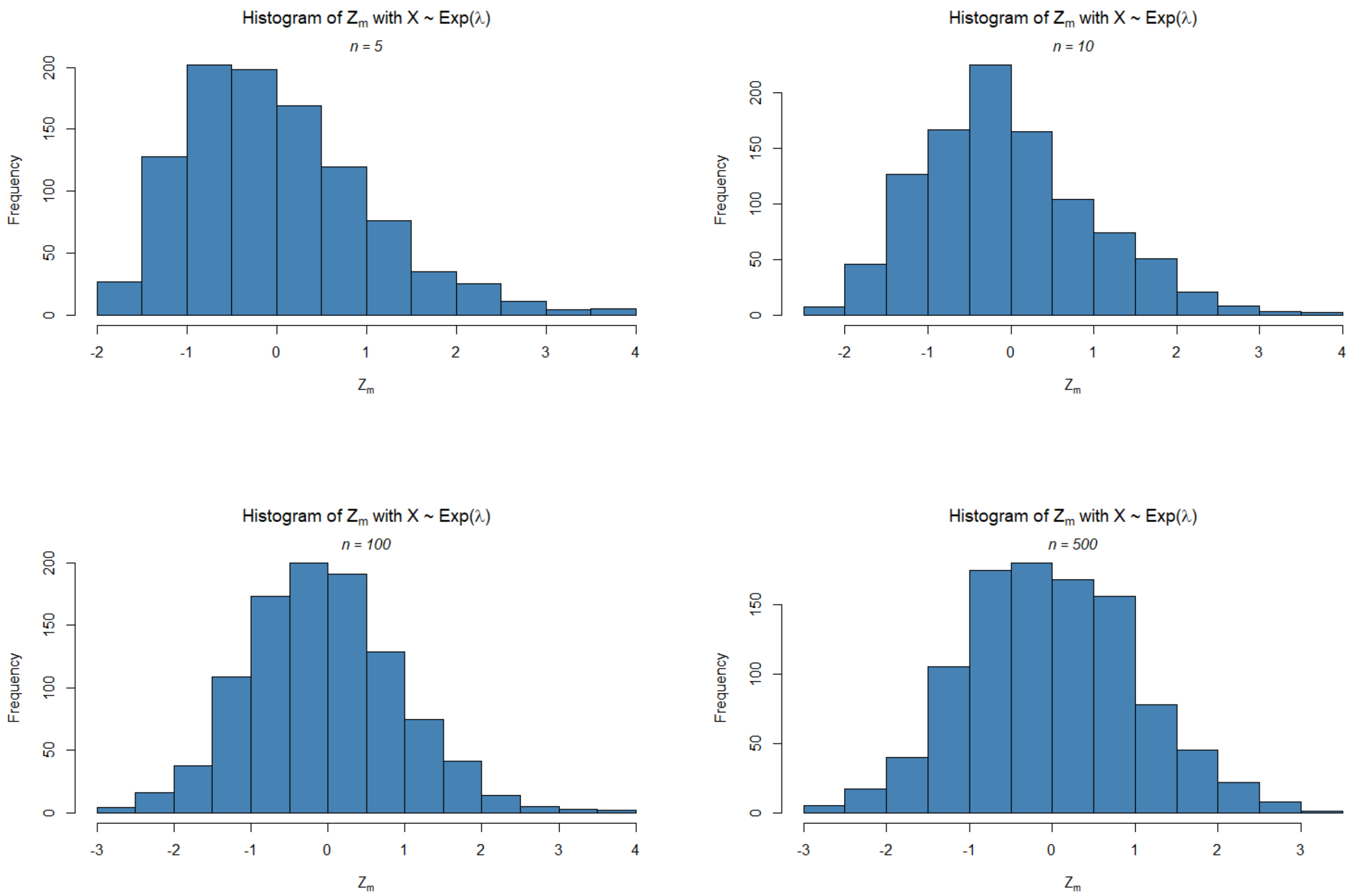
Solución

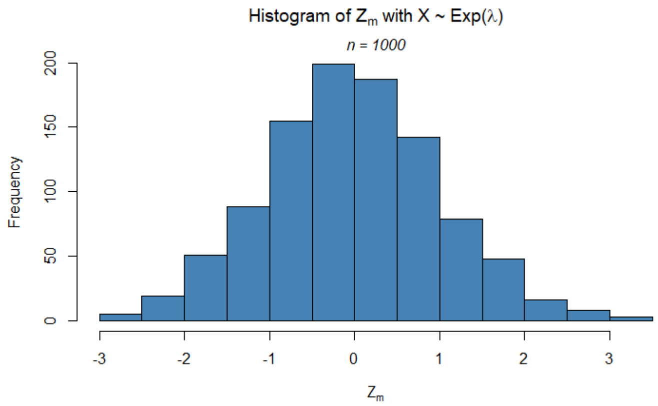
```
ZFunction <- function(n, m, lambda){ # parameters(sample size, repeat m times,
   lambda value)
 ZnValues <- numeric(n) # empty vector to store Zn values
 for(i in 1:m){
  sample <- rexp(n, rate = lambda) # random sample of X\simExp(lambda)
  Zn <- (sqrt(n)*(mean(sample) - (1/lambda)))/(1/lambda)
  ZnValues[i] <- Zn # store Zn values
 }
 return(ZnValues)
}
```

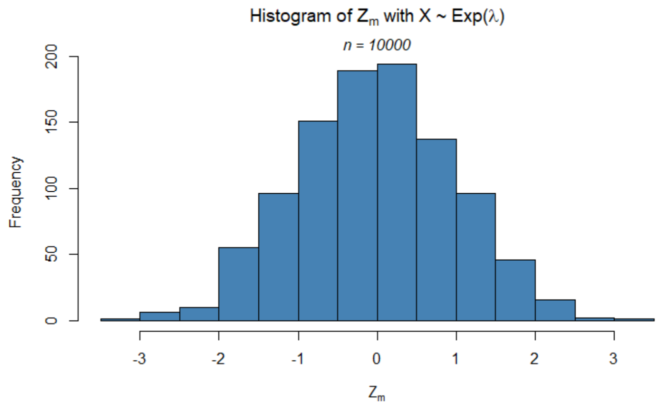
b) Para $n = 5, 10, 100, 500, 1000, 10000$, $m = 1000$ y $\lambda = 1$, utilice la función del inciso anterior para obtener muestras de Z_n. Grafíque las muestras anteriores en un histograma (un histograma para cada n). ¿Qúe observa? ¿Qué tiene que ver su resultado con el TCLC?

