

Diferencias finitas tarea

Julián Guillermo Adarme Rodríguez - 2170789

Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Índice

1. Moléculas centradas	1
1.1. Segundo orden	1
1.2. Cuarto orden	2
2. Moléculas desbalanceadas hacia la izquierda	3
2.1. Segundo orden	3
2.2. Cuarto orden	3
3. Moléculas desbalanceadas hacia la derecha	4
3.1. Segundo orden	4
3.2. Cuarto orden	5
4. Esquemas en diferencias finitas	6
4.1. Esquema Leapfrog	7
4.2. Esquema Lax-Wendroff	7

1. Moléculas centradas

1.1. Segundo orden

En primer lugar revisamos la molecula centrada de segundo orden como se ve en la imagen

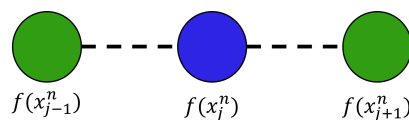


Figura 1: Molécula centralizada

$$f(x_j^n) = f(x_j^n), \quad (1)$$

$$f(x_{j+1}^n) = f(x_j^n) + \Delta x f'(x_j^n) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j^n) + O(\Delta x^3), \quad (2)$$

$$f(x_{j-1}^n) = f(x_j^n) - \Delta x f'(x_j^n) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j^n) - O(\Delta x^3), \quad (3)$$

Ahora restando 2-3 obtenemos como resultado la relación

$$f'(x_j^n) = \frac{f(x_{j+1}^n) - f(x_{j-1}^n)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (4)$$

Al sumar 2+3

$$f(x_{j+1}^n) + f(x_{j-1}^n) = 2f(x_j^n) + \Delta x^2 f''(x_j^n) + O(\Delta x^4)$$

$$f''(x_j^n) = \frac{f(x_{j+1}^n) + f(x_{j-1}^n) - 2f(x_j^n)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (5)$$

1.2. Cuarto orden

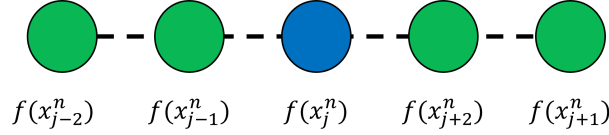


Figura 2: Molécula centralizada

$$f(x_j^n) = f(x_j^n) \quad (6)$$

$$f(x_{j+1}^n) = f(x_j^n) + \Delta x f'(x_j^n) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j^n) + \frac{\Delta x^3}{6} f'''(x_j^n) + \frac{\Delta x^4}{24} f^{IV}(x_j^n) + O(\Delta x^5) \quad (7)$$

$$f(x_{j+2}^n) = f(x_j^n) + 2\Delta x f'(x_j^n) + 2\Delta x^2 f''(x_j^n) + \frac{4\Delta x^3}{3} f'''(x_j^n) + \frac{2\Delta x^4}{3} f^{IV}(x_j^n) + O(\Delta x^5) \quad (8)$$

$$f(x_{j-1}^n) = f(x_j^n) - \Delta x f'(x_j^n) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j^n) - \frac{\Delta x^3}{6} f'''(x_j^n) + \frac{\Delta x^4}{24} f^{IV}(x_j^n) - O(\Delta x^5) \quad (9)$$

$$f(x_{j-2}^n) = f(x_j^n) - 2\Delta x f'(x_j^n) + 2\Delta x^2 f''(x_j^n) - \frac{4\Delta x^3}{3} f'''(x_j^n) + \frac{2\Delta x^4}{3} f^{IV}(x_j^n) - O(\Delta x^5) \quad (10)$$

Se organiza una matriz con columnas $\Delta x f'$, $\Delta x^2 f''$, $\Delta x^3 f'''$, $\Delta x^4 f^{IV}$ respectivamente. De la misma forma a, b, c, d, e corresponden a 6, 7, 8, 9, 10 respectivamente.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & b \\ 1 & 2 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & c \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{24} & d \\ 1 & -2 & 2 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & e \end{array} \right)$$

