Godinez Bravo Diego
Inferencia Estadística
Tarea 1

1. Un conjunto de bits se envían sobre un canal de comunicación en paquetes de 12. Si la probabilidad de que un bit sea corrompido sobre este canal es de 0.1 y los errores son idependientes, ¿cuál es la probabilidad de que no más de dos bits de un paquete se corrompan? Si 6 paquetes de bits se envían sobre el canal, ¿cúal es la probabilidad de que al menos un paquete contenga 3 o más bits corruptos? Finalmente, si X denota el número de paquetes conteniendo 3 o más bit corruptos, ¿cúal es la probabilidad de que X excederá su media por más de dos desviaciones estándar?

¿Cuál es la probabilidad de que no más de dos bits de un paquete se corrompan?

Al ser una variable aleatoria discreta (X = número de bits corrompidos), con probabilidad **p** constante y **n** = 12, podemos decir que la variable aleatoria X tiene una **distribución binomial**.

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall \quad k = 0, 1, ..., 12$$

Nos interesa la probabilidad de que **no más de dos** bits de un paquete se corrompan (i.e. P($X \leq 2$)), la cual abarca las probabilidades cuando X = (0, 1, 2), por lo tanto debemos calcular las probabilidades correspondientes; P($X = 2$), P($X = 1$) y P($X = 0$).

$$P(X=2) = \binom{12}{2} p^2 (1-p)^1 0 = \binom{12}{2} 0.1^2 (1-0.1)^1 0 = 0.2301$$

$$P(X=1) = \binom{12}{1} p^1 (1-p)^1 1 = \binom{12}{1} 0.1^2 (1-0.1)^1 1 = 0.3765$$

$$P(X=0) = \binom{12}{0} p^2 (1-p)^1 2 = \binom{12}{0} 0.1^2 (1-0.1)^1 2 = 0.2824$$

$$P(X \leq 2) = P(X=2) + P(X=1) + P(X=0) = 0.2301 + 0.3765 + 0.2824$$

De esta manera la probabilidad de que no más de dos bits se corrompan es:

$$P(X \leq 2) = 0.8891$$

Si 6 paquetes de bits se envían sobre el canal, ¿cúal es la probabilidad de que al menos un paquete contenga 3 o más bits corruptos?

Este caso lo podemos considerar como una **distribución binomial** con parámetros **n** = 6 y probabilidad **p** = P($X = \geq 3$), siendo la variable aleatoria X = 'número de paquetes con 3 o más bits corruptos'. Considerando esto debemos de calcular la probabilidad P($X \geq 3$) (probabilidad de que al menos 3 bits de un paquete se corrompan), y posteriormente utilizarla para encontrar la probabilidad P($X \geq 1$).
Utilizando la probabilidad calculada en la pregunta anterior (P($X \leq 2$)), podemos calcular la probabilidad P($X \geq 3$) de la siguiente manera:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.8891$$

Por lo tanto:

$$P(X \geq 3) = 0.1111$$

Una vez que contamos con la probabilidad P($X \geq 3$) podemos resolver el problema; **distribución binomial** con parámetros n (con n = 1, 2,..., 6) y p = 0.1111:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall \quad k = 0, 1, ..., 6$$

$P(X \geq 1)$ incluye $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, ..., $P(X = 6)$, excepto $P(X = 0)$, por lo que podríamos calcular $P(X \geq 1)$ de la siguiente manera:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$P(X = 0) = \binom{6}{0} 0.1111^0 (1 - 0.1111)^6 = 0.4936$$

$$P(X \geq 1) = 1 - 0.4936$$

De esta manera:

$$P(X \geq 1) = 0.5063$$

Si X denota el número de paquetes conteniendo 3 o más bit corruptos, ¿cúal es la probabilidad de que X excederá su media por más de dos desviaciones estándar?

El valor esperado de una variable aleatoria con distribución binomial esta dado por $E(X) = np$; en este caso tenemos una n = 6 y una probabilidad p = 0.1111, por lo tanto:

$$E(x) = np = (6)(0.1111) = 0.66$$

Por otro lado la varianza esta dada por $V(X) = np(1-p)$; sustituyendo valores tenemos que:

$$V(x) = np(1-p) = (6)(0.1111)(1 - 0.1111) = 0.5866$$

De esta manera tenemos que la desviación estándar es:

$$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0.5866} = 0.7658$$

Nos interesa calcular la probabilidad $P(X \geq \mu + 2\sigma) = P(X \geq 2.20)$, en este caso al ser una variable aleatoria discreta podemos interpretar $P(X \geq 2.20)$ como $P(X \geq 3)$. Calculamos dicha probabilidad de la siguiente manera:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X < 0) + P(X < 1) + P(X < 2)]$$

Calculamos las probabilidades correspondientes:

$$P(X = 0) = \binom{6}{0} 0.1111^0 (1 - 0.1111)^6 = 0.4936$$

$$P(X = 1) = \binom{6}{1} 0.1111^1 (1 - 0.1111)^5 = 0.3699$$

$$P(X = 2) = \binom{6}{2} 0.1111^2 (1 - 0.1111)^4 = 0.1156$$

Por lo tanto la probabilidad de que X exceda su media por más de dos desviaciones estándar es:

$$P(X \geq 3) = 1 - [0.4936 + 0.3699 + 0.1156] = 0.0208$$

2. Una caja contiene 12 manzanas frescas y 4 que están podridas. Si elige 3 al azar y X denota el número de manzanas frescas que tomó, encuentre la función de densidad de X y su esperanza.