Resultados

Histograma de frecuencias de muestras de Z_n.







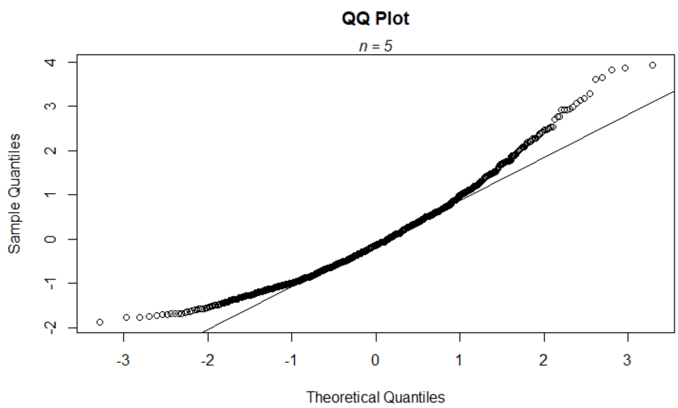
Observamos que a medida que aumenta el tamaño de la muestra n, la distribución del estadístico Z_n se asemeja en mayor medida a una distribución normal, a pesar del hecho de que el cálculo de Z_n considere una variable aleatoria X con distribución exponencial (i.e. $X \sim Exponencial(\lambda)$).

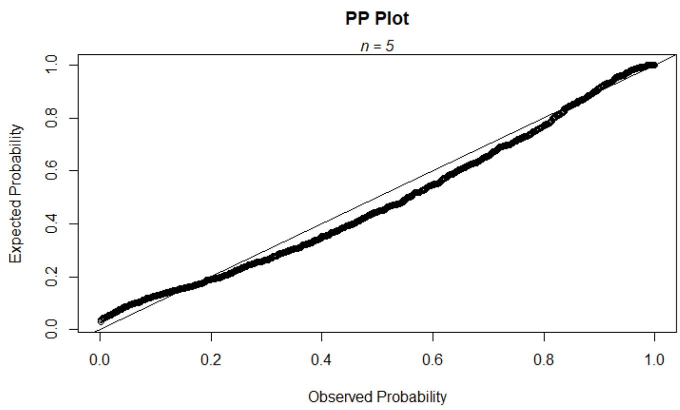
El teorema del límite central establece que la distribución de la media de una muestra aleatoria proveniente de una población con media μ y varianza σ^2 (y función generatriz de momentos $M_X(t)$ definida), entonces a medida que aumenta el tamaño de muestra, la distribución de las medias sigue aproximadamente una distribución normal. El teorema se considera **independientemente** de la forma de la distribución de la población.

En este caso observamos que, a pesar de que el estadístico Z_n se deriva considerando una variable aleatoria con distribución que no es necesariamente normal, la distribución de la media muestral tiende a aproximarse a una distribución normal a medida que aumenta el tamaño muestral. Este resultado coincide con lo establecido por el teorema del límite central.

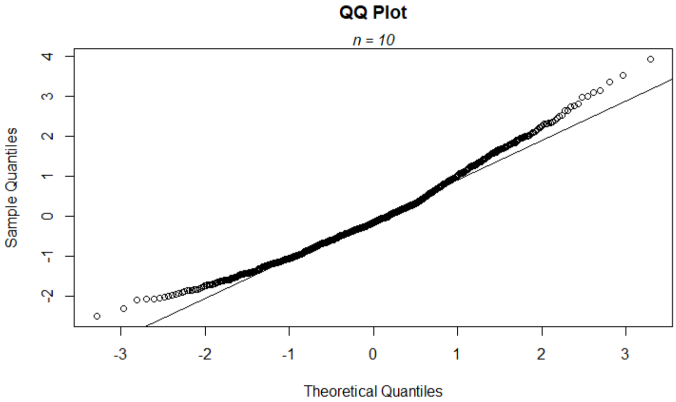
c) Para cada una de las muestras generadas del inciso anterior, encuentre el QQ plot y el PP plot normales. Comente sus resultados.

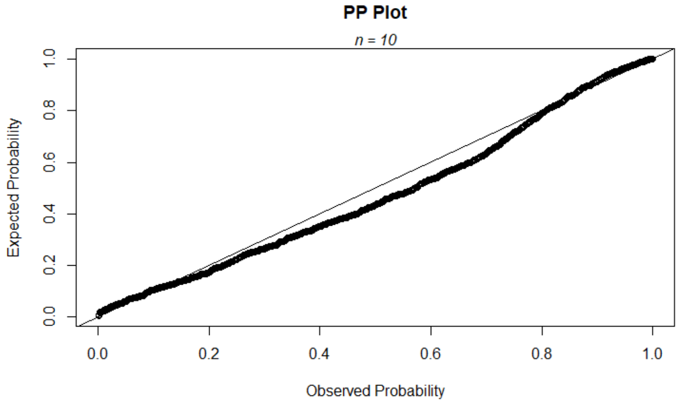
QQ Plot y PP Plot para muestra Z_m con $n = 5$.