Al reducir la matriz por medio de wolfram se obtiene

$$f'(x_j^n) = \frac{8f(x_{j+1}^n) - f(x_{j+2}^n) - 8f(x_{j-1}^n) + f(x_{j-2}^n)}{12\Delta x} + O(\Delta x^4) \quad (11)$$

$$f''(x_j^n) = \frac{-30f(x_j^n) + 16f(x_{j+1}^n) - f(x_{j+2}^n) + 16f(x_{j-1}^n) - f(x_{j-2}^n)}{12\Delta x^2} + O(\Delta x^4) \quad (12)$$

$$f'''(x_j^n) = \frac{-2f(x_{j+1}^n) + f(x_{j+2}^n) + 2f(x_{j-1}^n) - f(x_{j-2}^n)}{2\Delta x^3} + O(\Delta x^4) \quad (13)$$

$$f^{IV}(x_j^n) = \frac{6f(x_j^n) - 4f(x_{j+1}^n) + f(x_{j+2}^n) - 4f(x_{j-1}^n) + f(x_{j-2}^n)}{\Delta x^4} + O(\Delta x^4) \quad (14)$$

2. Moléculas desbalanceadas hacia la izquierda

2.1. Segundo orden

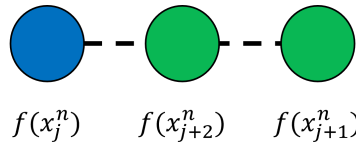


Figura 3: Molécula desbalanceada hacia la izquierda

$$f(x_j^n) = f(x_j^n) \quad (15)$$

$$f(x_{j+1}^n) = f(x_j^n) + \Delta x f'(x_j^n) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j^n) + O(\Delta x^3) \quad (16)$$

$$f(x_{j+2}^n) = f(x_j^n) + 2\Delta x f'(x_j^n) + \frac{4\Delta x^2}{2} f''(x_j^n) + O(\Delta x^3) \quad (17)$$

Al restar (4)·16-17

$$4 \cdot f(x_{j+1}^n) - f(x_{j+2}^n) = 3f(x_j^n) + 2\Delta x f'(x_j^n) + 3O(\Delta x^3)$$

$$f'(x_j^n) = \frac{4f(x_{j+1}^n) - f(x_{j+2}^n) - 3f(x_j^n)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (18)$$

Al restar (2)·16-17

$$2 \cdot f(x_{j+1}^n) - f(x_{j+2}^n) = f(x_j^n) - \Delta x^2 f''(x_j^n) + O(\Delta x^4)$$

$$f''(x_j^n) = \frac{f(x_{j+2}^n) - 2f(x_{j+1}^n) + f(x_j^n)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (19)$$

2.2. Cuarto orden

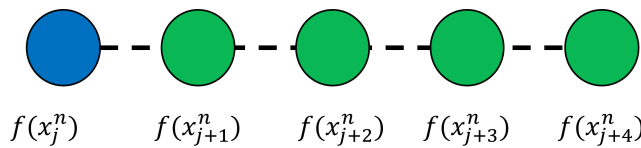


Figura 4: Molécula desbalanceada hacia la izquierda

$$f(x_j^n) = f(x_j^n) \quad (20)$$

$$f(x_{j+1}^n) = f(x_j^n) + \Delta x f'(x_j^n) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j^n) + \frac{\Delta x^3}{6} f'''(x_j^n) + \frac{\Delta x^4}{24} f^{IV}(x_j^n) + O(\Delta x^5) \quad (21)$$

$$f(x_{j+2}^n) = f(x_j^n) + 2\Delta x f'(x_j^n) + 2\Delta x^2 f''(x_j^n) + \frac{4\Delta x^3}{3} f'''(x_j^n) + \frac{2\Delta x^4}{3} f^{IV}(x_j^n) + O(\Delta x^5) \quad (22)$$

$$f(x_{j+3}^n) = f(x_j^n) + 3\Delta x f'(x_j^n) + \frac{9\Delta x^2}{2} f''(x_j^n) + \frac{27\Delta x^3}{6} f'''(x_j^n) + \frac{81\Delta x^4}{24} f^{IV}(x_j^n) + O(\Delta x^5) \quad (23)$$

$$f(x_{j+4}^n) = f(x_j^n) + 4\Delta x f'(x_j^n) + \frac{16\Delta x^2}{2} f''(x_j^n) + \frac{64\Delta x^3}{6} f'''(x_j^n) + \frac{256\Delta x^4}{24} f^{IV}(x_j^n) + O(\Delta x^5) \quad (24)$$

