

Cinematica

Il mondo, con tutto quello che contiene, si muove rispetto al resto dell'Universo. Anche ciò che in apparenza è immobile, come una strada, in realtà si muove con la rotazione della Terra, con l'orbita della Terra intorno al Sole, con l'orbita del Sole intorno al centro della Via Lattea, e con la migrazione della nostra galassia rispetto alle altre galassie.

La classificazione dei moti è chiamata **cinematica**. Ed è una parte della Dinamica

La cinematica studia il moto dei corpi senza occuparsi delle cause che lo hanno generato.

Per la trattazione del moto, cominciamo col considerare un oggetto le cui dimensioni possano essere trascurate e la cui posizione possa essere descritta localizzando un punto: parleremo di **punto materiale**.

Le tre grandezze fisiche fondamentali in cinematica sono:

$$\begin{array}{lll} \text{Spazio} \longrightarrow [m] & \text{Velocità} \longrightarrow \left[\frac{m}{s} \right] & \text{Accelerazione} \longrightarrow \left[\frac{m}{s^2} \right] \end{array}$$

Moto di un punto materiale

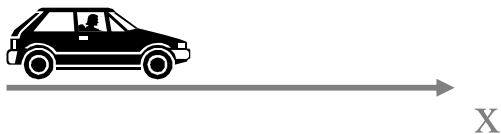
Per la trattazione del moto, cominciamo col considerare un oggetto le cui dimensioni possano essere trascurate e la cui posizione possa essere descritta localizzando un punto: parleremo di **punto materiale o particella**

Per descrivere il moto di una particella è necessario conoscerne, **in funzione del tempo** e in un opportuno sistema di riferimento (visto il problema si *decide per prima cosa il migliore sistema di riferimento*):

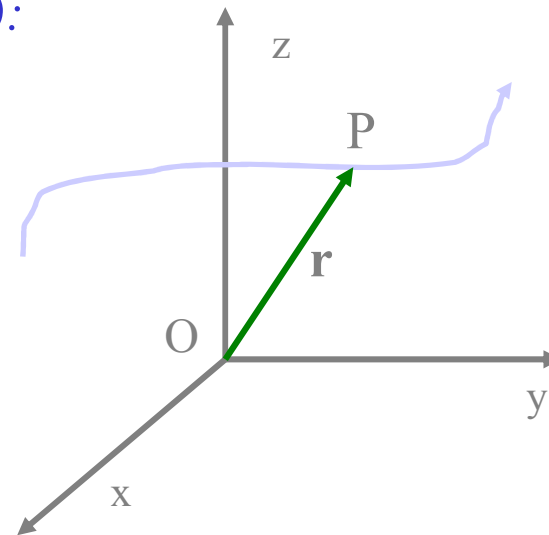
spostamento

velocità

accelerazione



Moto unidimensionale

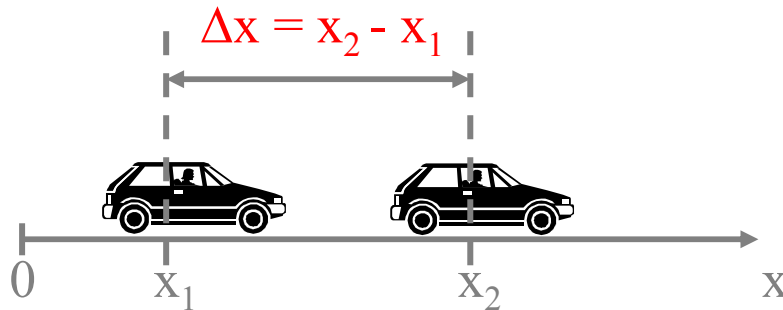


Moto nello spazio tridimensionale

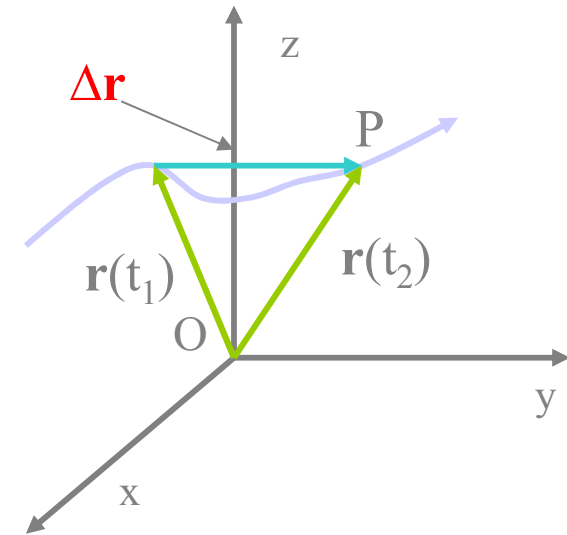
Posizione e spostamento

Moto **unidimensionale**: supponiamo che la nostra particella (in questo caso un'automobile) sia nella posizione x_1 in un certo istante t_1 e nella posizione x_2 in un certo istante successivo t_2 .

La **variazione di posizione** della particella, $x_2 - x_1$, è chiamata **spostamento** della particella.



Nel caso di un moto in **due** o **tre dimensioni**, **non** è detto che lo **spostamento** coincida con la **traiettoria**, definita come l'insieme dei punti successivamente occupati dalla particella.



Velocità media

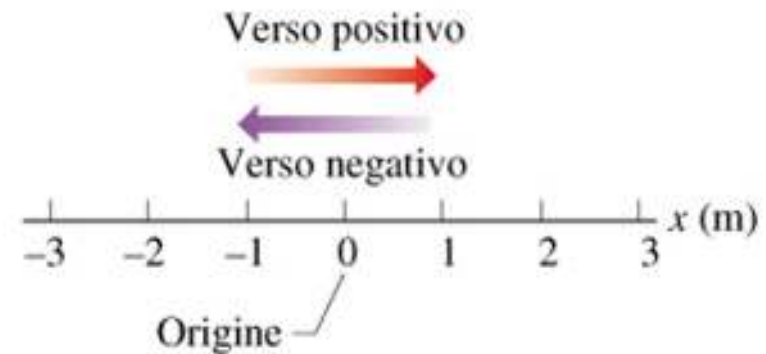
Definiamo **velocità (scalare) media** del punto materiale P il **rapporto** fra lo spostamento Δx compiuto in un intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ e l' **intervallo di tempo stesso**.

