

Simulación de Cuerpos Celestes de Gran Masa en el Sistema Solar

Proyecto Final, Avance 2

2172016 - Kevin Javier Lozano Galvis
2170688 - Brayan Rodolfo Barajas Ochoa
2161342 - Carlos Alberto Palencia Pombo

Bucaramanga, 2021

Índice de Contenidos

1. Formulación del Problema	1
2. Objetivos	2
3. Plan General del Proyecto	3
3.1. Justificación	3
3.2. Declaración y Evaluación	3
3.3. Cronograma	4
4. Conceptualización del Modelo	5
5. Recolección de Datos	7
Referencias	8

Índice de Figuras

1. Diagrama de flujo para el modelo de simulación	6
---	---

1. Formulación del Problema

El sistema solar, comprendido como el sistema planetario en el que se encuentra la Tierra y otros objetos astronómicos que giran directa o indirectamente en una órbita alrededor del Sol, siempre ha sido de gran interés para el estudio de la dinámica de los cuerpos que lo conforman. Gracias a los avances de grandes científicos como Isaac Newton, con las leyes del movimiento y Albert Einstein con la teoría de la relatividad general, se ha podido expresar de forma matemática el funcionamiento de este sistema; sin embargo, debido a la gran cantidad de objetos que se encuentran orbitando al Sol, resulta complicado realizar todos los cálculos para estimar la posición y velocidad de cada uno de ellos.

2. Objetivos

- Predecir la posición y velocidad de los cuerpos de gran masa en un momento dado a partir de unas condiciones iniciales.
- Elaborar una simulación que permita obtener una precisión significativa al compararla con los datos obtenidos a partir de las observaciones.
- Determinar la cantidad de objetos necesarios para la simulación, de tal forma que no se incremente desmesuradamente el costo computacional, pero que se mantenga la precisión deseada.
- Visualizar los resultados de la simulación a través del tiempo.

3. Plan General del Proyecto

3.1. Justificación

En astronomía es fundamental estudiar la posición de los cuerpos celestes para, a partir de esto, poder obtener información de cada uno de ellos y entender sus interacciones. Como ya se mencionó previamente, se necesitan realizar una gran cantidad de cálculos para cada uno de los cuerpos en el sistema solar y es por esa razón que resultan útiles las simulaciones en esta área.

3.2. Declaración y Evaluación

Un modelo de simulación comúnmente usado son las llamadas simulaciones directas de N-cuerpos, donde cada uno está representado por una partícula puntual que interactúa gravitacionalmente con todas las demás partículas. Este tipo de simulación es costosa desde el punto de vista computacional, ya que se escala como $O(N^2)$ donde N es el número de partículas en el sistema solar.

Se pretende comparar la simulación a realizar con las observaciones obtenidas por la NASA JPL Horizons, así como otras simulaciones en las que se haya aprovechado la supercomputación para poder utilizar todos los cuerpos conocidos del sistema solar o una gran parte de ellos, en las que se hace uso de otros métodos de simulación.

Para la evaluación de la simulación a realizar, se busca verificar la precisión de las posiciones y velocidades respecto a los datos obtenidos del dataset de la NASA anteriormente mencionado, por medio de un error relativo.

3.3. Cronograma

<i>Cronograma de Actividades</i>													
Pasos	Diciembre				Enero				Febrero				Marzo
	Sem 1	Sem 2	Sem 3	Sem 4	Sem 1	Sem 2	Sem 3	Sem 4	Sem 1	Sem 2	Sem 3	Sem 4	Sem 1
Formulación del problema													
Establecimiento de los objetivos y el plan general del proyecto													
Avance 1													
Conceptualización del modelo													
Recolección de datos													
Traducción del modelo													
Avance 2													
Verificación del modelo													
Validación del modelo													
Diseño experimental													
Análisis estadístico inicial													
Análisis adicional													
Documentación de la simulación													
Implementación													
Entrega Final													

4. Conceptualización del Modelo

Para poder realizar una simulación de las órbitas de cuerpos celestes de gran masa en el sistema solar, se deben considerar variables indispensables para la construcción de este modelo; entre ellas se encuentran

- Posición: expresada tridimensionalmente a partir del punto de referencia que es el Sol.
- Velocidad: representada como un vector para cada cuerpo.
- Aceleración: representada como un vector para cada cuerpo de acuerdo a la fuerza resultante de cada uno.
- Fuerza: obtenida para cada cuerpo a partir de la interacción de este con todos los demás.
- Tiempo: definido en una escala diaria (de acuerdo al tiempo en la Tierra).

