Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° semestre 2020

Ayudantía 06

07 de Abril

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Sea a una constante real. Encuentre el conjunto solución de

$$\frac{|x-a|}{|x+a|} > 1.$$

Solución. Notar que $x \neq -a$ (ya que el denominador se vuelve 0). Luego, $|x+a|$ siempre es positivo, por lo que multiplicando por $|x+a|$ a ambos lados se tiene que lo anterior es equivalente a

$$|x-a| > |x+a|.$$

Como ambos términos son positivos, elevar al cuadrado no modifica nuestras soluciones:

$$|x-a|^2 > |x+a|^2.$$

Como $|x|^2 = x^2$, sacando el módulo y expandiendo los cuadrados se llega a

$$x^2 - 2ax + a^2 > x^2 + 2ax + a^2.$$

Sumando $-(x^2 - 2ax + a^2)$ y simplificando se tiene que

$$0 > 4ax \Leftrightarrow 0 > ax$$

Desde aquí dependemos de a:

- Si $a = 0$, tendríamos que $0 > 0$, $\rightarrow\leftarrow$. Por lo tanto, en este caso no hay soluciones.
- Si $a > 0$, entonces $a^{-1} > 0$, lo que implica en la inecuación anterior que $0 > x$. Luego, las soluciones son $\{x \in \mathbb{R} : \ x < 0 \wedge x \neq -a\}$ (el conjunto $(-\infty, 0) \backslash \{-a\}$).

- Si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$, por lo que la inecuación es equivalente a $0 < x$. Aquí las soluciones son $\{x \in \mathbb{R} : \ x > 0 \wedge x \neq -a\}$ (el conjunto $(0, \infty) \setminus \{-a\}$).

Uniendo los casos tenemos lo pedido. ■

2) Encuentre el conjunto solución de:

a) $\sqrt{x^2 - 4} \leq x$.

Solución. Notemos que $x^2 - 4 \geq 0$ por definición de raíz. Luego, x no es solución cuando $x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow x \in (-2, 2)$. Por otro lado, x no puede ser negativo si es solución (implicaría que $\sqrt{x^2 - 4} < 0$), así que x no es solución si $x \in (-\infty, 0)$. Uniendo ambas partes, tenemos que x no es solución si $x \in (-\infty, 2)$.

Ahora, $0 \leq \sqrt{x^2 - 4} \leq x$. Esto implica que la desigualdad anterior es equivalente a

$$(x^2 - 4) \leq x^2 \Leftrightarrow 0 \leq 4.$$

Luego, tenemos que cualquier valor de x válido es solución, por lo que el conjunto solución es $[2, \infty)$. ■

b) $\sqrt[3]{x^3 - 8} \leq x$.

Solución.

$$(-1)^3 = -1 \Rightarrow \sqrt[3]{-1} = -1$$

Sabemos que $a \leq b \Leftrightarrow a^3 \leq b^3$ (por ayudantía). Luego, la inecuación anterior es equivalente a $x^3 - 8 \leq x^3 \Leftrightarrow 0 \leq 8$.

Por lo tanto, todos los valores reales de x son solución. ■

¿Cuál es la diferencia entre ambas inecuaciones? *Como la primera inecuación tiene una raíz par, existen restricciones para x, mientras que en la segunda no existen restricciones ya que la raíz es impar.*

3) Encuentre el conjunto solución de:

a) $x^2 - 20x + 91 > 0$.

Solución. Notar que $-13-7=-20$ y que $-13\cdot -7=91$, asi que $x^2-20x+91=(x-13)(x-7)$. Luego, nuestra inecuación es equivalente a ver que

$$(x-13)(x-7)>0.$$

Como el producto de dos números es positivo, ambos deben tener el mismo signo: Esto nos da dos opciones:

- $x-13>0$ y $x-7>0$. Esto implica que $x>13$ y $x>7$. Luego, x es solución si $x>13$ (lo mismo que decir $x\in(13,\infty)$).
- $x-13<0$ y $x-7<0$. Esto implica que $x<13$ y $x<7$. Luego, x es solución si $x<7$ (lo mismo que decir que $x\in(-\infty,7)$).

