Programación Lineal

Godinez Bravo Diego

Mayo 2024

Método Gráfico

Ejercicio 1. Obtener la solución óptima (si existe) del siguiente problema

$$\begin{aligned} \max \quad z = 3x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeto a:} \quad x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución

Para la restricción 1

$$x_1 - 2x_2 = 2,$$

si $x_1 = 0$, entonces $x_2 = -1$. Por otro lado, si $x_2 = 0$, entonces x_1 toma el valor de 2. Por lo tanto, la restricción no. 1 se grafica como la recta que intersecta los puntos $(0, -1)$ y $(2, 0)$.

Para la restricción 2

$$-2x_1 + x_2 = 2,$$

de manera similar se pueden encontrar los puntos de intersección de la recta. En este caso, la restricción no. 2 se grafica como la recta que intersecta los puntos $(-1, 0)$ y $(0, 2)$.

La región factible asociada al problema se muestra en la **Figura 1**. Dado que la región factible no está delimitada, se concluye que **no existe una solución óptima**.

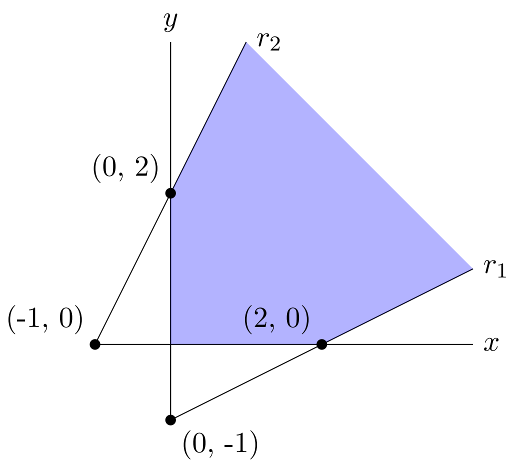

Figura 1. Región factible delimitada por las restricciones asociadas a la función z.

Modelación Matemática y Método Simplex

Ejercicio 2. La compañía PELTRE REGIOS, S.A. produce artículos caseros de peltre, la cual consta de varios productos. El sistema de manufactura se divide en varios departamentos, en la tabla siguiente se presenta la información relevante, la información está en horas a excepción de la última fila, la utilidad está en pesos. Formular el modelo matemático de este problema.

Departamento (operación)	**Olla**	**Jarra**	**Bowl**	**Pocillo**	**Capacidad productiva**
Cortado	10	20	2	3	4000
Troquelado	5	5	5	4	1500
Esmaltado	4	2	6	6	800
Utilidad unitaria ($)	10	15	4	2	

Considerar en la modelación matemática las siguientes variables de decisión:

- x_1: cantidad de ollas.
- x_2: cantidad de jarras.
- x_3: cantidad de bowls.
- x_4: cantidad de pocillos.

Solución

El modelo matemático se encuentra determinado por la utilidad unitaria de los distintos artículos así como por la capacidad productiva de cada uno de los departamentos. Teniendo en cuenta el contexto, se considera un problema de maximización de la siguiente manera

$$\max\ z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a: } 10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\leq 4000 \\ 5x_1 + 5_2 + 5x_3 + 4x_4 &\leq 1500 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 &\leq 800 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Considerar la relajación lineal del modelo del problema 2. Resolver el modelo obtenido con el método simplex tabular.

Solución

Obtenemos la relajación lineal del modelo, añadiendo las variables de holgura x_5, x_6, y x_7.

$$\max\ z - 10x_1 - 15x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0$$

$$\text{sujeto a: } 10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 \leq 4000$$
$$5x_1 + 5_2 + 5x_3 + 4x_4 + x_6 \leq 1500$$
$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 + x_7 \leq 800$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Por lo tanto, la tabla simplex asociada queda definida como

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	-10	-15	-4	-2	0	0	0	0
x_5	10	20	2	3	1	0	0	4000
x_6	5	5	5	4	0	1	0	1500
x_7	4	2	6	6	0	0	1	800

Elegimos la variable con el coeficiente más negativo, en este caso x_2. Aplicamos la prueba del cociente mínimo para determinar la variable que entra a la base: min $\{\frac{4000}{20}, \frac{1500}{2}, \frac{800}{2}\}$. De esta manera encontramos que la variable que entra es x_2 y la variable que sales es x_5.