Se realiza una matriz tal que las columnas corresponden a $\Delta x f'$, $\Delta x^2 f''$, $\Delta x^3 f'''$, $\Delta x^4 f^{IV}$ respectivamente. De la misma forma a, b, c, d, e corresponden a 20, 21, 22, 23, 24 respectivamente.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & b \\ 1 & 2 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & c \\ 1 & 3 & \frac{9}{2} & \frac{9}{2} & \frac{27}{8} & d \\ 1 & 4 & 8 & \frac{32}{3} & \frac{32}{3} & e \end{array} \right)$$

Al reducir la matriz por medio de wolfram se obtiene

$$f'(x_j^n) = \frac{-25f(x_j^n) + 48f(x_{j+1}^n) - 36f(x_{j+2}^n) + 16f(x_{j+3}^n) - 3f(x_{j+4}^n)}{12\Delta x} + O(\Delta x^4) \quad (25)$$

$$f''(x_j^n) = \frac{35f(x_j^n) - 104f(x_{j+1}^n) + 114f(x_{j+2}^n) - 56f(x_{j+3}^n) + 11f(x_{j+4}^n)}{12\Delta x^2} + O(\Delta x^4) \quad (26)$$

$$f'''(x_j^n) = \frac{-5f(x_j^n) + 18f(x_{j+1}^n) - 24f(x_{j+2}^n) + 14f(x_{j+3}^n) - 3f(x_{j+4}^n)}{2\Delta x^3} + O(\Delta x^4) \quad (27)$$

$$f^{iv}(x_j^n) = \frac{f(x_j^n) - 4f(x_{j+1}^n) + 6f(x_{j+2}^n) - 4f(x_{j+3}^n) + f(x_{j+4}^n)}{\Delta x^4} + O(\Delta x^4) \quad (28)$$

3. Moléculas desbalanceadas hacia la derecha

3.1. Segundo orden

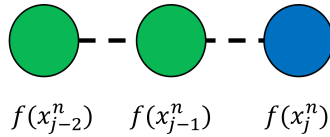


Figura 5: Molécula desbalanceada hacia la derecha

$$f(x_j^n) = f(x_j^n) \quad (29)$$

$$f(x_{j-1}^n) = f(x_j^n) - \Delta x f'(x_j^n) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j^n) - O(\Delta x^3) \quad (30)$$

$$f(x_{j-2}^n) = f(x_j^n) - 2\Delta x f'(x_j^n) + 2\Delta x^2 f''(x_j^n) - O(\Delta x^3) \quad (31)$$

Al restar (4) · 21 – 22

$$4f(x_{j-1}^n) - f(x_{j-2}^n) = 3f(x_j^n) - 2\Delta x f'(x_j^n) + \Delta x^2 f''(x_j^n) + O(\Delta x^3)$$

$$f'(x_j^n) = \frac{f(x_{j-2}^n) - 4f(x_{j-1}^n) + 3f(x_j^n)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (32)$$

Al restar (2) · 21 – 22

$$2f(x_{j-1}^n) - f(x_{j-2}^n) = f(x_j^n) - \Delta x^2 f''(x_j^n) + O(\Delta x^4)$$

$$f''(x_j^n) = \frac{f(x_{j-2}^n) - 2f(x_{j-1}^n) + f(x_j^n)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (33)$$

3.2. Cuarto orden

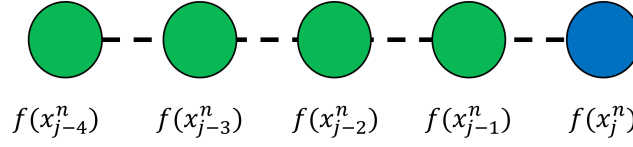


Figura 6: Molécula desbalanceada hacia la derecha

$$f(x_j^n) = f(x_j^n) \quad (34)$$

$$f(x_{j-1}^n) = f(x_j^n) - \Delta x f'(x_j^n) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j^n) - \frac{\Delta x^3}{6} f'''(x_j^n) + \frac{\Delta x^4}{24} f^{IV}(x_j^n) + O(\Delta x^5) \quad (35)$$

$$f(x_{j-2}^n) = f(x_j^n) - 2\Delta x f'(x_j^n) + 2\Delta x^2 f''(x_j^n) - \frac{4\Delta x^3}{3} f'''(x_j^n) + \frac{2\Delta x^4}{3} f^{IV}(x_j^n) + O(\Delta x^5) \quad (36)$$

$$f(x_{j-3}^n) = f(x_j^n) - 3\Delta x f'(x_j^n) + \frac{9\Delta x^2}{2} f''(x_j^n) - \frac{27\Delta x^3}{6} f'''(x_j^n) + \frac{81\Delta x^4}{24} f^{IV}(x_j^n) + O(\Delta x^5) \quad (37)$$

$$f(x_{j-4}^n) = f(x_j^n) - 4\Delta x f'(x_j^n) + \frac{16\Delta x^2}{2} f''(x_j^n) - \frac{64\Delta x^3}{6} f'''(x_j^n) + \frac{256\Delta x^4}{24} f^{IV}(x_j^n) + O(\Delta x^5) \quad (38)$$