Dado que se trata de una variable aleatoria discreta (X = número de manzanas frescas), con parámetros **N** igual al número total de elementos, de los cuales k se distinguen del resto de los elementos, y **n** igual al número total de observaciones; y considerando que la probabilidad de éxito cambia en cada observación, podemos decir que la variable aleatoria X sigue una **distribución hipergeométrica**.

$$P(X = x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

En este caso tenemos un total de 16 manzanas (**N**), de las cuales 12 son manzanas frescas (k) y 4 son manzanas podridas ($N-k$), de las cuales tomaremos 3 (**n**; ensayos). Por lo que la distribución de probabilidad esta dada de la siguiente manera:

$$P(X=x) = \frac{\binom{12}{x}\binom{4}{3-x}}{\binom{16}{3}} \quad \forall \quad x = 0, 1, 2, 3$$

donde x = número de manzanas frescas.

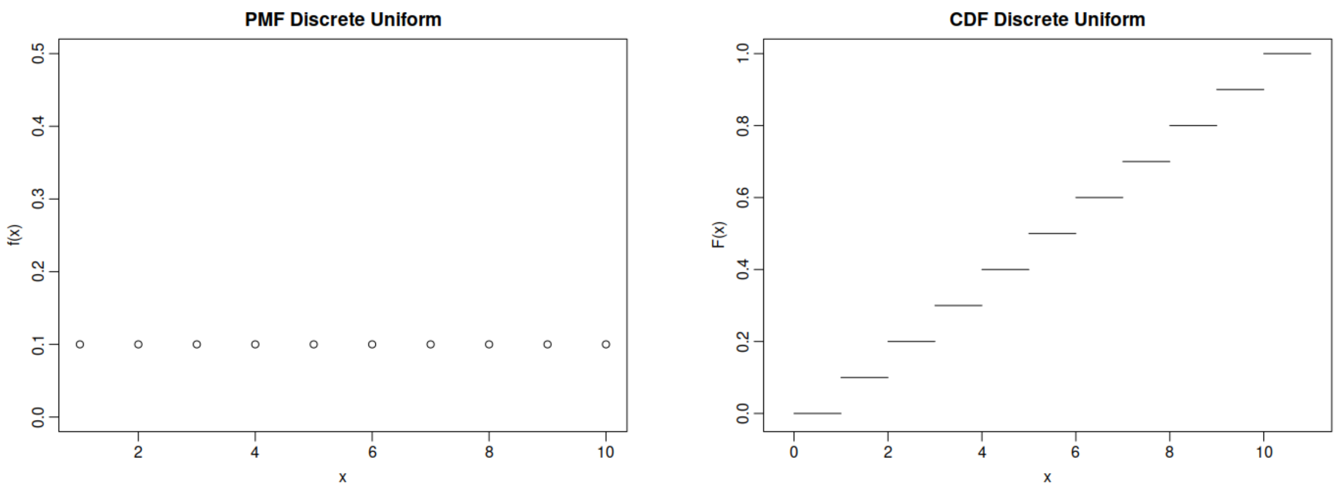
El valor esperado de la variable aleatoria X esta dado por:

$$E[X] = \frac{nk}{N}$$

$$E[X] = \frac{(3)(12)}{16} = 2.25$$

3. Para el siguiente ejercicio es necesario el programa R.

a) Escriba un programa en R que reproduzca las gráficas de las funciones de distribución acumulada y de masa de la distribución uniforma que aparecen en las notas del curso. Las gráficas deben verse similares a las figuras de la Figura 1.



(a) Función de Masa de Probabilidad

(b) Función de Distribución Acumulada

b) Lea en la documentación e R, o en cualquier otra fuente de información confiable, la explicación de la función *sample*(x, size, replace=FALSE, prob=NULL). (No es necesario entregar algo para este ejercicio.)

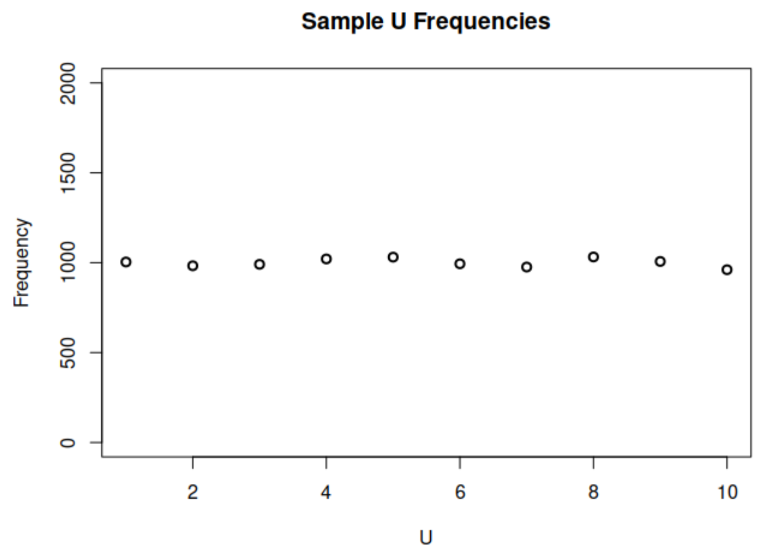
c) Usando la función *sample* simule una muestra de tamaño 10,000 de la distribución $U(1, ..., 10)$. Fijando la semilla en 13 (set.seed(13)), muestre los resultados de la simulación en una tabla de frecuencia y calcule la media y la varianza. Sugerencia: Use la función table.

