

Simulación de Cuerpos Celestes de Gran Masa en el Sistema Solar

Proyecto Final

2172016 - Kevin Javier Lozano Galvis
2170688 - Brayan Rodolfo Barajas Ochoa
2161342 - Carlos Alberto Palencia Pombo

Bucaramanga, 2021

Índice de Contenidos

1. Formulación del Problema	1
2. Objetivos	2
3. Plan General del Proyecto	3
3.1. Justificación	3
3.2. Declaración y Evaluación	3
3.3. Cronograma	4
4. Conceptualización del Modelo	5
5. Recolección de Datos	7
6. Prototipo implementado	8
7. Diseño experimental	9
8. Resultados de la simulación	10
9. Análisis de resultados	16
9.1. Resultados del tiempo de ejecución	16
9.2. Resultados del RMSE	17
9.3. Conclusiones	21
Referencias	22

Índice de Figuras

1. Diagrama de flujo para el modelo de simulación	6
2. Comparación de la posición de Mercurio en ambos modelos.	10
3. Comparación de la posición de Venus en ambos modelos.	10
4. Comparación de la posición de la Tierra en ambos modelos.	11
5. Comparación de la posición de Marte en ambos modelos.	11
6. Comparación de la posición de Júpiter en ambos modelos.	11
7. Comparación de la posición de Saturno en ambos modelos.	12
8. Comparación de la posición de Urano en ambos modelos.	12
9. Comparación de la posición de Neptuno en ambos modelos.	12
10. Comparación de la velocidad de Mercurio en ambos modelos.	13
11. Comparación de la velocidad de Venus en ambos modelos.	13
12. Comparación de la velocidad de la Tierra en ambos modelos.	13
13. Comparación de la velocidad de Marte en ambos modelos.	14
14. Comparación de la velocidad de Júpiter en ambos modelos.	14
15. Comparación de la velocidad de Saturno en ambos modelos.	14
16. Comparación de la velocidad de Urano en ambos modelos.	15

17.	Comparación de la velocidad de Neptuno en ambos modelos.	15
18.	Gráfica del tiempo de ejecución para ambos modelos.	16
19.	Gráficas de RMSE para la posición de cada planeta.	18
20.	Gráficas de RMSE para la velocidad de cada planeta.	19
21.	Gráficas de RMSE promedio para la posición y velocidad del sistema.	20

1. Formulación del Problema

El sistema solar, comprendido como el sistema planetario en el que se encuentra la Tierra y otros objetos astronómicos que giran directa o indirectamente en una órbita alrededor del Sol, siempre ha sido de gran interés para el estudio de la dinámica de los cuerpos que lo conforman. Gracias a los avances de grandes científicos como Isaac Newton, con las leyes del movimiento y Albert Einstein con la teoría de la relatividad general, se ha podido expresar de forma matemática el funcionamiento de este sistema; sin embargo, debido a la gran cantidad de objetos que se encuentran orbitando al Sol, resulta complicado realizar todos los cálculos para estimar la posición y velocidad de cada uno de ellos.

2. Objetivos

- Predecir la posición y velocidad de los cuerpos de gran masa en un momento dado a partir de unas condiciones iniciales.
- Elaborar una simulación que permita obtener una precisión significativa al compararla con los datos obtenidos a partir de las observaciones.
- Determinar la cantidad de objetos necesarios para la simulación, de tal forma que no se incremente desmesuradamente el costo computacional, pero que se mantenga la precisión deseada.
- Visualizar los resultados de la simulación a través del tiempo.

3. Plan General del Proyecto

3.1. Justificación

En astronomía es fundamental estudiar la posición de los cuerpos celestes para, a partir de esto, poder obtener información de cada uno de ellos y entender sus interacciones. Como ya se mencionó previamente, se necesitan realizar una gran cantidad de cálculos para cada uno de los cuerpos en el sistema solar y es por esa razón que resultan útiles las simulaciones en esta área.

3.2. Declaración y Evaluación

Un modelo de simulación comúnmente usado son las llamadas simulaciones directas de N-cuerpos, donde cada uno está representado por una partícula puntual que interactúa gravitacionalmente con todas las demás partículas. Este tipo de simulación es costosa desde el punto de vista computacional, ya que se escala como $O(N^2)$ donde N es el número de partículas en el sistema solar.

Se pretende comparar la simulación a realizar con las observaciones obtenidas por la NASA JPL Horizons, así como otras simulaciones en las que se haya aprovechado la supercomputación para poder utilizar todos los cuerpos conocidos del sistema solar o una gran parte de ellos, en las que se hace uso de otros métodos de simulación.

Para la evaluación de la simulación a realizar, se busca verificar la precisión de las posiciones y velocidades respecto a los datos obtenidos del dataset de la NASA anteriormente mencionado, por medio de un error relativo.

3.3. Cronograma

<i>Cronograma de Actividades</i>													
Pasos	Diciembre				Enero				Febrero				Marzo
	Sem 1	Sem 2	Sem 3	Sem 4	Sem 1	Sem 2	Sem 3	Sem 4	Sem 1	Sem 2	Sem 3	Sem 4	Sem 1
Formulación del problema													
Establecimiento de los objetivos y el plan general del proyecto													
Avance 1													
Conceptualización del modelo													
Recolección de datos													
Traducción del modelo													
Avance 2													
Verificación del modelo													
Validación del modelo													
Diseño experimental													
Análisis estadístico inicial													
Análisis adicional													
Documentación de la simulación													
Implementación													
Entrega Final													

4. Conceptualización del Modelo

Para poder realizar una simulación de las órbitas de cuerpos celestes de gran masa en el sistema solar, se deben considerar variables indispensables para la construcción de este modelo; entre ellas se encuentran

- Posición: expresada tridimensionalmente a partir del punto de referencia que es el Sol.
- Velocidad: representada como un vector para cada cuerpo.
- Aceleración: representada como un vector para cada cuerpo de acuerdo a la fuerza resultante de cada uno.
- Fuerza: obtenida para cada cuerpo a partir de la interacción de este con todos los demás.
- Tiempo: definido en una escala diaria (de acuerdo al tiempo en la Tierra).

La relación presente entre estas variables se puede modelar a partir de la fuerza de atracción gravitacional entre dos objetos que viene dada por

$$\vec{F} = -\frac{G \times M \times m}{\|\vec{r}\|^2} \hat{r} \quad (1)$$

Como se mencionó anteriormente, esta ecuación corresponde a la fuerza entre dos cuerpos, por lo tanto, es necesario obtener la fuerza total al realizar la sumatoria de todas las fuerzas ejercidas por los demás cuerpos.

Dado un conjunto de cuerpos $\{\mathbf{c}_i\}_{i=1}^n$, la fuerza resultante para cada uno de estos se puede representar como

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1}^n -\frac{G \times M_j \times m_i}{\|\vec{r}_{i,j}\|^2} \hat{r}_{i,j} ; \text{ con } j \neq i \quad (2)$$

Sacando las constantes, se obtiene

$$\vec{F}_i = -G \times m_i \sum_{j=1}^n \frac{M_j}{\|\vec{r}_{i,j}\|^2} \hat{r}_{i,j} ; \text{ con } j \neq i \quad (3)$$

Ahora, conociendo que $F = ma$, es posible despejar la aceleración de tal forma que

$$\vec{a}_i = -G \sum_{j=1}^n \frac{M_j}{\|\vec{r}_{i,j}\|^2} \hat{r}_{i,j} ; \text{ con } j \neq i \quad (4)$$

Luego de obtener la aceleración, es posible calcular la nueva velocidad y posición del cuerpo a partir de una versión modificada del método de integración de Euler, lo que comúnmente se conoce como ecuaciones de diferencia.

$$\vec{r}_{i_{new}} = \vec{r}_{i_{old}} + \vec{v}_{i_{old}} dt \quad (5)$$

$$\vec{v}_{i_{new}} = \vec{v}_{i_{old}} + \vec{a}_{i_{old}} dt \quad (6)$$

A partir de las ecuaciones anteriormente descritas, es posible realizar un sistema especificado por ecuaciones de diferencia, en el cual la unidad de tiempo está dada en días terrestres; a partir de unas condiciones iniciales obtenidas por medio del dataset de la NASA JPL Horizons [2].