$$v_{\text{media}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

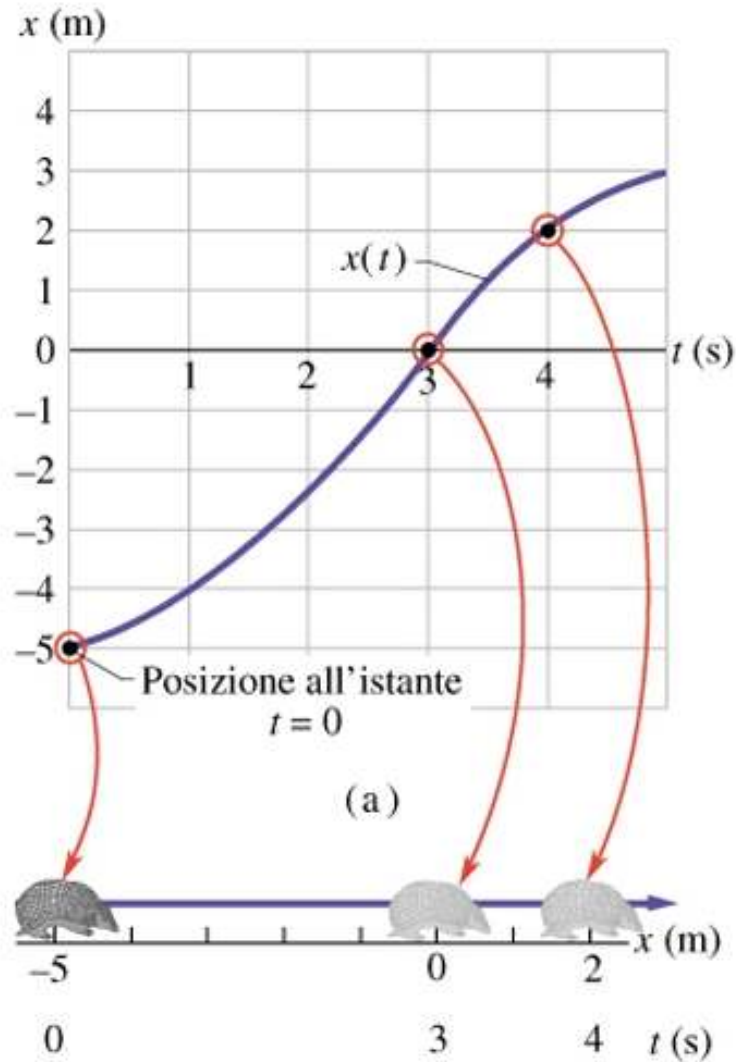
L'**unità** di misura SI è il **m/s**.

$$1 \text{ Km/ora} \rightarrow 1000/3600 \text{ m/s} \rightarrow 1/3,6 \text{ m/s} = 0.278 \text{ m/s}$$

Si noti che lo **spostamento e la velocità media** possono essere **positivi o negativi**, a seconda che x_2 sia maggiore o minore di x_1 : un valore positivo indica un moto verso **destra** e un valore negativo un moto verso **sinistra**. Δx e v hanno lo stesso segno ($\Delta t > 0$ sempre)

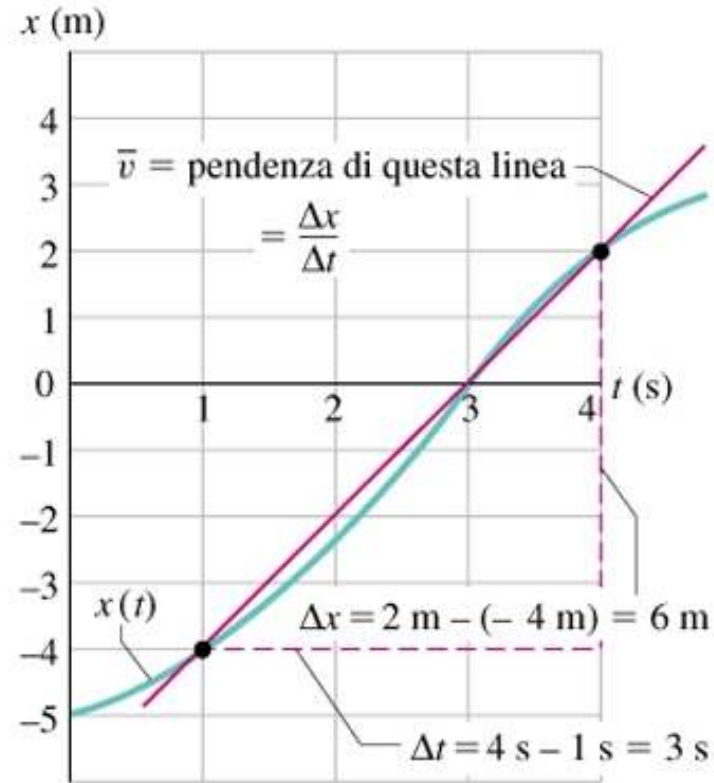


Grafici di x in funzione di t per una particella che si muove in una dimensione.



A. Romero

Il punto iniziale P_1 e quello finale P_2 sono congiunti da un segmento rettilineo; la **velocità media** è la pendenza $\Delta x / \Delta t$ di questo segmento e dipende dall'intervallo di tempo considerato.



Fisica dei Beni Culturali-Cinematica

5

Velocità istantanea

Velocità media ha poco interesse. V_m tra casa-scuola-casa è nulla anche se c'è movimento. Definiamo **velocità (scalare) istantanea** del punto materiale P il **rapporto** fra lo **spostamento** compiuto in un **intervallo di tempo** $\Delta t = t_2 - t_1$ e **l'intervallo di tempo** stesso quando l'intervallo di tempo $\Delta t \rightarrow 0$ (**derivata** di x rispetto a t)

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{pendenza della tangente al grafico di } x \text{ in funzione di } t$$

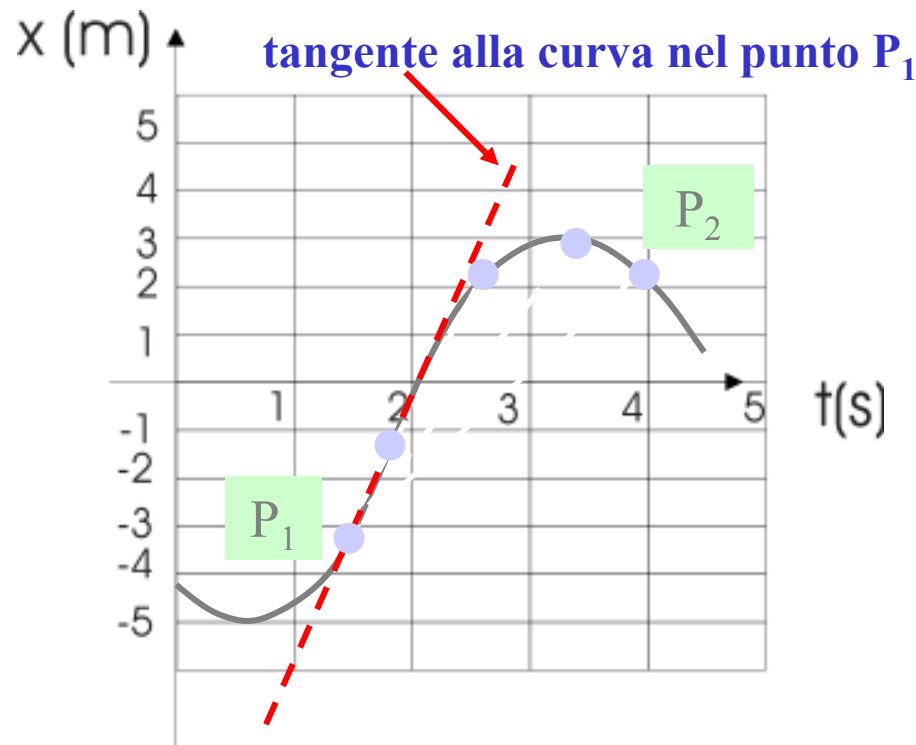


Grafico di x in funzione di t .