Actualizamos la tabla simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	$-2{,}5$	0	$-2{,}5$	0,25	0,75	0	0	3000
x_2	0,5	1	0,1	0,15	0,05	0	0	200
x_6	2,5	0	4,5	3,25	$-0{,}25$	1	0	500
x_7	3	0	5,88	5,7	$-0{,}1$	0	1	400

Observamos que no se cumple la prueba de optimalidad, es decir, no todos los coeficientes de la primera fila son positivos. Repetimos el proceso para determinar la variable que entra a la base: min $\{\frac{200}{1/2}, \frac{500}{5/2}, \frac{400}{3}\}$. En este caso la variable que entra es x_1 y la variable que sale x_7.

Actualizamos la tabla simplex como sigue

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	0	0	2,25	5	0,66	0	0,83	3333,25
x_2	0	1	$-0{,}86$	$-0{,}8$	0,06	0	$-0{,}16$	133,33
x_6	0	0	$-0{,}25$	$-1{,}5$	$-0{,}15$	1	$-0{,}83$	166,66
x_1	1	0	1,93	1,9	$-0{,}03$	0	0,33	133,33

De acuerdo al criterio de optimalidad, la **solución** encontrada se encuentra determinada por

$$z^* = 3333{,}25 \qquad x^* = (133{,}33, 133{,}33, 0, 0)$$

Dualidad

Ejercicio 4. Encontrar el modelo dual del problema 1 y encontrar su solución con el método gráfico.

Solución

Problema primal definido en el **Ejercicio 1**

$$\begin{gathered} \max \quad z = 3x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeto a:} \quad x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

Problema dual correspondiente

$$\begin{gathered} \min \quad w = 2y_1 + 2y_2 \\ \text{sujeto a:} \quad y_1 - 2y_2 \geq 3 \\ -2y_1 + y_2 \geq 3 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{gathered}$$

Procedemos a obtener la solución óptima a través del método gráfico.

Para la restricción 1

$$y_1 - 2y_2 = 3,$$

si $y_1 = 0$, entonces $y_2 = -\frac{3}{2}$. Por otro lado, si $y_2 = 0$, entonces y_1 toma el valor de 3. Por lo tanto, la restricción no. 1 se grafica como la recta que intersecta los puntos $(0, -\frac{3}{2})$ y $(3, 0)$.

Para la restricción 2

$$-2y_1 + y_2 = 3,$$

de manera similar se pueden encontrar los puntos de intersección de la recta. En este caso, la restricción no. 2 se grafica como la recta que intersecta los puntos $(0, 3)$ y $(-\frac{3}{2}, 0)$.

La región factible asociada al problema se muestra en la **Figura 2**. Dado que la región factible no está delimitada, se concluye que **no existe una solución óptima**.

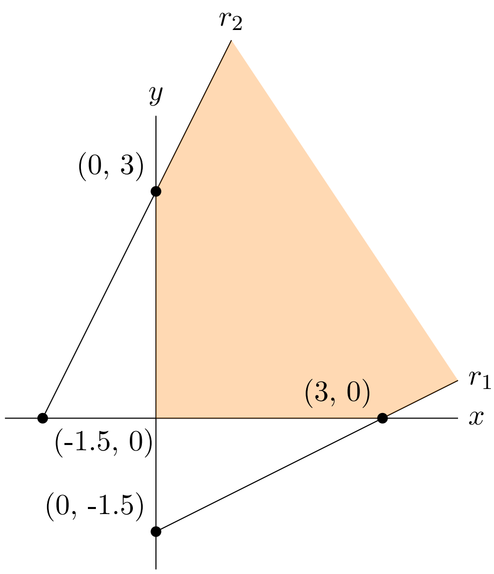

Figura 2. Región factible delimitada por las restricciones asociadas a la función z. Problema dual asociado con el problema primal definido en el **Ejercicio 1**.

Ejercicio 5. Considerar la relajación lineal del problema 2. Encontrar el modelo dual y resolverlo con el método simplex dual.