Tabla de Frecuencias

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1004	983	991	1021	1031	994	976	1032	1007	961

Media: 5.49
Varianza: 8.18

d) Grafique las frecuencias de la simulación anterior.



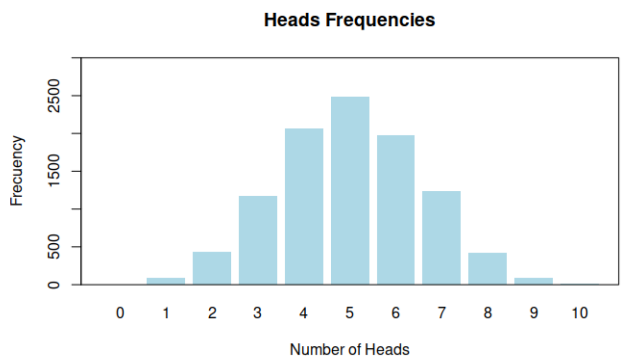
Frecuencias de U con n = 10,000

4. Para el siguiente ejercicio también necesitamos R.

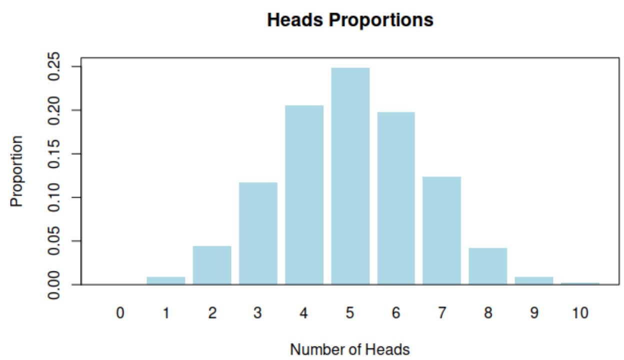
a) Usando la función *sample*, simule 10 lanzamientos de una moneda equlibrada y cuente el número de águilas que obtiene. Repita este proceso 10^4 veces y muestre sus primeros 3 resultados. Grafique las frecuencies del número de águilas obtenidas en los 10^4 experimentos. También grafique las proporciones del número de águilas obtenidas.

En este experimento definimos la variable aleatoria X como el número de águilas obtenidas a lo largo de 10 lanzamientos, donde cada observación es independiente, esto implica que la probabilidad de éxito se mantiene constante entre cada observación. Por los parámetros dados podemos inferir que la variable aleatoria sigue una distribución binomial $X \sim B(10, 0.5)$.

Al graficar las frecuencias y proporciones observamos que los valores que toma la variable aleatoria se encuentran en su mayoría entre $X = (4, 5, 6)$, y que el valor esperado $E(X) = np = 5$.



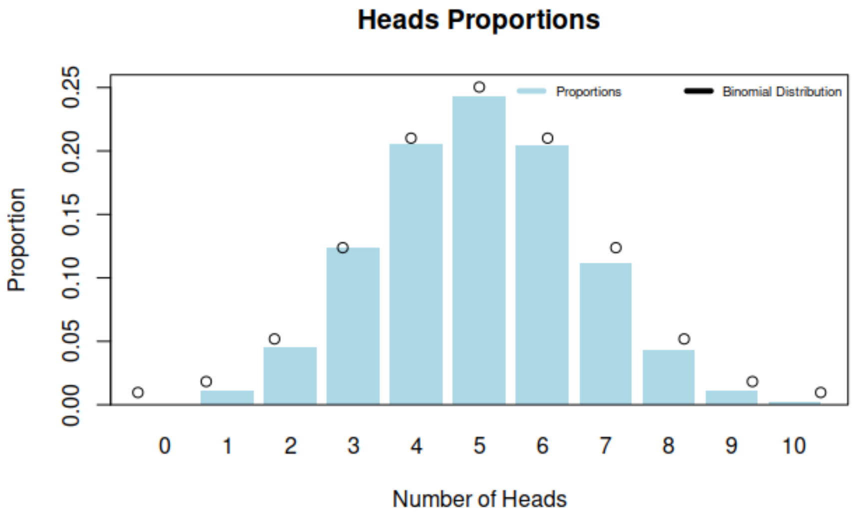
(a) Gráfica de Frecuencias



(b) Gráfica de Proporciones

b) Usando la función *dbinom* grafique la función de masa de una distribución $B(10,\ 0.5)$ sobre la gráfica de las proporciones que hizo en el inciso anterior.

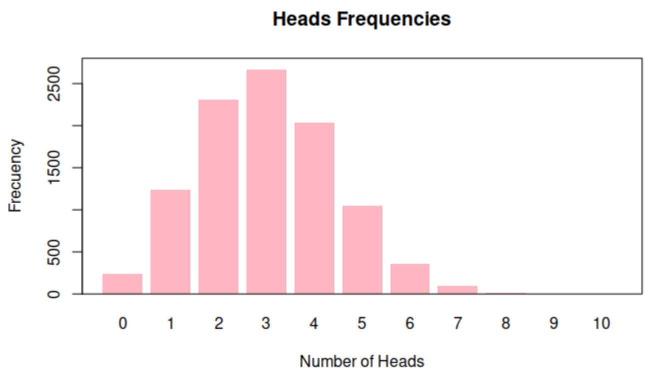
Podemos comprobar que la variable aleatoria X sigue una distribución normal graficando las proporciones del número de águilas obtenidas junto con la gráfica de distribución binomial $B(10, 0.5)$, donde el valor esperado coincide en ambos casos.