Al diminuire dell'intervallo di tempo avente come istante iniziale t_1 , la velocità media relativa all'intervallo **tende** alla **pendenza** della retta **tangente** alla curva nell'istante t_1 .

La **velocità istantanea** è, per definizione, la **pendenza di questa retta**. Dal **grafico** si capisce immediatamente il **segno di v**

Cinematica: posizione e spostamento

Esempi:

Velocità media di un centometrista: $\frac{100 \text{ m}}{10 \text{ s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Velocità di fuga dalla terra: $40320 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 40320 \cdot \frac{1 \cdot \text{km}}{1 \cdot \text{h}} = 40320 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 11200 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,12 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Velocità della luce nel vuoto: $300000 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 300000000 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Generalizzazione: si studieranno fenomeni in cui si prenderanno in considerazione altre grandezze fisiche che variano nel tempo con una certa velocità; anche in questo caso si intenderà la rapidità con cui cambia una grandezza fisica nel tempo.

Esempi:

Velocità di formazione di una patina su una superficie

$$V_{\text{patina}} = \frac{\Delta \text{spessore}}{\Delta t}$$

Velocità di riscaldamento di una soluzione chimica

$$V_{\text{riscaldamento}} = \frac{\Delta \text{Temperatura}}{\Delta t}$$

Accelerazione media

Quando la velocità istantanea di una particella varia nel tempo si dice che la particella **accelera**. L'accelerazione è **la rapidità di variazione della velocità**.

Può essere **positiva o negativa** (**decelerazione**)

L'accelerazione media per un particolare intervallo di tempo Δt è definita come il rapporto $\Delta v / \Delta t$:

$$a_{\text{media}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{\Delta t}$$

L'unità di misura SI per l'accelerazione è il m/s^2 .

Accelerazione istantanea

L'accelerazione istantanea è il limite a cui tende l'accelerazione media quando Δt tende a zero:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{pendenza della tangente al grafico di } v(t)$$

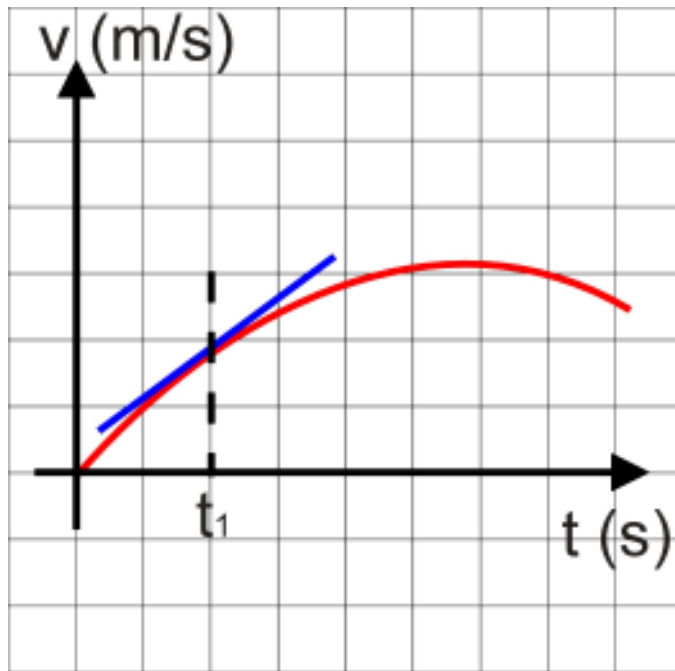


Grafico di v in funzione di t ;

è stata tracciata una retta tangente alla curva all'istante t_1 .

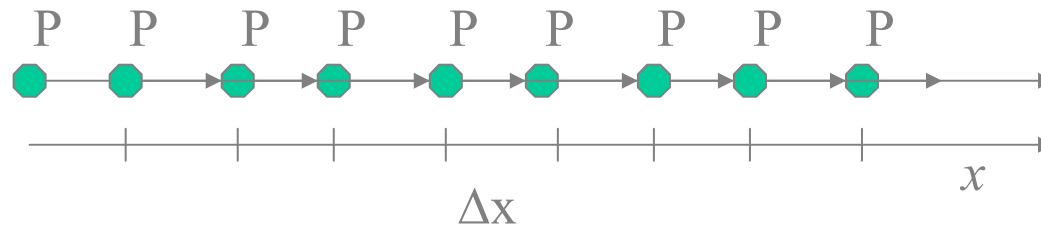
L'**accelerazione** istantanea ad un certo istante è la **pendenza** della retta tangente alla curva in quell'istante.

cioè la **derivata di v rispetto a t** ovvero la **derivata seconda di x rispetto a t**

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Moto rettilineo uniforme

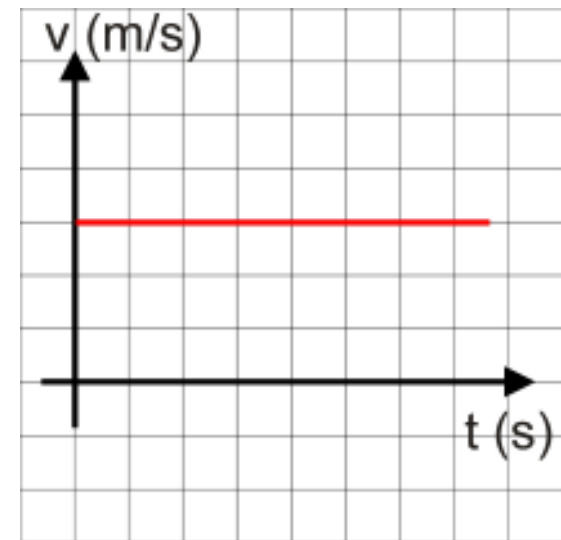
Un caso particolare si ha quando il **moto** avviene lungo una **retta**. In questo caso possiamo sempre scegliere un **sistema di riferimento** con un **asse** coincidente con la **direzione del moto** (i pallini indicano la posizione a intervalli di tempo uguali).