Solución

Modelo matemático asociado al **Ejercicio 2**

$$\max\ z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

$$\text{sujeto a: } 10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 4000$$
$$5x_1 + 5_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 1500$$
$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 \leq 800$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Definimos el problema dual de la siguiente manera

$$\min\ w = 4000y_1 + 1500y_2 + 800y_3$$

$$\text{sujeto a: } 10y_1 + 5y_2 + 4y_3 \geq 10$$
$$20y_1 + 5y_2 + 2y_3 \geq 15$$
$$2y_1 + 5y_2 + 6y_3 \geq 4$$
$$3y_1 + 4y_2 + 6y_3 \geq 2$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Reescribimos el problema para facilitar su resolución

$$\min\ w = 4000y_1 + 1500y_2 + 800y_3$$

$$\text{sujeto a: } -10y_1 - 5y_2 - 4y_3 \leq -10$$
$$-20y_1 - 5y_2 - 2y_3 \leq -15$$
$$-2y_1 - 5y_2 - 6y_3 \leq -4$$
$$-3y_1 - 4y_2 - 6y_3 \leq -2$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Añadimos las variables de holgura y_4, y_5, y_6, y y_7

$$\min\ w - 4000y_1 - 1500y_2 - 800y_3 = 0$$

$$\text{sujeto a: } -10y_1 - 5y_2 - 4y_3 + y_4 \leq -10$$
$$-20y_1 - 5y_2 - 2y_3 + y_5 \leq -15$$
$$-2y_1 - 5y_2 - 6y_3 + y_6 \leq -4$$
$$-3y_1 - 4y_2 - 6y_3 + y_7 \leq -2$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7 \geq 0$$

Construimos la tabla simplex dual asociada

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	LD
w	-4000	-1500	-800	0	0	0	0	0
y_4	-10	-5	-4	1	0	0	0	-10
y_5	-20	-5	-2	0	1	0	0	-15
y_6	-2	-5	-6	0	0	1	0	-4
y_7	-3	-4	-6	0	0	0	1	-2

Considerando la prueba del cociente mínimo: min $\{\frac{4000}{20}, \frac{1500}{5}, \frac{800}{2}\}$. De esta manera encontramos que la variable que entra y sale de la base es y_1 y y_5, respectivamente.

Actualizamos la tabla simplex

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	LD
w	0	-500	-400	0	-200	0	0	3000
y_4	0	$-2{,}5$	-3	1	$-0{,}5$	0	0	$-2{,}5$
y_1	1	0,25	0,1	0	0,05	0	0	0,75
y_6	0	$-4{,}5$	$-5{,}88$	0	0,1	1	0	$-2{,}5$
y_7	0	$-3{,}25$	$-5{,}77$	0	$-0{,}15$	0	1	0,25

Observamos que no se satisface la prueba de optimalidad, en este caso, no todos los coeficientes del lado derecho son positivos. Repetimos el proceso anterior: min $\{\frac{500}{5/2}, \frac{400}{3}, \frac{200}{1/2}\}$. En este caso la variable que entra es y_3 y la variable que sale y_4.

Se actualiza la tabla simplex como sigue

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	LD
w	0	$-16{,}66$	0	0	$-133{,}33$	$-133{,}33$	0	3333,33
y_3	0	0,83	1	$-0{,}33$	0,16	0	0	0,83
y_1	1	0,16	0	0,03	$-0{,}05$	0	0	0,66
y_6	0	0,33	0	$-1{,}93$	0,86	1	0	2,33
y_7	0	1,5	0	1,9	0,8	0	1	5

De acuerdo al criterio de optimalidad, la **solución** encontrada está determinada por

$$w^* = 3333{,}33 \qquad y^* = (0{,}66, 0, 0{,}83)$$

Análisis de Sensibilidad

Considerar la relajación lineal del modelo del problema 2 en cada uno de los siguientes incisos de forma independiente y concluir con la solución óptima del problema.

Ejercicio 6. Determinar los rangos de variación (intervalos permisibles) en la utilidad unitaria de las variables no básicas de tal forma que la solución óptima del problema no se altere.

Solución

Considerando la relajación lineal asociada al problema 2

$$\max\ z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a: } 10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\le 4000 \\ 5x_1 + 5_2 + 5x_3 + 4x_4 &\le 1500 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 &\le 800 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0, \end{aligned}$$

y la solución óptima encontrada

$$z^* = 3333{,}25 \qquad x^* = (133{,}33, 266{,}66, 0, 0)$$

Observamos que las variables básicas del problema son x_3 y x_4. Por lo tanto, para este problema consideramos lo siguiente

$$y^* = \begin{pmatrix} 0{,}66 & 0 & 0{,}83 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

donde

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

De esta manera, los **intervalos permisibles para** x_3 **y** x_4 están determinados por las desigualdades

Para x_3

$$c_3 \le y^* A_3 = \begin{pmatrix} 0{,}66 & 0 & 0{,}83 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$c_3 \le 6{,}33$$

Para x_4

$$c_4 \le y^* A_4 = \begin{pmatrix} 0{,}66 & 0 & 0{,}83 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$c_4 \le 7$$

Ejercicio 7. Evaluar el efecto de un cambio en la utilidad del producto tres de \$4 a \$5 (sin utilizar la información de los intervalos permisibles).

