Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° Semestre 2019

Ayudantía 21

28 de Mayo

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Encuentre el máximo, minimo (si es que existen), infimo y supremo de los siguientes conjuntos:

   a) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

   Demostración. Notemos que 0 es cota inferior. En efecto, $n > 0 \Rightarrow n^{-1} > 0$. Por otro lado, si tuvieramos una cota inferior mayor a 0 (llamemosla m), entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$m \leq \frac{1}{n}$$
$$n \leq \frac{1}{m}$$

   Esto implica que los naturales están acotados, $\rightarrow\leftarrow$.
   Por otro lado, 1 es cota superior ($n \geq 1 \Rightarrow n^{-1} \leq 1$). Como además $1 \in A$, entonces 1 es máximo (y por lo tanto supremo). ∎

   b) $B = \{p : p \text{ es primo}\}$

   Demostración. Sabemos que los primos son un subconjunto de los naturales. Como 2 es el menor primo (1 no es primo), entonces 2 es mínimo (y por lo tanto ínfimo). Por otro lado, como la sucesión de los primos son subsucesión de los naturales, y los naturales son una sucesión estrictamente creciente y no acotada por arriba, entonces los primos tampoco están acotados por arriba. Luego, no tienen supremo ni máximo. ∎

   c) $C = \{2, e, 3, \pi, 4\}$

   Demostración. Es un conjunto finito, asi que directamente se concluye que 2 es ínfimo y mínimo, mientras que 4 es máximo y supremo. ∎

d) $D = [0,1] \cap \mathbb{Q}$

Demostración. Sabemos que todos los elementos $d \in D$ cumplen

$$0 \leq d \leq 1$$

Como además 0 y 1 son racionales, se tiene que 0 es ínfimo y mínimo, y que 1 es máximo y supremo. ∎

e) $E = [0,1] \cap \mathbb{Q}^c$

Demostración. De nuevo, tenemos que todo elemento $x \in E$ cumple

$$0 \leq x \leq 1$$

Ahora, consideremos la sucesión

$$a_n = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$$

Todos los elementos de esta sucesión son irracionales. Además, sabemos que la sucesión converge a 0. Luego, por definición, para todo $\varepsilon > 0$, desde un n_0 en adelante se cumple

$$\left| \frac{\sqrt{2}}{2^n} \right| < \varepsilon$$

Como la sucesión es de términos positivos, lo anterior es equivalente a

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{2^n} < \varepsilon$$

Tomando $\varepsilon = m$, tenemos un elemento en E que es menor que la cota inferior, $\rightarrow\leftarrow$.
Por lo tanto, 0 es ínfimo. Como $0 \notin \mathbb{Q}^c$, no hay mínimo.
Ahora, supongamos que hay una cota superior $M < 1$. Esta vez, si consideramos $\varepsilon = 1 - M > 0$ en la sucesión anterior, tenemos que

$$\frac{\sqrt{2}}{2^n} < 1 - M$$

Reordenando términos, se llega a

$$M < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2^n} < 1$$

Luego, M no es cota superior, $\rightarrow\leftarrow$. Por lo tanto, 1 es supremo, pero no máximo (ya que $1 \notin \mathbb{Q}^c$). ∎

2) Sean A, B conjuntos no vacíos y con máximo. ¿Tiene AB máximo? De ser así, encuentrelo.

Demostración. Sean $A = B = -\mathbb{N}$. Luego, $AB = \{ab : a, b \in \mathbb{N}\}$. Este conjunto no está acotado por arriba (fijando $a = 1$ se tiene que los naturales están en el producto), por lo que no tiene máximo. ∎

3) Sean A, B conjuntos no vacíos, con máximo y con mínimo. ¿Tiene AB máximo? De ser así, encuentrelo.

Demostración. Tenemos 3 casos:

a) A y B están acotados inferiormente por 0. Luego, sea M_A el máximo de A, y sea M_B el máximo de B. Así, para todos $a \in A$ y $b \in B$ se tiene $a \leq M_A$ y $b \leq M_B$. Como ambos son positivos, esto implica $ab \leq M_A M_B$, por lo que $M_A M_B$ es cota superior. Como además está en el conjunto (ya que $M_A \in A$ y $M_B \in B$), entonces tenemos que $M_A M_B$ es máximo.

b) Un conjunto su mínimo menor a 0. Sin perder generalidad, digamos que es A. Luego, separamos A en los conjuntos

$$A_0^+ = \{a \in A : a \geq 0\}$$

$$A^- = \{a \in A : a < 0\}$$

(donde el primero puede o no ser vacío). Si el primero no es vacío, entonces $M_A \in A_0^+$. Por otro lado, cualquier elemento de B multiplicado por uno de A^- va a ser negativo, por lo que es menor que cualquier elemento de A_0^+ por alguno de B. Así, estamos en el caso anterior y el máximo es $M_A M_B$.
Por otro lado, si el primer conjunto es vacío, notemos que para todo $a \in A$, se tiene $a \leq M_A < 0$. Además, para todo $b \in B$, se tiene $0 < m_B \leq b$ (donde m_B es el mínimo de B). Así, tenemos que

$$0 < -M_A \leq -a$$

$$0 < m_B \leq b$$

Multiplicando ambas tenemos

$$-M_A m_B \geq -ab,$$

lo que es equivalente a $ab \leq M_A m_b$. Esto dice que $M_A m_b$ es cota superior. Como además pertenece al conjunto, es máximo.

c) Ambos tienen el mínimo menor a 0. Este caso es análogo al anterior (basta separar ambos conjuntos y operar). Esta vez, como ambos mínimos son negativos, tenemos que el máximo es $\max\{m_A m_B, M_A M_B\}$.

Teniendo todos los casos, se tiene lo pedido. ■

4) Sea A un conjunto no vacío, de números positivos y con supremo. Sea

$$A^{-1} = \left\{ \frac{1}{a} : a \in \ A \right\}$$

Pruebe que A^{-1} tiene ínfimo y encuentrelo.

Demostración. Sea $M = \sup A$. Luego, para todo $a \in A$, se tiene

$$a \leq M$$

Esto es análogo a $a^{-1} \geq M^{-1}$ (ya que son positivos), por lo que M^{-1} es cota inferior. Ahora, supongamos que existiera una cota inferior más grande para A^{-1} (llamémosla m). Esto implica que para todo $a \in A$,

$$a^{-1} \geq m$$

Esto es equivalente a decir $a \leq m^{-1}$ para todo $a \in A$. Pero como $m > M^{-1}$ y ambos son positivos, tenemos que $m^{-1} < M$. Esto implica que M no es supremo de A, $\rightarrow\leftarrow$.
Luego, no hay cotas inferiores más grandes. Por definición, esto significa que M^{-1} es ínfimo de A^{-1}. ■