Il caso più **semplice** di **moto unidimensionale** è il **moto rettilineo uniforme**, in cui il punto materiale ha **velocità costante**.

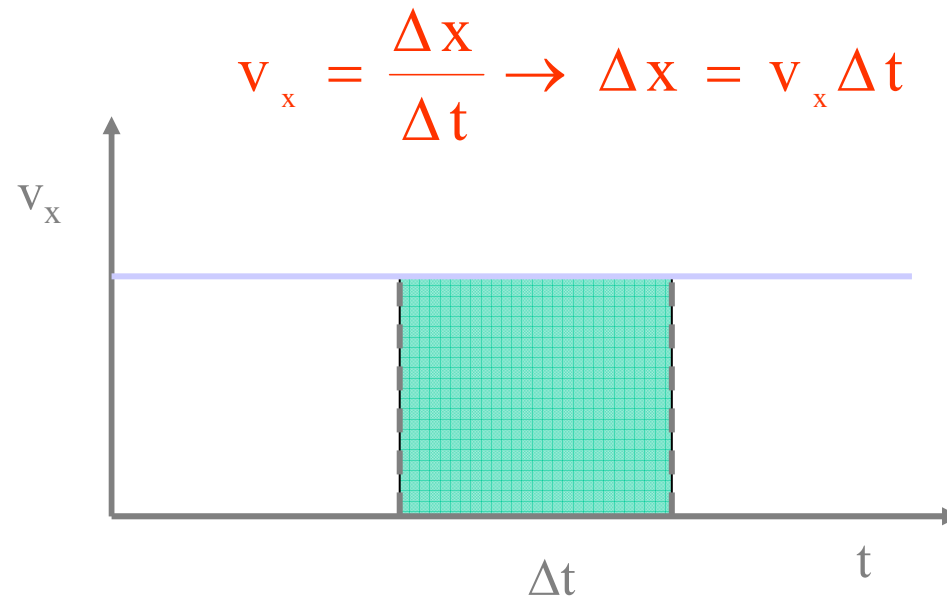
velocità istantanea e velocità media coincidono e l'accelerazione è nulla:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{costante} \rightarrow \text{accelerazione} = 0$$



Moto rettilineo uniforme

Diamo un'interpretazione grafica dell'espressione per lo spazio percorso in funzione di Δt :



Lo spazio percorso Δx è pari all'area sottesa dalla curva che esprime la velocità in funzione del tempo (in questo caso una retta parallela all'asse t).

Cinematica: moto rettilineo uniforme

Il caso più semplice di moto è quello rettilineo uniforme. In questo caso il moto avviene lungo una retta con velocità costante.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{costante}$$

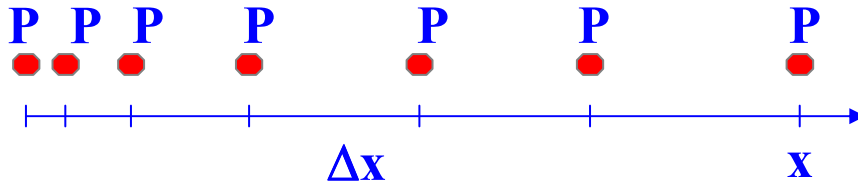
Esempio:

Supponendo in prima approssimazione che l'autostrada Torino-Piacenza sia rettilinea e viaggiando di moto rettilineo uniforme con velocità di 100 km/h, quanto tempo ci vorrà per compiere il tragitto che è di circa 160 km?

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \longrightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta x}{v}$$

$$\Delta t = \frac{160 \frac{km}{h}}{100 \frac{km}{h}} = 1,6 \, h = 1,6 \cdot 60 \, \text{min} = 96 \, \text{min}$$

Moto uniformemente accelerato



Un altro caso notevole di moto unidimensionale è il moto **uniformemente accelerato**, in cui **l'accelerazione è costante**.

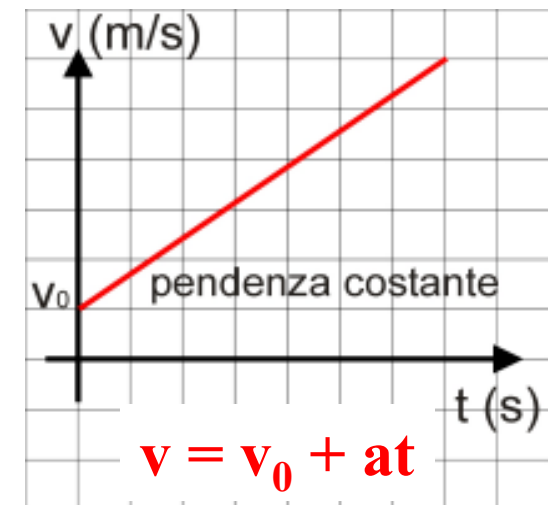
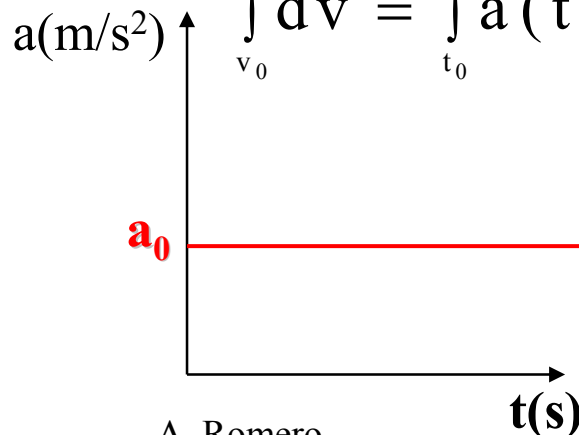
- **accelerazione istantanea e accelerazione media coincidono**
- **la velocità varia linearmente con il tempo.**

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = a_0 = \text{costante}$$

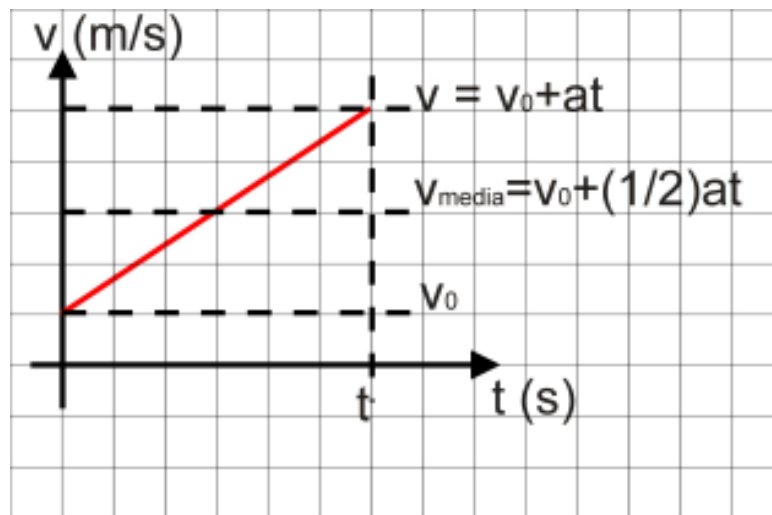
$$\int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a(t) dt \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt$$