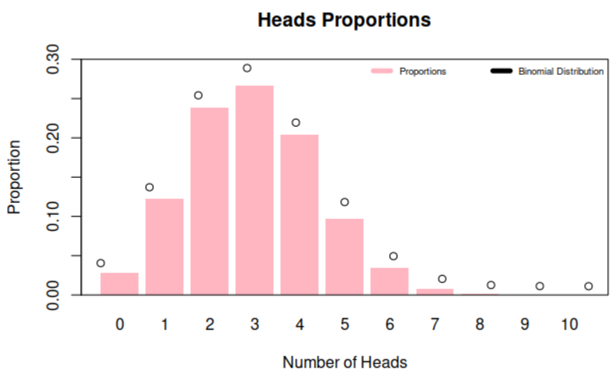
Distribución Binomial $B(10, 0.5)$ y gráfica de frecuencias

c) Repita los dos incisos anteriores para una moneda desequilibrada que tiene probabilidad p = 0.3 de obtener un águila cuando se lanza. ¿Qué observa?

De manera general se observa que la frecuencia de los valores menores aumenta, esto como consecuencia de desequilibrar la moneda (menor probabilidad de obtener Águila (*Heads*)), aunado a esto el valor esperado se desplaza hacia la izquierda (i.e. valor esperado afectado por valores extremos).

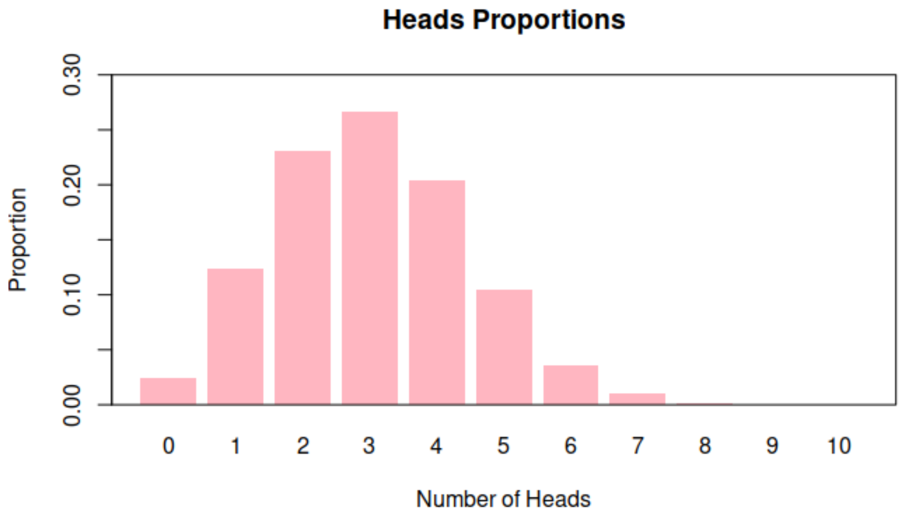


(a) Gráfica de Frecuencias



(b) Gráfica de Proporciones

Nuevamente al traslapar la gráfica de proporciones del número de águilas obtenido junto con la gráfica de la distribución binomial $B(10, 0.3)$, podemos observar que la variable aleatoria X sigue una distribución binomial con parámetros $n = 10$ y $p = 0.3$; $X \sim B(10, 0.3)$. De manera similar al experimento anterior el valor esperado coincide en ambas gráficas; $(E(X) = np = 3)$.

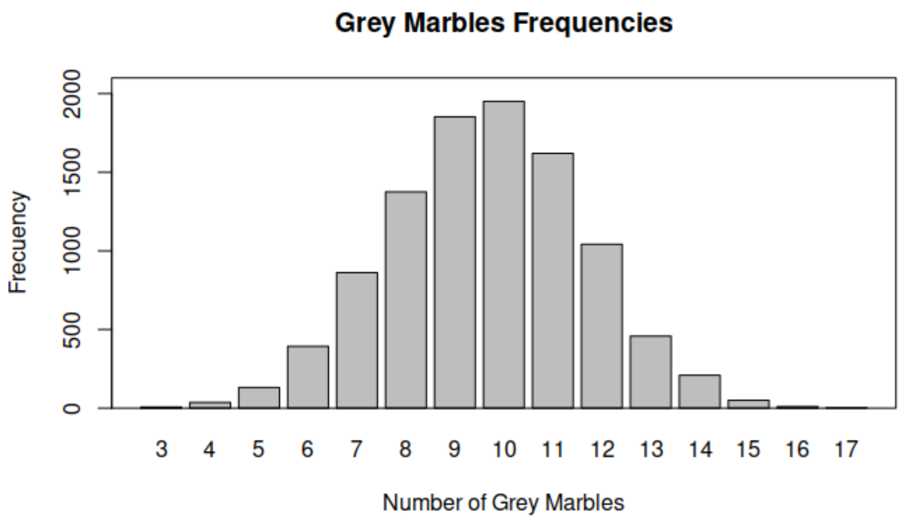


Distribuci2on Binomial $B(10, 0.3)$ y gráfica de frecuencias

5. Una urna contiene 46 bolas grises y 49 bolas blancas. Usando la función *sample* en R, simule la extracción sin reemplazamiento de 20 de estas bolas y cuente el número de bolas grises que obtuvo. Repita este experimento 10^4 veces y grafique las frecuencias de bolas grises obtenidas en cada experimento. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer 20 bolas de la urna 5 de ellas sean grises? También grafique la proporción de bolas grises obtenidas en los experimentos anteriores y sobre esta figura añada la correspondiente función de masa de la distribución Hipergeométrica asociada al experimento total. Brevemente discuta que observa.