La relación presente entre estas variables se puede modelar a partir de la fuerza de atracción gravitacional entre dos objetos que viene dada por

$$\vec{F} = -\frac{G \times M \times m}{\|\vec{r}\|^2} \hat{r} \quad (1)$$

Como se mencionó anteriormente, esta ecuación corresponde a la fuerza entre dos cuerpos, por lo tanto, es necesario obtener la fuerza total al realizar la sumatoria de todas las fuerzas ejercidas por los demás cuerpos.

Dado un conjunto de cuerpos $\{\mathbf{c}_i\}_{i=1}^n$, la fuerza resultante para cada uno de estos se puede representar como

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1}^n -\frac{G \times M_j \times m_i}{\|\vec{r}_{i,j}\|^2} \hat{r}_{i,j} ; \text{ con } j \neq i \quad (2)$$

Sacando las constantes, se obtiene

$$\vec{F}_i = -G \times m_i \sum_{j=1}^n \frac{M_j}{\|\vec{r}_{i,j}\|^2} \hat{r}_{i,j} ; \text{ con } j \neq i \quad (3)$$

Ahora, conociendo que $F = ma$, es posible despejar la aceleración de tal forma que

$$\vec{a}_i = -G \sum_{j=1}^n \frac{M_j}{\|\vec{r}_{i,j}\|^2} \hat{r}_{i,j} ; \text{ con } j \neq i \quad (4)$$

Luego de obtener la aceleración, es posible calcular la nueva velocidad y posición del cuerpo a partir de una versión modificada del método de integración de Euler, lo que comúnmente se conoce como ecuaciones de diferencia.

$$\vec{r}_{i_{new}} = \vec{r}_{i_{old}} + \vec{v}_{i_{old}} dt \quad (5)$$

$$\vec{v}_{i_{new}} = \vec{v}_{i_{old}} + \vec{a}_{i_{old}} dt \quad (6)$$

A partir de las ecuaciones anteriormente descritas, es posible realizar un sistema especificado por ecuaciones de diferencia, en el cual la unidad de tiempo está dada en días terrestres; a partir de unas condiciones iniciales obtenidas por medio del dataset de la NASA JPL Horizons [2].