↓

$$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0)$$

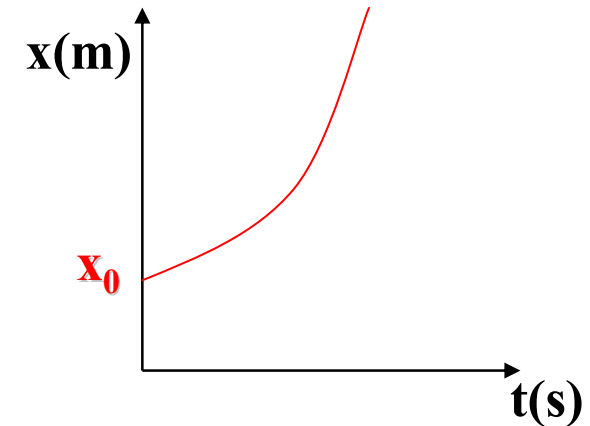


Moto con accelerazione costante



velocità media

spazio



Ricaviamo la legge oraria del **moto uniformemente accelerato**

$$a(t)=a_0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 + a_0(t - t_0)$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v(t) dt \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [v_0 + a_0(t - t_0)] dt = \int_{t_0}^t v_0 dt + \int_{t_0}^t a_0(t - t_0) dt$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0(t - t_0)^2 \quad \Downarrow \quad \text{Se } t_0=0: \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

Riassumendo: VELOCITÀ e SPAZIO con **a** costante

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

Operando con un'ulteriore integrazione ho la funzione spazio:
Ogni volta che integro devo dare conoscere il valore di una variabile ad un dato istante (condizione iniziale)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (v_0 + at) dt$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Velocità e spazio nel moto ad accelerazione costante

(assumendo che l'istante iniziale sia $t = 0$, ricavo il tempo dalla)

$$v(t) = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{v(t) - v_0}{a} \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow$$

Sostituendo il tempo \rightarrow $x(t) = x_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} \cancel{a} \frac{(v - v_0)^2}{\cancel{a}} \Rightarrow$

$$a(x - x_0) = v_0 v - v_0^2 + \frac{1}{2}(v^2 - 2vv_0 + v_0^2) \Rightarrow$$

$$a(x - x_0) = \cancel{v_0 v} - v_0^2 + \frac{v^2}{2} - \cancel{v v_0} + \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow a(x - x_0) = -v_0^2 + \frac{v^2}{2} + \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow$$

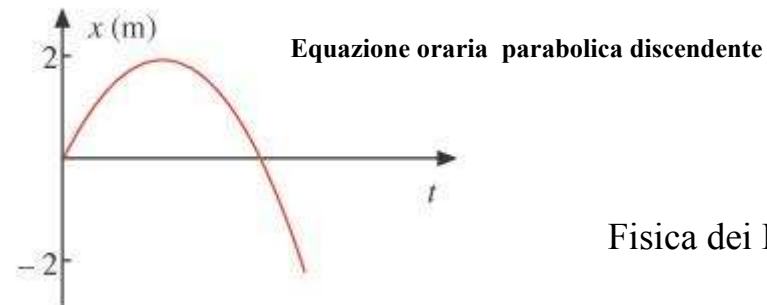
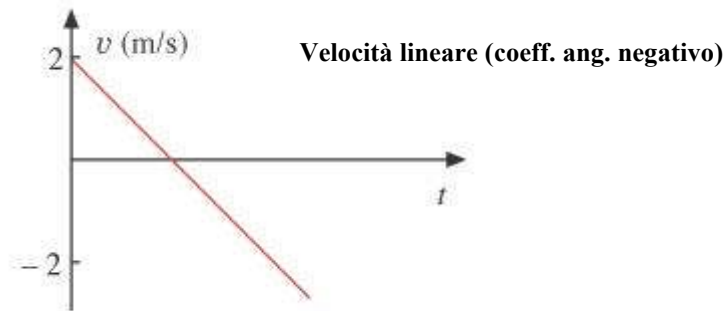
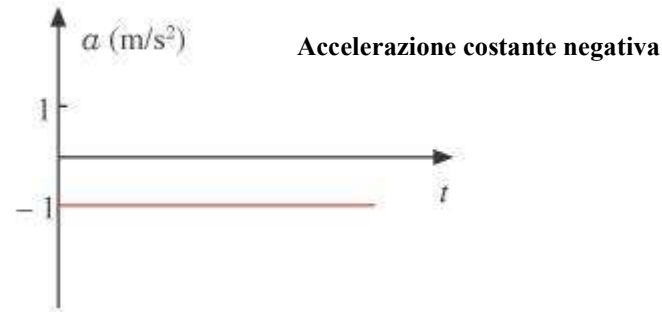
$$a(x - x_0) = +\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow 2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

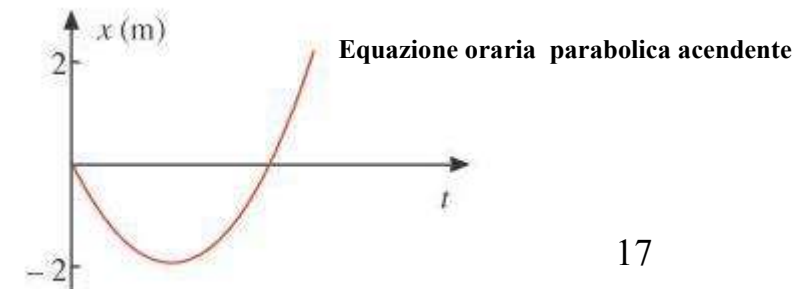
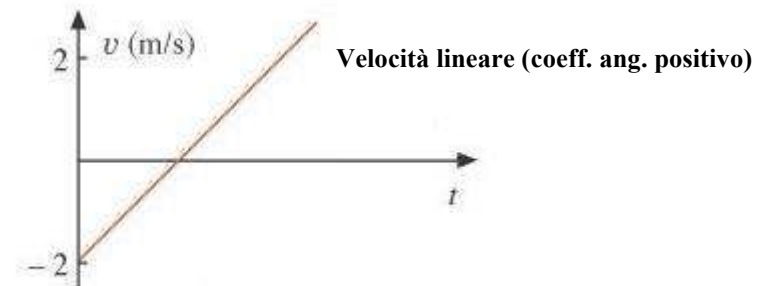
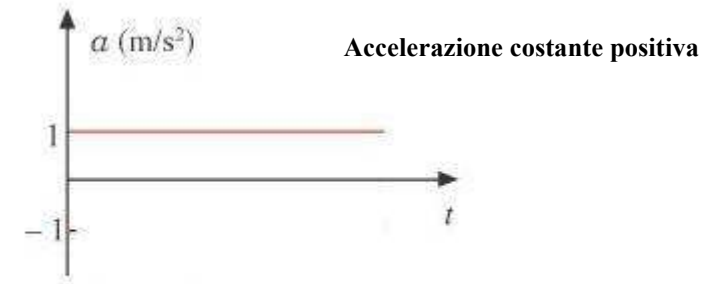
Grafici di Spazio, Velocità e Accelerazione

