Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° semestre 2020

Ayudantía 25

30 de Junio

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Sean A, B conjuntos no vacíos y acotados superiormente. Definimos

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Pruebe que $\sup A + B = \sup A + \sup B$.

Demostración. Recordemos que s es supremo de X si y solo si s es cota superior, y para todo $\varepsilon > 0$, existe un $x \in X$ tal que

$$s - \varepsilon < x.$$

Sea s_A supremo de A, s_B supremo de B (existen por axioma del supremo). Como son cotas superiores, tenemos que

$$a \leq s_A, \qquad b \leq s_B$$

para todo a, b en A, B respectivamente. Luego, $a + b \leq s_A + s_B$ para todo a, b en el conjunto respectivo. Esto nos dice que $s_A + s_B$ es cota superior.

Como s_A es supremo de A, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $a \in A$ tal que

$$s_A - \varepsilon < a.$$

Análogamente, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $b \in B$ tal que

$$s_B - \varepsilon < b.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Tomando $\varepsilon/2$ en ambos resultados de arriba y sumando, se tiene que existen a, b tales que

$$(s_A + s_B) - \varepsilon < a + b.$$

Esto nos dice que $s_A + s_B$ es supremo de $A + B$, lo que concluye la demostración. ∎

2) Sea x un número real, $0 < x < 1$. Sea α un real positivo. Demuestre que

$$\inf\{x^q : q \in \mathbb{Q}, q < \alpha\} = \frac{1}{\sup\{(1/x)^q : \; q \in \mathbb{Q}, q < \alpha\}}.$$

Concluya que si $(\rho_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de racionales que tiende a α entonces

$$\lim_{j\to\infty} x^{\rho_j} = \frac{1}{(1/x)^\alpha}.$$

Demostración. Sea ρ_n una sucesión de racionales que converge a α. Por propiedad vista en clase, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}(1/x)^{\rho_n} = \sup\{(1/x)^q : \; q \in \mathbb{Q}, q < \alpha\}$$

Esto implica que

$$\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1/x)^{\rho_n}} = \frac{1}{\sup\{(1/x)^q : \; q \in \mathbb{Q}, q < \alpha\}}.$$

Por otro lado,

$$\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1/x)^{\rho_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1/x)^{\rho_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/x^{\rho_n}} = \lim_{n\to\infty} x^{\rho_n},$$

donde los últimos dos pasos se tienen ya que ρ_n es racional. Como $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\rho_n} \to \inf\{x^q : q \in \mathbb{Q}, q < \alpha\}$ por definición, tenemos la igualdad buscada. Para el corolario, basta aplicar las definiciones y ver que

$$\lim_{j\to\infty} x^{\rho_j} = \inf\{x^q : q \in \mathbb{Q}, q < \alpha\} = \frac{1}{\sup\{(1/x)^q : \; q \in \mathbb{Q}, q < \alpha\}} = \frac{1}{(1/x)^\alpha}.$$

∎

3) Sea $a > 1$. Definimos el logaritmo en base a de $x > 0$ como

$$\log_a(x) = \sup\{q \in \mathbb{Q} : a^q < x\}$$

Muestre que este supremo siempre existe.

Demostración. Notar que el conjunto es no vacío, ya que $a^{-n} = (1/a)^n \to 0$, por lo que tomando $\varepsilon = x$ se tiene que existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $a^{-n} = |a^{-n}| < \varepsilon = x$.

Falta ver que el conjunto está acotado superiormente. Para esto, notar que tomando q natural, por Bernoulli se tiene

$$a^q = (1 + (a-1))^q \geq 1 + q(a-1).$$

Ahora, por arquimediana, sabemos que existe un q_0 natural tal que

$$1 + q_0(a-1) > x.$$

Por transitividad, se tiene que $a^{q_0} > x$. Ahora, si $q > q_0$ es racional, se tiene que

$$(q - q_0) > 0 \Rightarrow a^{q-q_0} > 1 \Rightarrow \frac{a^q}{a^{q_0}} > 1 \Rightarrow a^q > a^{q_0} > x,$$

por lo que q_0 es efectivamente cota superior. Por lo tanto, por axioma del supremo el supremo existe. ∎

4) Pruebe que el logaritmo definido arriba cumple

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

Sea $x_0 = \log_a(x)$. Por definición de supremo, existe una sucesión de racionales x_n tal que $a^{x_n} < x$ y $x_n \to x_0$. Análogamente, existe una sucesión y_n de racionales tal que $a^{y_n} < y$ y $y_n \to y_0$, donde $y_0 = \log_a(y)$. Luego, $x_n + y_n$ converge a $x_0 + y_0$, y además cumple que

$$a^{x_n+y_n} = a^{x_n}a^{y_n} < xy.$$

Basta mostrar que $x_0 + y_0$ es cota superior. Para esto, supongamos que existe $z > x_0 + y_0$ racional tal que

$$a^z < xy.$$

Podemos escribir $z = x_0 + y_0 + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$. Luego,

$$a^\varepsilon a^{x_0} a^{y_0} < xy.$$

Pero el supremo cumple $a^{x_0} = x, a^{y_0} = y$ (por convergencia). Esto implica que

$$a^\varepsilon < 1.$$

Pero $\varepsilon > 0$ y $a > 1$, $\rightarrow\leftarrow$.

Por lo tanto, $x_0 + y_0 = \log(xy)$, que es lo que queríamos probar.