Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° Semestre 2019

Ayudantía 3

19 de Marzo

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Se define el mínimo entre a y b como

$$\min\{a,b\} = \begin{cases} a & \text{si } a \leq b \\ \\ b & \text{si } a > b \end{cases}$$

Demuestre que $|x| = -\min\{x, -x\}$.

Demostración. Veamos los casos:
Si $x \geq 0$, entonces $\min\{x, -x\} = -x$. Por otro lado, tenemos que $|x| = x$. Así, queda $x = -(-x)$, lo que sabemos que es cierto. Luego, en este caso se cumple.
Si $x < 0$, entonces $\min\{x, -x\} = x$. Por otro lado, $|x| = -x$. Así, queda $-x = -(x)$, lo que es cierto. Por lo tanto, en este caso también se cumple.
Como funciona en todos los casos, se tiene lo pedido. ■

2) Se define el máximo entre a y b como

$$\max\{a,b\} = \begin{cases} a & \text{si } a \geq b \\ \\ b & \text{si } a < b \end{cases}$$

Demuestre que $\max\{a,b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$.

Demostración. Si a es el máximo, significa que $a \geq b$, por lo que $a - b \geq 0$ y $|a-b| = a-b$. Luego, operando el lado derecho tenemos

$$\frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

Por otro lado, si b es el máximo, entonces $b > a$, por lo que $a - b < 0$ y $|a - b| = b - a$. Luego, operando el lado derecho tenemos

$$\frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} = \frac{2b}{2} = b$$

Como funciona en todos los casos, se tiene lo pedido. ∎

3) Pruebe que $|x - y| = \max\{x, y\} - \min\{x, y\}$.

Demostración. Si $x \geq y$, entonces $|x - y| = x - y$. Por otro lado, tenemos que $\max\{x, y\} = x$ y $\min\{x, y\} = y$. Así, en ambos lados se tiene $x - y$, por lo que son iguales.
Si $x < y$, entonces $|x - y| = y - x$. Por otro lado, $\max\{x, y\} = y$ y $\min\{x, y\} = x$. Así, en ambos lados se tiene $y - x$, por lo que son iguales.
Como en ambos casos cumple, se tiene lo pedido. ∎

4) ¿Bajo qué condiciones se tiene que $|x - y| + |y - z| = |x - z|$?

Demostración. Notemos que por desigualdad triangular, tenemos que

$$|x - y| + |y - z| \geq |x - y + y - z| = |x - z|$$

Luego, para que sean iguales, tienen que ser iguales en la desigualdad triangular. La desigualdad triangular se transforma en igualdad cuando ambos términos tienen el mismo signo, lo que implica que $x - y \geq 0$ y $y - z \geq 0$ o que $x - y \leq 0$ y que $y - z \leq 0$. Así, es necesario que

$$x \leq y \leq z,$$

o que

$$x \geq y \geq z.$$

∎

5) Se define $\min\{a, b, c\} = \min\{\min\{a, b\}, c\}$, y se define $\max\{a, b, c\} = \max\{\max\{a, b\}, c\}$. Encuentre condiciones necesarias y suficientes para que se cumpla

$$\min\{a, b, c\} + \max\{a, b, c\} = a + b + c.$$

Demostración. Sin perder generalidad, digamos que $a \geq b \geq c$. Luego, tenemos que $\max\{a, b, c\} = a$ y que $\min\{a, b, c\} = c$. Esto implica que para la igualdad se cumpla, b debe ser 0.

Así, necesitamos que un número sea al menos 0, que otro sea exactamente 0 y que el último sea menor o igual a 0. Para ver que es suficiente, solo basta verificar que si $a \geq b \geq c$ con $b = 0$, tenemos que $a+b+c = a+c = \max\{a, b, c\} + \min\{a, b, c\}$.

Por lo tanto, las condiciones necesarias y suficientes son que un número sea mayor o igual a 0, otro número sea menor o igual a 0 y que el tercero sea 0. ∎