



Formación para la Investigación  
Escuela de Física, Facultad de Ciencias  
Universidad Industrial de Santander  
Construimos Futuro

# ESTUDIO DE LA AMPLITUD DE LAS OSCILACIONES ARMÓNICAS AMORTIGUADAS Y FORZADAS

**Angela Barajas (2200018) & Brayan Barajas (2170688)**

*Escuela de Física  
Universidad Industrial de Santander  
Bucaramanga, Colombia*

21 de agosto de 2022

## Resumen

En esta práctica de laboratorio se realizó el montaje experimental de un péndulo de Pohl, el cual corresponde a un péndulo de torsión constituido por un volante que puede rotar alrededor de un eje y que, mediante un resorte espiral, recupera su posición de equilibrio. Este se empleó con el fin de analizar experimentalmente las oscilaciones amortiguadas y forzadas, más específicamente el comportamiento de la amplitud de las oscilaciones amortiguadas en función del tiempo, las oscilaciones rotatorias forzadas en función de la frecuencia del agente externo y también la frecuencia natural del oscilador. Para esto primero se estudió la teoría correspondiente al movimiento amortiguado para así pasar a la parte experimental; aquí haciendo uso del péndulo se tomaron datos como número de oscilaciones o valores extremos del movimiento en cada ciclo completo variando la corriente aplicada por las bobinas.

Posteriormente se realizó el tratamiento correspondiente a estos datos y se analizaron siendo posible comprender la relación inversa entre periodo y decaimiento logarítmico, así como su utilidad para calcular la constante de amortiguamiento con resultados muy similares a si se hiciera un ajuste a la curva. También pudo estudiarse las condiciones para que se den los movimientos críticamente o sobreamortiguados y diferenciarlos de acuerdo a sus características. Por último, en el movimiento amortiguado forzado se evidenció el comportamiento estacionario, así como la influencia de la frecuencia en la amplitud, en donde existe una frecuencia de resonancia que incrementa en gran medida las amplitudes obtenidas, esta frecuencia de resonancia está ligada a la frecuencia natural y al amortiguamiento del sistema.

## 1. Introducción

Los movimientos oscilatorios ideales son aquellos a los que se les desprecia las fuerzas de ro-

zamiento y oscilan, por lo tanto, están descritos por el movimiento armónico simple. Sin embargo, en los sistemas reales, se sabe que las fuerzas disipativas del entorno influyen en el sistema

ya que estas generan disminución de la energía mecánica, y junto con esto se presenta un decaimiento de su amplitud con el tiempo, por lo tanto, este movimiento se denomina movimiento amortiguado. En este proyecto de investigación se buscó estudiar este último tipo de movimiento, más específicamente la variación de la amplitud del movimiento en función del tiempo para diferentes constantes de amortiguamiento y la amplitud del movimiento forzado en función de la frecuencia de la fuerza externa para diferentes constantes de amortiguamiento. Esto permite plantearse preguntas como ¿Cómo afectan las fuerzas de fricción externas la amplitud en un movimiento oscilatorio? ¿Cómo afecta la frecuencia de la fuerza externa la amplitud en un movimiento forzado? entre muchas otras preguntas de interés, las cuales planean ser solucionadas en este informe.

## 2. Marco teórico

Teniendo en cuenta lo planteado en el proyecto de investigación [1] se va a estudiar las oscilaciones amortiguadas y las forzadas, y el péndulo de pohl que es el empleado en esta práctica; así mismo se resolverán algunas de las preguntas planteadas teniendo en cuenta esta teoría estudiada.

### 2.1. Oscilaciones amortiguadas

Por medio de la experiencia se sabe que un oscilador se va frenando progresivamente hasta llegar a detenerse en la posición de equilibrio, por lo que un oscilador mecánico sometido únicamente a la ley de Hooke no es realista ya que desprecia la presencia de rozamiento y dicho rozamiento es lo que genera la disminución progresiva en la amplitud de las oscilaciones.

Éste puede deberse a un roce con una superficie denominado rozamiento seco, o la fricción del

aire o líquido que rodea al oscilador también llamado como rozamiento viscoso. En este caso se estudiará este último, ya que aparte de ser un modelo de muchas aplicaciones, representa más adecuadamente lo que ocurre en un amortiguador mecánico.

La Figura 1 muestra un ejemplo de un M.A.S. sometido a una fuerza de amortiguamiento generada por un líquido viscoso en donde se sumerge el objeto, dicha fuerza actúa en dirección contraria al movimiento. En este caso la fuerza retardadora se define por  $F_r = -bv$ , donde  $b$  es el coeficiente de amortiguamiento respectivo. Ahora, teniendo esto en cuenta, la segunda ley de newton aplicada a este tipo de osciladores en una dimensión se da de la siguiente forma:

$$-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\frac{1}{m} (m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = 0)$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

Donde  $\delta = \frac{b}{2m}$  es la constante de amortiguamiento y  $\omega_o^2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  es la frecuencia propia del oscilador, que equivale a la frecuencia natural con la que oscilaría el resorte si no tuviera rozamiento.

