Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° semestre 2020

Ayudantía 14

07 de Mayo

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \to \infty$. Pruebe que $\sqrt{x_n} \to \infty$.

Demostración. Como $x_n \to \infty$, para todo $M > 0$ existe un n_0 natural tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple $x_n > M$.

Sea $M > 0$. Considerando $M^2 > 0$ en x_n tenemos que existe un n_1 tal que para todo $n \geq n_1$ se cumple $x_n > M^2$. Tomando raíz a ambos lados (ya que $x_n > 0$), tenemos que $\sqrt{x_n} > |M| = M$ para todo $n \geq n_1$, por lo que $\sqrt{x_n} \to \infty$. ∎

2) Demuestre que una sucesión no acotada por arriba posee una subsucesión que converge a infinito.

Demostración. Sea x_n la sucesión. Como x_n no es acotada superiormente existe un n_1 natural tal que $x_{n_1} > 1$. Probemos que existe un $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} > 2$. Si no existiera este n_2, significa que para todo $n > n_1$, se cumple que $x_n \leq 2$. Pero esto implica directamente que x_n está acotada por arriba, $\to\leftarrow$.

Repitiendo el proceso anterior, se puede construir una subsucesión x_{n_k} tal que $x_{n_k} > k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por propiedad vista anteriormente (si $x_n > y_n$ para todo n y $y_n \to \infty$ entonces $x_n \to \infty$) esto implica que la subsucesión converge a infinito, por lo que tenemos lo pedido. ∎

3) Muestre usando la propiedad arquimediana que cada real positivo x se puede escribir como $n + r$, donde n es un entero no-negativo y $0 \leq r < 1$.

Demostración. Consideremos el conjunto $S = \{n \in \mathbb{N} : n > x\}$. Por arquimediana existe un natural n_0 mayor que x, por lo que S es no vacío. Como S es un conjunto no vacío de naturales, por buen orden existe un elemento minimal n_*.

Tenemos que $n_* - 1 \leq x$ (ya que si no lo fuera, n_* no sería el elemento minimal). Esto nos dice que $x = (n_* - 1) + r$, donde $r \geq 0$. Notar que $r < 1$. En caso contrario, podemos escribir $r = 1 + r'$, y tenemos que $x = n_* + r'$, donde $r' \geq 0$. Esto implica que $n_* \leq x$, por lo que $n_* \notin S$, $\rightarrow\leftarrow$.

Por lo tanto, cada real positivo x se puede escribir como $n + r$ donde n es un entero no-negativo y $0 \leq r < 1$. ∎

4) *(I5 2018)* Sea x_n definida como

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ x_{n-1} + 2 \cdot (-1)^n & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Muestre que x_n está acotada.

Demostración. Mostremos que $x_n = 2 + (-1)^n$. Por inducción:

Caso base ($n = 1$): Tenemos que $x_1 = 1 = 2 - 1 = 2 + (-1)^1$.

Supongamos que se cumple para algún k, es decir, $x_k = 2 + (-1)^k$. Notemos que $x_{k+1} = 2 + (-1)^k + 2(-1)^{k+1} = 2 + (-1)^k - 2(-1)^k = 2 + (1-2)(-1)^k = 2 + (-1)^{k+1}$.

Por inducción tenemos que $x_n = 2 + (-1)^n$. Sabemos que $-2 < (-1)^n < 2$, por lo que $0 < x_n < 4$, lo que implica que x_n está acotada. ∎