Solución

$$\max\ z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

$$\begin{gathered} \text{sujeto a: } 10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 4000 \\ 5x_1 + 5_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 1500 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 \leq 800 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{gathered}$$

relajación lineal asociada al problema 2.

Al cambiar la utilidad del producto tres de $c_3 = \$4$ a $c_3 = \$5$, el problema se expresa como

$$\max\ z = 10x_1 + 15x_2 + 5x_3 + 2x_4$$

$$\begin{gathered} \text{sujeto a: } 10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 4000 \\ 5x_1 + 5_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 1500 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 \leq 800 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{gathered}$$

El modelo dual asociado correspondiente es

$$\min\ w = 4000y_1 + 1500y_2 + 800y_3$$

$$\begin{gathered} \text{sujeto a: } 10y_1 + 5y_2 + 4y_3 \geq 10 \\ 20y_1 + 5y_2 + 2y_3 \geq 15 \\ 2y_1 + 5y_2 + 6y_3 \geq 5 \\ 3y_1 + 4y_2 + 6y_3 \geq 2 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{gathered}$$

Por lo tanto, la restricción asociada a x_3 es $2y_1 + 5y_2 + 6y_3 \geq 5$, y considerando la solución $y^* = \begin{pmatrix} 0{,}66 & 0 & 0{,}83 \end{pmatrix}$, entonces

$$2(0{,}66) + 5(0) + 6(0{,}83) \geq 5$$

$$6{,}3 \geq 5$$

Se satisface la nueva restricción dual, por lo que se concluye que la **solución óptima del modelo original sigue siendo válida**.

Ejercicio 8. Evaluar los posibles efectos en la solución óptima al realizar el siguiente cambio $a_3 = (2\ 3\ 1)^T$.

Solución

$$\max\ z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

$$\begin{gathered}\text{sujeto a: } 10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 4000\\ 5x_1 + 5_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 1500\\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 \leq 800\\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0,\end{gathered}$$

relajación lineal asociada al problema 2.

Considerando el cambio $a_3 = (2\ 3\ 1)^T$, el modelo queda expresado de la siguiente manera

$$\max\ z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

$$\begin{gathered}\text{sujeto a: } 10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 4000\\ 5x_1 + 5_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1500\\ 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 6x_4 \leq 800\\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0,\end{gathered}$$

Por lo tanto

$$\min\ w = 4000y_1 + 1500y_2 + 800y_3$$

$$\begin{gathered}\text{sujeto a: } 10y_1 + 5y_2 + 4y_3 \geq 10\\ 20y_1 + 5y_2 + 2y_3 \geq 15\\ 2y_1 + 3y_2 + 1y_3 \geq 4\\ 3y_1 + 4y_2 + 6y_3 \geq 2\\ y_1, y_2, y_3 \geq 0\end{gathered}$$

modelo dual asociado.

La nueva restricción dual asociada a x_3 está determinada por $2y_1 + 3y_2 + 1y_3 \geq 4$, y considerando la solución dual $y^* = \begin{pmatrix}0{,}66 & 0 & 0{,}83\end{pmatrix}$, entonces

$$2(0{,}66) + 3(0) + 1(0{,}83) \geq 4$$

$$2{,}15 \geq 4$$

No se satisface la nueva restricción dual, por lo que se concluye que la **solución óptima del modelo original ya no es válida**.

Encontramos los siguientes valores

$$z_j^* - \bar{c}_j = y^* \bar{A}_j - \bar{c}_j,$$

actualizando A_j^* como

$$A_j^* = S * \bar{A}_j,$$

de manera que podamos reoptimizar y encontrar la nueva solución óptima.