Tomando en cuenta las condiciones iniciales del movimiento, obtenemos la solución de la ecuación de movimiento (1)

$$x = A_o e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi_o) \quad (1)$$

donde  $\omega_a = \sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}$ , donde esta es la frecuencia angular de vibración. De acuerdo a la relación entre la constante de amortiguamiento y la frecuencia natural de vibración se obtienen los siguientes tipos de movimiento, los cuales se pueden observar en la figura 2

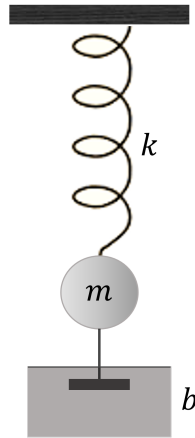


Figura 1: Ejemplo de un M.A.S amortiguado

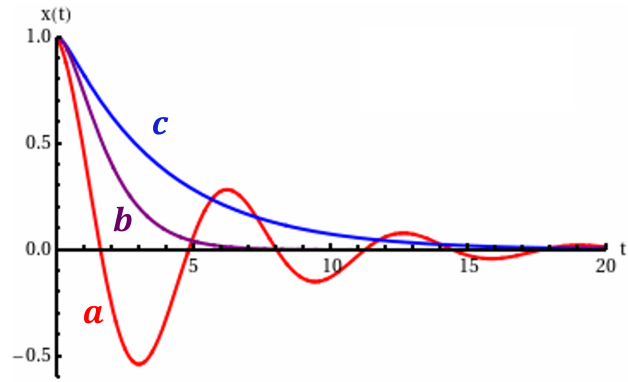


Figura 2: Gráficas de posición en función del tiempo para un oscilador subamortiguado (Curva 'a'), críticamente amortiguado (Curva 'b') y sobreamortiguado (Curva 'c') [2]

- ( $b < \omega_o$ ) Si la constante de amortiguamiento es menor que la frecuencia natural de vibración, el movimiento es **subamortiguado** (ver curva 'a' de 2), lo que genera que la amplitud disminuya exponencialmente.
- ( $b = \omega_o$ ) Si la constante de amortiguamiento es igual a la frecuencia natural de vibración, **críticamente amortiguado** (ver curva 'b' de 2), el sistema no oscila y retorna al origen o posición de equilibrio
- ( $b > \omega_o$ ) Si la constante de amortiguamiento es mayor que la frecuencia natural de vibración, el sistema no oscila y retorna lentamente a la posición de equilibrio, se denomina sistema **sobreamortiguado**. (ver curva 'c' de 2)

## 2.2. Oscilaciones forzadas

Si este oscilador amortiguado descrito anteriormente se encuentra sometido a una fuerza externa adicional, en general dependiente del tiempo, se dice que el oscilador está forzado, siendo su ecuación de movimiento

$$-kx - b\dot{x} + F(t) = m\ddot{x}$$

De entre los posibles tipos de fuerza que se pueden aplicar, la más importante desde el punto de vista físico, es aquella que en sí misma es oscilante, es decir,  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ , donde  $F_0$  es una constante y  $\omega$  es la frecuencia angular de la fuerza impulsora, la cual por lo general es variable, a diferencia de la frecuencia natural del oscilador. Aplicando esto al sistema masa-resorte amortiguado y forzado, tenemos

$$\begin{aligned} -kx - b\dot{x} + F_0 \cos(\omega t) &= m\ddot{x} \\ \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_o^2 x &= \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

La solución a esta ecuación después de un tiempo suficiente para alcanzar un estado estacionario es

$$x(t) = A \cos(\omega t - \beta) \quad (2)$$

donde la amplitud del movimiento forzado depende de la magnitud del momento aplicado y de la frecuencia externa  $\omega$ , de modo que

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad (3)$$

y el desfase entre el momento externo y la oscilación es

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right)$$

Por otra parte, la frecuencia en que la amplitud es máxima, se denomina frecuencia de resonancia y se expresa de la siguiente manera

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad (4)$$

### 2.3. Péndulo de Pohl

El péndulo de Pohl es un sistema oscilante que consta de un anillo de cobre unido a un muelle helicoidal que puede girar alrededor de un eje horizontal, tal como se muestra en la figura 3. El amortiguamiento se genera mediante las corrientes de Foucault que genera el campo magnético producido por una bobina en el anillo de cobre, el momento de las fuerzas que ejerce el campo magnético sobre las corrientes inducidas es proporcional a la velocidad angular de rotación y son de sentido contrario a ésta.