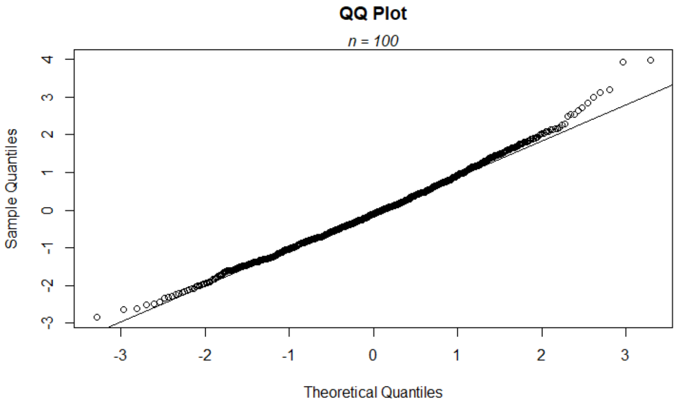


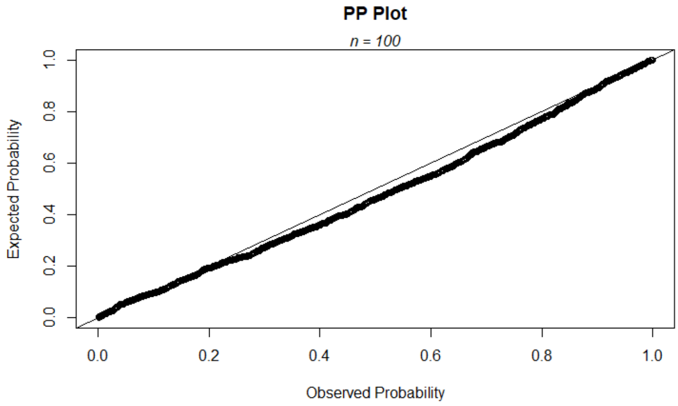
QQ Plot y PP Plot para muestra Z_m con $n = 10$.



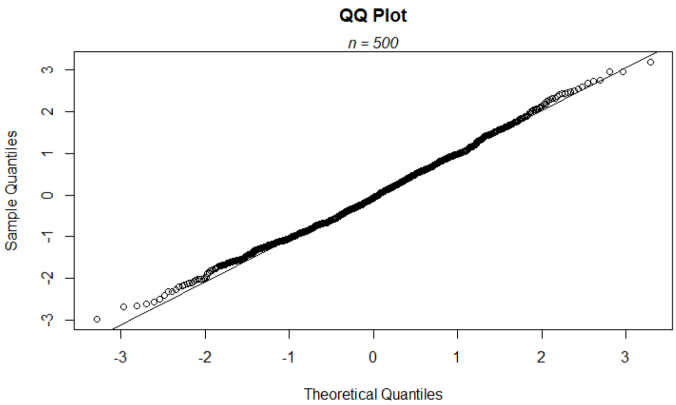


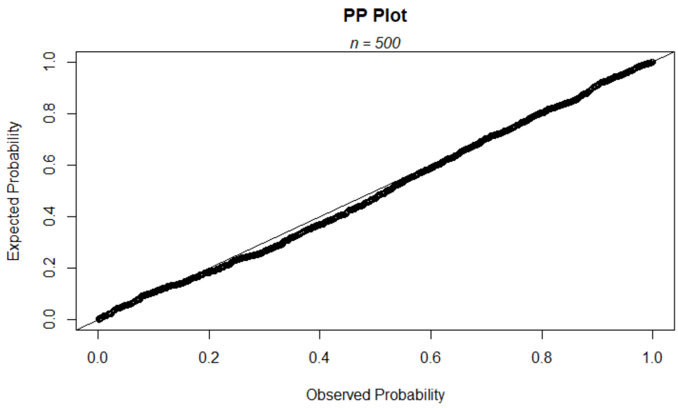
QQ Plot y PP Plot para muestra Z_m con $n = 100$.



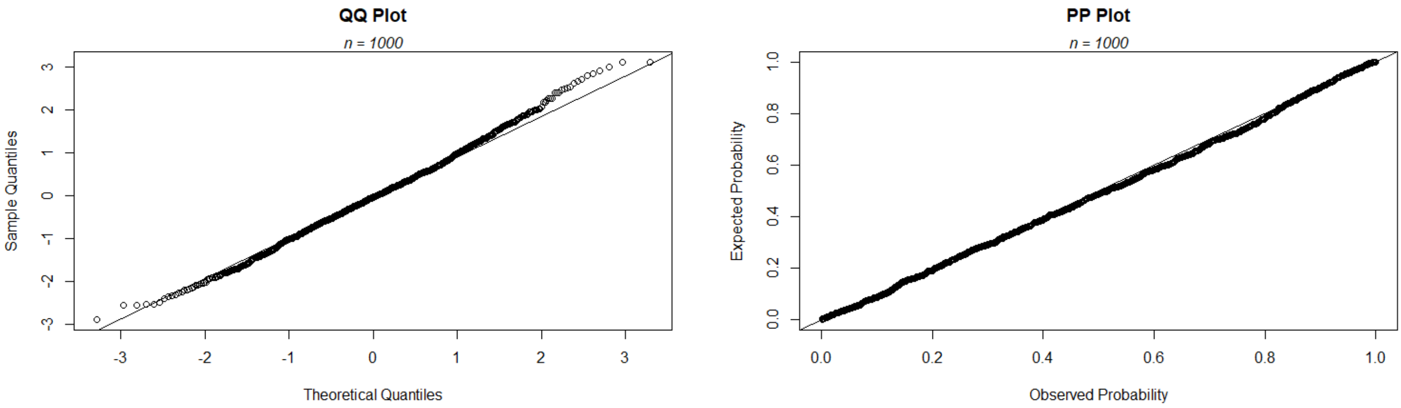


QQ Plot y PP Plot para muestra Z_m con $n = 500$.

