Aplicación de Interpolación de Lagrange y Diferencias Divididas para predecir el cambio del número de familias en Zliten

Omar Ali Aleyan*

Brayan Rodolfo Barajas Ochoa
2170688

Análisis Numérico
UIS
2020

*Al-Mergib University, Faculty of Education, Department of Mathematics, Zliten, Libya.

Resumen

En este documento se pretende aplicar la interpolación a un caso práctico para determinar una función que modele el número de familias en Zliten aplicando la interpolación, teniendo en cuenta los datos que se tienen de acuerdo al año y número de familias, tomando esta información como x y f(x) respectivamente.

Esto se realiza mediante interpolación, tanto por Lagrange como por diferencias divididas de Newton, lo cual se explicará con detalle más adelante. Estos métodos permiten obtener una función polinomial la cual pasa por los puntos dados.
Con esto, es posible obtener además una estimación a futuro del número de familias en un futuro próximo.

Los resultados obtenidos son satisfactorios, en cuanto fue posible hacer una comparación entre los resultados de cada interpolación, notándose la similitud entre ambas con muy poca diferencia en los resultados obtenidos de cada una. Además se hace uso de las funciones obtenidas para intentar estimar valores en un futuro cercano.

Interpolación

Lagrange

Dado un conjunto de k + 1 puntos: (x_o,y_o), ..., (x_k,y_k) donde todos los x_j se asumen distintos; la fórmula general del polinomio de Lagrange de define como:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x).y_i$$

Donde cada polinomio $l_i(x)$ está definido por:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{m=0 \\ m\neq i}}^{n} \frac{x-x_m}{x_i-x_m}$$

Diferencias Divididas - Newton

Dada una colección de n puntos de x y sus imágenes f(x), se pueden calcular los coeficientes del polinomio interpolante utilizando las siguientes expresiones:

1^{ra} DDF	$f(x_i,x_j) = \frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}$
2^{ra} DDF	$f(x_i,x_j,x_k) = \frac{f[x_i,x_j]-f[x_j,x_k]}{x_i-x_k}$
La *n-ésima* DDF	$f(x_n,x_{n-1},\dots,x_1,x_0) = \frac{f[x_n,x_{n-1},\dots x_1]-f[x_{n-1},x_{n-2},\dots,x_0]}{x_n-x_0}$

El polinomio estará dado por:

$$P_n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

Donde $a_k = f[x_0,x_1,\dots,x_k]$

Caso Práctico

Se tienen los datos de diferentes años obtenidos de la oficina de registros civiles:

Year	2007	2009	2011	2013
Families groups -No	37595	41087	44231	48696

Se quiere obtener una función que modele la cantidad de familias por año, por lo que se realiza interpolación. Para simplificar las operaciones en ambos métodos, se toma el año 2007 como x =1, el año 2009 como x=2 y así sucesivamente. El número de familias es f(x).

Lagrange

Realizando las operaciones correspondientes, se obtiene que:

$$L_0(x) = \frac{-1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{3}x + 4$$

$$L_1(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - \frac{19}{2}x - 6$$

$$L_2(x) = \frac{-1}{2}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 7x + 4$$

$$L_3(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 - \frac{11}{6}x - 1$$

De tal modo que:

$$P_3(x) = \frac{1669}{6}x^3 - 1843x^2 + \frac{42443}{6}x + 32086$$

Diferencias Divididas - Newton

Realizando el proceso de diferencias divididas se obtiene:

Year	Families-groups-No	1DD	2DD	3DD
2007	37595			
		3492		
2009	41087		-174	
		3144		-278.2
2011	44231		660.5	
		4465		
2013	48696			

De tal modo que:

$$P_3(x) = \frac{1}{5}[1391x^3 - 9216x^2 + 35371x + 160429]$$

Conclusiones

Al obtener los respectivos polinomios de cada método y comparar resultados obtenidos en algunos años posteriores como por ejemplo:

- En el año 2019:

    Con el polinomio de Lagrange, $P_3(7) = 86707$
    Con el polinomio de Newton, $P_3(7) = 86711$

- En el año 2020:

    Con el polinomio de Lagrange, $P_3(7.5) = 98823$
    Con el polinomio de Newton, $P_3(7.5) = 98828$

Se puede apreciar que las respuestas son casi idénticas, por lo que estos dos métodos modelan los datos de una forma muy parecida. Además es importante destacar que estas aproximaciones obtenidas mediante los polinomios irán perdiendo precisión a medida que se alejen de los puntos utilizados para realizar el método.