La fuerza oscilante se proporciona mediante un motor de velocidad variable, que dispone de una rueda impulsora y una excéntrica unida a una biela. La biela se atornilla a una varilla que puede girar alrededor del mismo eje y cuyo extremo está unido al muelle helicoidal. La varilla dispone de una ranura que permite ajustar la amplitud de la oscilación forzada. Finalmente, el movimiento oscilante del volante se inicia al desplazar el indicador con la mano a un ángulo inicial y soltarlo. En términos generales, el péndulo de Pohl consiste en una rueda con momento de inercia  $I$  que oscila y un resorte helicoidal que produce un momento de torsión restaurador cuando la rueda rota, dado por la siguiente ecuación

$$M = -k\theta$$

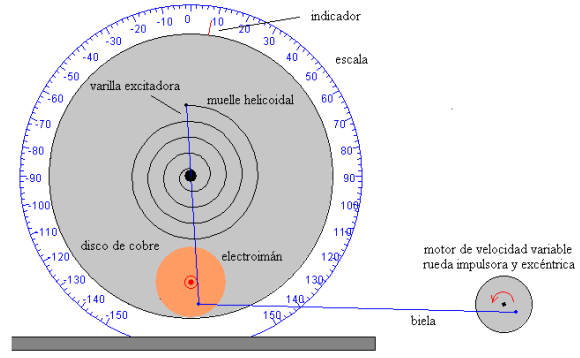


Figura 3: Esquema del péndulo de Pohl [3]

De esta forma se genera el movimiento oscilatorio, tendiendo a llevar el péndulo a la posición de equilibrio.

### 2.4. Preguntas propuestas

#### 2.4.1

Se ha mencionado en el marco teórico que las bobinas inducen un torque retardador, se debe demostrar si este torque cumple las condiciones de torque amortiguador: ¿Cuál es naturaleza de las fuerzas que intervienen en el disco?

El disco se frena mediante corrientes de Foucault que genera el campo magnético producido por las bobinas, este campo magnético ejerce sobre las corrientes inducidas un momento de las fuerzas, el cual es proporcional a la velocidad angular de rotación y de sentido contrario a esta. Por otra parte, la intensidad del campo es proporcional a la corriente que pasa por la bobina junto con la fuerza sobre dichas corrientes y finalmente, el momento de frenado es proporcional al cuadrado de la intensidad de la corriente que pasa por la bobina. [4]

### 2.4.2

Para la condición de resonancia en energía, ¿cómo cambia la grafica de Amplitud vs Frecuencia externa? ¿cambia la frecuencia de resonancia en esta figura en función de la constante de amortiguamiento? ¿Qué es el Factor de Calidad  $Q$  de un resonador como el formado por un sistema masa-resorte amortiguado y forzado? ¿Cómo se obtiene un factor de calidad grande?

La resonancia en energía se da cuando la frecuencia de la fuerza aplicada coincide con la frecuencia propia del oscilador (ec. 5), y como consecuencia a esto la amplitud de las oscilaciones en la velocidad es máxima.

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5)$$

En la gráfica 4 se puede observar el comportamiento de la amplitud vs frecuencia externa, donde es evidente que el máximo en la amplitud de la velocidad está siempre centrado en la misma frecuencia, la cual se denomina frecuencia de resonancia y en caso de que el rozamiento sea nulo, el valor de la amplitud de la velocidad tendería a infinito. El valor máximo de esta amplitud está dado por

$$V_{max} = V(\omega_0) = \frac{F_0}{\gamma}$$

La anchura es una característica importante de la curva ya que para amortiguamientos débiles la anchura de la curva de resonancia es estrecha y se denomina resonancia aguda, y por el contrario cuando el rozamiento aumenta, es decir cuando el amortiguamiento es mayor, la curva de resonancia es ancha y se denomina resonancia amplia. [6]

Por otra parte, el factor de calidad  $Q$  es una medida directa de la agudeza de la resonancia, por esto para resonancias agudas, es decir, para amortiguamientos débiles el factor de calidad

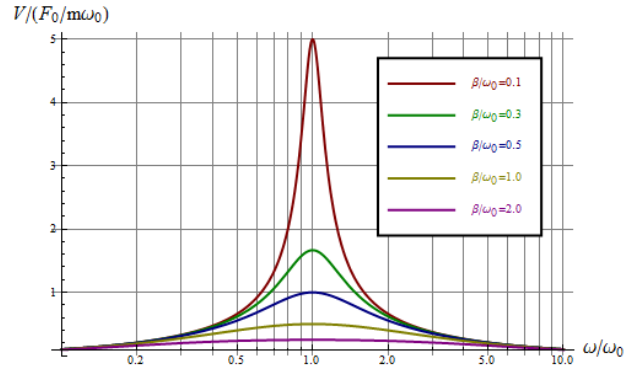


Figura 4: Gráfica de amplitud de la velocidad vs Frecuencia para el caso de resonancia en energía [5]

aumenta. Este se define en términos de energía de la siguiente forma

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energía almacenada promedio}}{\text{Energía disipada en un periodo}} \quad (6)$$

$$= 2\pi \frac{\langle E \rangle}{|W_d|} = \frac{\sqrt{km}}{\gamma}$$

para resonancias agudas,  $Q$  es inversamente proporcional al ancho de banda, es decir, el cociente entre la frecuencia del máximo de resonancia y la anchura a la mitad del máximo