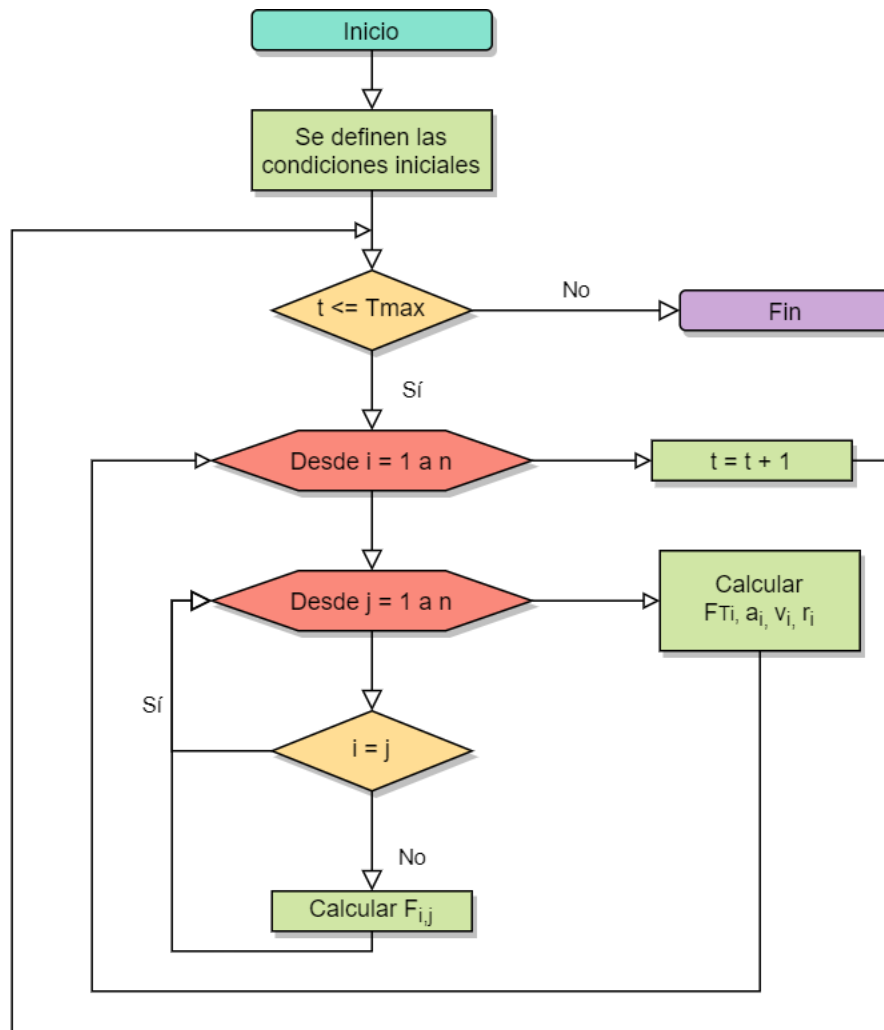


Figura 1: Diagrama de flujo para el modelo de simulación

5. Recolección de Datos

Para obtener las condiciones iniciales de la simulación se usará la base de datos del sistema solar de la NASA JPL Horizons [2], la cual proporciona acceso a datos claves del sistema solar contando con los datos de los planetas, asteroides, cometas, satélites planetarios y el Sol.

Ahora bien, teniendo en cuenta que la simulación está centrada a los cuerpos celestes de gran masa en el sistema solar, se tomarán los datos de los planetas para inicializar el modelo; sin embargo, es importante aclarar que de acuerdo a los resultados obtenidos con esta aproximación inicial es posible considerar una mayor cantidad de cuerpos celestes. Los planetas en orden de aumento del eje semimayor son Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno.

El dataset cuenta con las efemérides que proporciona los datos de posición, velocidad y aceleración de cada uno de los planetas en los tres ejes coordenados. Adicional, la base de datos contiene parámetros físicos seleccionados como la masa, la densidad aparente, el radio medio y el albedo geométrico. Para simplificar el modelo físico, se asume que el Sol no tiene movimiento en el sistema solar, por lo cual este se selecciona como el origen de coordenadas del sistema. Esto es posible debido a que la NASA permite acceder a los datos de una forma dinámica, de tal forma que se puede seleccionar cualquier cuerpo celeste como punto de referencia desde el cual se miden las distintas variables, como posición, velocidad y aceleración.

La importancia del dataset en la simulación radica en la necesidad de tener las condiciones iniciales para determinada fecha de inicio y, además de esto, poder realizar la validación de la simulación en instantes de tiempos posteriores.

Una vez se tienen tanto los parámetros físicos como las condiciones iniciales de las variables cinemáticas de cada cuerpo celeste, es posible relacionarlas en el modelo mediante las ecuaciones anteriormente descritas.

6. Prototipo implementado

Para la obtención de datos de la NASA JPL Horizons [2], el lenguaje de programación Python cuenta con la librería *astroquery*, que a su vez contiene el módulo *Horizons*, el cual facilita la búsqueda y manejo de los mismos. Posteriormente, estos son organizados en un archivo de tipo *JSON* para proceder a descargarlos; para poder manejar este conjunto de datos como un dataframe en el lenguaje de programación R, se convierten a un archivo de tipo *CSV*.

Luego de tener los datos en R, se implementan dos modelos que posteriormente serán evaluados y comparados entre sí y también con los datos reales. Estos modelos se separan en módulos que son implementados por medio de funciones, ya que esto permite una depuración más eficiente del código para encontrar posibles errores de implementación.

Para ambos modelos, el tiempo se implementa como una variable de tipo fecha, que va aumentando por día debido a que fue considerada como una variable discreta. Además, esta variable se inicializa el primero de enero del año 2018, de tal forma que se puedan comparar los resultados de las simulaciones con los datos obtenidos de la NASA en un periodo de tres años.

Debido a que se busca evaluar tanto el tiempo de la simulación como la precisión de esta, se implementó la actualización de las variables de cada cuerpo celeste de forma vectorial, ya que esto optimiza el tiempo de ejecución. Al tener los dos modelos realizados en el lenguaje de programación R, se llevaron a cabo las métricas de evaluación que se explicarán en el análisis de resultados y se realizó la misma implementación de los modelos en el lenguaje de programación Python para realizar vídeos animando el movimiento de los cuerpos celestes; esta implementación resultó más práctica de realizar por medio del paradigma de programación orientado a objetos.

7. Diseño experimental

Como se mencionó anteriormente, se llevaron a cabo dos modelos para la simulación, los cuales serán descritos a continuación

- Primer modelo: como una primera aproximación se decidió aplicar las leyes de Newton para calcular la aceleración de todos los cuerpos celestes únicamente respecto al Sol, debido a que este cuerpo representa aproximadamente el 99,86 % de la masa total del sistema solar. Por lo cual, se espera un análisis del error a partir de una aproximación con un bajo costo computacional, ya que se está simplificando el problema a un orden de $O(n)$ para el cálculo de las aceleraciones en cada instante de tiempo.
- Segundo modelo: luego de tener el primer modelo implementado, se procede a realizar un modelo más completo en el cual se calcula la aceleración de cada cuerpo a partir de la interacción de este con el resto de los que se encuentran en el sistema, lo cual genera una complejidad de $O(n^2)$ para cada instante de tiempo. Es de esperar que este modelo aporte mayor precisión a los resultados pero eleve el tiempo de ejecución de la simulación.

Para poder realizar una comparación adecuada de ambos modelos, se inician el 01 de Enero de 2018 y se ejecutan por un tiempo total de tres años, es decir, 1095 días. Además, para delimitar el alcance de la simulación, se seleccionaron únicamente los cuerpos más masivos del sistema solar que corresponden al Sol junto con los planetas a partir de las coordenadas baricéntricas de cada uno de estos. Adicionalmente, es de gran importancia las unidades utilizadas en los modelos están expresadas como se presenta a continuación:

- Tiempo: expresado en días (d).
- Distancia: expresada en Unidades Astronómicas (AU), que equivale aproximadamente a la distancia media entre la Tierra y el Sol ($1AU = 1.495978707 \times 10^{11}$ m).
- Velocidad: expresada en Unidades Astronómicas por día (AU/d).
- Aceleración: expresada en Unidades Astronómicas por día al cuadrado (AU/d^2).
- Masa: expresada en kilogramos (Kg).