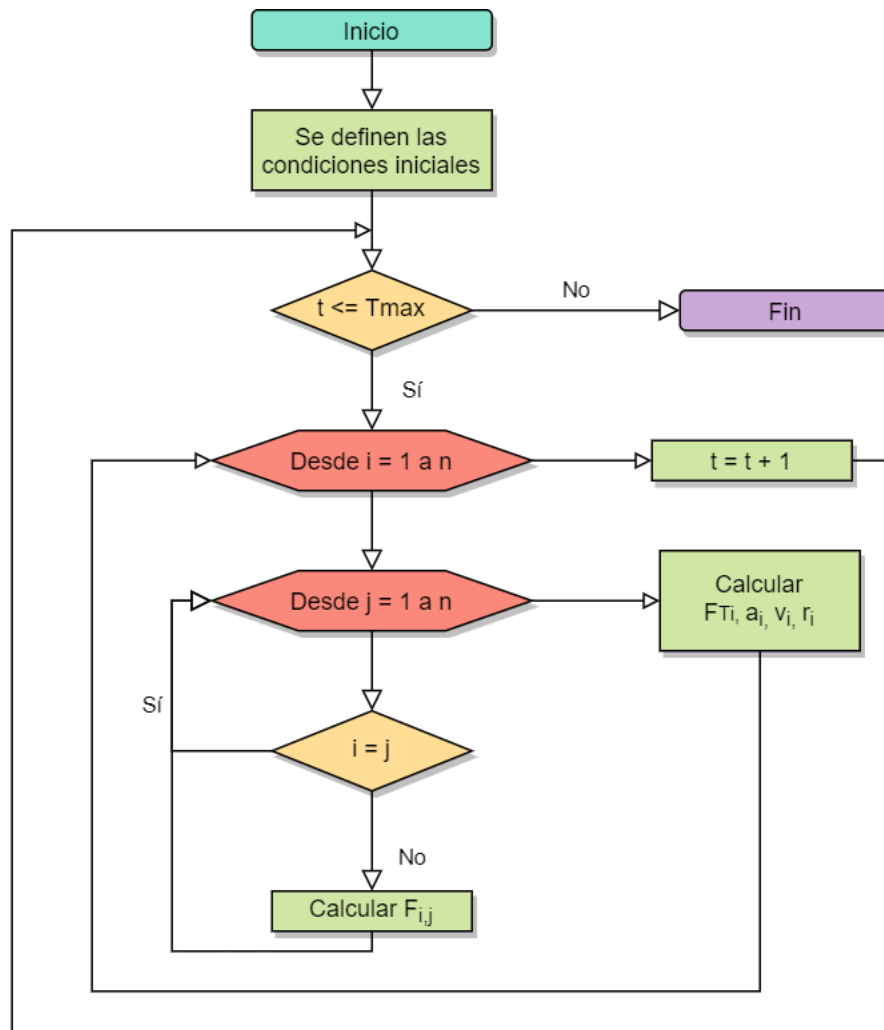


Figura 1: Diagrama de flujo para el modelo de simulación

5. Recolección de Datos

Para obtener las condiciones iniciales de la simulación se usará la base de datos del sistema solar de la NASA JPL Horizons [2], la cual proporciona acceso a datos claves del sistema solar contando con los datos de los planetas, asteroides, cometas, satélites planetarios y el Sol.

Ahora bien, teniendo en cuenta que la simulación está centrada a los cuerpos celestes de gran masa en el sistema solar, se tomarán los datos de los planetas para inicializar el modelo; sin embargo, es importante aclarar que de acuerdo a los resultados obtenidos con esta aproximación inicial es posible considerar una mayor cantidad de cuerpos celestes. Los planetas en orden de aumento del eje semimayor son Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno.

El dataset cuenta con las efemérides que proporciona los datos de posición, velocidad y aceleración de cada uno de los planetas en los tres ejes coordenados. Adicional, la base de datos contiene parámetros físicos seleccionados como la masa, la densidad aparente, el radio medio y el albedo geométrico. Para simplificar el modelo físico, se asume que el Sol no tiene movimiento en el sistema solar, por lo cual este se selecciona como el origen de coordenadas del sistema. Esto es posible debido a que la NASA permite acceder a los datos de una forma dinámica, de tal forma que se puede seleccionar cualquier cuerpo celeste como punto de referencia desde el cual se miden las distintas variables, como posición, velocidad y aceleración.

La importancia del dataset en la simulación radica en la necesidad de tener las condiciones iniciales para determinada fecha de inicio y, además de esto, poder realizar la validación de la simulación en instantes de tiempos posteriores.

Una vez se tienen tanto los parámetros físicos como las condiciones iniciales de las variables cinemáticas de cada cuerpo celeste, es posible relacionarlas en el modelo mediante las ecuaciones anteriormente descritas.

Referencias

- [1] *Woolfson, M. M. (2000). The origin and evolution of the solar system. CRC Press.*
- [2] *NASA Jet Propulsion Laboratory (2020). HORIZONS System, disponible en <https://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons>*
- [3] *BANKS, J., CARSON, J.S., NELSON, B.L. y NICOL, D.M, Discrete-event system simulation. (5a. edición) Pearson Educación, 2014. , disponible en <http://bibliotecavirtual.uis.edu.co:2168/?il=7579>*