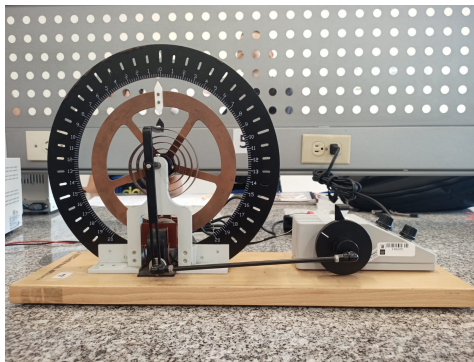
$$Q \simeq \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

## 3. Metodología

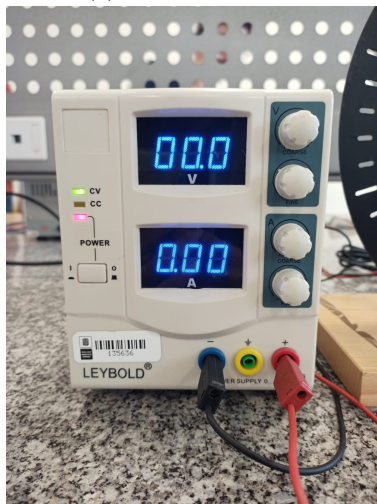
Inicialmente debe haber una familiarización con el péndulo, para esto se debe observar el comportamiento del péndulo primero sin corriente, y después aplicándole una corriente de 0.2 [A], 0.4 [A] y 0.6 [A] y verificar si se completan 5 oscilaciones completas para cada caso. Después de esto viene la toma de datos, lo cual se va a dividir en 4 fases experimentales

### Fase 1. MAA críticamente amortiguado y sobreamortiguado

El objetivo de esta fase es obtener el estado crítico de amortiguamiento observando el comportamiento del péndulo (figura 5a) a medida que se incrementa la corriente de las bobinas (figura 5b). Después de hallar este valor, se debe aumentar aún más la corriente de las bobinas para hallar el valor del estado sobreamortiguado y comprobar el tiempo que tarda el péndulo en frenar su movimiento.



(a) Péndulo de Pohl



(b) Bobinas generadoras de corriente

Figura 5: Montaje experimental

### Fase 2. Amplitud del MAA sub amortiguado

Aquí hay que aplicar una amplitud inicial al péndulo y soltarlo para iniciar el movimiento, posterior a esto hay que registrar el valor extremo del movimiento en cada ciclo completo. Este proceso se debe hacer primero para el péndulo sin corriente en las bobinas (en este caso hay que estudiar los 10 primeros ciclos completos), y después hay que proporcionarle una corriente de  $0.2 [A]$ ,  $0.4 [A]$  y  $0.6 [A]$  (aquí hay que estudiar solo los 5 primeros ciclos completos). Para cada uno de los casos especificados, se deben hacer un total de 3 repeticiones y anotar los datos obtenidos en las tablas correspondientes.

### Fase 3. Periodo del MAA subamortiguado

Aquí hay que repetir las mismas configuraciones especificadas en la fase 2, sin embargo, en esta fase hay que medir el tiempo para el número de oscilaciones indicadas en cada uno de los casos (10 oscilaciones para el caso sin corriente, y 5 oscilaciones para el caso con los distintos valores de corriente) y registrar estos valores en las tablas correspondientes.

### Fase 4. Amplitud y periodo del MAS Forzado

En esta fase también se deben tener en cuenta las corrientes especificadas en la fase 2, pero en este caso también hay que variar la escala de la frecuencia de giro del motor cuyo intervalo va de 5 a 100. Para cada uno de los casos hay que registrar el tiempo de 10 oscilaciones completas y el número de la escala que representa la amplitud del movimiento amortiguado forzado, tal como se observa en la tabla. Aquí es muy importante tener en cuenta que los datos se deben tomar



cuando el péndulo haya alcanzado un estado estable.

## 4. Tratamiento y análisis de datos

### 4.1. Movimiento Subamortiguado

Primeramente, se procede a realizar el cálculo de la constante de amortiguamiento. Con los datos obtenidos de la práctica en la fase 2 y 3, los cuales se encuentran registrados en las tablas 5, 6, 7 y 8; es posible calcular la constante de dos formas, las cuales se mostrarán a continuación.

