Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° semestre 2020

Ayudantía 13

05 de Mayo

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Sea $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$. Pruebe que $s_n \to \infty$.

Demostración. Notar que $s_n \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $M > 0$. Como $n \to \infty$ existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0, n > M$. Por transitividad esto implica que $s_n > M$, por lo que s_n converge a infinito por definición. ∎

2) Sea $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3}}$. Pruebe que $x_n \to \infty$.

Demostración. Notar que $n^3 + 1 > n^3 > 0$, por lo que las raíces están bien definidas y además $\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3} > 0$. Luego, x_n está bien definida para todo n. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} x_n = \frac{1}{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3}} &= \frac{1(\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3})}{(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3})(\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3})} \\ &= \sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3} \end{aligned}$$

Notar que $\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3} \geq \sqrt{n^3} \geq \sqrt{n}$. Sea $M > 0$. Como $\sqrt{n} \to \infty$, existe un n_0 natural tal que para todo $n \geq n_0$, $\sqrt{n} > M$. Por transitividad tenemos que $x_n > M$, por lo que $x_n \to \infty$. ∎

3) Sea $x_n = \dfrac{1}{n^2}\dbinom{n}{3}$. Pruebe que $x_n \to \infty$.

Demostración. Sabemos que

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Luego,

$$x_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6n^2} = \frac{(n-1)(n-2)}{6n} = \frac{n}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3n} \geq \frac{n}{6} - \frac{1}{2}.$$

Tomemos $M > 0$. Notar que como $n \to \infty$, para $6M + 3 > 0$, tenemos que existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$n > 6M + 3 \Rightarrow \frac{n}{6} - \frac{1}{2} > M.$$

Por transitividad esto implica que $x_n > M$, por lo que $x_n \to \infty$. $\blacksquare$

4) Sea L_n definida como

$$x_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n = 2 \\ x_{n-2} + x_{n-1} & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

Pruebe que $L_n \to \infty$.

Solución 1. Notar que a partir de $n = 3$, $x_n > n$. Sea $M > 0$. Como $n \to \infty$, existe un n_0 natural tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple $n > M$. Tomando $n_* = \max\{n_0, 3\}$ tenemos que $x_n > n > M$, por lo que converge a infinito. $\blacksquare$

Solución 2. Notemos que a partir de $n > 4$, x_n es creciente. En efecto, si $n \geq 4$, tenemos que $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} > x_{n-1}$. Luego, si $n > 4$, $x_n = x_{n-2} + x_{n-1} \geq 2x_{n-2}$. Esto implica que $x_{2k} \geq 2^{k-2} \cdot x_4$ (para $k \geq 2$). Como $2^{k-2} \cdot x_4$ converge a infinito, tenemos que existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, tenemos que $x_{2n} > M$. Como además x_n es creciente, tenemos que si tomamos $n_1 = \max\{2n_0, 4\}$ tenemos que para todo $n \geq n_1$, tenemos $x_n > x_{n_1}$. Esto implica que x_n converge a infinito. $\blacksquare$

5) Sea $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Pruebe que $s_n \to \infty$.

Demostración. En una ayudantía anterior vimos que

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

Como $\frac{n}{2} \to \infty$, para todo $M > 0$ existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple $\frac{n}{2} > M$. Ahora, si consideramos $n_1 = 2^{n_0}$ tenemos que para todo $n \geq n_1$ se cumple $x_n \geq x_{n_1} \geq 1 + \frac{n_0}{2} > M$, por lo que s_n converge a infinito. ■