Moto uniformemente accelerato

$$\begin{aligned} a &= -1 \text{ m/s}^2 \\ v_0 &= 2 \text{ m/s}, \\ x_0 &= 0 \text{ m} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a &= 1 \text{ m/s}^2 \\ v_0 &= -2 \text{ m/s}, \\ x_0 &= 0 \text{ m} \end{aligned}$$



Cinematica: moto uniformemente accelerato

Esempio:

Un'auto si porta da 0 a 100 km/h in 1,5 secondi (dragster). Qual è l'accelerazione impartita al veicolo supponendo un'accelerazione costante (moto uniformemente accelerato)?



In questo caso avremo:

$v_0 = \text{velocità iniziale dell'oggetto} = 0$ \Rightarrow L'auto parte da ferma, cioè con velocità nulla

Per cui l'equazione del moto si riduce a:

$$v = a \cdot t$$

$$\Rightarrow \frac{v}{t} = a$$

$$a = \frac{v}{t} = \frac{100 \cdot \frac{\text{km}}{\text{h}}}{1,5 \cdot \text{s}} = \frac{100 \cdot \frac{1000 \cdot \text{m}}{3600 \cdot \text{s}}}{1,5 \cdot \text{s}} = \frac{100 \cdot 1000}{3600 \cdot 1,5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 18,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

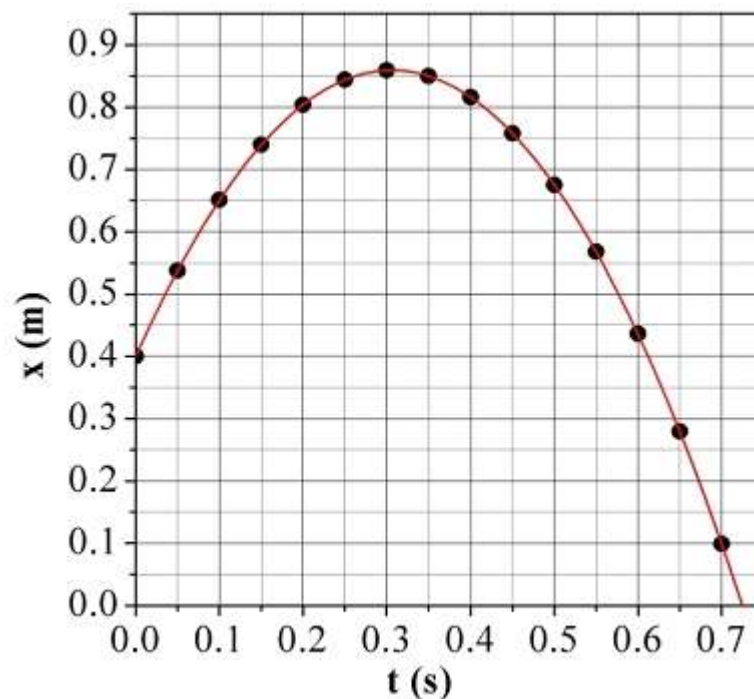
Esempio di diagramma orario

E' il **grafico della posizione in funzione del tempo**. In figura ne è riportato un esempio, ottenuto dall'**equazione oraria** (x in metri, t in secondi):

$$x(t) = 0.40 + 3t - 4.9t^2$$

Attribuendo dei valori arbitrari al tempo t, sono stati calcolati i corrispondenti valori di x, ottenendo così una **tabella oraria**. Riportando in grafico i valori della tabella, abbiamo ottenuto il **diagramma orario del moto in questione**.

t (s)	x (m)
0.00	0.40
0.05	0.54
0.10	0.65
0.15	0.74
0.20	0.80
0.25	0.84
0.30	0.86
0.35	0.85
0.40	0.82
0.45	0.76
0.50	0.68
0.55	0.57
0.60	0.44
0.65	0.28
0.70	0.10



Per confronto con l'equazione:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

notiamo che in questo caso:

$$x_0 = 0.40 \text{ m}$$

$$v_0 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a = -9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Moto in caduta libera

Un caso particolare di **moto uniformemente accelerato** è quello di un **oggetto che cade** in prossimità della superficie terrestre (trascuriamo la resistenza dell'aria). In questo caso sappiamo dagli esperimenti che **l'accelerazione** (detta **g**) è sempre rivolta verso la superficie terrestre (direzione e verso costanti) e il suo modulo è pure con buona approssimazione costante.

- g **non dipende dalla natura dei corpi** (ferro, alluminio, legno, ecc.) e dalla loro forma ;
- all'interno di un volume limitato (il laboratorio), g non dipende dalla posizione del corpo;
- g è anche **indipendente dal tempo** (costante);
- se il volume non è limitato:
 - g dipende dalla quota
 - g dipende dalla latitudine: è più grande ai poli, ed è più piccola all'equatore
 - alle nostre latitudini g vale circa **$g = 9.81 \text{ m/s}^2$** .

Moto in caduta libera

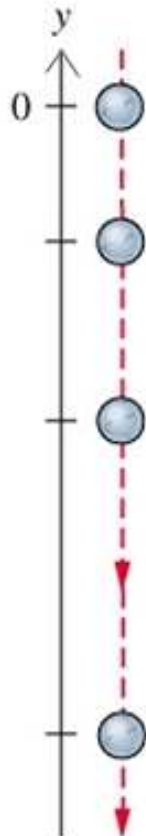
Un oggetto cade liberamente partendo da fermo. Determinare la posizione e la velocità del corpo dopo 1s, 2s, 3s.

