Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° Semestre 2019

Ayudantía 14

30 de Abril

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Sea $\{x_n\}$ una sucesión que converge. Pruebe que existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple

$$|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}| < \frac{1}{2}$$

2) Sea $\{x_n\}$ una sucesión. Se define $\{c_n\}$ como

$$c_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Pruebe que si x_n converge a un real L, entonces c_n también. ¿Es cierto el recíproco?

3) Sea $\{x_n\}$ una sucesión que converge a $L \neq 0$. Pruebe que eventualmente x_n tiene el mismo signo.

4) Sea $\{x_n\}$ una sucesión, y sean $\{x_{n_a}\}, \{x_{n_b}\}, \cdots, \{x_{n_k}\}$ una cantidad finita de subsucesiones tales que todos los elementos de $\{x_n\}$ pertenecen a al menos una subsucesión, y todas convergen a L. Pruebe que x_n converge también a L. ¿Es necesario que sean finitas?

5) Sean $p(x) = a_k x^k + \cdots a_0$ y $q(x) = b_j x^j + \cdots + b_0$, con a_k y b_j distintos de cero.

   a) Pruebe que si $k > j$, entonces

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \pm\infty$$

   b) Pruebe que si $k = j$, entonces

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \frac{a_k}{b_j}$$

c) Pruebe que si $k < j$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = 0$$