Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° semestre 2020

# Ayudantía 09

21 de Abril

MAT1106 - Introducción al Cálculo

Durante todo el enunciado, $x_n$ será una sucesión, y $x_{n_k}$ será una subsucesión de $x_n$.

1) Sea $x_n$ sucesión y supongamos que existe $x_{n_k}$ tal que

- $x_{n_k}$ es monótona.
- $x_{n_k}$ deja fuera una cantidad finita de términos de $x_n$.

¿Se puede concluir que $x_n$ es monótona?

*Solución.* No. Consideremos $x_n = \sqrt[n]{n}$ es estricamente decreciente con $n \geq 3$. Notar que $x_1 = 1$, y $x_2 = \sqrt{2} > \sqrt{1} = 1$, por lo que $x_n$ no es decreciente ni creciente (ya que $x_3 > x_4$). Pero vieron en clase que $\{x_n\}_{n\geq 3}$ es monótona (y además deja solo 2 términos fuera), por lo que se cumplen las condiciones del enunciado. ∎

2) Muestre que $x_n$ es monótona si y solo si todas las $x_{n_k}$ también son monótonas.

*Demostración.* Probaremos la doble implicancia.
$\boxed{\Leftarrow}$ Notar que $x_n$ es subsucesión de $x_n$, por lo que tenemos directamente lo pedido.
$\boxed{\Rightarrow}$ Asumamos que $x_n$ es creciente (el otro caso es análogo). Luego, para todos $k, j$, se cumple $k < j \Rightarrow x_k \leq x_j$. Consideremos $x_{n_k}$ y tomemos dos términos consecutivos $x_{n_a}$ y $x_{n_{a+1}}$. Como $x_{n_k}$ es subsucesión, tenemos que $n_a < n_{a+1}$. Luego, como $x_n$ es creciente, tenemos que $n_a < n_{a+1} \Rightarrow x_{n_a} \leq x_{n_{a+1}}$. Como esto se cumple para cualquier $a$, tenemos que $x_{n_k}$ es creciente, y por lo tanto monótona.

Probando ambas implicancias, tenemos lo pedido. ∎

3) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente. Muestre que $x_f + y_f$ es subsucesión de $(x+y)_n$.

*Demostración.* Recordemos que $\{(x+y)_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ estaba definida como $(x+y)_n = x_n + y_n$. Luego, $(x+y)_f$ es una subsucesión de $(x+y)_n$ (por def. de subsucesión). Pero $(x+y)_f = x_f + y_f$, que era lo que buscábamos.

Por lo tanto, $x_f + y_f$ es subsucesión de $(x+y)_n$ ∎

4) Sea $x_n$ una sucesion. Muestre que una subsucesión de una subsucesión de $x_n$ también es una subsucesión de $x_n$.

*Demostración.* Tenemos que una subsucesión de $x_n$ está definida por un conjunto $S_1 \subset \mathbb{N}$ infinito de índices. Luego, la subsucesión de la subsucesión toma $S_2 \subset S_1$ infinito de índices. Luego, por transitividad, tenemos que $S_2 \subset \mathbb{N}$, que era la condición faltante para mostrar que es subsucesión de $x_n$. Por lo tanto, tenemos lo pedido. ∎

5) Supongamos que $x_n$ tiene una cantidad finita de $x_{n_k}$ distintas. Pruebe que $x_n$ es eventualmente constante (es decir, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = c$ para todo $n \geq k$ y $c$ fijo).

*Demostración.* Probaremos la contrarrecíproca. Supongamos que $x_n$ no es eventualmente constante. Consideremos $S = \{x \in \mathbb{R} : \exists n : \ x_n = x\}$. Tenemos dos casos:

- $S$ es infinito: Para cada elemento $x$ de $S$ existe un $(n_0, x)$ tal que $x_{(n_0,x)} = x$ y $x_k \neq x$ para cada $k < (n_0, x)$ ($(n_0, x)$ existe por buen orden). Ahora, consideremos las subsucesiones $\{x_n\}_{n \geq (n_0,x)}$ para cada $x$. Como hay infinitos $x$ en $S$ hay infinitas subsucesiones, y por construcción todos los primeros términos de las subsucesiones son distintos entre sí. Esto implica que existen infinitas subsucesiones distintas.

- $S$ es finito. Sean $s_1, s_2, \ldots, s_k$ los elementos de $S$. Notemos que uno de estos elementos aparece infinitas veces en la sucesión. Si esto no pasara, entonces $s_1$ aparece $c_1$ veces, $s_2$ aparece $c_2$ veces, y así sucesivamente hasta $s_k$. Pero entonces $x_n$ tendría una cantidad finita de términos $\left(\sum_{i=1}^{k} c_i\right)$, $\rightarrow\leftarrow$.

Digamos que $s_1$ es el término que aparece infinitas veces (los otros casos son análogos). Ahora, consideremos las sucesiones formadas por $k$ veces $s_1$, un elemento distinto de $s_1$ y todos los elementos a partir de ese. Estamos tomando infinitos términos, por lo que el único problema que podríamos llegar a tener es que no exista un elemento distinto de $s_1$ para elegir. Pero si eso pasara tendríamos que la sucesión es eventualmente constante (ya que desde un índice en adelante todos los términos serían $s_1$), $\rightarrow\leftarrow$.

Como para cada $k$ natural podemos construir la subsucesión, y todas las subsucesiones son distintas entre sí (por la cantidad de términos iguales a $s_1$ al inicio), tenemos que existen infinitas subsucesiones distintas.

Uniendo los casos, tenemos lo pedido. $\blacksquare$