En este experimento definimos la variable aleatoria X como el número de bolas grises obtenidas a lo largo de 20 extracciones, a diferencia el experimento anterior, la probabilidad de éxito cambia entre cada observación (**muestreo sin reemplazo**), y dados los parámetros establecidos: población con un total de **N** elementos de los cuales k poseen cierta característica de interés, y una muestra de **n** objetos tomados al azar; podríamos pensar que la variable aleatoria sigue una distribución hipergeométrica $X \sim Hiper(95, 46, 20)$.

Al graficar las frecuencias del número de bolas grises obtenidas observamos que los valores que toma la variable aleatoria X caen en su mayoría entre $X = (8, \ldots, 11)$, con $E(X) \approx 10$.



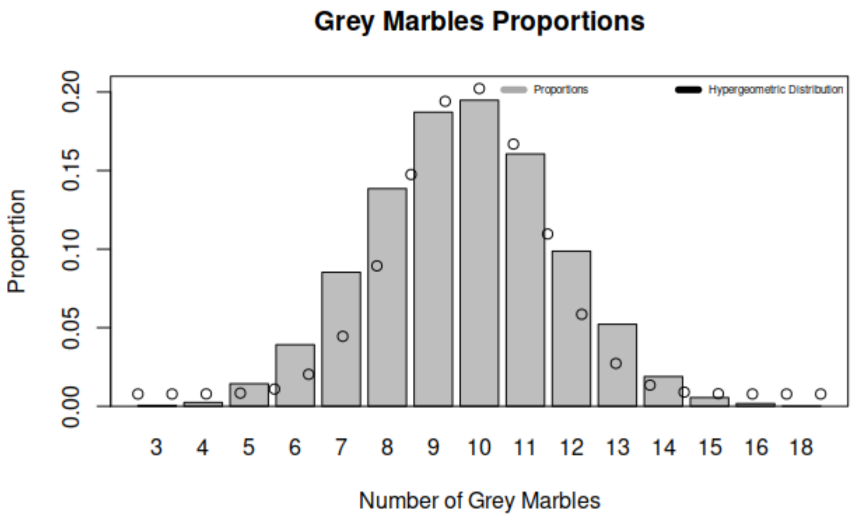
Gráfica de frecuencias

La probabilidad de que al extraer 20 bolas de la urna 5 de ellas sean grises se calculó utilizando la función *dhyper* con los siguientes parámetros:

$$dhyper(5, 46, 49, 20) = 0.01261$$

donde $x = 5$ es el número de bolas grises que nos interesa obtener; $m = 46$ es el número total de bolas grises en la urna; $n = 49$ es el número total de bolas blancas en la urna; y $k = 20$ es el número de bolas a extraer.

Por último podemos observar que la distribución de probabilidad del experimento sigue una distribución hipergeométrica, esto por la naturaleza del experimento en sí, como se mencionó con anterioridad se tiene una poblacion de tamaño **N** con k elementos que se diferencían del resto de la población y una probabilidad p que cambia entre cada observación. De manera similar al experimento anterior vemos que el valor esperado coincide, para este caso $E(X) = \frac{nk}{N} = 9.6 \approx 10$



Distribución Hipergeométrica $H(10, 0.3)$ y gráfica de frecuencias

6. Sea X una variable con función de distribución F dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{para } 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \text{para } \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{4} \\ 1 & \text{para } \frac{3}{4} \leq x \end{cases}$$

Determine la función de probabilidad de X.

Dado que se trata de la función de distribución acumulada podemos encontrar las probabilidades $f(a < x < b)$ de la siguiente manera:

$$f(0 \leq x < \tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{2}$$
$$f(\tfrac{1}{4} \leq x < \tfrac{3}{4}) = \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}$$
$$f(x \geq \tfrac{3}{4}) = 1 - \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{4}$$

Por lo tanto la función de probabilidad esta dada de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para cualquier otro caso} \\ \frac{1}{2} & \text{para } 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \text{para } \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \text{para } x \geq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Podemos corroborar que la función de probabilidad es legítima ya que se cumple que:

$$p(x_i) > 0, \text{para todo i}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

7. Sea X una variable aleatoria con valores en $[0, 1]$ y función de distribución $F(x) = x^2$. ¿Cuál es la densidad de X? Calcule las siguientes probabilidades: i) $P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4})$; ii) $P(X > \frac{1}{2})$; iii) $P(X \leq \frac{3}{4}|X > \frac{1}{2})$.