Se realiza una matriz tal que las columnas corresponden a $\Delta x f'$, $\Delta x^2 f''$, $\Delta x^3 f'''$, $\Delta x^4 f^{IV}$ respectivamente. De la misma forma a, b, c, d, e corresponden a [34](#), [35](#), [36](#), [37](#), [38](#) respectivamente.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{24} & b \\ 1 & -2 & 2 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & c \\ 1 & -3 & \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{27}{8} & d \\ 1 & -4 & 8 & -\frac{32}{3} & \frac{32}{3} & e \end{array} \right)$$

Al reducir la matriz por medio de wolfram se obtiene

$$f'(x_j^n) = \frac{25f(x_j^n) - 48f(x_{j+1}^n) + 36f(x_{j+2}^n) - 16f(x_{j+3}^n) + 3f(x_{j+4}^n)}{12\Delta x} + O(\Delta x^4) \quad (39)$$

$$f''(x_j^n) = \frac{35f(x_j^n) - 104f(x_{j+1}^n) + 114f(x_{j+2}^n) - 56f(x_{j+3}^n) + 11f(x_{j+4}^n)}{12\Delta x^2} + O(\Delta x^4) \quad (40)$$

$$f'''(x_j^n) = \frac{5f(x_j^n) - 18f(x_{j+1}^n) + 24f(x_{j+2}^n) - 14f(x_{j+3}^n) + 3f(x_{j+4}^n)}{2\Delta x^3} + O(\Delta x^4) \quad (41)$$

$$f^{iv}(x_j^n) = \frac{f(x_j^n) - 4f(x_{j+1}^n) + 6f(x_{j+2}^n) - 4f(x_{j+3}^n) + f(x_{j+4}^n)}{\Delta x^4} + O(\Delta x^4) \quad (42)$$

4. Esquemas en diferencias finitas

Ahora se especificarán dos tipos de esquemas en diferencias finitas, el esquema Leapfrog y el Lax-Wendroff haciendo uso de un criterio conocido como criterio de estabilidad. Dicho criterio está basado en un análisis de Von-Neumann el cual no toma en cuenta las condiciones de frontera; este criterio me relaciona un punto de la malla con **43**; en donde k es el número de onda, n la variación temporal, j la variación espacial y ξ es el factor de amplificación, de la siguiente manera

$$u_j^n = \xi^n e^{ikx_j} \quad (43)$$

El criterio también plantea que para que un sistema sea estable este debe cumplir que:

$$|\xi|^2 \leq 1 \quad (44)$$

Para todos estos procesos es importante tener en cuenta la condición de Courant-Friedrich-Lewy, que me establece que para un α se cumple $|\alpha| \leq 1$, siendo α una representación de $\frac{v\Delta t}{\Delta x}$, expresión que se encontrará muy seguido al momento de realizar los esquemas.

4.1. Esquema Leapfrog

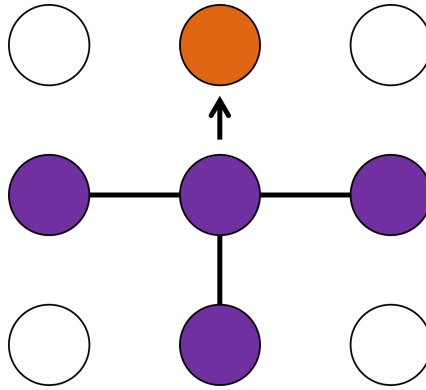


Figura 7: Malla de tres niveles de tiempo, dos de ellos necesarios para obtener la solución para un punto ubicado en $M + 1$

Con el esquema Leapfrog Se toman dos niveles de tiempo, de forma que obtenemos la siguiente expresión

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \alpha(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + O(\Delta t^3, \Delta x^2 \Delta t) \quad (45)$$

