



Pontificia Universidad Católica de Chile  
Facultad de Matemáticas  
1° Semestre 2019

## Ayudantía 09

09 de Abril

MAT1106 - Introducción al Cálculo

- 1) Se define la sucesión  $\{x_n\}$  como

$$x_n = \frac{n!}{n^n}$$

- a) Demuestre que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{1}{2}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

- b) Pruebe que

$$0 \leq x_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

- 2) Para  $a > 0$ , se definen las funciones

$$f(x) = x^3 - 2 \quad \text{y} \quad g_a(x) = a^3 - 2 + 3a^2(x - a)$$

- a) Pruebe que

$$f(x) - g_a(x) = (x - a)^2(x + 2a)$$

y concluya que  $f(x) \geq g_a(x)$  para todo  $x \geq 0$ .

- b) Ahora, sea  $x_n$  una sucesión tal que  $x_1 = 2$  y  $x_{n+1}$  cumple

$$g_{x_n}(x_{n+1}) = 0.$$

Demuestre que esta sucesión es monótona.

- 3) Sea

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Pruebe que para todo  $n$ , se tiene

$$\alpha_{2^n} \geq \frac{n+1}{2}$$

4) Sea ahora

$$\beta_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

¿Existe algún valor de  $n$  tal que  $\beta_n > 2$ ?

*Hint: Vea que para  $k \geq 2$ ,  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ .*