Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° semestre 2020

Ayudantía 21

16 de Junio

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Sea $x = p/q$ un número racional, con $\gcd(p, q) = 1$. Muestre que la expansión decimal de x es eventualmente periódica, y que su periodo mínimo es a lo más q.

Demostración. Basta mostrar que el periodo mínimo es a lo más q (ya que la otra parte fue hecha en clase). Para esto, notar que podemos asumir que $0 < p < q$ (los otros casos son análogos). Para esto, notar que hay q restos posibles al dividir por q (entre 0 y $q-1$). Como el dígito k en la expansión decimal depende exclusivamente del resto en el paso $k-1$ de la división, si dos restos coinciden entonces el número es periódico.

Como hay q restos posibles, la distancia entre dos restos iguales es a lo más q, por lo que tenemos lo pedido. ∎

2) Sea $x = 0, a_1a_2a_3 \ldots$ un real con una expansión decimal. Diremos que la expansión en base 100 de x será $0, b_1b_2 \ldots$, donde $0 \leq b_i < 100$ para todo i, $b_i \in \mathbb{N}$ para todo i, y

$$x = \frac{b_1}{100} + \frac{b_2}{100^2} + \ldots$$

a) Muestre que x siempre tiene una expansión en base 100 y construya una.

Demostración. Consideremos $b_i = 10a_{2i-1} + a_{2i}$. Como $0 \leq a_i \leq 9$ para todo i, tenemos que $0 \leq 10a_{2i-1} + a_{2i} \leq 99$. Para mostrar que esta expansión en base 100 funciona, basta notar que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{100^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{10a_{2k-1} + a_{2k}}{10^{2k}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_{2k-1}}{10^{2k-1}} + \frac{a_{2k}}{10^{2k}} \right) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{a_k}{10^k}$$

Como el límite del lado derecho cuando $n \to \infty$ es x, el del lado izquierdo también. Luego, x tiene una expansión en base 100, que es lo que buscábamos. ■

b) Muestre que si un real tiene expansión decimal periódica, también tiene expansión en base 100 periódica.

Demostración. Como la expansión a_i es periódica, existe un k natural tal que $a_i = a_{i+k}$ para todo i natural. Luego, también se cumple $a_i = a_{i+2k}$. Luego,

$$b_j = 10a_{2j-1} + a_{2j} = 10a_{2j-1+2k} + a_{2j+2k} = 10a_{2(j+k)-1} + a_{2(j+k)} = b_{j+k}.$$

Esto implica que la expansión en base 100 es periódica, que es lo que queríamos demostrar. ■

3) *(I8 2019)* Definimos $x_n = 1 + 3(n-1) \pmod 5$, también definido como

$$x_n = 1 + 3(n-1) - 5\left\lfloor \frac{1+3(n-1)}{5} \right\rfloor,$$

donde $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de x.

a) Muestre que $x_k = x_{k+5}$ para todo k natural.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}
x_{k+5} &= 1 + 3(n-1+5) - 5\left\lfloor \frac{1+3(n+5-1)}{5} \right\rfloor \\
&= 1 + 3(n-1) + 15 - 5\left\lfloor 3\frac{1+3(n-1)}{5} \right\rfloor \\
&= 1 + 3(n-1) + 15 - 15 - 5\left\lfloor \frac{1+3(n-1)}{5} \right\rfloor \\
&= 1 + 3(n-1) - 5\left\lfloor \frac{1+3(n-1)}{5} \right\rfloor \\
&= x_k,
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. ■

b) Definimos

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{10^k}.$$

Encuentre x.

Solución. Calculando los primeros 5 términos, se tiene $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 0, x_5 = 3$. Luego, $x = 0,\overline{14203}$. Esto implica que $10^5 x = 14203 + x$. Desde aquí se tiene

$$x = \frac{14203}{99999},$$

que es lo que queríamos probar. ■