Función de de densidad de probabilidad $f(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 = 2x$$

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$ y función de distribución acumulada $F(x)$. Entonces para cualquier número a:

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$

y para dos números cualesquiera a y b con $a < b$:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

i) P$(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4})$

$$F(b) - F(a) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} - \frac{1}{16}$$

$$P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}\right) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

ii) P$(X > \frac{1}{2})$

$$1 - F(a) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$P\left(X > \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

iii) P$(X \leq \frac{3}{4}|X > \frac{1}{2})$

La probabilidad condicional de dos eventos A y B esta dada de la siguiente manera:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Considerando las probabilidades de interés tenemos que:

$$P\left(X \leq \frac{3}{4}|X > \frac{1}{2}\right) = \frac{P(X \leq \frac{3}{4} \cap X > \frac{1}{2})}{P(X > \frac{1}{2})}$$

Sabemos el valor de la probabilidad $P(X > \frac{1}{2})$; únicamente debemos de encontrar la probabilidad de la $P(X \leq \frac{3}{4} \cap X > \frac{1}{2})$:

$$\begin{aligned} P(X \leq \frac{3}{4} \cap X > \frac{1}{2}) &= 1 - (P(X > \frac{3}{4}) + P(X \leq \frac{1}{2})) = 1 - ((1 - \frac{9}{16}) + \frac{1}{4}) \\ &= 1 - (\frac{7}{16} + \frac{1}{4}) = 1 - \frac{11}{16} = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

$$\frac{P(X \leq \frac{3}{4} \cap X > \frac{1}{2})}{P(X > \frac{1}{2})} = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{3}{4}}$$

$$P\left(X \leq \frac{3}{4} \quad | \quad X > \frac{1}{2}\right) = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$$

8. Un lote muy grande de componentes ha llegado a un distribuidor. Se puede decir que el lote es aceptable solo si la proporción de componentes defectuosos es cuando mucho 0.10. El distribuidor decide seleccionar aleatoriamente 10 componentes y aceptar el lote solo si el número de componentes defectuosos en la muestra es cuando mucho 2. ¿Cuál es la probabilidad de que el lote sea aceptado cuando la proporción real de defectuosos es 0.01, 0.05, 0.10, 0.20?

Distribución Binomial con parámetros $\mathbf{n} = 10$, y $\mathbf{p} = (0.01, 0.05, 0.10, 0.20)$ constante, donde la variable aleatoria X = 'número de componentes defectuosos'.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall \quad k = 0, 1, ..., 10$$

Nos interesa obtener la probabilidad $P(X \geq 2)$, esto incluye la probabilidad cuando $X = 2$, $X = 1$ y $X = 0$; es decir:

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)$$

Por lo que necesitamos calcular las probabilidades correspondientes.

$\mathbf{p} = 0.01$

$$P(X = 0) = \underbrace{\binom{10}{0}(0.01)^0}_{1}(1-0.01)^{10-0} = (0.99)^{10} = 0.9043$$

$$P(X = 1) = \underbrace{\binom{10}{1}(0.01)^1}_{0.1}(1-0.01)^{10-1} = (0.1)(0.99)^9 = 0.0913$$

$$P(X = 2) = \underbrace{\binom{10}{2}(0.01)^2}_{4.5x10^{-3}}(1-0.01)^{10-2} = (4.5x10^{-3})(0.99)^8 = 0.0041$$

Probabilidad $P(X \geq 2)$ con $\mathbf{p} = 0.01$:

$$P(X \geq 2) = 0.9043 + 0.0913 + 0.0041 = 0.9997$$

$\mathbf{p} = 0.05$

$$P(X = 0) = \underbrace{\binom{10}{0}(0.05)^0}_{1}(1-0.05)^{10-0} = (0.95)^{10} = 0.5987$$

$$P(X = 1) = \underbrace{\binom{10}{1}(0.05)^1}_{0.5}(1-0.05)^{10-1} = (0.5)(0.95)^9 = 0.3151$$

$$P(X = 2) = \underbrace{\binom{10}{2}(0.01)^2}_{0.1125}(1-0.05)^{10-2} = (0.1125)(0.95)^8 = 0.0746$$

Probabilidad $P(X \geq 2)$ con $\mathbf{p} = 0.05$:

$$P(X \geq 2) = 0.5987 + 0.3151 + 0.0746 = 0.9884$$

$\mathbf{p} = 0.10$

$$P(X=0)=\underbrace{\binom{10}{0}}_{1}(0.10)^0(1-0.10)^{10-0}=(0.9)^{10}=0.3486$$

$$P(X=1)=\underbrace{\binom{10}{1}}_{1}(0.10)^1(1-0.10)^{10-1}=(0.9)^{9}=0.3874$$

$$P(X=2)=\underbrace{\binom{10}{2}}_{0.45}(0.10)^2(1-0.10)^{10-2}=(0.45)(0.9)^{8}=0.1937$$

Probabilidad $P(X\geq 2)$ con $\mathbf{p}=0.10$:

$$P(X\geq 2)=0.3486+0.3874+0.1937=0.9297$$

$\mathbf{p}=0.20$

$$P(X=0)=\underbrace{\binom{10}{0}}_{1}(0.20)^0(1-0.20)^{10-0}=(0.8)^{10}=0.1073$$

$$P(X=1)=\underbrace{\binom{10}{1}}_{2}(0.20)^1(1-0.20)^{10-1}=(2)(0.8)^{9}=0.2684$$

$$P(X=2)=\underbrace{\binom{10}{2}}_{1.8}(0.20)^2(1-0.20)^{10-2}=(1.8)(0.8)^{8}=0.3019$$

Probabilidad $P(X\geq 2)$ con $\mathbf{p}=0.20$:

$$P(X\geq 2)=0.1073+0.2684+0.3019=0.6776$$

Podemos observar que la probabilidad de que el lote sea aceptado disminuye conforme la proporción de componentes defectuosos aumenta. Siendo la probabilidad mínima 0.6776, esto cuando la proporción de elementos defectuosos es $\mathbf{p}=0.20$.