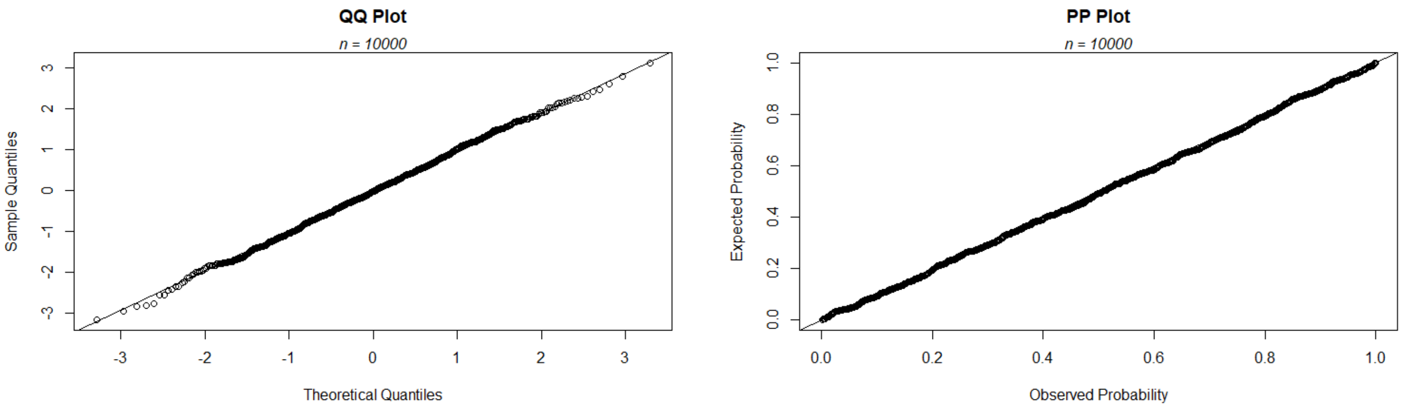




QQ Plot y PP Plot para muestra Z_m con $n = 1000$.



QQ Plot y PP Plot para muestra Z_m con $n = 10000$.



La gráfica QQ plot compara los cuantiles teóricos de una distribución con los cuantiles observados de la muestra. De manera que, si los puntos se alinean a lo largo de la línea de referencia, sugiere que los datos se ajustan a la distribución teórica. A medida que n aumenta, se observa una mayor alineación de los puntos a lo largo de la línea de referencia, indicando una aproximación a la distribución teórica, en este caso la distribución normal.

La gráfica PP plot nos ayuda a comparar la distribución acumulada empírica con la distribución acumulada teórica (en este caso la distribución normal). Si el modelo se asemeja a la línea de referencia $y = x$, entonces se sugiere que la distribución de la muestra sigue aproximadamente la disrtibución teórica. En este caso, observamos que a medida que aumenta el tamaño muestral n, la proximidad de los puntos alrededor de la línea de referencia es mayor, lo cual indica una mejor aproximación a la distribución teórica (distribución normal).

En ambos casos observamos que, conforme aumenta n, la aproximación de los datos a una distribución normal es mayor.

Honours Problems.

1. El número de carros que pasa un cruce durante una hora tiene distribución de Poisson de parámetro λ. El número de personas en cada carro tiene una distribución de Poisson de parámetro v. Si Y es el total de personas que pasan por el cruce durante una hora, calcule $E(Y)$ y $Var(Y)$.

Solución

Sea X el número de carros durtante una hora con distribución $X \sim Poisson(\lambda)$ y Z_i el número de personas en cada coche con distribución $Z \sim Poisson(v)$, entonces el número total de personas Y que pasan durante el cruce durante una hora esta definido como

$$Y = \begin{cases} Z_1 + Z_2 + ... + Z_x & \text{si } \ X > 0 \\ 0 & \text{si } \ X = 0 \end{cases}$$

Dado que X y Z siguen una distribución Poisson, entonces

$$E(Z_i) = v \qquad V(Z_i) = v$$

$$E(X) = \lambda \qquad V(X) = \lambda$$

Para el valor esperado tenemos que

$$E(Y) = \sum_{x=0}^{\infty} E(Y|X = x)p(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} E(Z_1 + Z_2 + ... + Z_x|X = x)p(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} E(Z_1 + Z_2 + ... + Z_x)p(X = x)$$

Dado que $Z_1 + Z_2 + ... + Z_x$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas

$$= \sum_{x=0}^{\infty} E(Z_1) + E(Z_2) + ... + E(Z_x)p(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} v_1 + v_2 + ... + v_x \ p(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} xv \ p(X = x)$$

$$= v \ \sum_{x=0}^{\infty} x \ p(X = x)$$

$$= v \ E(X)$$

Por lo tanto, el **valor esperado de** Y

$$E(Y) = v\lambda$$

Por otro lado, para la varianza se encuentra definida como sigue

$$Var(Y) = E((Y - E(Y))^2)$$

$$= E((Y - v\lambda)^2)$$

$$= E((Y - X\lambda + X\lambda - v\lambda)^2)$$

$$= E((Y - Xv)^2) + 2E(v(Y - Xv)(X - \lambda)) + E(v^2(X - \lambda)^2)$$

De esta manera encontramos que la varianza conformada de la siguiente manera

$$Var(Y) = E((Y - Xv)^2) + 2E(v(Y - Xv)(X - \lambda)) + E(v^2(X - \lambda)^2)$$

Calculamos cada uno de los elementos.

$$E((Y - Xv)^2) = \sum_{x=0}^{\infty} E((Y - Xv)^2)p(X = x) \tag{1}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} E((Z_1 + Z_2 + ... + Z_x - Xv)^2)p(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} xv\ p(X = x)$$

$$= v \sum_{x=0}^{\infty} xp(X = x)$$

$$= vE(X)$$

$$E((Y - Xv)^2) = v\lambda$$

$$E(v(Y - Xv)(X - \lambda)) = v \sum_{x=0}^{\infty} E((Y - xv)(x - \lambda))p(X = x) \tag{2}$$

$$= v \sum_{x=0}^{\infty} E((Y - xv)(x - \lambda))p(X = x)$$

$$= v \sum_{x=0}^{\infty} (x - \lambda)E((Y - xv))p(X = x)$$

$$E(v(Y - Xv)(X - \lambda)) = 0$$

$$E(v^2(X - \lambda)^2) = v^2E((X - \lambda)^2) \tag{3}$$

$$= v^2Var(X)$$

$$E(v^2(X - \lambda)^2) = v^2\lambda$$

Finalmente

$$Var(Y) = v\lambda + v^2\lambda$$

Ejercicios Notas.

Ejercicio pg. 259

1. Demostrar que si $X \sim t_v$, entonces la distribución de la variable aleatoria $Y = X^2$ es una $F_{1,v}$.

Solución

Sabemos que la variable aleatoria X sigue una distribución t de Student con v grados de libertad $X \sim t_v$, por lo que su función de densidad esta definida como

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-(\frac{v+1}{2})}$$

Sea $Y = X^2$ entonces, de acuerdo al *teorema del cambio de variable*, su función de densidad esta dada de la siguiente manera

$$f_Y(y) = f_X(w(y))\,|w'(y)|$$

donde $w'(y) = \frac{d}{dy}w(y)$.

