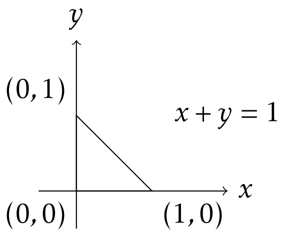
Godinez Bravo Diego
Inferencia Estadística
Tarea 5

CIMAT

1. Sea A el triángulo de vértices (0, 0), (0, 1), (1, 0) y suponga que X, Y tiene una densidad conjunta uniforme en el triángulo. (a) Halle las distribuciones marginales de X, Y, y $Z = X + Y$. (b) ¿Son X y Y independientes? ¿Por qué?

Solución



Área del triángulo

$$A = \frac{(base)(altura)}{2} = \frac{(1)(1)}{2} = \frac{1}{2}$$

a) Dado que tenemos una **distribución uniforme** a lo largo del área del triángulo, entonces

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

De esta manera tenemos que la función de distribución conjunta esta definida como

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & x+y \leq 1 \quad \text{y} \quad x,y \geq 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Las distribuciones marginales de las variables aleatorias continuas X y Y, se encuentran definidas de la siguiente manera

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

Por lo tanto, la distribución marginal $f_Y(y)$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{0}^{1-y} 2dx$$

$$= 2\int_{0}^{1-y} dx = 2x\Big|_{0}^{1-y}$$

$$= 2(1-y) - 2(0) = 2(1-y)$$

Finalmente

$$f_Y(y) = 2(1-y)$$

Por otro lado, tenemos que la distribución marginal $f_X(x)$

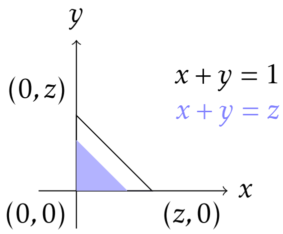
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{0}^{1-x} 2dy$$

$$= 2\int_{0}^{1-x} dy = 2y\Big|_{0}^{1-x}$$

$$= 2(1-x) - 2(0) = 2(1-x)$$

Por último

$$f_X(x) = 2(1-x)$$



Dado que queremos calcular la densidad dentro del área definida por la recta $z = x + y$

$$F(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy dx$$

En este caso

$$P(X + Y \leq z) = \int_0^z \int_0^{z-x} 2 dy dx$$

Resolviendo la integral

$$= \int_0^z 2(z - x) dx = \int_0^z 2z - 2x \, dx$$
$$= \int_0^z 2z \, dx - \int_0^z 2x \, dx = 2z \int_0^z dx - 2 \int_0^z x \, dx$$
$$= 2zx\Big|_0^z - 2\Big(\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_0^z$$
$$= \Big[2z^2 - 2z(0)\Big] - 2\Big[\frac{z^2}{2} - \frac{0^2}{2}\Big]$$
$$= 2z^2 - z^2$$

Por lo tanto

$$F(z) = P(X + Y \leq z) = z^2$$

Por último, para obtener la densidad de Z diferenciamos con respecto de Z

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F(z) = 2z$$

b) Se dice que dos variables aleatorias continuas son independientes si su distribución conjunta se puede expresar como el producto de sus marginales

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

En este caso tenemos que

$$f_{X,Y}(x, y) = 2(1 - x)2(1 - y) = 4(1 - x)(1 - y)$$
$$f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$$

Por lo que podemos decir que X y Y **no son independientes**.

2. Halle la densidad condicional de $X|Y=y$ si (X,Y) tiene densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{y}exp\Big(-\frac{x}{y}-y\Big) \qquad \text{para } x,y>0$$

También calcule $E(X \mid Y=y)$.

Solución

La distribución condicional de $X|Y=y$ se define de la siguiente manera

$$f_{X|y}(x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Por lo tanto, debemos calcular la densidad marginal de Y. La cual se encuentra definida como

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$

En este caso

$$f_Y(y)=\int_0^{\infty}\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}-y}dx=\int_0^{\infty}\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}dx$$

$$=e^{-y}\frac{1}{y}\int_0^{\infty}e^{-\frac{x}{y}}dx$$

Sea $u=\frac{-x}{y}$ y $\frac{du}{dx}=-\frac{1}{y}$, entonces

$$\int_0^{\infty}e^{u}-du\ y=e^{u}\ -y$$

Sustituyendo u

$$=e^{-y}\ \frac{1}{y}\ e^{-\frac{x}{y}}\ -y\Big|_0^{\infty}=e^{-y}(-e^{-\frac{x}{y}})\Big|_0^{\infty}$$

$$e^{-y}(0-(-1))=e^{-y}$$

De esta manera encontramos la densidad marginal de Y

$$f_Y(y)=e^{-y}$$

Utilizando la densidad marginal de Y calculamos la densidad condicional de $X|Y=y$

$$f_{X|y}(x)=\frac{\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}-y}}{e^{-y}}=\frac{\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{e^{-y}}$$

