Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° Semestre 2019

Ayudantía 25

11 de Junio

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, y se define el conjunto

$$A := \left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} : x, y \in \mathbb{R} \wedge x \neq y \right\}$$

Asuma que el ínfimo de A existe y es positivo.

a) Demuestre que f es inyectiva.

Demostración. Supongamos que no es inyectiva. Luego, existen $x \neq y$ tales que $f(x) = f(y)$. Esto implica que $0 \in A$. Luego, $\inf A < 0$. Pero el ínfimo de A es positivo, $\to\leftarrow$.
Por lo tanto, f es inyectiva. ∎

b) Demuestre que $X = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ no está acotado por ningún lado.

Demostración. Notar que reemplazando y por 0, tenemos que todos los elementos de la forma

$$\frac{f(x) - f(0)}{x}, x \in \mathbb{R}$$

están en A. Sea $\alpha = \inf A$. Esto dice que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} > \alpha$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $x = \frac{x' - f(0)}{\alpha}$, con $x' > f(0)$. Luego, $x > 0$. Usando este x y multiplicando ambos lados por x, tenemos que

$$f(x) > x'$$

Como x' puede ser arbitrariamente grande, tenemos que A no está acotada superiormente.

Por otro lado, si ahora tomamos un $x' < f(0)$, tenemos que x es negativo. Así, usando este x y multiplicando, tenemos que

$$f(x) < x'$$

Como x' puede ser arbitrariamante pequeño, tenemos que A no puede estar acotada por abajo.
Así, tenemos lo pedido. ∎

2) Ahora, sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente. Sean a, b tales que $f(a) = b$, y definimos $\mathcal{C}(b)$ como

$$\mathcal{C}(b) := \{x \in \mathbb{R} : f(x) < b\}$$

En base a esto:

a) Demuestre que $\mathcal{C}(b) \neq \emptyset$.

Demostración. Notar que existe un real menor que a (llamémosle x. Luego, como la función es estrictamente creciente, tenemos que $f(x) < f(a) = b$. Así, tenemos que $x \in \mathcal{C}(b)$, por lo que el conjunto no es vacío. ∎

b) Demuestre que el real a que cumple $f(a) = b$ es cota superior de $\mathcal{C}(b)$.

Demostración. Sea $x > a$. Como f es estrictamente creciente, se tiene que $f(x) > f(a) = b$, por lo que x no puede estar en $\mathcal{C}(b)$. Así, a es cota supreior. ∎

c) Pruebe que si $r < a$, entonces r no puede ser cota superior de $\mathcal{C}(b)$.

Demostración. Consideremos $x = \dfrac{a+r}{2}$. Luego, tenemos que

$$r < x < a$$

Como f es estrictamente creciente, tenemos que

$$f(x) < f(a) = b$$

Luego, $x \in \mathcal{C}(b)$. Como $r < x$, r no puede ser cota superior. ∎

d) Pruebe que $a = \sup \mathcal{C}(b)$.

Demostración. Por a) y b), tenemos que el conjunto posee supremo. Esto además dice que a es cota superior. Por c), tenemos que todos los reales menores a a no pueden ser cota superior, por lo que a es la menor. Así, tenemos lo pedido. ∎