En este caso $x = \sqrt{y}$, entonces la derivada $\frac{d}{dy}\sqrt{y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$; por lo tanto

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(1 + \frac{y}{v}\right)^{-(\frac{v+1}{2})}\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)$$

dado que $f_X(\sqrt{y}) = f_X(-\sqrt{y})$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\sqrt{y}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(1 + \frac{y}{v}\right)^{-(\frac{v+1}{2})}$$

Por otro lado, sea $F = \frac{mX}{nY}$, entonces F sigue disrtibución de Fisher con n grados de libertad del numerador y m grados de libertad del denominador, con función de densidad

$$f_F(v) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}} v^{\frac{n}{2}-1}\left(v\frac{n}{m} + 1\right)^{-\frac{m+n}{2}} \quad 0 \le v < \infty$$

sea $n = 1$ y $m = v$

$$f_F(v) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{v}{2})}\left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}-1}\left(y\frac{1}{v} + 1\right)^{-\frac{v+1}{2}}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{v}\sqrt{y}\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{v}{2})(1 + \frac{y}{v})^{\frac{v+1}{2}}}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{v\pi}\sqrt{y}\Gamma(\frac{v}{2})}\left(1 + \frac{y}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} = F_{1,v}$$

Por lo tanto

$$f_Y(y) = F_{1,v}$$

2. En el último ejemplo, considera la división $\frac{1}{F} = R = \frac{\frac{Y}{m}}{\frac{X}{n}}$ y demuestra que $R \sim F_{m,n}$ una F con los grados de libertad intercambiados.

Solución

Sabemos que si existen dos variables aleatorias **independientes** X y Y tales que

$$X \sim \chi^2_n \qquad Y \sim \chi^2_m$$

Y se define $F = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}} = \frac{mX}{nY}$, entonces la función de densidad $f_F(v)$ se encuentra definida de la siguiente manera

$$f_F(v) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}\Big(\frac{n}{m}\Big)^{\frac{n}{2}} v^{\frac{n}{2}-1}\Big(v\frac{n}{m}+1\Big)^{-\frac{m+n}{2}} \qquad 0 \leq v < \infty$$

De manera análoga, si consideramos dos variables aleatorias **independientes** Z y W tales que

$$Z \sim \chi^2_n \qquad W \sim \chi^2_m$$

Y definimos R tal que $R = \frac{\frac{W}{m}}{\frac{Z}{n}} = \frac{nW}{mZ}$, entonces la función de densidad $f_R(v)$ estaría definida como

$$f_R(v) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}\Big(\frac{m}{n}\Big)^{\frac{m}{2}} v^{\frac{m}{2}-1}\Big(v\frac{m}{n}+1\Big)^{-\frac{m+n}{2}} \qquad 0 \leq v < \infty$$

Lo cual es una distribución de Fisher con los grados de libertad intercambiados $F_{m,n}$.

Ejercicio pg. 290

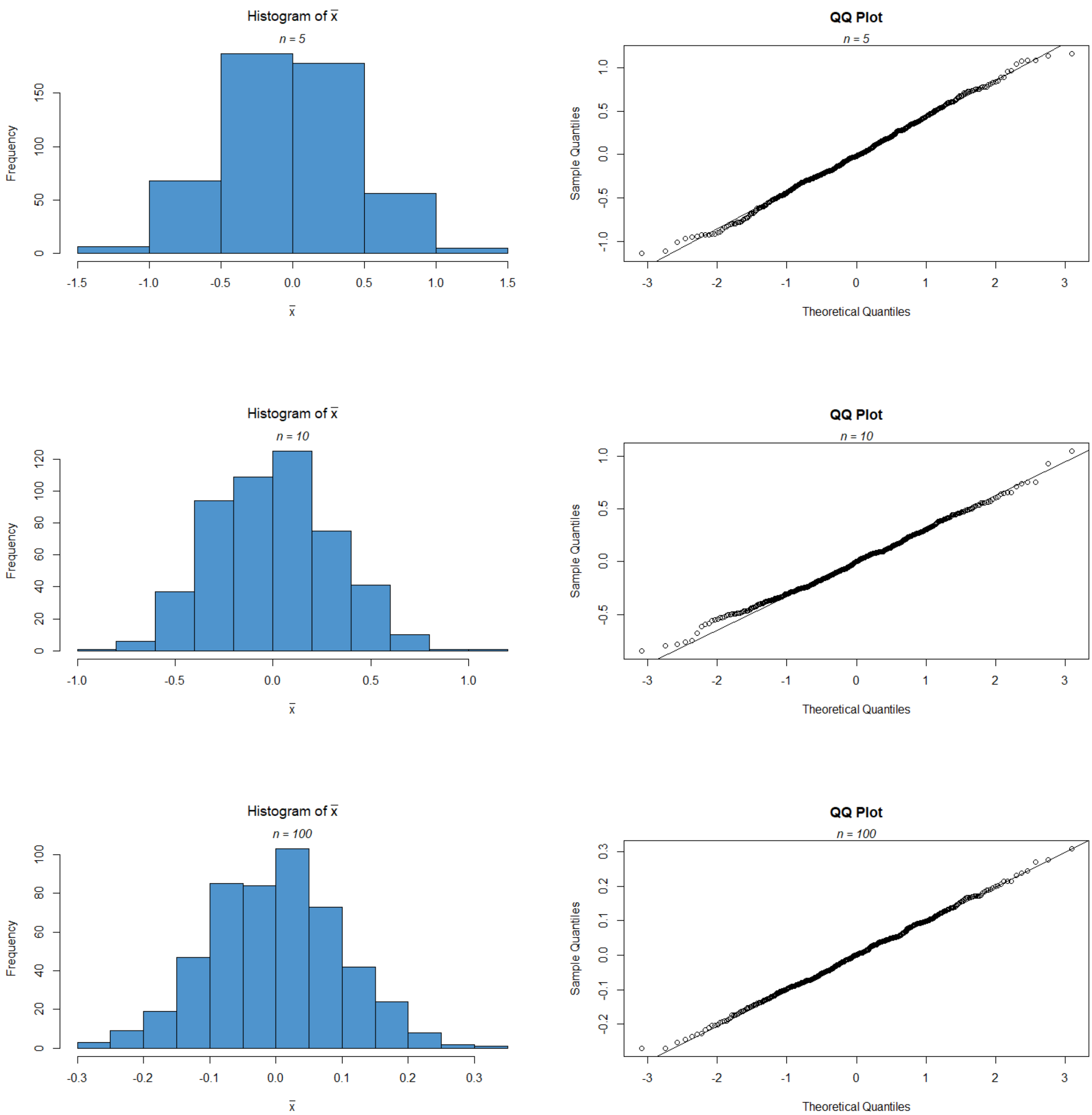
1. Generar 500 muestras aleatorias de tamaños 5, 10, 100, 500, 1000 de una población $N(0,1)$.