Scegliamo il punto di partenza del corpo come **origine** ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$); la velocità iniziale è nulla e l'accelerazione è quella di gravità (rivolta nella direzione $-y$). Per trovare la posizione in funzione del tempo usiamo:

$$y = \cancel{y_0} + \cancel{v_{0,y}}t - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}gt^2$$

Per trovare la velocità ad un certo istante t usiamo e teniamo conto che $v_{0y} = 0$

$$v_y = v_{0,y} + at = -gt$$



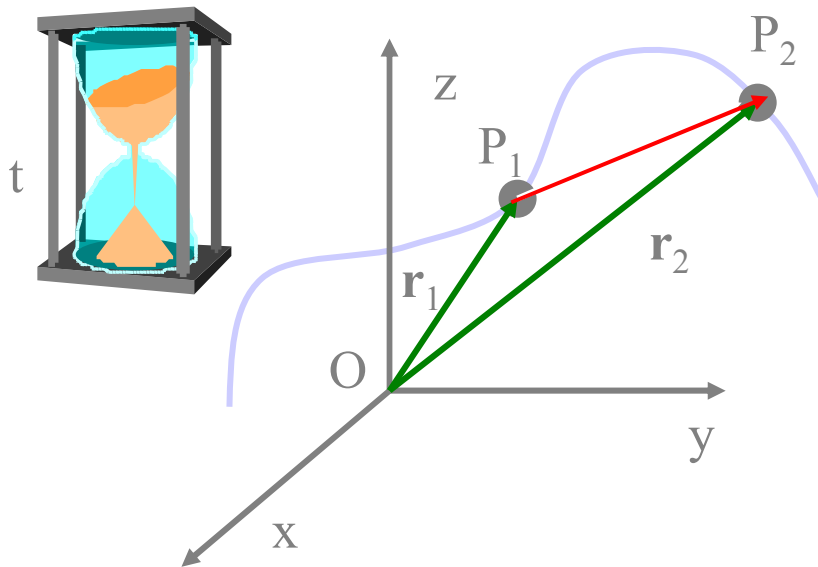
A vertical axis labeled 'y' with an upward arrow. A dashed red line with a downward arrow indicates the path of a falling object. Four blue spheres represent the object at different times: at t=0 (y=0), t=1s (y=-4.9m), t=2s (y=-19.6m), and t=3s (y=-44.1m). The table to the right provides the corresponding numerical values for time, position, velocity, and acceleration.

t	y	v	a
(s)	(m)	(m/s)	(m/s ²)
0	0	0	-9.8
1	-4.9	-9.8	-9.8
2	-19.6	-19.6	-9.8
3	-44.1	-29.4	-9.8

Moto in due e in tre dimensioni

Nel caso più generale di moto in due o tre dimensioni, lo spostamento, la velocità e l'accelerazione sono grandezze **vettoriali**.

Consideriamo una particella che si muove **percorrendo** una certa **curva** nello spazio. Ad un certo istante t_1 essa si trova nel punto P_1 : questa situazione è rappresentata dal **vettore posizione** \mathbf{r}_1 , tracciato dall'origine a P_1 . Ad un certo istante successivo t_2 la particella si trova nel punto P_2 ; il vettore \mathbf{r}_2 rappresenta questa posizione



Il **vettore spostamento** è la variazione del vettore posizione:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

Il **vettore velocità** media è dato da:

$$\mathbf{v}_{\text{media}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

Non è detto che il **modulo** del **vettore spostamento** sia uguale al tratto percorso.

Moto in due e in tre dimensioni

Il **vettore accelerazione** media è dato da: $\mathbf{a}_{\text{media}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1}$

L'accelerazione può essere dovuta sia ad una variazione del modulo della velocità che della sua direzione orientata (o di entrambe le cose).

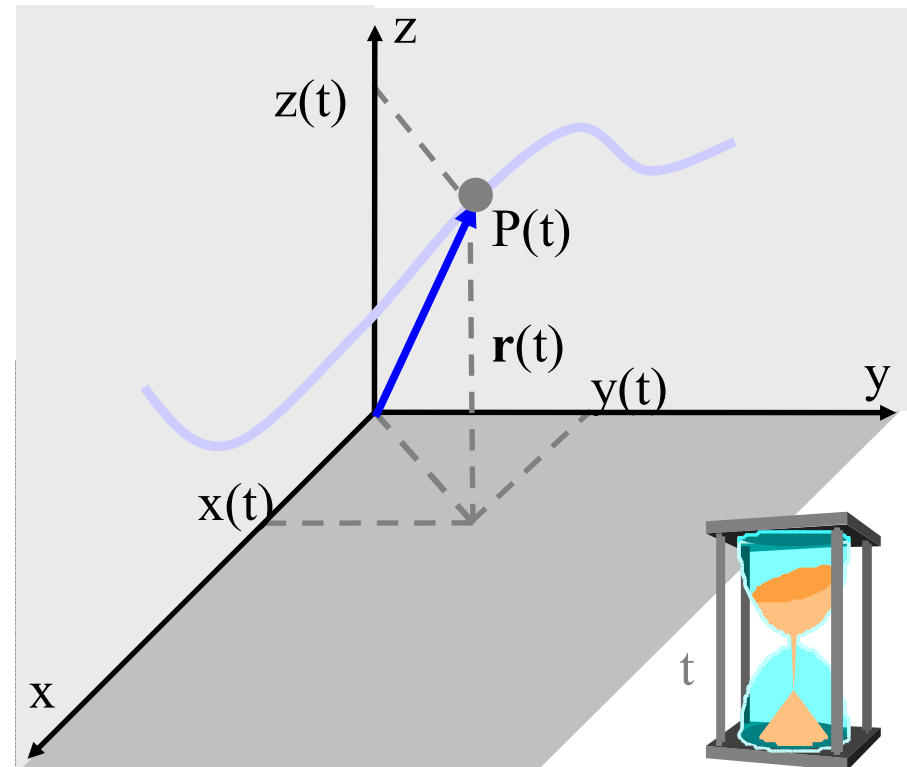
$$\mathbf{r} = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}$$

$$x = x(t)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \Leftrightarrow y = y(t)$$

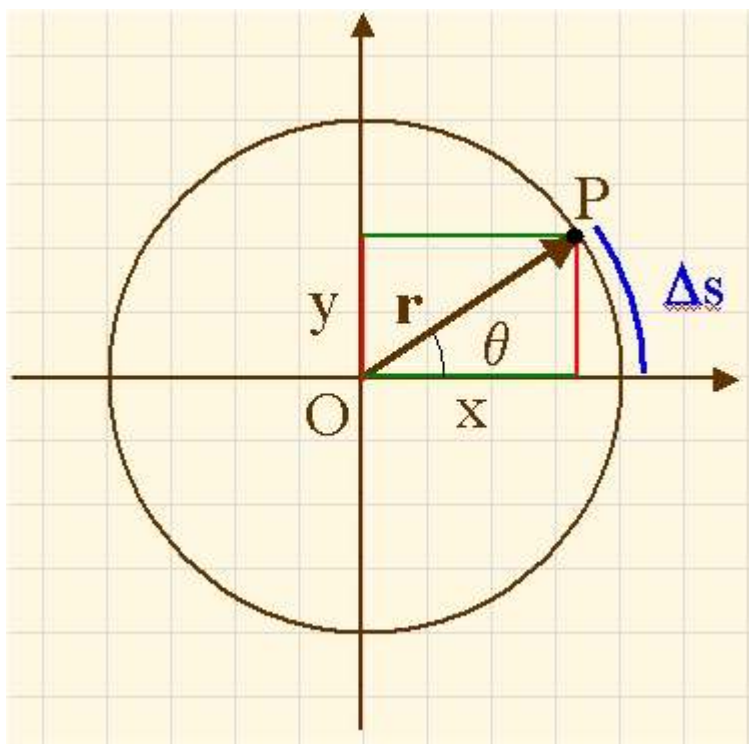
$$z = z(t)$$

Equazioni
parametriche della
traiettoria



Moto circolare

- Il punto P percorre una traiettoria circolare.
- Il modulo di \mathbf{r} è costante.



