Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° Semestre 2019

Ayudantía 24

06 de Junio

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Sean $a, x, y \in \mathbb{R}^+$. Demuestre que

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

Demostración. Sean x_n e y_n dos sucesiones de racionales positivos, tales que $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, como $x_n, y_n \in \mathbb{Q}^+$, se tiene

$$a^{x_n} \cdot a^{y_n} = a^{x_n + y_n}$$

Como tenemos la igualdad anterior, aplicando límite a ambos lados se tiene

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Como por clases tenemos que no importa la sucesión que tomemos, se tiene lo pedido.

∎

2) Se define un número algebráico como un número real tal que es raíz de un polinomio en $\mathbb{Q}[x]$. Sea $a \in \mathbb{Q}^+$. Demuestre que existe una sucesión x_n tal que a^{x_n} sea algebráico para todo $n \in \mathbb{N}$, y tal que

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{\pi}$$

Demostración. Sea x_n la expansión decimal de π. Luego, notemos que como $x_n \in \mathbb{Q}^+$ y $\pi > 3$, tenemos que cada x_n se puede escribir de la forma $\frac{p_n}{q_n}$, con $p_n, q_n \in \mathbb{N}$. Así, tenemos que

$$x^{q_n} - a^{p_n}$$

es un polinomio en $\mathbb{Q}[x]$ que tiene como raíz a a^{x_n}, ya que

$$\begin{aligned}(a^{x_n})^{q_n} - a^{p_n} &= (a^{\frac{p_n}{q_n}})^{q_n} - a^{p_n} \\ &= a^{\frac{p_n}{q_n}\cdot q_n} - a^{p_n} \\ &= a^{p_n} - a^{p_n} = 0\end{aligned}$$

Luego, como $x_n \to \pi$, tenemos una sucesión que cumple lo pedido. ∎

3) Demuestre que existe una sucesión x_n tal que a^{x_n} sea algebráico para todo $n \in \mathbb{N}$, y tal que

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^r$$

con $r > 0$.

Demostración. Sea x_n la expansión decimal de r desde el primer término no cero. Luego, cada x_n se puede escribir como $\frac{p_n}{q_n}$, con $p_n, q_n \in \mathbb{N}$. Así, tenemos que

$$x^{q_n} - a^{p_n}$$

está en $\mathbb{Q}[x]$, y tiene como raíz a a^{x_n} (análogo a la demostración anterior). Por lo tanto, tenemos lo pedido. ∎