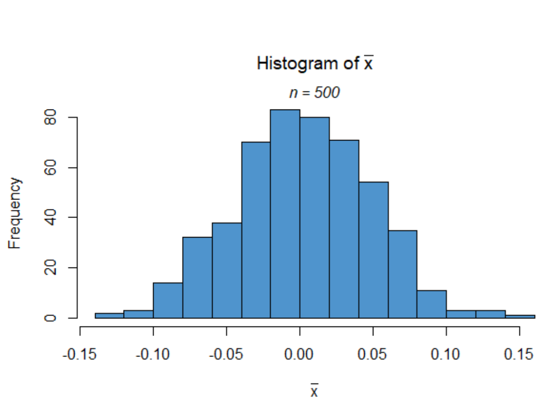
a) En cada caso, calcular $\bar{x}$ para cada muestra.

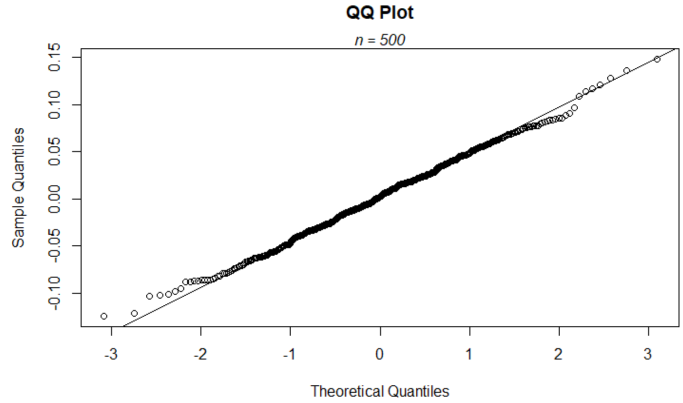
b) Graficar su histograma, así como su QQ plot. En todos los casos deberá verse como una normal pues esa es la distribución exacta de esos valores. Las imperfecciones del ajuste que puedes notar se deben a que estás haciendo una simulación, sólo estás viendo 500 de un número infinito de posibles resultados.

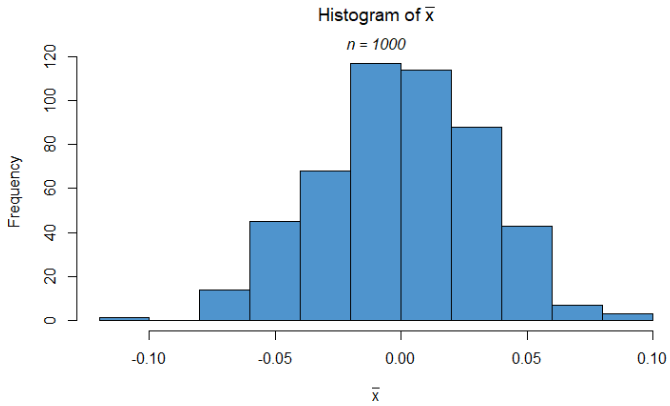
Resultados

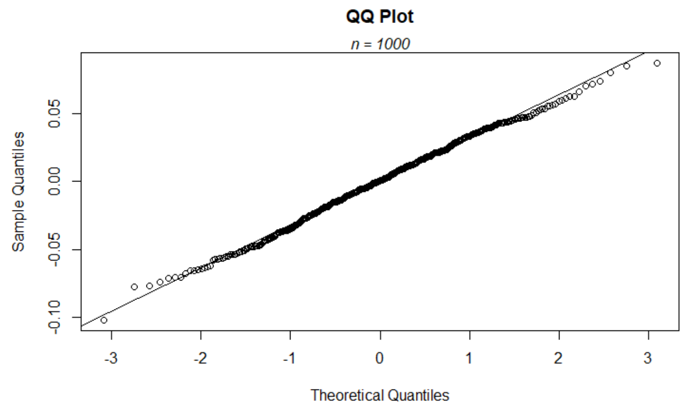
Histograma de frecuencias y QQ Plot de $\bar{x}$.