8. Resultados de la simulación

Los resultados obtenidos de la simulación son los valores de posición y velocidad a través del tiempo, que permiten describir el comportamiento del sistema y avanzar indefinidamente para conocer de forma aproximada la cinemática del sistema a partir de coordenadas cartesianas. Además, esto se puede ver reflejado de forma gráfica en los videos anexos para cada modelo, en los cuales es necesario mostrar por aparte el sistema solar interior del exterior debido a las distancias que hay entre los cuerpos más alejados, las cuales imposibilitan escalar a todas las observaciones de los cuerpos en el sistema, en este caso, planetas.

A continuación, se presentan los resultados de las posiciones de cada planeta en los tres ejes coordenados (x, y, z) , para ambos modelos propuestos.

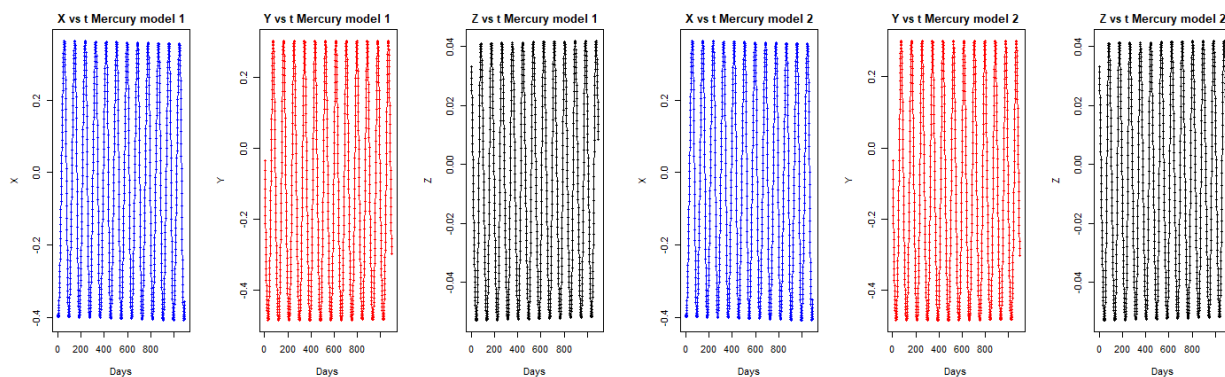


Figura 2: Comparación de la posición de Mercurio en ambos modelos.

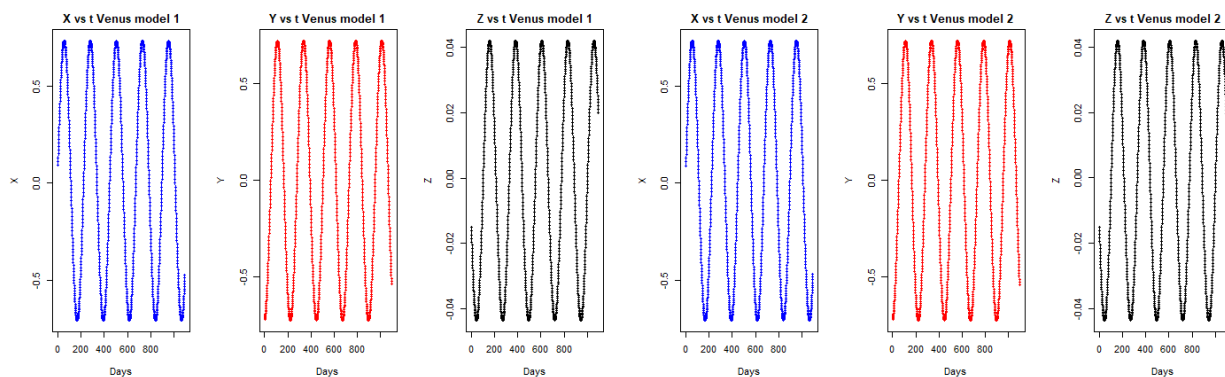


Figura 3: Comparación de la posición de Venus en ambos modelos.

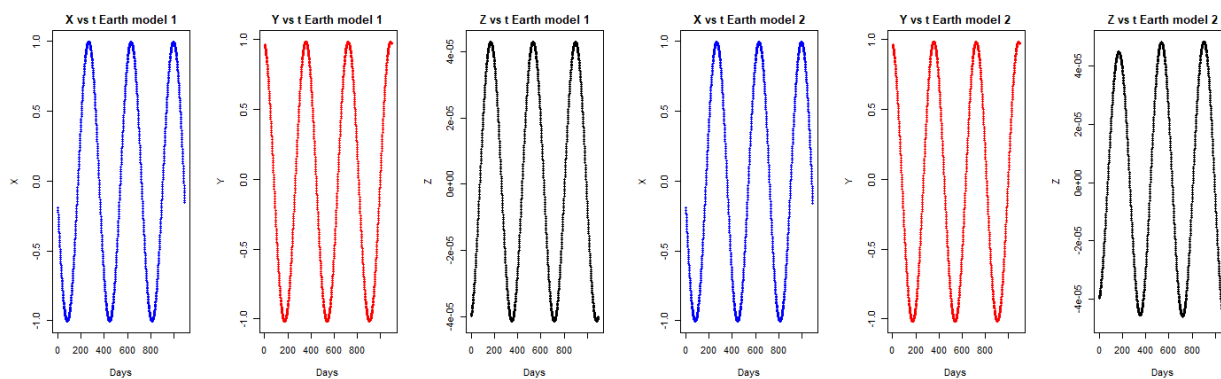


Figura 4: Comparación de la posición de la Tierra en ambos modelos.

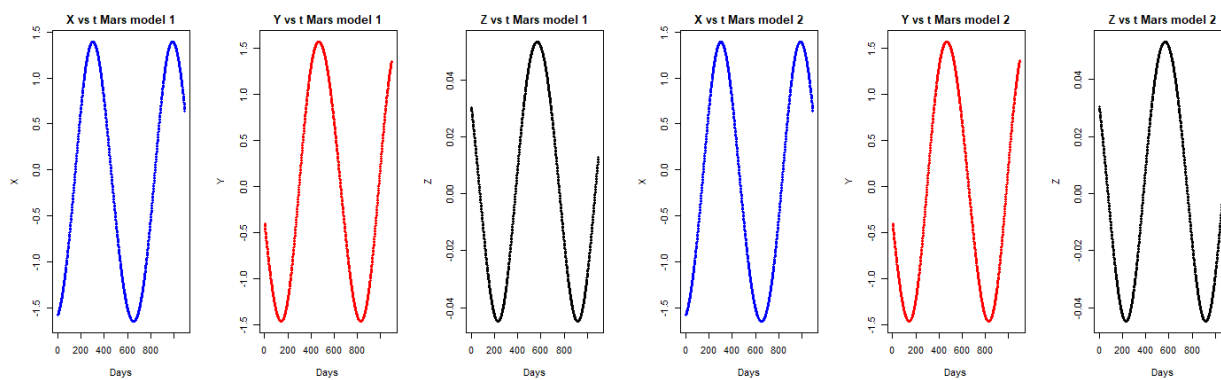


Figura 5: Comparación de la posición de Marte en ambos modelos.

