Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° semestre 2020

Ayudantía 05

02 de Abril

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Sean a, b positivos. Muestre que

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}.$$

Nota: Esta desigualdad se conoce como la desigualdad entre la media armónica y la media geométrica.

Demostración 1. Notar que

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Luego, probar lo que queremos es equivalente a probar

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}.$$

Como multiplicar por un número positivo no altera la desigualdad, multiplicando por $\frac{(a+b)}{2\sqrt{ab}}$ tenemos que lo anterior es equivalente a

$$\frac{ab}{\sqrt{ab}} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Como (ab) es positivo, podemos escribir ab como $(\sqrt{ab})^2$, por lo que al simplificar se llega a

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

lo que sabemos es cierto (por MA-MG). Como los pasos son reversibles, tenemos la desigualdad buscada. ■

Demostración 2. Como a, b son positivos, $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{b}$ también lo son. Luego, usando MA-MG con $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{b}$ se tiene que

$$\sqrt{\frac{1}{ab}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}.$$

Como ambos lados son positivos, multiplicando por los inversos multiplicativos de ambas expresiones a ambos lados se tiene lo pedido. ∎

2) Sean a, b, c, d positivos. Pruebe que

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Demostración. Como ambos términos son positivos, esa desigualdad ocurre si y solo si

$$(a+c)(b+d) \geq (\sqrt{ab} + \sqrt{cd})^2.$$

Desarrollando ambos lados, tenemos que lo anterior es equivalente a

$$ab + ad + bc + cd \geq ab + 2\sqrt{abcd} + cd$$

Como sumar una constante no afecta la desigualdad, simplificando se llega a

$$ad + bc \geq 2\sqrt{abcd}.$$

Como $2^{-1} > 0$, multiplicando por 2^{-1} a ambos lados llegamos a

$$\frac{ad + bc}{2} \geq \sqrt{abcd},$$

lo que es cierto por MA-MG usando ad y bc.

Como todos los pasos son reversibles, tenemos que $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$, que es lo que queríamos probar.

∎

3) Se usará la notación $\sqrt[4]{x} = \sqrt{\sqrt{x}}$. Demuestre que para todo a, b, c, d no negativo se tiene que

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}.$$

Demostración. Como a, b, c, d son no-negativos, la suma y producto entre ellos también lo son. Veamos que

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{(ab)(cd)}} = \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}}.$$

Por MA-MG,

$$\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} \leq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2}.$$

Pero, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ por MA-MG. Del mismo modo, $\sqrt{cd} \leq \frac{c+d}{2}$. Sumando ambas desigualdades, tenemos que

$$\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \leq \frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2} = \frac{a+b+c+d}{2} \Rightarrow \sqrt{ab}+\sqrt{cd} \leq \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Como 2^{-1} es positivo, multiplicando por 2^{-1} se llega a

$$\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \leq \frac{\frac{a+b+c+d}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}.$$

Finalmente, por transitividad tenemos que

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4},$$

que es lo que queríamos demostrar. ∎

4) Sean x, y positivos. Pruebe que

$$x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy.$$

Demostración. Notar que la desigualdad anterior es equivalente a

$$\frac{x^4 + y^4 + 8}{4} \geq 2xy,$$

ya que $4^{-1} > 0$. Además, como x e y son positivos, tenemos que $2xy = \sqrt[4]{16x^4y^4} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot x^4 \cdot y^4}$. Además, sabemos que $8 = 4+4$. Usando esto, la desigualdad anterior es equivalente a

$$\frac{x^4 + y^4 + 4 + 4}{4} \geq \sqrt[4]{16x^4y^4},$$

lo que es cierto por el ejercicio anterior. Como los pasos son reversibles, tenemos lo pedido. ∎

5) Sean $a_1, \dots, a_n$ reales positivos:

a) Muestre que

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \geq 2.$$

Demostración. Como a_1 y a_2 son positivos, entonces a_1/a_2 y a_2/a_1 también lo son. Por MA-MG, tenemos que

$$\frac{\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}}{2} \geq \sqrt{\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1}} = 1.$$

Por transitividad y multiplicando por 2, se llega a

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \geq 2,$$

que es lo que queríamos demostrar. ∎

b) Demuestre que para todo n,

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Demostración 1. Usando inducción:

Caso base (n = 1): $a_1 \cdot \frac{1}{a_1} = 1 \geq 1 = 1^2$.
Caso base (n = 2): Deberíamos llegar a $(a_1 + a_2)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) \geq 2^2 = 4$.
Trabajando en el lado izquierdo, tenemos que

$$(a_1 + a_2)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) = \frac{a_1}{a_1} + \underbrace{\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}}_{\geq 2} + \frac{a_2}{a_2} \geq 4.$$

Luego, para $n = 2$ se cumple.

Hipótesis inductiva: Supongamos que para k se cumple. Es decir,

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}\right) \geq k^2.$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
&(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\
&= (a_1 + \cdots + a_k) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \cdots \frac{1}{a_{k+1}} \right) + a_{k+1} \left(\frac{1}{a_1} + \cdots \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\
&= (*) + (a_1 + \ldots + a_k) \frac{1}{a_{k+1}} + a_{k+1} \left(\frac{1}{a_1} + \cdots \frac{1}{a_{k+1}} \right),
\end{aligned}
$$

donde $(*)$ es nuestra hipótesis inductiva. Sabemos que $\frac{a_1}{a_{k+1}} + \frac{a_{k+1}}{a_1} \geq 2$. Del mismo modo, $\frac{a_2}{a_{k+1}} + \frac{a_{k+1}}{a_2} \geq 2$. Como podemos hacer eso con todos los pares desde 1 hasta k, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&(a_1 + \ldots + a_k) \frac{1}{a_{k+1}} + a_{k+1} \left(\frac{1}{a_1} + \cdots \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\
&= (a_1 + \ldots + a_k) \frac{1}{a_{k+1}} + a_{k+1} \left(\frac{1}{a_1} + \cdots \frac{1}{a_k} \right) + \frac{a_{k+1}}{a_{k1}} \geq 2k + 1.
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que

$$
(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{k+1}} \right) \geq k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2,
$$

que es lo que buscábamos.

Por lo tanto, por inducción tenemos lo pedido. ∎

Demostración 2. Notemos que al expandir el lado izquierdo, cada expresión o es uno o tiene un inverso multiplicativo en el lado izquierdo (ya que si aparece $\frac{x_i}{x_j}$, en la expresión también aparece $\frac{x_j}{x_i}$). Luego, usando MA-MG con estos n^2 términos, tenemos que

$$
\sqrt[n^2]{1} \leq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right)}{n^2}.
$$

Reordenando un poco esta desigualdad ($n^2 > 0$) se llega a

$$
n^2 \leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right),
$$

que es lo que queríamos demostrar. ∎