9. Sean $G=\{1,2,3\}$, $H=\{4,5,6\}$. Lanzamos dos dados y sean los eventos A = 'el primer dado cae en H'; B = 'el segundo dado cae en H'; C = 'un dado cae en G y el otro cae en H'; D = 'el total es cuatro'; E = 'el total es cinco'; F = 'el total es siete'. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas? i) A y F son independientes. ii) A y D son independientes. iii) A y E son independientes. iv) $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$. v) A y C son independientes. vi) C y E son independientes. vii) $P(A\cap C\cap E)=P(A)P(C)P(E)$. viii) A, C y E son independientes. Justifique sus respuestas.

Elementos del evento $\boldsymbol{A}=\{\{4,1\},\{4,2\},\{4,3\},\{4,4\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,1\},\{5,2\},\{5,3\},\{5,4\},\{5,5\},\{5,6\},\{6,1\},\{6,2\},\{6,3\},\{6,4\},\{6,5\},\{6,6\}\}$

Elementos del evento $\boldsymbol{B}=\{\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\},\{4,4\},\{5,4\},\{6,4\},\{1,5\},\{2,5\},\{3,5\},\{4,5\},\{5,5\},\{6,5\},\{1,6\},\{2,6\},\{3,6\},\{4,6\},\{5,6\},\{6,6\}\}$

Elementos del evento $\boldsymbol{C}=\{\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,1\},\{4,2\},\{4,3\},\{5,1\},\{5,2\},\{5,3\},\{6,1\},\{6,2\},\{6,3\}\}$

i) A y F son independientes.

Dos eventos son independientes si y solo si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

De acuerdo con la definición de probabilidad condicional:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

De esta manera los eventos A y F son independientes si se cumple lo siguiente:

$$P(A)P(F) = P(A|F)P(F)$$

Elementos del evento $\boldsymbol{F} = \{\underline{\{5, 2\}}, \underline{\{4, 3\}}, \underline{\{6, 1\}}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 6\}\}$.
La probabilidad de que ocurra el evento A es igual a $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, mientras que la probabilidad de que ocurra el evento F es igual a $P(F) = \frac{6}{36}$. De esta manera:

$$P(A|F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo:

$$P(A|F)P(F) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{6}{36}\right)$$

$$P(A)P(F) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{6}{36}\right)$$

De esta manera se cumple que:

$$P(A)P(F) = P(A|F)P(F)$$

Por lo tanto los eventos A y F son **independientes**.

ii) A y D son independientes.

Al igual que el inciso anterior debemos comprobar que:

$$P(A)P(D) = P(A|D)P(D)$$

Elementos del evento $\boldsymbol{D} = \{\{3, 1\}, \{1, 3\}, \{2, 2\}\}$.
La probabilidad de que ocurra el evento A es $P(A) = \frac{1}{2}$, mientras que la probabilidad de que ocurra el evento D es igual a $P(D) = \frac{3}{36}$. En este caso vemos que la intersección entre los eventos $P(A \cap D) = \emptyset$, por lo que:

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0}{\frac{3}{36}} = 0 \quad \text{si ocurre } D \text{ no puede ocurrir } A$$

Y dado que:

$$\underbrace{P(A)}_{\frac{1}{2}}\ \underbrace{P(D)}_{\frac{3}{36}} \neq \underbrace{P(A|D)}_{0}\ \underbrace{P(D)}_{\frac{3}{36}}$$

Podemos decir que los eventos A y D **no son independientes**.

iii) A y E son independientes.

Al igual que el inciso anterior debemos comprobar que:

$$P(A)P(E) = P(A|E)P(E)$$

Elementos del evento $\boldsymbol{E} = \{\{1, 4\}, \underline{\{4, 1\}}, \{3, 2\}, \{2, 3\}\}$.
Sabemos que la probabilidad de que ocurra el evento A es $P(A) = \frac{1}{2}$, mientras que la probabilidad de que ocurra el evento E es igual a $P(E) = \frac{4}{36}$. Por la definición de probabilidad condicional sabemos que:

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{4}{36}} = \frac{1}{4}$$

Sustituyendo:

$$P(A|E)P(E) = \Big(\frac{1}{4}\Big)\Big(\frac{4}{36}\Big) = \frac{4}{144} = \frac{1}{36}$$

$$P(A)P(E) = \Big(\frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{4}{36}\Big) = \frac{4}{72} = \frac{1}{18}$$

Por lo tanto los eventos A y E **no son independientes**.

iv) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

La probabilidad de la intersección entre los eventos $A \cap B$ esta dada por:

$$P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

A su vez, la intersección con el evento C sería nula, ya que en caso de que ocurrieran los eventos A y B ($A \cap B$; ambos dados caen en H) no podría suceder el evento C (un dado cae en H y otro en G), por lo tanto:

$$P(A \cap B \cap C) = \emptyset$$

Por otro lado:

$$P(A)P(B)P(C) = \Big(\frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{8}$$

De esta manera demostramos que:

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$$

v) A y C son independientes.

Para comprobar independencia entre los eventos A y C debemos verificar que se cumpla la siguiente igualdad:

$$P(A)P(C) = P(A|C)P(C)$$

Sabemos que la probabilidad de que ocurra el evento A es $P(A) = \frac{1}{2}$, mientras que la probabilidad de que ocurra el evento C es $P(C) = \frac{1}{2}$. Por lo que únicamente faltaría calcular la probabilidad $P(A|C)$.