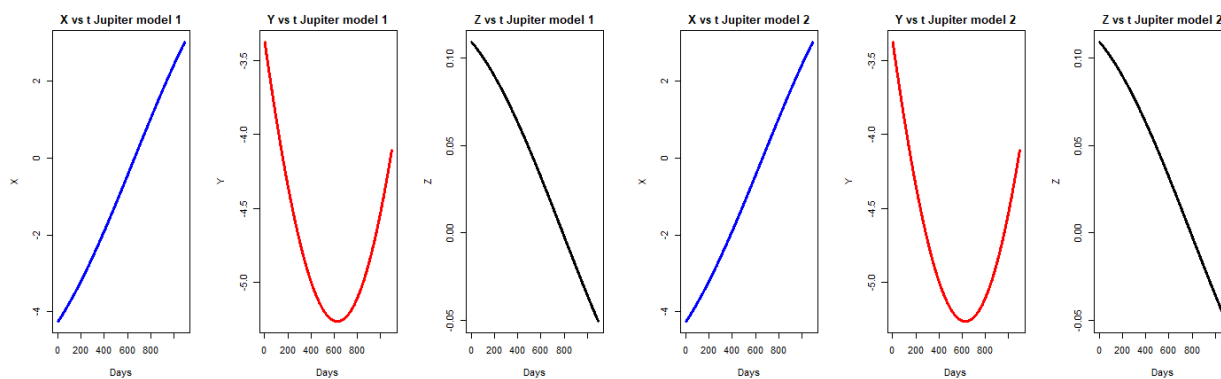


Figura 6: Comparación de la posición de Júpiter en ambos modelos.

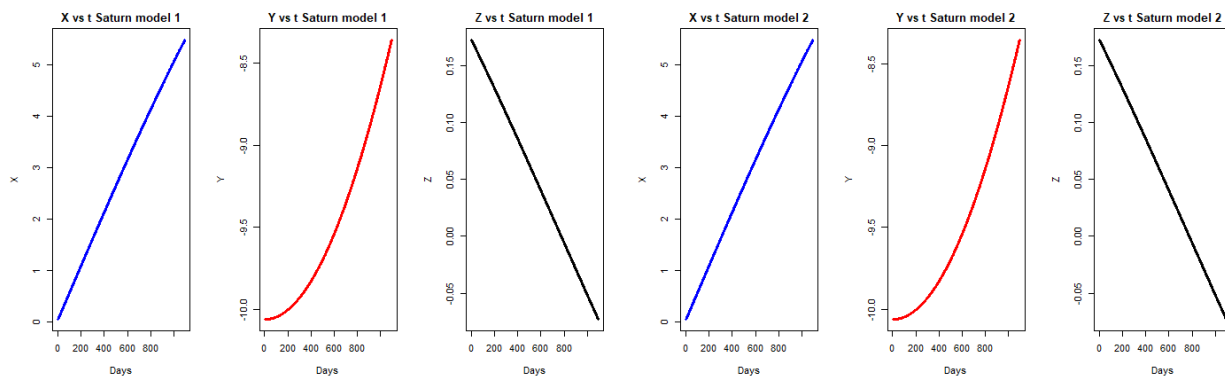


Figura 7: Comparación de la posición de Saturno en ambos modelos.

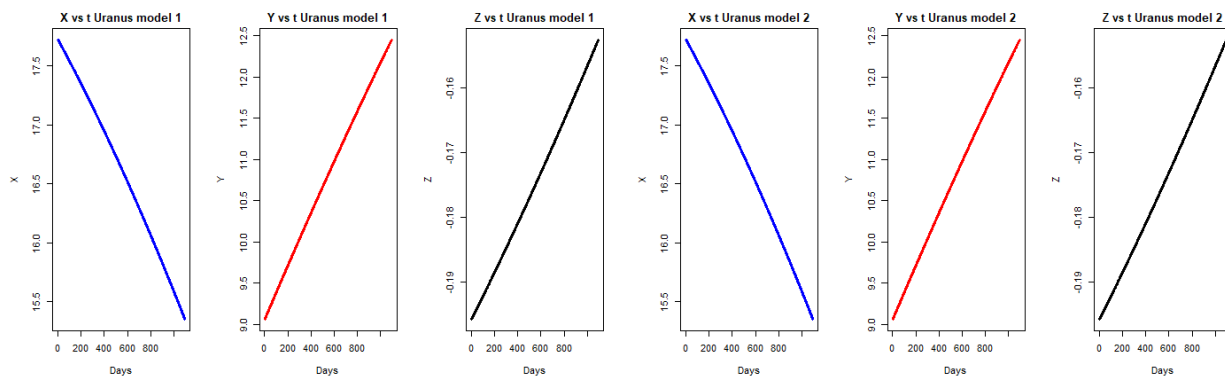


Figura 8: Comparación de la posición de Urano en ambos modelos.

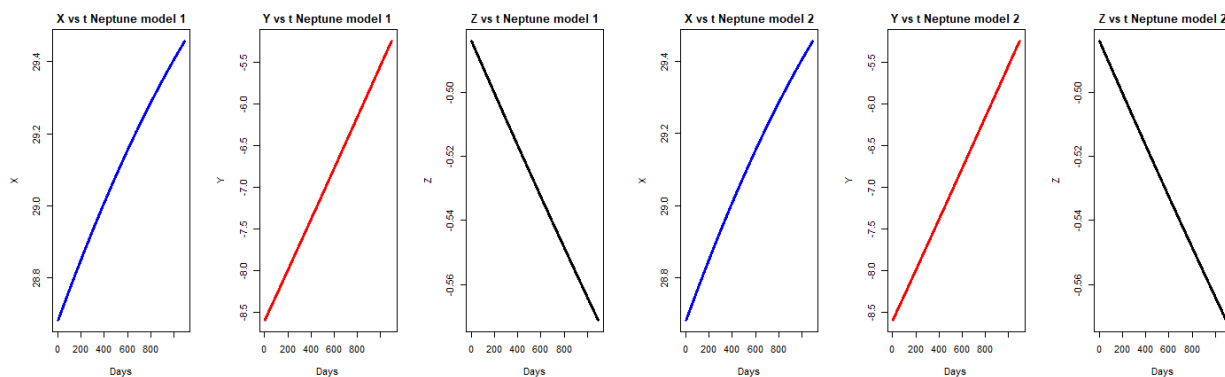


Figura 9: Comparación de la posición de Neptuno en ambos modelos.

Observando las posiciones de todos los planetas en ambos modelos, no es evidente una diferencia suficientemente notoria que permita sacar conclusiones al respecto en este punto, por lo cual, se procede a exponer los resultados de las velocidades de cada planeta.

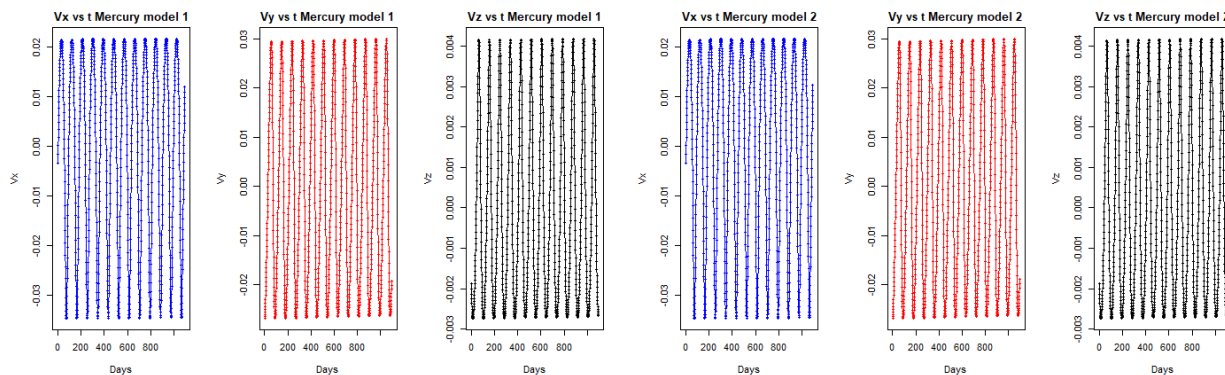


Figura 10: Comparación de la velocidad de Mercurio en ambos modelos.

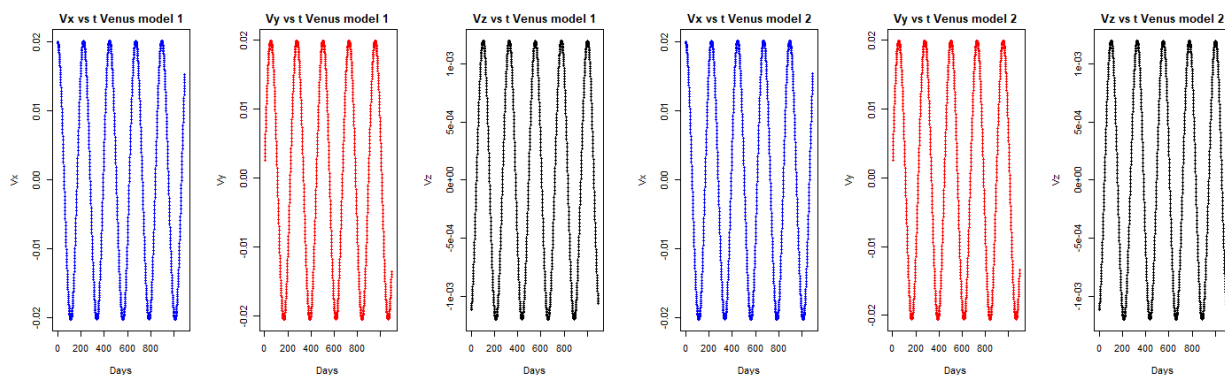


Figura 11: Comparación de la velocidad de Venus en ambos modelos.

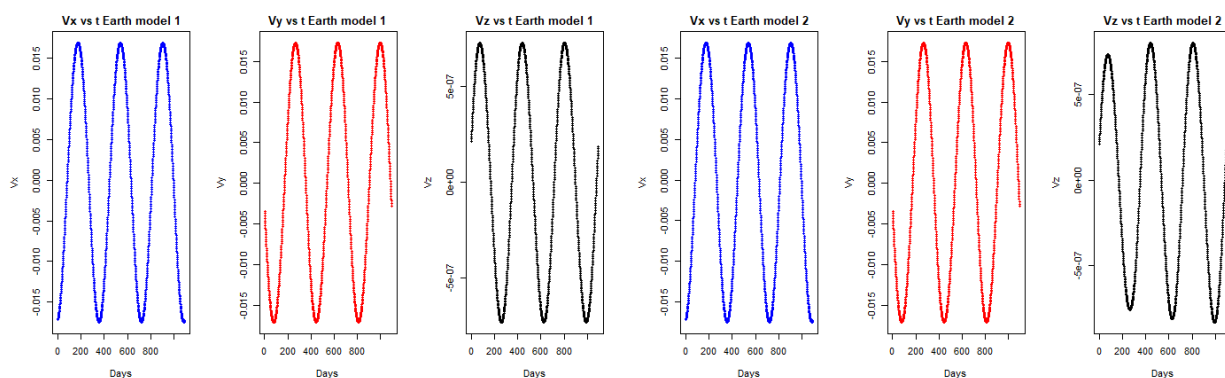


Figura 12: Comparación de la velocidad de la Tierra en ambos modelos.

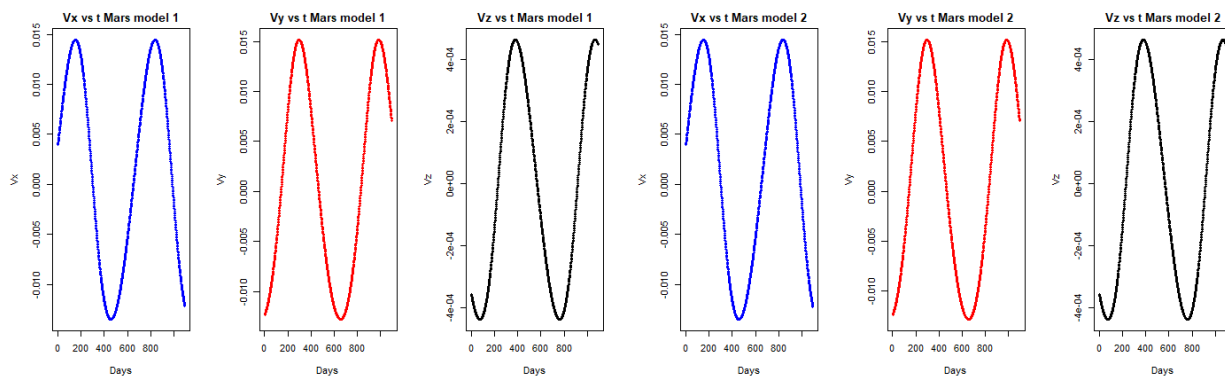


Figura 13: Comparación de la velocidad de Marte en ambos modelos.

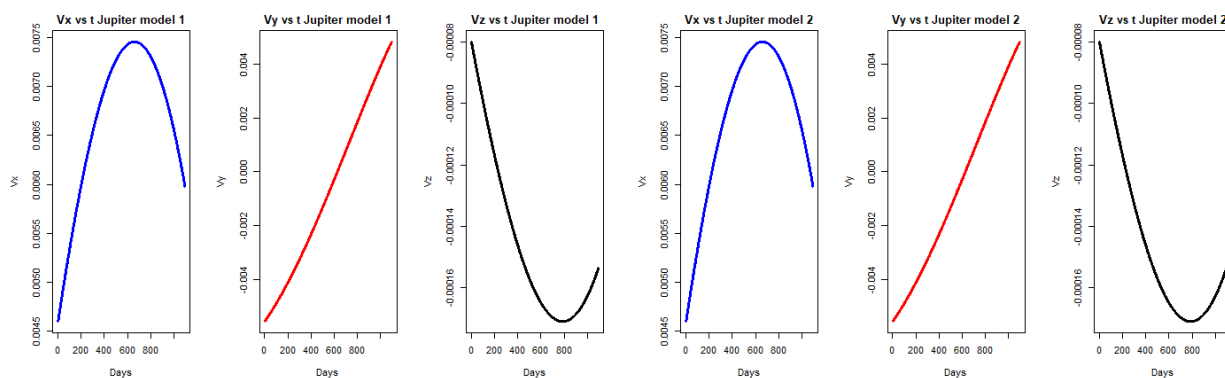


Figura 14: Comparación de la velocidad de Júpiter en ambos modelos.

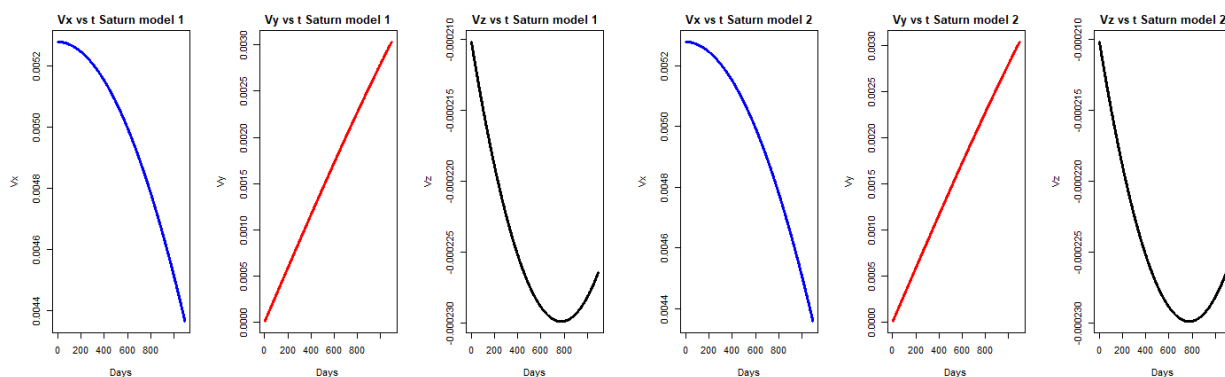


Figura 15: Comparación de la velocidad de Saturno en ambos modelos.