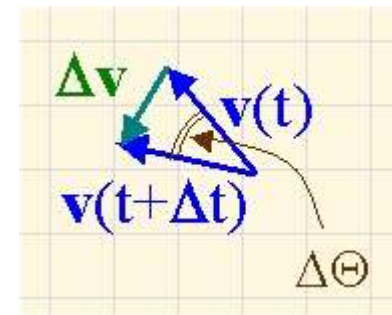
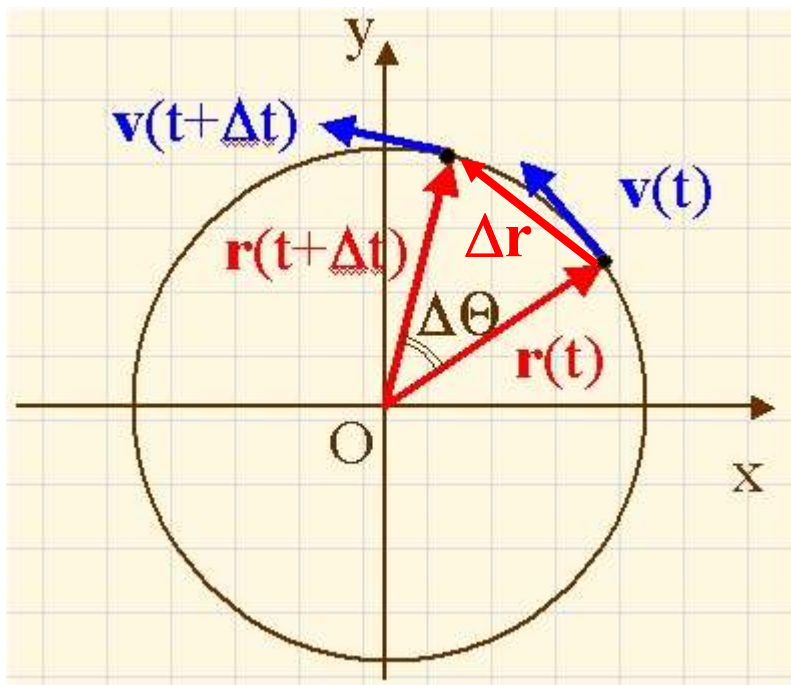
$$|\mathbf{r}| = \text{costante} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = |\mathbf{r}| \cos\theta$$

$$y = |\mathbf{r}| \sin\theta$$

Moto circolare uniforme

- La traiettoria è una **circonferenza** ed il **modulo della velocità è costante**.
- Come appare dal disegno, **nonostante** il **modulo** di **\mathbf{v}** sia **costante**, la **velocità (come vettore) non è costante**, in quanto la sua direzione cambia \rightarrow l'**accelerazione** non è nulla.

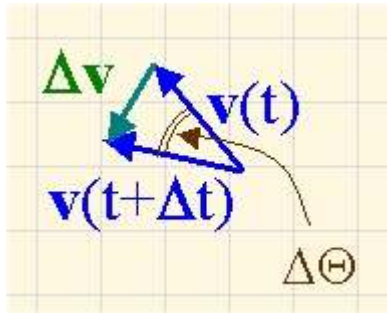


$$\mathbf{a}_{\text{media}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$$

vettore che ha la direzione ed il verso di $\Delta\mathbf{v}$ (per $\Delta t > 0$)

Accelerazione centripeta

Si parla di accelerazione vettoriale istantanea quando l'intervallo di tempo Δt considerato tende a zero.



Quando Δt tende a zero anche $\Delta\Theta$ tende a zero.

Poiché la somma degli angoli interni in un triangolo è sempre 180° , se $\Delta\Theta$ tende a zero, gli angoli alla base tendono a 90° (il triangolo è isoscele).

L'**accelerazione** (che ha la **stessa direzione** e lo **stesso verso di $\Delta\mathbf{v}$**) è quindi **perpendicolare a $\mathbf{v}(t)$** .

Poiché $\mathbf{v}(t)$ è tangente alla circonferenza, l'accelerazione è **radiale** e diretta verso il centro; essa viene chiamata **accelerazione centripeta**. Si può dimostrare che:

$$|\mathbf{a}_{\text{centripeta}}| = \frac{v^2}{r}$$

La particella in moto circolare uniforme percorre una circonferenza di lunghezza $2\pi r$ nel tempo T (chiamato **periodo di rivoluzione** o semplicemente **periodo**):

$$T = \frac{2\pi \cdot r}{v}$$

Esercizio

Il signor Rossi getta dal balcone del primo piano, posto ad un'altezza di 4m, con velocità iniziale nulla, i seguenti oggetti:

Istante (s)	Oggetto	Peso (g)
0.0	Pipa	100
1.0	Telecomando	150
1.5	Orologio	200
2.0	Cellulare	90
2.2	Valigetta	1500

Trascurando la resistenza dell'aria, determinare l'ordine di arrivo a terra dei vari oggetti.(fare esercizio alla lavagna con tutte le equazioni)

Gli oggetti cadono secondo un moto **uniformemente accelerato** con accelerazione **g**. Se consideriamo le equazioni:

$$y = y_0 + \cancel{v_0}t - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v = v_0 - gt = -gt$$

ci accorgiamo subito che in esse **non compare la massa** dell'oggetto in caduta libera.

Quindi, **se trascuriamo la resistenza che l'aria offre alla caduta**, poiché l'accelerazione **g** è la stessa per tutti i corpi, i vari oggetti impiegheranno lo stesso tempo per arrivare a terra; quindi l'ordine di “atterraggio” coincide con quello di lancio.

Cinematica: moto uniformemente accelerato

Centometrista (accelerazione media): $a = 2 \frac{m}{s^2}$

L'accelerazione di gravità (corpo in caduta libera): $a = 9,8 \frac{m}{s^2}$

Dragster in accelerazione: $a = 18,7 \frac{m}{s^2}$

Sulle montagne russe si può arrivare per brevi istanti a: $a = 30 \frac{m}{s^2}$

Limite dello svenimento senza tuta anti-G (aerei da caccia): $a = 55 \frac{m}{s^2}$

