Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° Semestre 2019

Ayudantía 23

04 de Junio

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto, y sea x_n una sucesión de cotas superiores de A que converge a $L \in A$.

   a) Pruebe que L es cota superior de A.

   Demostración. Notemos que para todo $a \in AA$ y todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

   $$a \leq x_n$$

   (ya que x_n es una sucesión de cotas superiores). Como la desigualdad se transfiere al límite, tenemos que para todo $a \in A$, tenemos

   $$a \leq L$$

   Esto significa que L es cota superior. ∎

   b) Concluya que L es el supremo de A.

   Demostración. Desde la parte anterior tenemos que L es cota superior. Como $L \in A$ (por enunciado), concluímos que L debe ser supremo. ∎

2) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente (es decir, $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$). Sea $X = [a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Se define

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$$

Demuestre que $\sup f(X) = f(b)$.

Demostración. Primero, veamos que $f(b)$ es cota superior. Para esto, notemos que para todo $x \in X$, se tiene que

$$x \leq b$$

Luego, como f es creciente, tenemos que

$$f(x) \leq f(b)$$

(El caso borde en el que $x = b$ es trivial). Así, tenemos que $f(b)$ es cota. Como $f(b) \in f(X)$, concluímos que $f(b)$ es el supremo. ■

3) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función decreciente (es decir, $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$). Sea $X = [a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Se define

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$$

Demuestre que $\sup f(X) = f(a)$.

Demostración. Primero, veamos que $f(a)$ es cota superior. Para esto, notemos que para todo $x \in X$, se tiene que

$$a \leq x$$

Luego, como f es decreciente, tenemos que

$$f(a) \geq f(x)$$

(El caso borde en el que $x = a$ es trivial). Así, tenemos que $f(a)$ es cota. Como $f(a) \in f(X)$, concluímos que $f(a)$ es el supremo. ■

4) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, y sea X un conjunto no vacío y acotado. ¿Se puede concluir que $f(X)$ tiene supremo o infimo?

Demostración. No necesariamente. Tomando la función $f(x)$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

en el intervalo $X = [-1, 1] \setminus \{0\}$ (el cual claramente es acotado y no vacío), vemos que $f(X)$ puede alcanzar valores arbitrariamente grandes o pequeños (basta reemplazar x por $1/n$ y $-1/n$, con $n \in \mathbb{N}$), por lo que no puede tener ínfimo ni supremo. ■