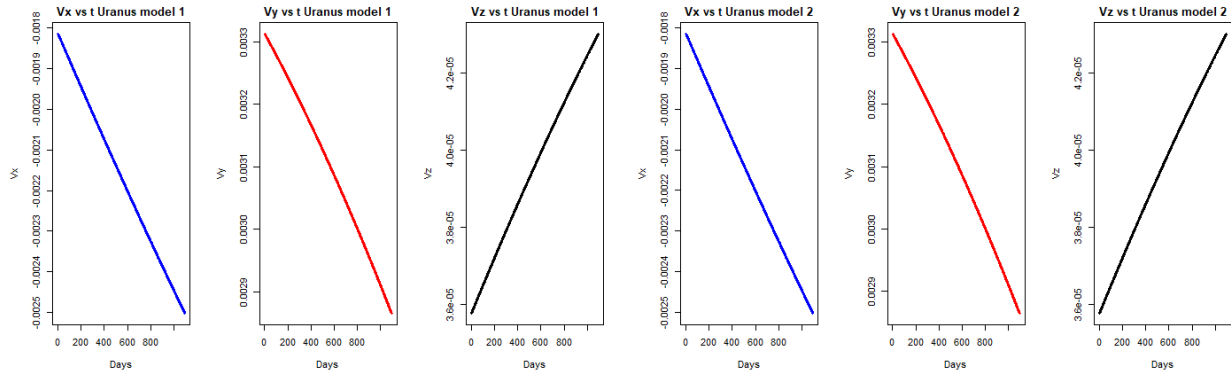


Figura 16: Comparación de la velocidad de Urano en ambos modelos.

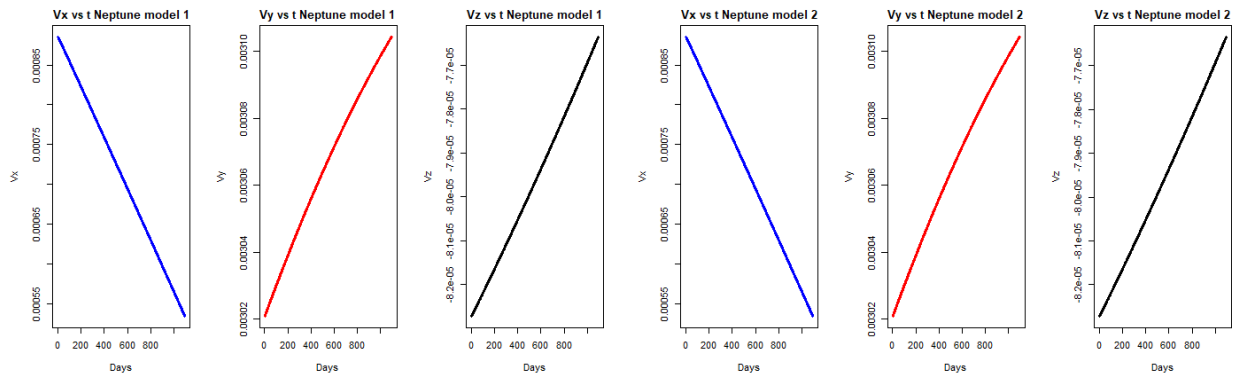


Figura 17: Comparación de la velocidad de Neptuno en ambos modelos.

Luego de observar las gráficas tanto de posición como de velocidad para cada uno de los planetas, se puede resaltar que el movimiento se aproxima a formas elípticas y para cada coordenada se tiene un comportamiento similar al sinusoidal a través del tiempo. Sin embargo, estas gráficas no permiten determinar la diferencia de ambos modelos, por lo que resulta necesario determinar ciertas métricas de evaluación de los mismos, que se presentarán en la siguiente sección.

9. Análisis de resultados

Las métricas de evaluación de los modelos se consideran a partir de dos condiciones esenciales, que son el costo temporal de la simulación y la precisión obtenida; Para el primero de estos, basta con medir el tiempo de ejecución de cada simulación para poder realizar la respectiva comparación.

En cuanto al segundo, la métrica seleccionada para evaluar la precisión fue el RMSE (Root Mean Square Error), ya que este permite comparar dos conjuntos de datos, uno real y otro predicho o simulado, y determinar el error entre las mediciones, lo cual resulta útil tanto para la posición como para la velocidad de cada cuerpo celeste debido a que estos son vectores tridimensionales. Además, el RMSE le da importancia a los errores considerables, lo cual resulta favorable en este caso.

Debido a que las posiciones y velocidades varían con el tiempo y dependen de su estado anterior, es importante medir el error en el tiempo para evidenciar su propagación a través de este; para tal fin, se consideraron puntos específicos de forma trimestral entre los años 2018 y 2021, en los cuales se obtiene el RMSE para todos los planetas y así se puede tener una visión general de dicha propagación. Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

9.1. Resultados del tiempo de ejecución

La primera comparación y evaluación del tiempo para ambos modelos, se realiza simulando con diferente cantidad de años y así observar como se comportan los modelos.

	Tiempo de ejecución (s)				
	3 años	6 años	9 años	12 años	15 años
Modelo 1	4.67	8.61	13.80	18.22	21.94
Modelo 2	23.53	45.37	66.18	96.58	113.05

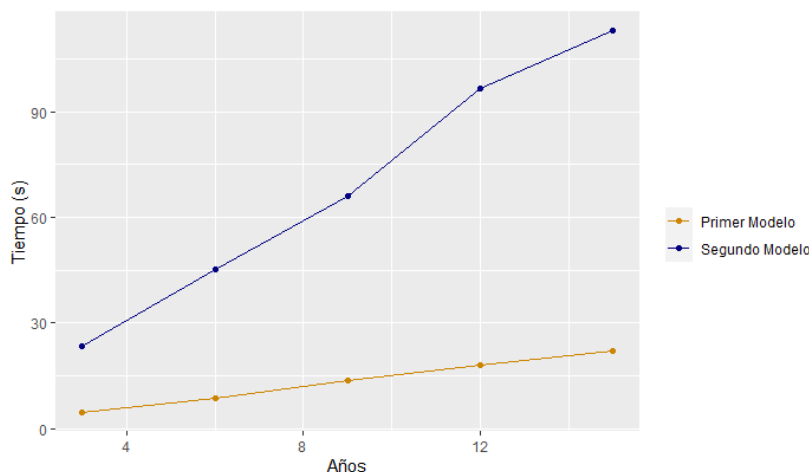
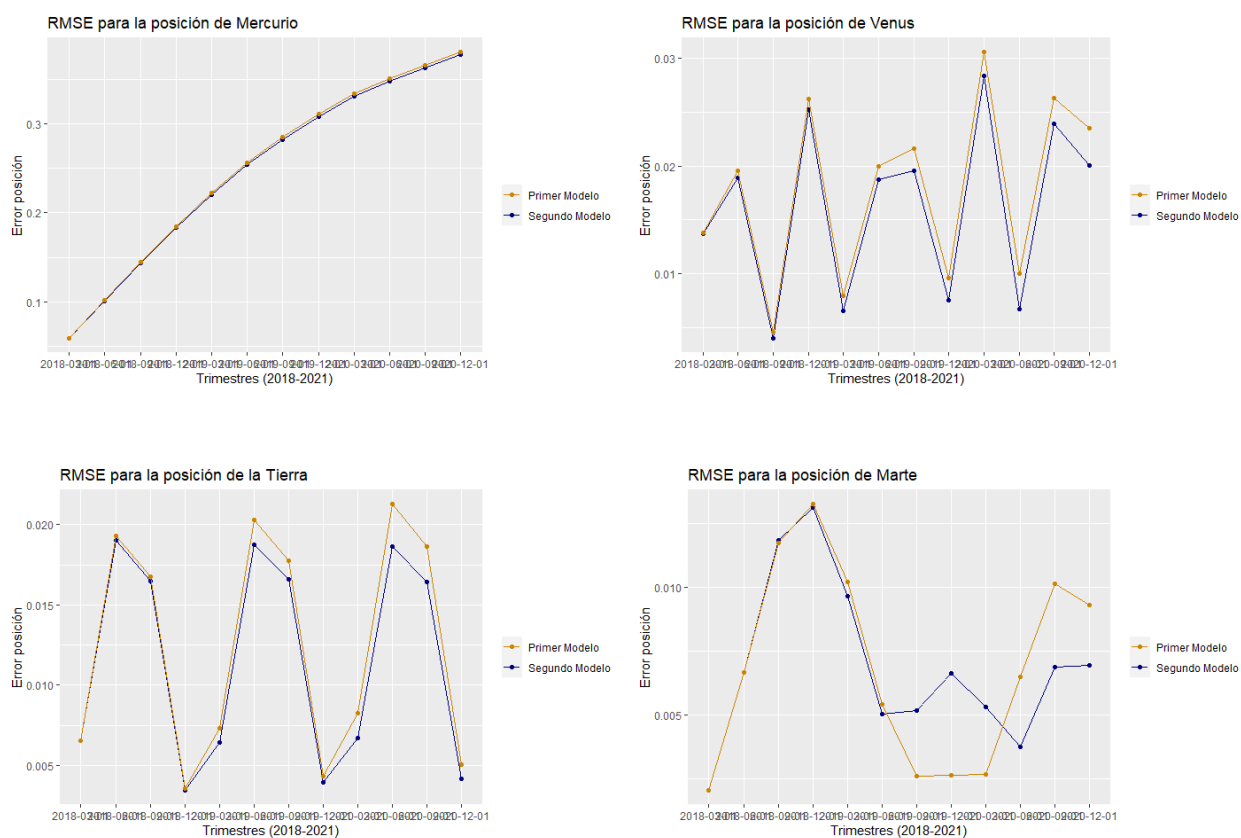