Uniendo los casos, nuestra solución sería $\{x\in\mathbb{R} : x<7\vee\, x>13\}$. ■

b) $x^3-20x^2+91x>0$.

Solución. Notar que $x^3-20x^2+91x = x(x^2-20x+91) = x(x-7)(x-13)$. Luego, nuestra inecuación es equivalente a

$$x(x-7)(x-13)>0.$$

Como necesitamos que el producto de estos términso sea positivo, podemos revisar los casos usando una tabla:

	$(-\infty,0)$	$(0,7)$	$(7,13)$	$(13,\infty)$
x	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-13$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x(x-7)(x-13)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Así, nuestra solución es $(0,7)\cup(13,\infty)$ ■

c) $x^4-20x^2+91>0$.

Solución. Notar que $x^4-20x^2+91=(x^2-13)(x^2-7)$. Por el problema a), sabemos que esto pasa si y solo si $x^2<7$ o $x^2>13$. Sabemos que $x^2<7$ ssi $x\in(-\sqrt{7},\sqrt{7})$. También sabemos que $x^2>13$ cuando $x\in(-\infty,-\sqrt{13})\cup(\sqrt{13},\infty)$. Luego, nuestra solución a la inecuación viene de unir todos los casos. Es decir, $(-\infty,-\sqrt{13})\cup(-\sqrt{7},\sqrt{7})\cup(\sqrt{13},\infty)$. ■

¿Cuál es la diferencia entre estas inecuaciones? *La primera y segunda ecuación son completamente distintas, ya que el factor extra en la segunda inecuación hace que el conjunto solución cambie. Por otro lado, como la tercera inecuación se puede escribir de una forma similar, el conjunto solución de la tercera inecuación se puede encontrar a partir de las soluciones ya encontradas en la primera inecuación.*

4) Encuee entre el conjunto solución de

$$\frac{x+4}{x+2} \geq \frac{x+3}{x+1}.$$

Demostración. $x \neq -2, -1$ (ya que un denominador se haría 0). Ahora, sumando $-\frac{x+3}{x+1}$ a ambos lados y sumando las fracciones, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{x+4}{x+2} \geq \frac{x+3}{x+1} &\Leftrightarrow \frac{(x+4)(x+1)-(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+1)} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2+5x+4-(x^2+5x+6)}{(x+2)(x+1)} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow -\frac{2}{(x+1)(x+2)} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)(x+2)} \leq 0.
\end{aligned}$$

Como $2 > 0$, nos basta ver que $(x+1)(x+2) \leq 0$. Como no puede ser 0 (por ser un denominador), es equivalente a ver $(x+1)(x+2) < 0$. Esto pasa cuando $-2 < x < -1$ ($x+2 > x+1$, por lo que necesitamos que $x+2 > 0$ y $x+1 < 0$), por lo que la solución que buscamos es $(-2, -1)$. ∎

5) *(I3 2017)* Sea $z > 0$ fijo, y sea A_z el conjunto solución de la inecuación

$$|x^2 + zx + z^2| \leq zx + 2z^2.$$

Pruebe que si $0 < z_1 < z_2$, entonces $A_{z_1} \subset A_{z_2}$.

Demostración. Sabemos que $x^2 + zx + z^2$ siempre es positivo. Luego, nuestra inecuación es equivalente a

$$x^2 + zx + z^2 \leq zx + 2z^2 \Leftrightarrow x^2 \leq z^2$$

Sabemos que la solución a $x^2 \leq z^2$ es $[-z, z]$.

Si $z_1 < z_2$, entonces $-z_1 > -z_2$. Si $x \in A_{z_1}$, por definición eso implica que

$$-z_1 \leq x \leq z_1.$$

Juntando esto con las desigualdades anteriores, tenemos que

$$-z_2 < -z_1 \leq x \leq z_1 < z_2 \Rightarrow -z_2 \leq x \leq z_2 \Rightarrow x \in A_{z_2},$$

que era lo que queríamos probar.

$\blacksquare$