#### 4.1.1. Por decaimiento logarítmico

Haciendo uso de la siguiente ecuación

$$\Lambda = \delta T_a = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{A_0}{A_n} \right) \quad (7)$$

Donde  $\Lambda$  es el decaimiento logarítmico,  $\delta$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $n$  es un determinado ciclo de oscilación; es posible obtener la constante de amortiguamiento de tal forma que

$$\delta T_a = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{A_0}{A_n} \right)$$

Se puede calcular tanto el decaimiento logarítmico promedio para cada ciclo registrado, y a partir de este promedio calcular el coeficiente de amortiguamiento para determinado valor de corriente. Esto se hace calculando primero los promedios de amplitud para cada ciclo y tiempo

También es posible calcular directamente el coeficiente de amortiguamiento en cada ciclo y luego promediarlo, son procesos equivalentes y se obtiene el mismo resultado.

En la tabla 1 se puede ver el resultado de los cálculos realizados de acuerdo a la descripción realizada previamente.

De estos resultados se puede notar que el coeficiente de amortiguamiento incrementa a medida

Corriente [A]	$\bar{\Lambda}$	$\bar{\delta}$	$\sigma\bar{\delta}$
0	0.01557	0.0084	0.00053
0.2	0.09202	0.049	0.00032
0.4	0.30359	0.1611	0.00418
0.6	0.7163	0.3776	0.04777

Cuadro 1: Resultados de coeficiente de amortiguamiento por decaimiento logarítmico.

que lo hace la corriente aplicada al sistema, lo cual es coherente y es el resultado esperado.

#### 4.1.2. Por ajuste a la curva

Partiendo de la ecuación 8

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t} \quad (8)$$

Se realiza un ajuste a esta función exponencial con los datos que se tienen, en este caso  $A_0 = 14[cm]$  y  $t$  para cada ciclo es  $t = nT_a$ . Para esto se hace uso del método de mínimos cuadrados, el cual se implementa en la función *curve\_fit* de la librería *scipy* en Python; en este método se utilizó una tolerancia de  $1e - 8$ , que es la tolerancia por defecto de dicha función. Además, para cuantificar la validez del ajuste, se calculó el coeficiente  $R^2$ , que permite medir qué tan bien se ajusta el modelo obtenido a los datos experimentales. Los resultados obtenidos se presentan a continuación en la tabla 2.

Corriente [A]	$\bar{\delta}$	$R^2$
0	0.0086	0.9966
0.2	0.049	0.9999
0.4	0.1607	0.9994
0.6	0.3425	0.9956

Cuadro 2: Resultados por medio de ajuste a la curva

#### 4.1.3. Comparación entre los dos métodos

Se puede observar que se obtuvieron resultados muy similares con cada método; sin embargo, para poder realizar una comparación directa, considerando que en el primer método se obtuvo la desviación estándar y en el segundo  $R^2$ , se consideró factible obtener el valor de  $R^2$  si se usara el coeficiente de amortiguamiento obtenido por ese método en la función 8 y así poder comparar directamente. Los resultados son los siguientes:

Corriente [A]	$R^2$ dec. log.	$R^2$ ajuste
0	0.9951	0.9966
0.2	0.9995	0.9999
0.4	0.9993	0.9994
0.6	0.9752	0.9956

Se ve que el ajuste a la curva obtuvo mejores resultados, pero la diferencia es tan poca que se podría afirmar que el procedimiento realizado por decaimiento logarítmico es igual de válido que con ajuste a la curva. Esto también se puede ver representado en la figura 8.

#### 4.2. Movimiento Críticamente y Sobreamortiguado

Para el análisis del movimiento críticamente amortiguado, se fue aumentando la corriente con el propósito de encontrar el valor al cual se dejaba de presentar oscilaciones, que corresponde al caso del menor tiempo requerido para que el sistema se "frene" por completo; para el péndulo utilizado en la práctica, se evidenció que este comportamiento solamente se presentaba hasta alcanzar un valor de 1,46[A] en un tiempo de 1,17[s], este resultado concuerda con los coeficientes de amortiguamiento obtenidos previamente, considerando que para el movimiento críticamente amortiguado se requiere que  $w_0 = \delta$ , por lo que se necesitaba de

una valor alto de corriente.

Ahora, para el movimiento amortiguado, resultaba necesario seguir aumentando la corriente suministrada; sin embargo, por limitaciones experimentales esto no fue posible ya que se llegó al límite de corriente que podía suministrar la fuente utilizada, por lo que no fue posible evidenciar este comportamiento de forma experimental. Para analizar si el tiempo de retorno a la posición de equilibrio es finito o no, se debe tener en cuenta la solución de la ecuación diferencial, que es de la forma:

$$x(t) = A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t}$$

En donde

$$\lambda_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \wedge \lambda_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Al ser la suma de dos funciones exponenciales con exponente negativo, se sabe que tienen un comportamiento asintótico, es decir, cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces  $x \rightarrow 0$ ; considerando esto, de forma teórica se podría decir que no alcanza la posición de equilibrio en un tiempo finito.