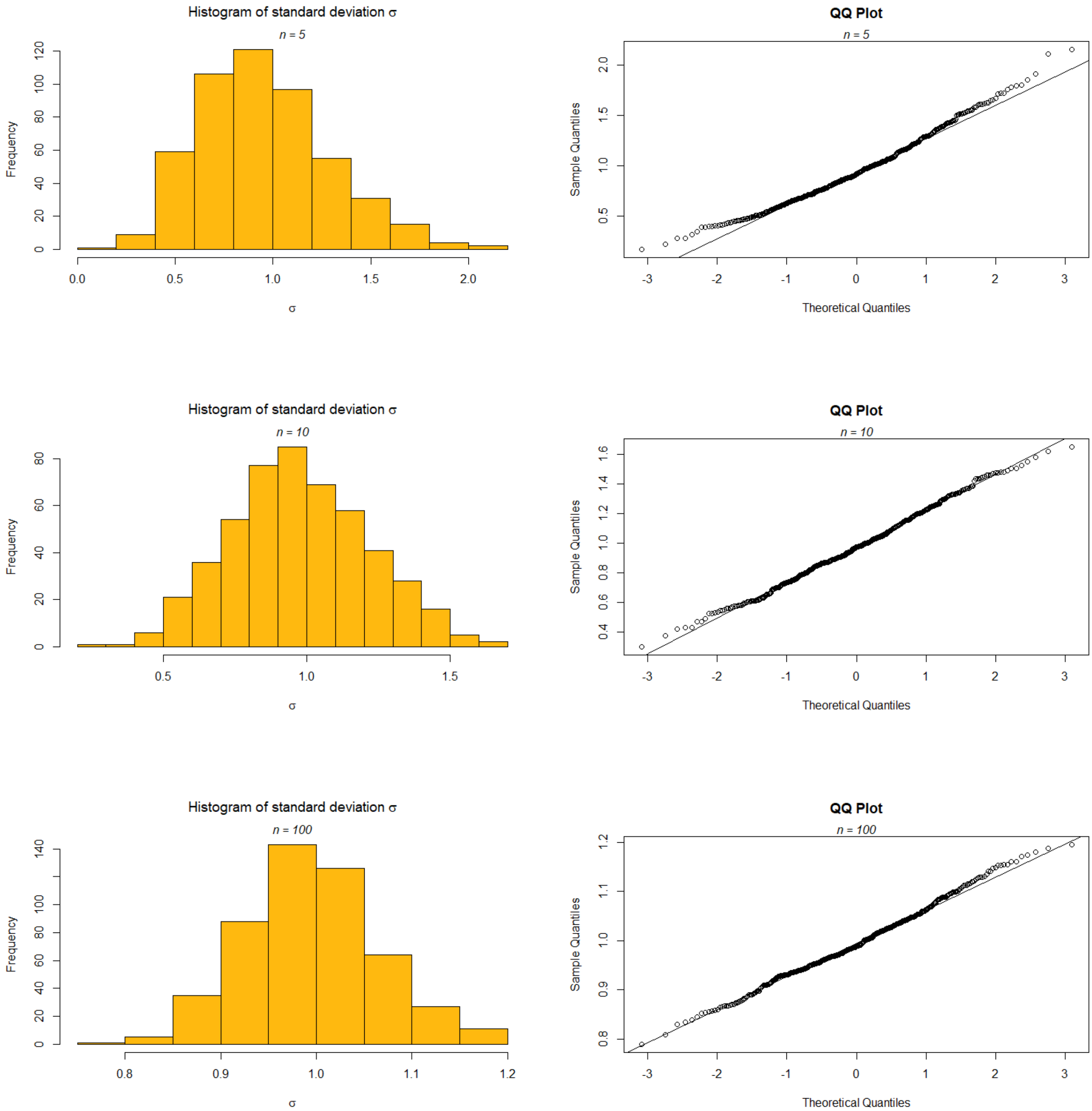


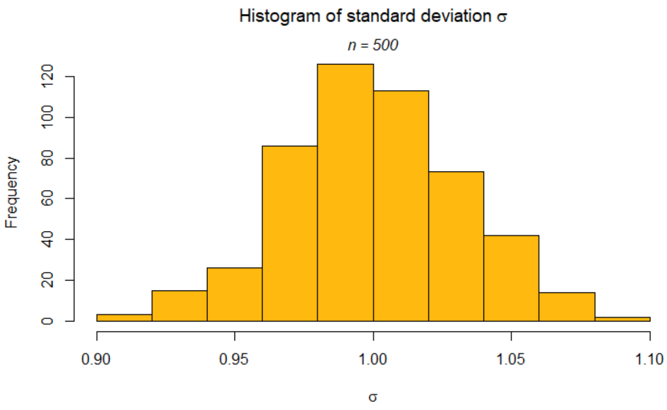
Dado que estamos considerando una población $N(0,1)$, observamos que la media muestral $\bar{X}$ se aproxima a una distribución normal. Sin embargo, se observan pequeñas imperfecciones las cuales, como se mencionó anteriormente, son atribuidas a los tamaños muestrales que se estan considerando. A medida que aumenta el tamaño de muestra n, la distribución adquiere mayor consistencia. Lo mismo podemos observar para los gráficos QQ plots generados.

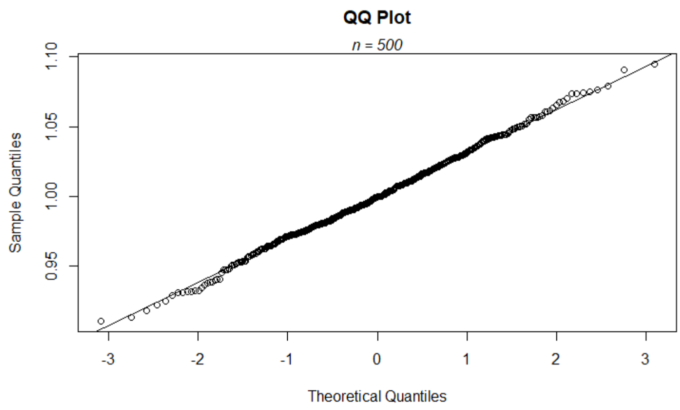
2. Repetir el ejercicio anterior para $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$, la desviación estándar, y concluye.

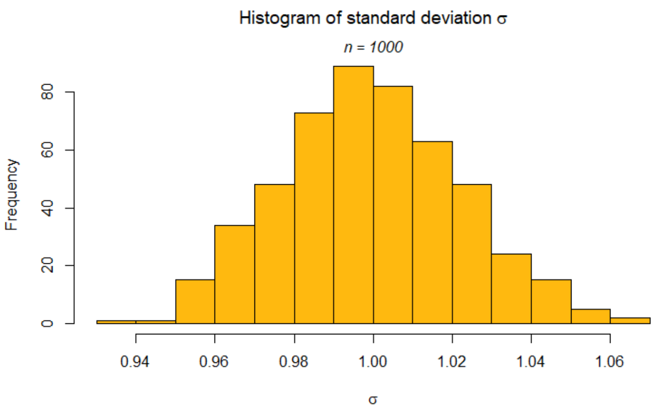
Resultados

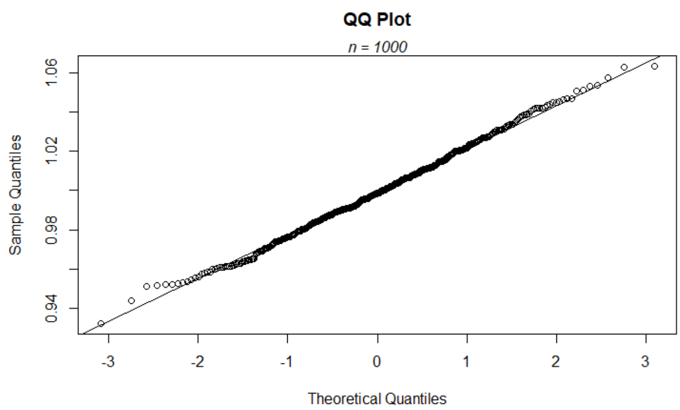
Histograma de frecuencias y QQ Plot de σ.