Por lo tanto, la densidad condicional $X|Y=y$ esta definida como

$$f_{X|y}(x)=\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$$

exponencial con parámetro $\frac{1}{y}$

Dado que es una exponencial sabemos que

$$E(X)=\int_0^{\infty}x\frac{1}{\theta}e^{\frac{-x}{\theta}}dx=\theta$$

Por lo que

$$E(X|Y)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X|y}(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}dx$$

$$E(X|Y)=y$$

3. Sea $Y \sim Exp(\theta)$ y, dado $Y = y, X$ tiene distribución de Poisson de media y. Encuentre la ley de X.

Solución

Tenemos que $Y \sim Exp(\theta)$, por lo tanto

$$f_Y(y) = \frac{1}{\theta} e^{\frac{-y}{\theta}}$$

Y dado que

$$f_{X|Y=y}(x) \sim Poisson(y)$$

donde $\lambda = y$.

Entonces

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{y^x e^{-y}}{x!}$$

A partir de la definición de distribución condicional podemos encontrar la densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)$

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y=y}(x)\ f_Y(y)$$

De esta manera tenemos que

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{y^x e^{-y}}{x!} \cdot \frac{1}{\theta} e^{\frac{-y}{\theta}}$$

Manipulando algebraicamente podemos reducir la expresión como sigue

$$= \frac{y^x e^{-y}}{x!} \cdot \frac{1}{\theta} e^{\frac{-y}{\theta}} = \frac{y^x\ e^{-y} e^{-\frac{y}{\theta}}}{\theta\ x!}$$

$$= \frac{y^x\ e^{\frac{-y\theta + y}{\theta}}}{\theta\ x!} = \frac{y^x\ e^{-y\frac{(\theta+1)}{\theta}}}{\theta\ x!}$$

Por lo tanto

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{y^x\ e^{-y\frac{(\theta+1)}{\theta}}}{\theta\ x!}$$

De acuerdo con la definición de distribución marginal tenemos que

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ dy$$

En este caso

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} \frac{y^x\ e^{-y\frac{(\theta+1)}{\theta}}}{\theta\ x!}\ dy$$

Resolviendo la integral

$$f_X(x) = \frac{1}{\theta\ x!} \int_0^{\infty} y^x\ e^{-y\frac{(\theta+1)}{\theta}} dy$$

considerando $\alpha = \frac{(\theta+1)}{\theta}$, y $t = y\alpha$

Entonces

$$f_X(x) = \frac{1}{\theta\ x!} \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^x e^{-t} \frac{dt}{\alpha}$$

$$= \frac{1}{\theta\ x!} \int_0^{\infty} \left(\frac{t^x}{\alpha^x}\right) e^{-t} \frac{dt}{\alpha}$$

$$= \frac{1}{\theta\ x!\alpha\ \alpha^x} \int_0^\infty t^x\ e^{-t}\ dt$$

Recordando cómo se encuentra definida la función gamma

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt$$

$$= z\Gamma(z)$$

Finalmente tenemos que

$$f_X(x) = \frac{1}{\theta\ x!\alpha^{x+1}}\ x\Gamma(x)$$

4. Sea (X, Y) un vector aleatorio con la siguiente densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} \pi^{-1} & x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

Demuestre que X y Y no están correlacionadas, pero qe no son independientes.

Solución

5. Sean X_1 y X_2 v.a.i. que tienen una distribución normal estándar. Obtenga la densidad conjunta de (Y_1, Y_2), donde $Y_1 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ y $Y_2 = X_1/X_2$. ¿Son Y_1 y Y_2 independientes?

Solución

6. El número de carros que pasa un cruce durante una hora tiene distribución de Poisson de parámetro λ. El número de personas en cada carro tiene una distribución de Poisson de parámetro v. Si Y es el total de personas que pasan por el cruce durante una hora, calcule $E(Y)$ y $Var(Y)$.

