

Leçon Logique mathématique

Léo Ferrand

13 mai 2024

Leçon 203 - Utilisation de la notion de compacité.
Leçon 924 - Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

1 Préliminaires

2 Filtres et Ultrafiltres

Définition 1 (Filtre) Soit E un ensemble non vide, alors $F \subseteq P(E)$ est un filtre sur E si :

- $\forall A \in F, A \subseteq B \subseteq E \Rightarrow B \in F$
- $A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$
- $\emptyset \notin F$

Un exemple de filtre sur \mathbb{N} serait $\{A \subseteq \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \{m \in \mathbb{N}, m \geq n\} \subseteq A\}$

3 Preuve du théorème de Compacité

Théorème 1 (Théorème de Łoś) Soient $\phi(x_1, \dots, x_n)$ une formule sur \mathcal{L} et $m^* = ([m_i^1]), \dots, [m_i^n]$ un éléments de $(M^*)^n$.

Alors $M^* \models \phi(m^*) \Leftrightarrow \{i \in I : M_i \models \phi(m_i^1, \dots, m_i^n)\} \in U$

PREUVE Par induction sur ϕ . ■