Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° Semestre 2019

Ayudantía 01

12 de Marzo

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Pruebe que si $a \neq 0$, entonces $-(a)^{-1} = (-a)^{-1}$.

Demostración. Recordemos que $-(-a) = a$ (visto en clases). Con esto, usando $a = 1$, se tiene que

$$1 = -(-1) = (-1)(-1).$$

Luego, (-1) es su propio inverso multiplicativo (por definición). Sabiendo esto, tenemos que

$$\begin{aligned} -(a)^{-1} &= (-1)(a)^{-1} \\ &= (-1)^{-1}(a)^{-1} \\ &= (-1 \cdot a)^{-1} \\ &= (-a)^{-1} \end{aligned}$$

Con esto, tenemos lo pedido. ∎

2) Se define $\frac{a}{b} = ab^{-1}$. Con esta definición, pruebe que

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

Demostración. Tenemos que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = (ab^{-1})^{-1} = a^{-1}(b^{-1})^{-1} = a^{-1}b = ba^{-1} = \frac{b}{a}$$

Luego, tenemos lo pedido. ∎

b) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Demostración. Operando, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= (ab^{-1})(cd^{-1}) \\
&= ((ab^{-1})c)d^{-1} \\
&= (c(ab^{-1}))d^{-1} \\
&= ((ca)b^{-1})d^{-1} \\
&= ((ac)b^{-1})d^{-1} \\
&= (ac)(b^{-1}d^{-1}) \\
&= (ac)(bd)^{-1} \\
&= \frac{ac}{bd}
\end{aligned}$$

■

c) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.

Demostración. Operando, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= (ab^{-1}) + (cd^{-1}) \\
&= ((ab^{-1}) \cdot 1) + ((cd^{-1}) \cdot 1) \\
&= ((ab^{-1}) \cdot (dd^{-1})) + ((cd^{-1}) \cdot (bb^{-1})) \\
&= ((ab^{-1}) \cdot (dd^{-1})) + ((bb^{-1}) \cdot (cd^{-1})) \\
&= \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d}\right) + \left(\frac{b}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)
\end{aligned}$$

Usando la parte b), tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} \\
&= (ad)(bd)^{-1} + (bc)(bd)^{-1} \\
&= (ad + bc)(bd)^{-1} \\
&= \frac{ad + bc}{bd}
\end{aligned}$$

Con esto, terminamos de probar lo pedido. ■

3) Consideremos la ecuación

$$ax + b = 0$$

con $a \neq 0$. Pruebe que la única solución a esta ecuación es $\frac{-b}{a}$.

Demostración. Primero veamos que $\frac{-b}{a}$ es solución. Para esto, notemos que

$$\begin{aligned}
a \cdot \left(\frac{-b}{a}\right) + b &= a((-b)a^{-1}) + b \\
&= a(a^{-1}(-b)) + b \\
&= (aa^{-1})(-b) + b \\
&= 1(-b) + b \\
&= -b + b \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ahora, probemos unicidad. Asumamos que hay dos soluciones, x_1 y x_2. Luego, tenemos que

$$ax_1 + b = 0$$

$$ax_2 + b = 0$$

Por transitividad, esto dice

$$\begin{aligned}
ax_1 + b &= ax_2 + b \\
(ax_1 + b) + (-b) &= (ax_2 + b) + (-b) \\
ax_1 + (b + (-b)) &= ax_2 + (b + (-b)) \\
ax_1 + 0 &= ax_2 + 0 \\
ax_1 &= ax_2 \\
a^{-1}(ax_1) &= a^{-1}(ax_2) \\
(a^{-1}a)x_1 &= (a^{-1}a)x_2 \\
(1)x_1 &= (1)x_2 \\
x_1 &= x_2
\end{aligned}$$

Habiendo probado ambas condiciones, tenemos lo pedido. ∎

4) Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, consideremos la ecuación

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0.$$

Suponiendo que $a, b \in \mathbb{R}$ son soluciones de la ecuación, y además $a \neq b$, encuentre α y β en términos de a y b.

Demostración. Como a es solución, tenemos que

$$a^2 + \alpha a + \beta = 0.$$

Análogamente, tenemos que

$$b^2 + \alpha b + \beta = 0$$

Por transitividad, tenemos

$$\begin{aligned} a^2 + \alpha a + \beta &= b^2 + \alpha b + \beta \\ a^2 + \alpha a &= b^2 + \alpha b \\ \alpha a - \alpha b &= b^2 - a^2 \\ \alpha(a - b) &= (b - a)(b + a) \\ \alpha(a - b) &= -(a - b)(a + b) \\ \alpha &= -(a + b) \end{aligned}$$

Reemplazando α en alguna de las igualdades del inicio (usaremos la primera), tenemos

$$\begin{aligned} a^2 + (-(a + b))a + \beta = 0 \\ a^2 - (a + b)a + \beta = 0 \\ a^2 - a^2 - ab + \beta = 0 \\ -ab + \beta = 0 \\ \beta = ab \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\alpha = -(a + b)$ y $\beta = ab$. ∎