#### 4.3. Movimiento Armónico Forzado

Para las tablas 9, 10, 11 y 12 pertenecientes a la fase 4, se calcula la frecuencia angular a partir de:

$$\omega = \frac{2\pi}{t/n}$$

En donde  $t$  es el tiempo que tardó en dar  $n$  cantidad de oscilaciones.

Luego de calcular todas estas frecuencias, se grafica y se obtiene la figura 6, en donde se observan los puntos correspondientes a las amplitud para determinada frecuencia; en esta gráfica se colocaron las líneas con el propósito de que fuera más fácil diferenciar cada conjunto de puntos. Para los análisis que se realizarán a continuación, es importante conocer la frecuencia natural de



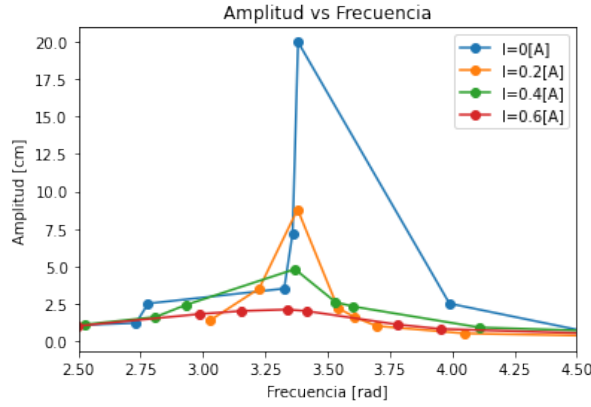


Figura 6: Datos experimentales de amplitud vs frecuencia para determinado valor de corriente.

vibración  $\omega_0$  del sistema; esta se puede obtener a partir de los datos obtenidos en la fase 3, en particular de el tiempo registrado para un determinado número de oscilaciones cuando no hay amortiguamiento, es decir, para  $I = 0[A]$ . Con este dato se puede calcular el periodo, el cual sirve para calcular  $\omega_0$ , de la siguiente forma:

$$T_0 = \frac{18,53666667}{10} = 1,85367[seg]$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1,85367} \approx 3,3896[rad/seg]$$

Ahora, volviendo a la gráfica 6, se observa cierto comportamiento similar a una campana sin importar el valor de corriente, y en todos los casos el valor máximo de amplitud se encuentra cercano a cierto valor de  $w$ ; también se percibe que a mayor corriente, disminuye la amplitud máxima y se presenta un ligero corrimiento a la izquierda de este valor máximo respecto al eje de frecuencias  $\omega$ . Todo esto concuerda con lo esperado, al considerar la ecuación 3; en esta ecuación, el término del numerador en el péndulo de Pohl corresponde a la división entre la fuerza o torque ejercido ( $F_0$ ) por el motor conectado al péndulo y el momento de inercia del péndulo ( $I$ ).

Para conocer la frecuencia de resonancia, es necesario hacer primero un ajuste a la curva de los datos que se tienen en la gráfica 6 para cada corriente, haciendo uso de la ecuación 3, de la cual ya se conoce tanto  $w_0$  como la respectiva constante de amortiguamiento  $\delta$  para cada corriente. Este ajuste se realiza por el método de mínimos cuadrados, implementado en la función `curve_fit()` de la librería `SciPy` de Python, en el que la tolerancia está fijada en  $1e-8$ . Los resultados del ajuste se encuentran en la tabla 3.

Corriente [A]	$F/I$	$R^2$ por ajuste
0	1.56	0.97
0.2	2.99	0.98
0.4	4.95	0.90
0.6	5.31	0.94

Cuadro 3: Resultados del ajuste de  $A$  vs  $\omega$  para cada valor de corriente.

Se observa que, en general, se obtuvieron buenos ajustes a los datos experimentales, siendo el  $R^2$  más bajo de 0,90, lo cual indica que posiblemente hubo alguna falla al momento de tomar los datos correspondientes con corriente de  $0,4[A]$ . La gráfica que muestra el resultado de estos ajustes es la que sigue a continuación (figura 7).

Ahora, para hallar la frecuencia de resonancia  $\omega_r$ , es necesario hallar el punto de amplitud máxima, lo cual se hace derivando la función e igualándola a cero, para posteriormente utilizar el método de Newton-Raphson para hallar la raíz de esa derivada.

