Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° Semestre 2019

Ayudantía 02

14 de Marzo

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Pruebe que si $b < a < 0$, entonces $0 < -a < -b$.

Demostración. Primero, veamos que

$$a < b \iff a + c < b + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$. Para esto, veamos que $a < b \iff 0 < b - a$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} b - a &= (b - a) + 0 \\ &= b + (-a + 0) \\ &= b + (0 - a) \\ &= b + ((c - c) - a) \\ &= b + (c + (-c - a)) \\ &= (b + c) + (-c - a) \\ &= (b + c) - (a + c) \end{aligned}$$

Luego, $0 < (b+c)-(a+c) \Rightarrow a+c < b+c$. Como los pasos son reversibles, tenemos lo pedido.
Ahora, como $b < a$, por lo anterior tenemos $b - b = 0 < a - b$. Repitiendo lo anterior, $-a < -a - a - b = -b$. Por lo tanto, $-a < -b$. Ahora, como $a < 0$, $0 < -a$. Así, se tiene

$$0 < -a < -b,$$

que es lo que se quería demostrar. ∎

2) Pruebe que si $a < 0 < b$, entonces $ab < 0$.

Demostración. Como $a < 0$, $0 < (-a)$. Luego, como $0 < b$ y $0 < (-a)$, por clausura del producto tenemos que $0 < (-a)b = -ab$. Finalmente, como $0 < -ab$, entonces $ab < 0$, que es lo que se quiere demostrar. ∎

3) Sean a y b dos reales tales que $a+b=1$. Demuestre que $4ab \leq 1$.

Demostración. Como $a+b=1$, tenemos que

$$1=(1)^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Por otro lado, tenemos

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \geq 0,$$

ya que es el cuadrado de un número real. La desigualdad anterior implica directamente

$$0 \leq -a^2+2ab-b^2.$$

Sumando 1 a ambos lados, tenemos

$$1 \leq -a^2+2ab-b^2+(a^2+2ab+b^2)=4ab.$$

Por lo tanto, $1 \leq 4ab$, que es lo que se quería demostrar. ■

4) Sean $a \geq 0$, $b \geq 0$ dos reales tales que $ab=1$. Demuestre que $a^2+b^2 \geq 2$.

Demostración. Como a y b son reales, tenemos

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \geq 0.$$

Sumando $2ab$ a ambos lados, tenemos

$$a^2+b^2 \geq 2ab.$$

Finalmente, como $ab=1$, al reemplazar queda

$$a^2+b^2 \geq 2,$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

5) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Pruebe que

a) $a^2+ab+b^2=\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{(a+b)^2}{2}$

Demostración. Operando el lado derecho, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{(a+b)^2}{2} &= \frac{a^2+b^2+(a+b)^2}{2} \\
&= \frac{a^2+b^2+a^2+2ab+b^2}{2} \\
&= \frac{2(a^2+ab+b^2}{2} \\
&= a^2+ab+b^2,
\end{aligned}$$

que es lo que buscábamos. ∎

b) Si $a^2+ab+b^2=0$, entonces $a=b=0$.

Demostración. Por la parte a, tenemos que

$$\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{(a+b)^2}{2} = 0.$$

Como $2 \neq 0$, multiplicando por 2:

$$a^2+b^2+(a+b)^2 = 0.$$

Como a^2, b^2 y $(a+b)^2$ son cuadrados de números reales, todos son mayores o iguales a 0. Como el lado derecho es 0, esto implica que todos deben ser 0. Esto dice que $a^2=0$, lo que implica que $a=0$. Análogamente $b=0$.
Por lo tanto, probamos que si $a^2+ab+b^2=0$, entonces $a=b=0$, que es lo que buscábamos. ∎