Figura 18: Gráfica del tiempo de ejecución para ambos modelos.

Analizando la tabla y la gráfica de los tiempos de ejecución para los modelos, se evidencia que entre mayores son los tiempos de la simulación, aumenta significativamente el tiempo de ejecución del modelo 2, esto debido a que su complejidad es de un grado mayor a la del modelo 1, que mantiene un incremento lineal pero con una pendiente relativamente reducida.

9.2. Resultados del RMSE

Para la segunda métrica seleccionada se realizan los RMSE de cada modelo respecto a los datos de la NASA, tanto para las posiciones y velocidades, los cuales se evalúan en puntos específicos determinados trimestralmente en un periodo comprendido entre los años 2018 y 2021.



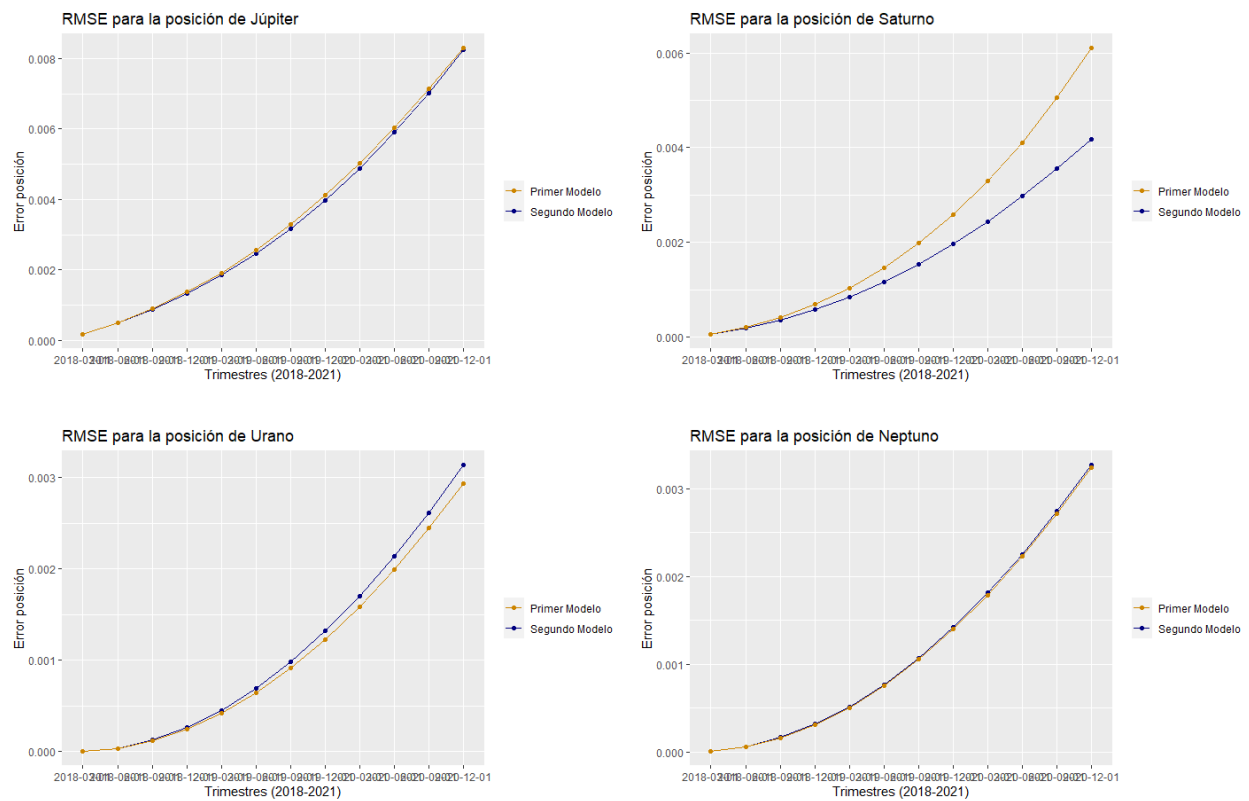
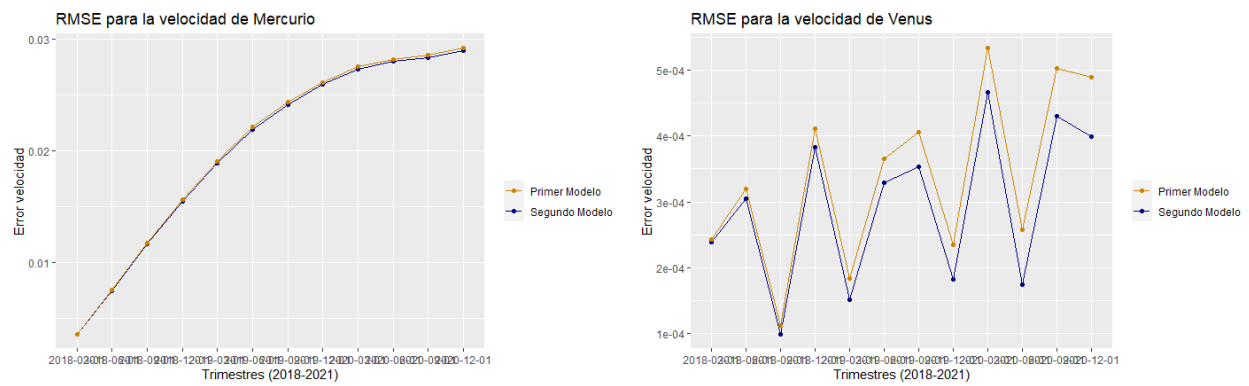


Figura 19: Gráficas de RMSE para la posición de cada planeta.