Para $c_3 = 4$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad S^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & 1 & -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

De manera que

$$z_3^* - \bar{c}_3 = y^* \bar{A}_3 - \bar{c}_3 = \begin{pmatrix} 0{,}66 & 0 & 0{,}83 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 = -\frac{11}{6} \approx 1{,}83$$

$$A_3^* = S * \bar{A}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & 1 & -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{30} \\ \frac{11}{6} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

Construimos la tabla simplex sustituyendo los valores encontrados y aplicamos nuevamente el método simplex.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	0	0	1,83	5	0,66	0	0,83	3333,33
x_2	0	1	−0,03	−0,8	0,06	0	−0,16	133,33
x_6	0	0	1,83	−1,50	−0,15	1	−0,83	166,66
x_1	1	0	0,26	1,90	−0,03	0	0,33	133,33

Aplicamos la prueba del cociente mímnimo: min $\{\frac{166{,}66}{1{,}83}, \frac{133{,}33}{0{,}03}, \frac{133{,}33}{0{,}26}\}$. En este caso la variable que entra es x_3 y la variable que sale x_6.

Actualizamos la tabla simplex.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	0	0	0	3,5	0,5	1	0	3500
x_2	0	1	0	−1,3	0,063	0,018	0,181	136,36
x_3	0	0	1	−0,81	−0,09	0,54	−0,45	90,90
x_1	1	0	0	20,09	−0,16	−0,07	0,35	109,09

De acuerdo al criterio de optimalidad, la **solución** está determinada por

$$z^* = 3500 \qquad x^* = (109{,}09, 136{,}36, 90{,}90, 0)$$

La solución óptima original maximizaba la función tomando un valor $z^* = 3333{,}33$. Por lo que realizando el cambio $a_3 = (2\ 3\ 1)^T$ se obtiene un valor mayor con $z^* = 3500$.

Ejercicio 9. El tomador de decisiones está estudiando la posibilidad de adicionar un nuevo artículo a su línea de productos actuales con coeficiente 12 en la función objetivo y en las restricciones con coeficientes 9, 7 y 6 respectivamente. ¿Si es recomendable esta acción?

Solución

$$\max\ z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

$$\text{sujeto a: } 10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 4000$$
$$5x_1 + 5_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 1500$$
$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 \leq 800$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0,$$

relajación lineal asociada al problema 2.

Actualizamos el modelo considerando un producto nuevo

$$\max\ z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 12x_n$$

$$\text{sujeto a: } 10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 9x_n \leq 4000$$
$$5x_1 + 5_2 + 5x_3 + 4x_4 + 7x_n \leq 1500$$
$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 6x_n \leq 800$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_n \geq 0,$$

Definimos la restricción dual asociada al producto nuevo

$$9y_1 + 7y_2 + 6y_3 \geq 12$$

Considerando la solución $y^* = \begin{pmatrix} 0{,}66 & 0 & 0{,}83 \end{pmatrix}$, encontramos que

$$9(0{,}66) + 7(0) + 6(0{,}83) \geq 12$$

$$10{,}92 \geq 12$$

Por lo tanto, es necesario redefinir el modelo.

$$z_3^* - \bar{c}_3 = y^* \bar{A}_3 - \bar{c}_3 = \begin{pmatrix} 0{,}66 & 0 & 0{,}83 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} - 12 = -1$$

$$A_3^* = S * \bar{A}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & 1 & -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{17}{10} \end{pmatrix}$$

Construimos la tabla simplex sustituyendo los valores encontrados y aplicamos nuevamente el método simplex.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_n	LD
z	0	0	2,25	5	0,66	0	0,83	-1	3333,33
x_2	0	1	$-0{,}86$	$-0{,}8$	0,06	0	$-0{,}16$	$-0{,}4$	133,33
x_6	0	0	$-0{,}25$	$-1{,}5$	$-0{,}15$	1	$-0{,}83$	0,5	166,66
x_1	1	0	1,93	1,90	$-0{,}03$	0	0,33	1,7	133,33

Aplicamos la prueba del cociente mínimo: min $\{\frac{166{,}66}{0{,}5}, \frac{133{,}33}{1{,}7}, \frac{133{,}33}{0{,}4}\}$. En este caso la variable que entra a la base es x_n al ser la única variable con coeficiente negativo, mientras que por la prueba del cociente mínimo, la variable que sale x_1.