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = 0$$

El método de Newton-Raphson se encuentra implementado en Python, con una tolerancia de  $1,48e-08$ . Además de esto, es posible calcular la frecuencia de resonancia en la amplitud esperada a partir de los valores de frecuencia natural

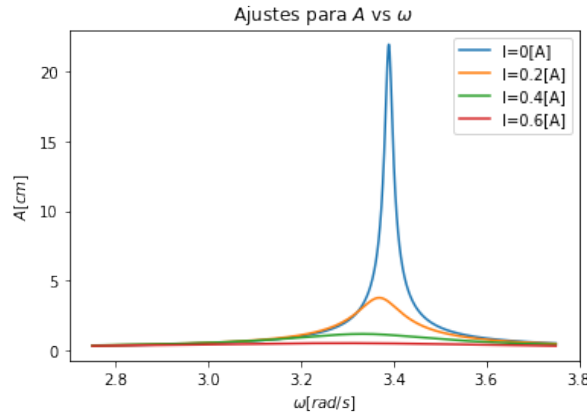


Figura 7: Ajuste de amplitud vs frecuencia.

$\omega_0$  y constante de amortiguamiento  $\delta$ , haciendo uso de la ecuación 4. La comparación entre ambas formas de hallar la frecuencia de resonancia se encuentra condensada en la tabla 4, en donde se calcula un porcentaje de error considerando la  $\omega_r$  obtenida a partir de la ecuación 4 como valor "teórico". El porcentaje de error se calcula así:

$$\%E = \left| \frac{V_{teo} - V_{exp}}{v_{teo}} \right| * 100$$

Corriente [A]	$\omega_r$	$\omega_r$ por ajuste	%E
0	3.3896	3.3895	0.15
0.2	3.3889	3.3888	1.26
0.4	3.3820	3.3819	3.11
0.6	3.3548	3.3472	3.05

Cuadro 4: Resultados de  $\omega_r$  y comparación.

Como se dijo previamente, se ve que la frecuencia de resonancia, es decir, el máximo de amplitud, se desplaza ligeramente hacia la izquierda con mayor resonancia. Aparte de esto, el ajuste realizado permitió calcular con bastante exactitud la frecuencia de resonancia, que concuerda con lo esperado para todos los valores de corriente posibles.

## 5. Conclusiones

De todo lo realizado previamente se pueden obtener algunas conclusiones importantes. Primeramente, cuando se trata de un MAA, es importante saber qué tan amortiguado está el movimiento, ya que esto será lo que determine si el sistema alcanza a oscilar o si, por otro lado, la constante de amortiguamiento es tan grande que alcanzó a llegar al régimen crítico o sobreamortiguado. Dentro del movimiento subamortiguado, se pudo analizar el decaimiento logarítmico y su relación con la constante de amortiguamiento y el periodo, de tal forma que se comprobó que a partir de esta ecuación se puede obtener la constante de amortiguamiento de forma confiable, con resultados muy similares a si se hiciera por medio de un ajuste lineal.

Por otro lado, para el MAF se evidenció el efecto que tiene la frecuencia de resonancia en un sistema y lo importante que puede llegar a ser debido al gran incremento en amplitud que se presenta. Además fue posible calcular esta por medio de un ajuste teniendo en cuenta los datos registrados en la práctica de laboratorio.

Las oscilaciones presentan muchas características las cuales pueden ser estudiadas detalladamente para comprender el fenómeno en su totalidad, el péndulo de Pohl permitió ampliar un poco esa visión acerca de las oscilaciones amortiguadas y forzadas.

## Referencias

- [1] M. Flores and M. Sanchez. *Proyecto i4. Estudio de la amplitud de oscilaciones armónicas amortiguadas y forzadas*, 2017.
- [2] Movimiento oscilatorio.  
Tomado de [http://laplace.us.es/wiki/index.php/Movimiento\\_oscilatorio](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Movimiento_oscilatorio).
- [3] El péndulo giratorio de pohl.  
Tomado de <https://cutt.ly/UZSM9Cz>.
- [4] Corrientes de foucault.  
Tomado de <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/induccin/foucault/foucault.htm>.
- [5] Oscilaciones forzadas, 2012.  
Tomado de [http://laplace.us.es/wiki/index.php/Oscilaciones\\_forzadas\\_\(GIE\)](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Oscilaciones_forzadas_(GIE)).
- [6] Oscilador forzado y resonancia.  
Tomado de <https://www.ehu.es/acustica/espanol/basico/osfoes/osfoes.html>.

## 6. Anexos

La hoja de cálculo con los datos así como el código utilizado para el tratamiento de los mismos se encuentra en el siguiente enlace: [Github Lab 3](#).

