Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° semestre 2020

Límites

25 de Mayo

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1. Calcule los siguientes límites, o muestre que no existen.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-1}$.

Hint: $1 = -2 + 1$.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n}$.

Hint: $(n+1)^2 > n$.

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n}$.

Hint: $|\sin(n)| < 2$.

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n}$.

Hint: $|\cos(n)| < 2$.

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Hint: Intente dejar las raices en el denominador.

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_j n^j + a_{j-1}x^{j-1} + \cdots + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_0}$, donde $k, j \in \mathbb{N}$ *(TODOS los casos).*

Hint: Factorice por n^j.

g $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Hint: Telescópica.

h $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}.$$

Hint: Transfórmelo a una serie geométrica.

i $$\lim_{n\to\infty} \frac{2020^n}{n!}.$$

Hint: Para un n suficiente grande, $\frac{2020}{n} < \frac{1}{2}$.

j $$\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{n!}, \text{ con } k \in \mathbb{N} \text{ fijo.}$$

Hint: Desde un n suficientemente grande, $\frac{k}{n} < \frac{1}{2}$.

k $$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n-2)}{n}.$$

Hint: $\frac{n-2}{n} = 1 - \frac{2}{n}$.

2 Sea $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Pruebe que $\lim_{n\to\infty} x_{n+p} - x_n = 0$ para cualquier $p \in \mathbb{N}$ fijo.

Hint: Hay una cantidad p de términos siempre, por lo que se pueden acotar por arriba.

3 Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de enteros que converge a algún real L. Pruebe que la sucesión eventualmente se vuelve constante.

Hint: Si la sucesión converge y L no es entero, entonces en un punto tiene que estar entre la brecha formada por $\lfloor L \rfloor$ y $\lceil L \rceil$.

4 *(Convergencia de Cesàro)* Sea $\{x_n\}$ una sucesión. Sea $c_n = \frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}$.

(a) Encuentre una sucesión x_n tal que x_n no converja, pero $c_n \to L \in \mathbb{R}$.

Hint: Hay sucesiones oscilantes vistas en clase/taller/ayudantía que cumplen esto.

(b) Muestre que si $x_n \to 0$, entonces $c_n \to 0$.

Hint: Por desigualdad triangular, basta ver que para $|x_n|$ se cumpla. Además, dado un $2 \cdot \varepsilon$ fijo, existe un n_0 tal que los términos desde n_0 en adelante están acotados por ε. Intente acotar los OTROS (desde x_1 hasta x_{n_0-1}).

(c) Muestre que si $x_n \to L$ con $L \in \mathbb{R}$, entonces $c_n \to L$.

Hint: Use el problema anterior.

5. Sea n natural. Sea la función $\sigma_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que para cada natural entrega su cantidad de divisores (por ejemplo, $\sigma_0(1) = 1$, $\sigma_0(3) = 2$, $\sigma_0(6) = 4$ y $\sigma_0(2020) = 12$). También definimos $\sigma_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que para cada natural entrega la suma de sus divisores (por ejemplo, $\sigma_1(1) = 1$, $\sigma_1(3) = 4$, $\sigma_1(6) = 12$ y $\sigma_1(2020) = 4284$).

(a) Muestre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_0(n)}{n^2} = 0$.

Hint: En el peor caso hay n divisores.

(b) Muestre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_1(n)}{n^3} = 0$.

Hint: Cada divisor es a lo más n. Use esto con el hint anterior.

(c) Muestre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_0(n)}{n} = 0$.

Hint: Intente acotar $\sigma_0(n)$ por $2\sqrt{n}$ viendo el peor caso.