Actualizamos la tabla simplex.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_n	LD
z	0,58	0	3,47	6,11	0,64	0	1,02	0	3411,76
x_2	0,23	1	$-0{,}41$	$-0{,}35$	0,06	0	$-0{,}088$	0	164,70
x_6	0,29	0	$-0{,}90$	$-2{,}05$	$-0{,}16$	1	$-0{,}93$	0	127,45
x_n	0,58	0	1,13	1,11	$-0{,}019$	0	0,19	1	78,42

Finalmente, de acuerdo al criterio de optimalidad, la **solución** está determinada por

$$z^* = 3411{,}76 \qquad x^* = (0, 164{,}70, 0, 0, 78{,}42)$$

La solución óptima original maximizaba la función tomando un valor $z^* = 3333{,}33$. En este caso, añadiendo un producto nuevo se obtiene un valor mayor con $z^* = 3411{,}76$. De esta manera se concluye que **si es recomendable añadir el producto**.

Ejercicio 10. El tomador de decisiones ahora quiere tomar en cuenta en el modelo una restricción de demanda mínima para mantener una cierta posición en el mercado, la cual se representa de la siguiente manera

$$x_1 + 2x_2 + 3X_3 + 4x_4 \geq 500$$

Obtener la solución óptima y evaluar los efectos de incluir la nueva restricción en el modelo.

Solución

$$\max\ z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

$$\begin{gathered} \text{sujeto a: } 10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 4000 \\ 5x_1 + 5_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 1500 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 \leq 800 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{gathered}$$

relajación lineal asociada al problema 2.

Añadiendo la nueva restricción el modelo se actualiza de la siguiente manera

$$\max\ z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

$$\begin{gathered} \text{sujeto a: } 10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 4000 \\ 5x_1 + 5_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 1500 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 \leq 800 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 500 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{gathered}$$

Considerando la solución óptima previamente encontrada $x^* = (133{,}33, 133{,}33, 0, 0)$, y la nueva restricción establecida

$$133{,}33 + 2(133{,}33) + 3(0) + 4(0) \geq 500$$

$$400 \geq 500$$

Notamos que la solución x^* no satisface la nueva restricción. Por lo tanto, actualizamos el modelo

$$\max\ z - 10x_1 - 15x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0$$

$$\begin{gathered} \text{sujeto a: } 10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 4000 \\ 5x_1 + 5_2 + 5x_3 + 4x_4 + x_6 = 1500 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 + x_7 = 800 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_8 = -500 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0, \end{gathered}$$

y construimos la tabla simplex asociada.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
z	0	0	2,25	5	0,66	0	0,83	0	3333,25
x_2	0	1	−0,86	−0,8	0,06	0	−0,16	0	133,33
x_6	0	0	−0,25	−1,5	−0,15	1	−0,83	0	166,66
x_1	1	0	1,93	1,9	−0,03	0	0,33	0	133,33
x_8	−1	−2	−3	−4	0	0	0	1	500

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
z	0	0	2,25	5	0,66	0	0,83	0	3333,25
x_2	0	1	$-0{,}86$	$-0{,}8$	0,06	0	$-0{,}16$	0	133,33
x_6	0	0	$-0{,}25$	$-1{,}5$	$-0{,}15$	1	$-0{,}83$	0	166,66
x_1	1	0	1,93	1,9	$-0{,}03$	0	0,33	0	133,33
x_8	0	0	$-2{,}8$	$-3{,}7$	0,1	0	0	1	-100

De acuerdo a la prueba del cociente mínimo: min $\{\frac{2{,}33}{2{,}8}, \frac{5}{3{,}7}, \frac{0{,}66}{0{,}1}\}$; las variables que entran y salen de la base son x_3 y x_8, respectivamente.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
z	0	0	0	1,91	0,75	0	0,83	0,83	3250
x_2	0	1	0	0,34	0,035	0	$-0{,}16$	$-0{,}30$	164,28
x_6	0	0	0	$-1{,}05$	$-0{,}17$	1	$-0{,}83$	$-0{,}11$	178,57
x_1	1	0	0	$-0{,}65$	0,035	0	0,33	0,69	64,28
x_3	0	0	1	1,32	$-0{,}035$	0	0	$-0{,}35$	35,71

Por el criterio de optimalidad, la **solución** óptima se encuentra definida por

$$z^* = 3250 \qquad x^* = (64{,}28, 164{,}28, 35{,}71, 0)$$

La restricción definida

$$x_1 + 2x_2 + 3X_3 + 4x_4 \geq 500$$

disminuye la utilidad total en comparación con el modelo original, donde $z^* = 3333{,}25$