De forma que en 45 se puede sustituir teniendo en cuenta la expresión 43 de la siguiente manera:

$$\xi^{n+1} e^{ikx_j} = \xi^{n-1} e^{ikx_j} - \alpha(\xi^n e^{ikx_{j+1}} - \xi^n e^{ikx_{j-1}})$$

$$\xi = \xi^{-1} - \alpha(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) = \xi^{-1} - i\alpha \sin(k\Delta x)$$

$$\xi^2 - 1 + 2i\alpha\xi \sin(k\Delta x) = 0$$

Como la expresión finalmente quedó reducida en una ecuación cuadrática se puede hacer uso de la fórmula cuadrática para obtener el valor de ξ , obteniendo entonces el siguiente resultado:

$$\xi = -i\alpha \sin(k\Delta x) \pm \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2(k\Delta x)} \quad (46)$$

Con esto ya es posible guiarnos con lo planteado en el criterio de estabilidad, el cual me dice que si la norma de ξ al cuadrado es menor o igual a 1 es estable, tal como se definió en la ecuación 44. Como estamos trabajando en variable compleja entonces $|\xi|^2 = \xi \xi^*$ por lo que obtenemos lo siguiente:

$$|\xi|^2 = 1 \quad (47)$$

Con esto se puede concluir entonces que teniendo en cuenta el criterio de estabilidad el sistema por medio del esquema de Leapfrog es estable. Sin embargo, para usar este esquema hay que saber los valores de u_j^{n+1} y u_j^n , por lo que se creó otro esquema, el cual será descrito a continuación.

4.2. Esquema Lax-Wendroff

Para poder llegar a la expresión correspondiente al esquema Lax-Wendroff es necesario primero hacer uso del esquema Lax-Friedrich, luego evaluar las cantidades y finalmente usar el esquema Leapfrog teniendo en cuenta que en ambos esquemas se realizarán saltos de $\frac{\Delta t}{2}$ (ver figura 8).

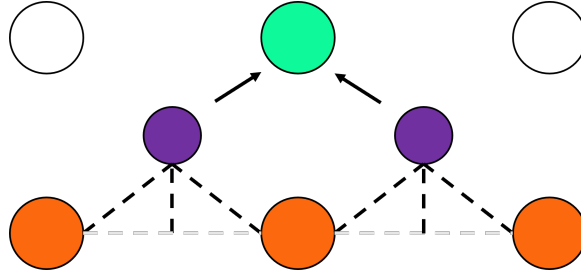


Figura 8: Malla con dos niveles temporales, se hace uso de los puntos ubicados en la mitad entre cada punto de la malla.

- Primero haciendo uso del esquema Lax-Friedrich tenemos

$$u_{j\pm 1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_j^n + u_{j\pm 1}^n) \mp \frac{\alpha}{2} (u_{j\pm 1}^n - u_j^n) \quad (48)$$

- Ahora haciendo uso del esquema Leapfrog tenemos

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha (u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}) \quad (49)$$

Entonces reemplazando 48 y 49, obtenemos la siguiente expresión:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\alpha}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\alpha^2}{2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (50)$$

De forma que 50 se puede sustituir por medio de la expresión 43 de la siguiente manera:

$$\xi^{n+1} e^{ikx_j} = \xi^n e^{ikx_j} - \frac{\alpha}{2} (\xi^n e^{ikx_{j+1}} - \xi^n e^{ikx_{j-1}}) + \frac{\alpha^2}{2} (\xi^n e^{ikx_{j+1}} - 2\xi^n e^{ikx_j} + \xi^n e^{ikx_{j-1}})$$

$$\xi = 1 - \frac{\alpha}{2} (e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) + \frac{\alpha^2}{2} (e^{ik\Delta x} - 2 + e^{-ik\Delta x})$$

$$\xi = 1 - \alpha^2 + \alpha^2 \cos(k\Delta x) - i\alpha \sin(k\Delta x)$$

Con esto nos podemos guiar de nuevo con lo planteado en el criterio de estabilidad (44), y como estamos trabajando en variable compleja entonces:

$$|\xi|^2 = 1 - 2\alpha^2, \quad \alpha \leq 1$$

$$|\xi|^2 \leq 1 \quad (51)$$

De acuerdo a esto, se puede concluir que teniendo en cuenta el criterio de estabilidad, el sistema por medio del esquema de Lax-Wendroff es estable e incluso más estable que el esquema Leapfrog.