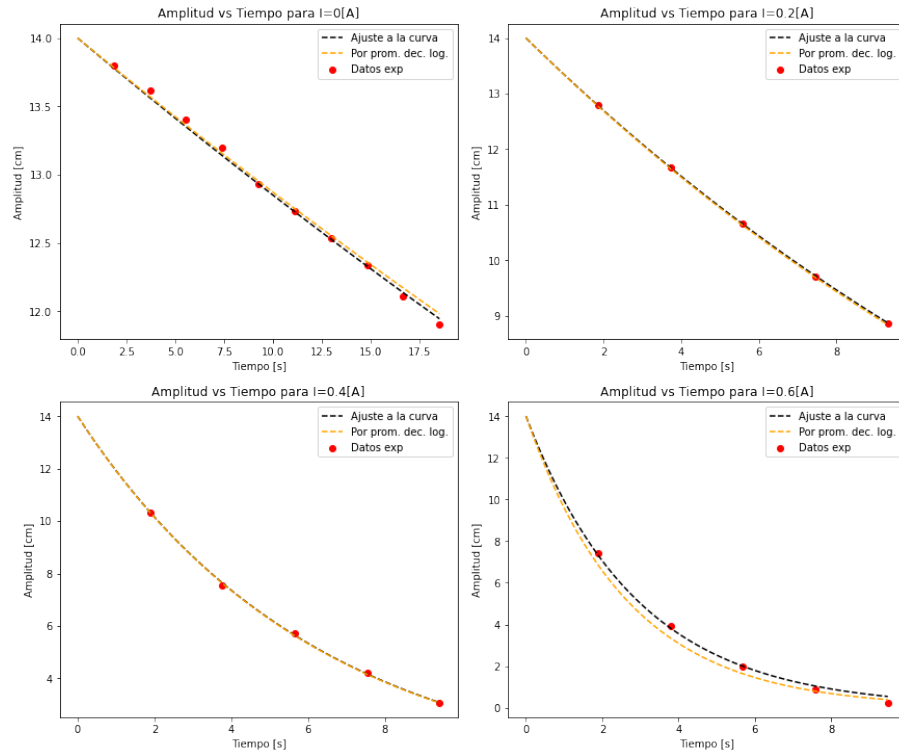


Figura 8: Comparación entre los dos métodos utilizados para calcular la constante de amortiguamiento

Fase 2

Fase 3

Fase 4

Amplitud inicial	14		
Corriente [A]	0		
Ciclo	$A_1$	$A_2$	$A_3$
1	13.8	13.8	13.8
2	13.6	13.6	13.65
3	13.4	13.4	13.4
4	13.2	13.2	13.2
5	12.8	13	13
6	12.6	12.8	12.8
7	12.4	12.6	12.6
8	12.2	12.4	12.4
9	12	12.2	12.12
10	11.8	12.1	11.8

Cuadro 5: Datos de la fase 2 para bobinas sin corriente

Amplitud inicial	14								
Corriente [A]	0.2			0.4			0.6		
Ciclo	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_1$	$A_2$	$A_3$
1	12.8	12.8	12.8	10.2	10.4	10.4	7.4	7.4	7.4
2	11.8	11.6	11.6	7.4	7.8	7.4	3.8	4	4
3	10.8	10.6	10.6	5.6	5.8	5.8	2	2	2
4	9.8	9.6	9.7	4.2	4.2	4.2	0.8	0.8	1
5	9	8.8	8.8	3.1	3.1	3	0.1	0.3	0.3

Cuadro 6: Datos de la fase 2 para bobinas con diferentes valores de corriente

Amplitud inicial	14		
Corriente [A]	0		
Tiempo [s]	$t_1$	$t_2$	$t_3$
10 oscilaciones	18.23	18.56	18.82

Cuadro 7: Datos de la fase 3 para bobina sin corriente

Amplitud inicial	14								
Corriente [A]	0.2			0.4			0.6		
Tiempo [s]	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_1$	$t_2$	$t_3$
5 oscilaciones	9.30	9.32	9.34	9.38	9.41	9.44	9.46	9.47	9.50

Cuadro 8: Datos de la fase 3 para bobinas con diferentes valores de corriente

Corriente = 0 [A]	
Tiempo 10 oscilaciones	A
23.74	0.3
23	1.2
22.6	2.5
18.89	3.5
18.58	20
18.7	7.2
15.75	2.5
13.56	0.3

Cuadro 9: Datos de la fase 4 para bobina sin corriente

Corriente = 0,2 [A]	
Tiempo 10 oscilaciones	A
20.73	2
19.48	4.4
17.74	4.6
18.59	8.8
17.41	1.59
17	1
15.52	0.5
13.39	0.3

Cuadro 10: Datos de la fase 4 para bobina con corriente de 0.2 [A]

Corriente = 0,4 [A]	
Tiempo 10 oscilaciones	A
24.86	1.7
22.36	1.6
18.65	4.8
21.44	2.4
17.79	2.6
17.44	2.3
15.29	0.9
13.38	0.6

Cuadro 11: Datos de la fase 4 para bobina con corriente de 0.4 [A]



<b>Corriente = 0,6 [A]</b>	
<b>Tiempo 10 oscilaciones</b>	<b>A</b>
25.15	1
21.03	1.8
19.92	2
18.83	2.1
18.4	2
16.63	1.1
15.89	0.8
13.23	0.4

Cuadro 12: Datos de la fase 4 para bobina con corriente de 0.6 [A]