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Reemplazando los valores en las ecuaciones tenemos que:

$$P(A)P(C) = \Big(\frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{4}$$

$$P(A|C)P(C) = \Big(\frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{4}$$

Con esto podemos decir que los eventos A y C son **independientes**.

vi) C y E son independientes.

La probabilidad de que ocurran los eventos C y E son $P(C) = \frac{18}{36}$ y $P(E) = \frac{4}{36}$, respectivamente. Al igual que los casos anteriores debemos demostrar que $P(A)P(C) = P(A|C)P(C)$. Para esto calculamos la probabilidad condicional $P(C|E)$.

$$P(C|E) = \frac{P(C \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{4}{36}} = \frac{1}{2}$$

Reemplazando los valores en las ecuaciones tenemos que:

$$P(C)P(E) = \Big(\frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{1}{9}\Big) = \frac{1}{18}$$

$$P(C|E)P(E) = \Big(\frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{1}{9}\Big) = \frac{1}{18}$$

De esta manera concluímos que los eventos C y E son **independientes**.

vii) $P(A \cap C \cap E) = P(A)P(C)P(E)$

El espacio muestral de la intersección entre los eventos $A \cap C$ esta definido de la siguiente manera $\omega = \{\{4, 1\}, \{4, 2\}, \{4, 3\}, \{5, 1\}, \{5, 2\}, \{5, 3\}, \{5, 1\}, \{5, 2\}, \{5, 3\}\}$. A su vez el espacio muestral de dicho conjunto cuando intersecta con el evento E ($A \cap C \cap E$) esta definido como $\omega = \{\{4, 1\}\}$. Por lo que la probabilidad:

$$P(A \cap C \cap E) = \frac{1}{36}$$

Por otro lado:

$$P(A)P(C)P(E) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{36}$$

De esta manera encontramos que:

$$P(A \cap C \cap E) = P(A)P(C)P(E)$$

viii) A, C y E son independientes.

Decimos que tres eventos son **mutuamente independientes** si solo si todas las siguientes condiciones se cumplen:

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$
$$P(A \cap E) = P(A)P(E)$$
$$P(C \cap E) = P(C)P(E)$$
$$P(A \cap C \cap E) = P(A)P(C)P(E)$$

Por el inciso *iii*) sabemos que los eventos A y E no son independientes, ya que:

$$P(A \cap E) = \frac{1}{36} \qquad P(A)P(E) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{18}$$

$$P(A \cap E) \neq P(A)P(E)$$

Por lo que podemos concluir que los eventos A, C y E **no son mutuamente independientes**.

Problemas extra.

3. Consideremos el experimento de lanzar dos monedas justas (i.e. en cada una de las monedas la probabilidad de obtener cara (**H**) o cruz (**T**) es 0.5). Sea el evento A 'la primera moneda cae en cara', B el evento 'la segunda moneda cae en cara' y C el evento 'una (y solo una) de las monedas cae en cara'.

a) ¿Son A y B independientes? ¿Qué pasa con A y C ? Justifica tus respuestas.

Empezamos por definir el espacio muestral.

$$\Omega = \{\{HT\}, \{HH\}, \{TH\}, \{TT\}\}$$

Evento A.

$$A = \{\{HT\}, \{HH\}\}$$

Evento B.

$$B = \{\{TH\}, \{HH\}\}$$

Evento C.

$$C = \{\{TH\}, \{HT\}\}$$

Dos eventos son **independientes** si y solo si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Basándonos en los elementos que conforman los distintos eventos podemos determinar la probabilidad de la intersección de dos eventos. En el caso de los eventos A y B, estaría dada de la siguiente manera:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Y sabemos que $P(A) = \frac{1}{2}$ y $P(B) = \frac{1}{2}$; de esta manera encontramos que:

$$P(A)P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Con esto concluimos que los eventos A y B son **independientes**.

Por otro lado, la probabilidad de la intersección entre los eventos A y C es:

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4}$$

Y al igual que el evento A, la probabilidad del evento C es igual a $P(C) = \frac{1}{2}$; por lo tanto:

$$P(A)P(C) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Con esto se cumple que:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

De esta manera concluimos que los eventos A y C son **independientes**.

b) ¿Se cumple que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$? Explica. *Hint: Busca la definición de independencia mutua.*

Decimos que tres eventos A, B y C son **mutuamente independientes** si solo si todas las siguientes condiciones de cumplen:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

Del inciso anterior pudimos encontrar que las dos primeras igualdades se cumplen. Por lo que únicamente nos faltaría comprobar las últimas dos igualdades.
La probabilidad de la intersección de los eventos B y C es igual a:

$$P(B \cap C) = \frac{1}{4}$$

Y sabemos que la probabilidad de los eventos B y C es $P(B) = \frac{1}{2}$ y $P(C) = \frac{1}{2}$, respectivamente. Por lo que podemos calcular fácilmente la probabilidad.

$$P(B)P(C) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Así comprobamos la igualdad:

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

Por último necesitamos comprobar que:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

Analizando los elementos que conforman cada uno de los eventos podemos observar que:

$$P(A \cap B \cap C) = \emptyset$$

Y calculando la probabilidad $P(A)P(B)P(C)$ encontramos que esta es igual a:

$$P(A)P(B)P(C) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

Con esto podemos decir que los tres eventos son mutuamente independientes al ser tomados por pares, sin embargo:

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$$

Por lo tanto los tres eventos **no son independientes**.