De manera similar, observamos que la desviación estándar tiende a seguir una distribución aproximadamente normal, con pequeñas imperfecciones por tratarse de una simulación. Al igual que con la media muestral $\bar{X}$, conforme aumenta el tamaño de la muestra n, la distribución de la desviación estándar S se vuelve más consistente, esto podemos observarlo tanto en los histogramas como en los QQ plots generados.

Ejercicio pg. 310

Cuando $X \sim N(0,1)$ y $Y = X^2$, sabemos que Y tiene una distribución χ_1^2. Aplica la técnica anterior notando que Y es decreciente para valores negativos de X y creciente para los valores positivos de X, es decir, que será necesario partir la región y sumar las contribuciones en ambas regiones.

Es decir que, si $x_i = w_i(y)$,

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\Big|\frac{dx_i}{dy}\Big|$$

la derivada de la i-ésima transformación inversa que tengamos que calcular las k regiones.

Solución

De acuerdo al *teorema del cambio de variable*, la densidad de Y, donde $Y \equiv u(X)$ y $X = w(Y)$; esta dada de la siguiente manera

$$f_Y(y) = f_X(w(y))\,\left|w'(y)\right|$$

donde $w'(y) = \frac{d}{dy}w(y)$.

En este caso $Y = X^2$, $X = \sqrt{Y}$, y $\frac{d}{dy}\sqrt{y} = \pm\frac{1}{2\sqrt{y}}$; por lo tanto

$$f_Y(y) = f_x(\sqrt{y})\Big| \pm \frac{1}{2\sqrt{y}}\Big|$$

Dado que $X \sim N(0,1)$, entonces

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

Entonces

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{y})^2}\Big|\frac{1}{2\sqrt{y}}\Big| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{y})^2}\Big| - \frac{1}{2\sqrt{y}}\Big|$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{1}{2}(y)} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{1}{2}(y)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{1}{2}(y)} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{1}{2}(y)}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{1}{2}(y)}$$

Finalmente

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(y)}$$

distribución χ_1^2 con un grado de libertad.

Ejercicio pg. 336

Sean $Z_1, Z_2 \sim N(0,1)$ variables aleatorias independientes. Además, sean $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \rho \in (-1,1)$ y $\sigma_1, \sigma_2 \in (0,\infty)$. Consideremos la transformación dada por

$$X = \mu_1 + \sigma_1 Z_1 \qquad Y = \mu_2 + \sigma_2\Big[\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2\Big]$$

Demuestra que $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ y $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$. Además, usa el teorema de la transformación de variables para demostrar que la densidad de (X, Y) está dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{exp\Big(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Big\{\Big(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\Big)^2 - 2\rho\Big(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\Big)\Big(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\Big) + \Big(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\Big)^2\Big\}\Big)}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}$$

para $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución

Sabemos por el *teorema del cambio de variable* que la función de densidad $f_X(x)$ esta dada por

$$f_X(x) = f_{Z_1}(z_1)\left|\frac{dz_1}{dx}\right|$$

en este caso $X = \mu_1 + \sigma_1 Z_1$ por lo que $Z_1 = \frac{X-\mu_1}{\sigma_1}$; $\frac{dz_1}{dx} = \frac{1}{\sigma_1}$.

Dado que $Z_1 \sim N(0,1)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2}\left|\frac{1}{\sigma_1}\right|$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2}$$

de esta manera encontramos que $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$.

De acuerdo al *teorema de la transformación de variables*, la funcíon de densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)$ esta dado por

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{Z_1,Z_2}(Z_1,Z_2)\ \left|det(J)\right|$$

donde $f_{Z_1,Z_2}(Z_1,Z_2)$ es la densidad conjunta de Z_1 y Z_2 y $|det(J)|$ el jacobiano de las transformaciones.

Dado que Z_1 y Z_2 son variables aleatorias **independientes**, su distribución conjunta se puede expresar como

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

En este caso $Z_1, Z_2 \sim N(0,1)$, por lo tanto

$$f_{Z_1,Z_2}(Z_1,Z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z_1}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z_2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(z_1+z_2)}$$

Por otro lado, el jacobiano se encuentra definido de la siguiente manera

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Z_1}{\partial X} & \frac{\partial Z_2}{\partial X} \\ \frac{\partial Z_1}{\partial Y} & \frac{\partial Z_2}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ \frac{1}{\sigma_2\rho} & \frac{1}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sigma_1(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})}$$

De esta manera

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(z_1+z_2)}\ \frac{1}{\sigma_1(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})}$$

dado que $Z_1 = \frac{x-\mu}{\sigma_1}$; $Z_2 = (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}) - \rho(Z_1)\ \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} = (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}) - \rho(\frac{x-\mu}{\sigma_1})\ \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$

Entonces

$$= \frac{1}{2\pi}exp\Big(\frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{x-\mu}{\sigma_1}\Big)^2 + \Big((\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}) - \rho(\frac{x-\mu}{\sigma_1})\ \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\Big)^2\Big]\Big)\ \frac{1}{\sigma_1(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})}$$

$$= \frac{exp\Big(\frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{x-\mu}{\sigma_1}\Big)^2 + \Big((\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}) - \rho(\frac{x-\mu}{\sigma_1})\ \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\Big)^2\Big]\Big)}{2\pi\ \sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

De esta manera encontramos que $f_{X,Y}(x,y)$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{exp\Big(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Big\{\Big(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\Big)^2 - 2\rho\Big(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\Big)\Big(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\Big) + \Big(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\Big)^2\Big\}\Big)}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}$$