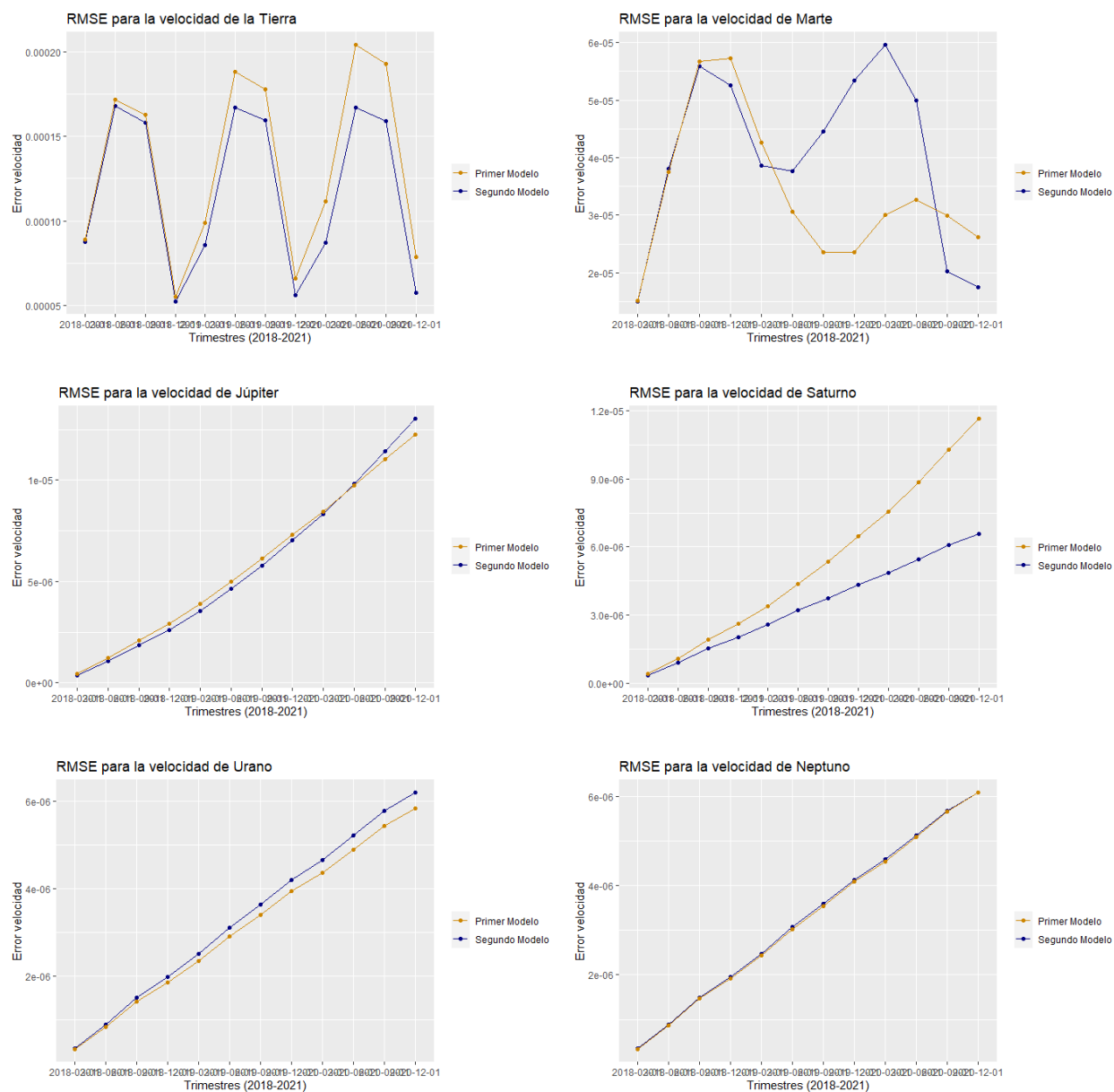


Figura 20: Gráficas de RMSE para la velocidad de cada planeta.

Analizando los RMSE tanto en posición y velocidad de cada uno de planetas, se observa que en el caso de la velocidad la escala de los errores es mucho menor respecto a la escala de las posiciones, esto debido a que también existe una propagación desde los errores de las velocidades a las posiciones, ya que dependen directamente de estas. Además, resulta importante analizar algunos casos particulares de planetas; como lo es Mercurio que muestra un crecimiento del error en todo el transcurso de la simulación, siendo el mayor RMSE en el sistema, esto causado posiblemente por la precesión del perihelio de este planeta, lo cual no puede ser considerado con las leyes de Newton, y para ese caso sería necesario aplicar las leyes de la relatividad.

Continuando con el análisis particular de los planetas, Venus y la Tierra presentan un comportamiento similar, debido a que sus periodos de traslación alrededor del Sol son relativamente similares, por lo que es posible observar cierta periodicidad de los errores a lo largo de los años. En especial, en el caso de la Tierra se observa que el error aumenta muy poco en cada año.

Respecto a Marte, se presenta un caso particular en el que al finalizar el año 2019 el error del segundo modelo es mayor que el del primero, por lo que podría suceder que en este periodo de tiempo haya ocurrido algún evento que no se tuvo en cuenta en la realización de la simulación.

Por último, se tienen los planetas del sistema solar externo, los cuales presentan un comportamiento similar con errores bajos que van incrementando en todo momento, esto debido a que las órbitas de estos planetas están muy alejadas del sol por lo que se demoran mucho más tiempo en completarla; para realizar un análisis mucho más profundo de los errores en estos planetas sería necesario aumentar el tiempo de la simulación de tal forma que se tenga más información para analizar.

Ahora, para poder tener una visualización general de los errores del sistema, se obtuvo el promedio de los errores de cada planeta para la posición y velocidad en cada trimestre seleccionado. La figura que se presenta a continuación muestra estos resultados.

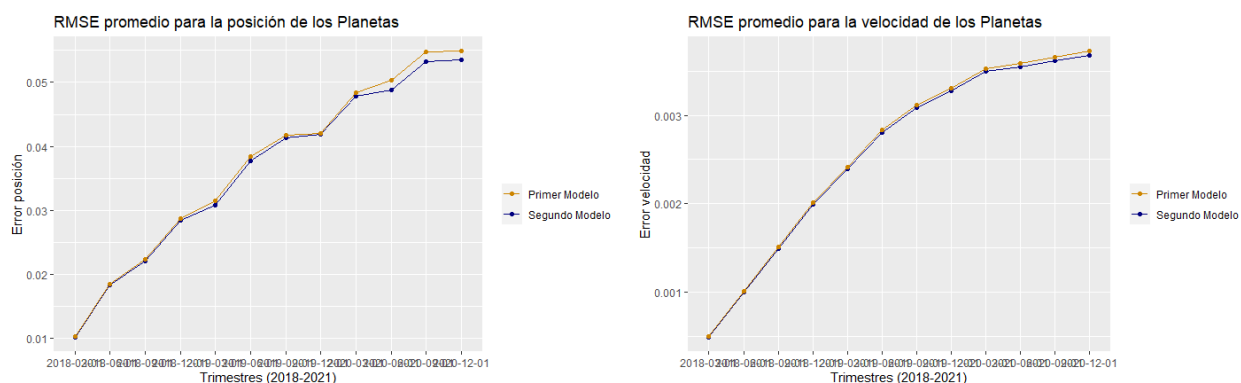


Figura 21: Gráficas de RMSE promedio para la posición y velocidad del sistema.

Se observa que, en promedio, el error es menor en el segundo modelo en todo instante de tiempo, aunque esta diferencia sólo llegaría a ser notable una vez transcurrido un tiempo considerable de la simulación.

9.3. Conclusiones

- Ambos modelos planteados cumplen con las expectativas esperadas para cada uno de ellos, en cuanto a que el primero busca una ejecución rápida de la simulación mientras que el segundo se centra en la precisión.
- De acuerdo al modelado del problema de forma matemática, se concluye que la cinemática del sistema depende de la masa de los cuerpos, en especial aquellos con mayor cantidad de masa, junto con la distancia existente entre ellos. Además, el primer modelo resulta ser una buena aproximación precisamente debido a que este representa aproximadamente el 99 % de la masa total del sistema solar.
- Debido a que el estudio de la simulación se centra en los cuerpos celestes de gran masa del sistema solar, es posible concluir que al tomar el Sol junto con los planetas se obtiene buenos modelos con la precisión suficiente en ambos casos.
- Si se quisiera mejorar la precisión en el sistema, las leyes de Newton no serían suficientes en cuanto a que existen casos particulares como el de Mercurio el cual presenta una cinemática que no es posible describir por medio de estas. Por esto, habría que recurrir a la teoría de relatividad general propuesta por Albert Einstein para mejorar los resultados de los modelos.
- La animación en 2D permitió visualizar el modelo en funcionamiento, despreciando el movimiento en el eje z ya que en general los planetas orbitan principalmente en el plano XY .

Referencias

- [1] *Woolfson, M. M. (2000). The origin and evolution of the solar system. CRC Press.*
- [2] *NASA Jet Propulsion Laboratory (2020). HORIZONS System, disponible en <https://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons>*
- [3] *BANKS, J., CARSON, J.S., NELSON, B.L. y NICOL, D.M, Discrete-event system simulation. (5a. edición) Pearson Educación, 2014. , disponible en <http://bibliotecavirtual.uis.edu.co:2168/?il=7579>*