Solución

Problema Notas pg. 104

Se requiere verificar la programación del tiempo que debe durar la luz verde en un semáforo que se encuentra en una cierta intersección, con vuelta a la izquierda. Como no se tiene información al respecto, se envía a un estudiante graduado a hacer observaciones sobre el número de carros X y el número de camiones Y que llegan en un ciclo (entre verde y verde); y con esto se construye la tabla de distribuciones conjunta. Se plantean una serie de preguntas y con ello confirman qué tan eficiente fue el ciclo planeado.

Los resultados fueron los siguientes

		x		
		0	1	2
y	0	0.025	0.015	0.010
	1	0.050	0.030	0.020
	2	0.125	0.075	0.050
	3	0.150	0.090	0.060
	4	0.100	0.060	0.040
	5	0.050	0.030	0.020

a) Verifica que es una tabla válida de probabilidades conjuntas.

Para comprobar que es una tabla legítima de probabilidades conjuntas, debemos verificar que se cumple lo siguiente

$$0 \leq f(x,y) \leq 1 \forall (x,y) \qquad \sum_x \sum_y f(x,y) = 1$$

En este caso podemos comprobar fácilmente que para cada $\forall (x,y) 0 \leq f(x,y) \leq 1$. Por otro lado, si sumamos todas las probabilidades $f(x,y)$ para $x = 0,1,2$ y $y = 0,1,2,3,4,5$; es fácil corroborar que

$$\sum_x \sum_y f(x,y) = 1$$

b) Calcula las distribuciones marginales para carros y camiones.

		x			
		0	1	2	$P\{X = x\}$
y	0	0.025	0.015	0.010	0.050
	1	0.050	0.030	0.020	0.100
	2	0.125	0.075	0.050	0.250
	3	0.150	0.090	0.060	0.300
	4	0.100	0.060	0.040	0.200
	5	0.050	0.030	0.020	0.100
	$P\{Y = y\}$	0.500	0.300	0.200	**1.00**

c) ¿Cuál es la probabilidad de que se tengan exactamente un carro y un camión en un ciclo dado?

La probabilidad de que se tengan exactamente un carro y un camión en un ciclo dado esta dada por

$$f(1,1) = 0.030$$

d) Supongamos que la vuelta a la izquierda tiene una capacidad máxima de 5 carros y un camíon es equivalente a 3 carros. ¿Cúal es la probabilidad de que se sature la línea en un ciclo dado?

Dado que nos interesa la probabilidad

$$P(X > 5) = P(Y > 1)$$

Por lo tanto la probabilidad de que se sature la línea en un ciclo dado es

$$P(X > 5) = 0.250 + 0.300 + 0.200 + 0.100 = 0.850$$

e) ¿Cuál es la probabilidad de que se tenga exactamente un carro, dado que ya se tiene un camión en un ciclo predeterminado y se sabe que no habrá ningún otro camión más? Contesta esta misma pregunta para $Y = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Sean X y Y dos variables aleatorias con distribución conjunta $f(x, y)$, y marginales definidas por $f_X(x)$ y $f_Y(y)$. Entonces la distribución condicional de X dado $Y = y$ es

$$P\{X = x|Y = y\} = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

Por lo tanto podemos calcular la probabilidad $P\{X = 1|Y = 1\}$ de la siguiente manera

$$P\{X = 1|Y = 1\} = \frac{f(1, 1)}{f_Y(1)} = \frac{0.030}{0.100} = 0.300$$

De manera similar, calculamos las probabilidades de que se tenga exactamente un carro dado que se tienen y camiones sustituyendo las distribuciones conjuntas $f(x, y)$ y marginales $f_Y(y)$ correspondientes.

$$P\{X = 1|Y = 0\} = \frac{f(1, 0)}{f_Y(0)} = \frac{0.015}{0.050} = 0.300$$

$$P\{X = 1|Y = 2\} = \frac{f(1, 2)}{f_Y(2)} = \frac{0.075}{0.250} = 0.300$$

$$P\{X = 1|Y = 3\} = \frac{f(1, 3)}{f_Y(3)} = \frac{0.090}{0.300} = 0.300$$

$$P\{X = 1|Y = 4\} = \frac{f(1, 4)}{f_Y(4)} = \frac{0.060}{0.200} = 0.300$$

$$P\{X = 1|Y = 5\} = \frac{f(1, 5)}{f_Y(5)} = \frac{0.030}{0.100} = 0.300$$

Observamos que

$$P\{X = 1|Y = y\} = P\{X = 1\}$$

Por lo que podemos concluir que la variable aleatoria Y no agrega información adicional sobre el comportamiento de la variable aleatoria X. Por lo tanto podemos afirmar que X y Y son independientes.