Febrero 26/2020

Brayan Rodolfo Barajas Ochoa Código:2170688 Análisis Numérico

LAB 9. QUADRATURE.

3.1. Understanding

- Describe what a quadrature formula is.
  La integración numérica o fórmula de cuadratura es aquella que permite aproximar la integral definida de una función $f(x)$ en un intervalo definido [a,b] al evaluar $f(x)$ en una cantidad finita de puntos.
  Esta fórmula se define como:
$$Q[f] = \sum_{k=0}^{M} w_k * f(x_k) = w_0 * f(x_0) + w_1 * f(x_1) + \cdots + w_M * f(x_M)$$
  Con la propiedad de que:
$$\int_a^b f(x) = Q[f] + E[f]$$
  $\{x_k\}_{k=0}^{M}$ se definen como los nodos de la cuadratura. Estos se toman dependiendo de la cuadratura a aplicar; si es trapezoidal, de Simpson o de Boole, los nodos se toman equidistantes entre sí.

- What is the degree of precision of a quadrature formula?
  El grado de precisión de una fórmula de cuadratura es el entero positivo *n* tal que $E[P_i] = 0$ para todos los polinomios P_i de aproximación de grado $i \leq n$, pero para el que $E[P_{n+1}] \neq 0$.
  Teniendo en cuenta la definición de la derivada en la que si se deriva n+1 veces un polinomio de grado i donde i<=n, esta dará 0; pero si se deriva el mismo número de veces que el grado del polinomio será $P_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)! * a_{n-1}$. Por tanto, el error de truncamiento se puede definir como
$$E[f] = K * f^{(n+1)}(c)$$
  Donde K es una constante ajustada y n es el grado de precisión.

- Find the Simpson's rule based on the Lagrangian polynomial interpolation.
  Partiendo del polinomio de Lagrange $P_M(x)$ basado en $x_0, x_1, \ldots, x_M$ que se puede usar para aproximar:
$$f(x) \approx P_M(x) = \sum_{k=0}^{M} f_k * L_{M,k}(x)$$
  Una aproximación de la integral es posible al reemplazar la función por el polinomio
$$\int_a^b P_M(x) = \sum_{k=0}^{M} \left(\int_{x_0}^{x_M} L_{M,k}(x)dx \right) f_k = \sum_{k=0}^{M} w_k * f(x_k)$$

Febrero 26/2020

Brayan Rodolfo Barajas Ochoa Código:2170688 Análisis Numérico

LAB 9. QUADRATURE.

Tomando el caso de M=2, se tiene que:

$$P_2(x) = f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Como f0, f1 y f2 son constantes, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \quad &\approx \quad f_0 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}dx + f_1 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}dx \\ &\quad + f_2 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}dx.\end{aligned}$$

Ahora se hace la sustitución $x = x_0 + ht$, en donde los nuevos límites son t=0 y t=2

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \quad &\approx \quad f_0 \int_0^2 \frac{h(t-1)h(t-2)}{(-h)(-2h)} h\,dt + f_1 \int_0^2 \frac{h(t-0)h(t-2)}{(h)(-h)} h\,dt \\ &\quad + f_2 \int_0^2 \frac{h(t-0)h(t-1)}{(2h)(h)} h\,dt \\ &= f_0 \frac{h}{2} \int_0^2 (t^2-3t+2)\,dt - f_1 h \int_0^2 (t^2-2t)dt + f_2 \frac{h}{2} \int_0^2 (t^2-t)\,dt \\ &= f_0 \frac{h}{2} \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t\right)_{t=0}^{t=2} - f_1 h \left(\frac{t^3}{3} - t^2\right)_{t=0}^{t=2} \\ &\quad + f_2 \frac{h}{2} \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)_{t=0}^{t=2} \\ &= f_0 \frac{h}{2}\left(\frac{2}{3}\right) - f_1 h \left(\frac{-4}{3}\right) + f_2 \frac{h}{2}\left(\frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2$$