Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° semestre 2020

Ayudantía 04

31 de Marzo

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Sean a, b dos números tales que

$$ab = 1.$$

Demuestre que

$$a^2 + b^2 \geq 2.$$

Demostración. Notar que

$$(a - b)^2 \geq 0$$

por ser el cuadrado de un real. Expandiendo, se tiene que lo anterior es equivalente a

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

Reemplazando ab por 1, tenemos que

$$a^2 - 2 + b^2 \geq 0$$

Finalmente, sumando 2 a ambos lados se llega a

$$a^2 + b^2 - 2 + 2 \geq 2 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2,$$

que es lo que se quería probar. ∎

2) Sean a, b reales.

a) Muestre que $a^2 + ab + b^2 \geq 0$, y determine cuando se cumple la igualdad.
Nota: Probar lo que nos piden es equivalente a probar

$$2(a^2 + ab + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + (a + b)^2 \geq 0$$

Demostración. Notar que $a^2 + b^2 + (a + b)^2 \geq 0$ por ser la suma de cuadrados. Expandiendo el lado izquierdo, tenemos que

$$a^2 + b^2 + a^2 + 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + ab) \geq 0.$$

Como 2 es positivo, 2^{-1} también lo es, por lo que multiplicar por 2^{-1} no cambia el sentido de la desigualdad. Así, la desigualdad anterior implica

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0.$$

Para ver la igualdad basta ver que tendría que tener la igualdad en

$$a^2 + b^2 + (a + b)^2 \geq 0,$$

lo que implica directamente que $a = b = 0$. ■

b) Muestre que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Demostración. Notar que

$$\begin{aligned}
(a - b)(a^2 + ab + b^2) &= a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2) \\
&= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 \\
&= a^3 + b^3 + a^2b - a^2b + ab^2 - ab^2 \\
&= a^3 - b^3,
\end{aligned}$$

que es lo que buscábamos. ■

c) Concluya que $a^3 > b^3$ si y solo si $a > b$.

Demostración. Notar que $a^3 > b^3$ si y solo si $a^3 - b^3 > 0$. Esto es equivalente a ver que $(a - b)(a^2 + ab + b^2) > 0$. Como el factor derecho no es 0 (si lo fuera, entonces $a = b = 0$, lo que implica que $a^3 = b^3 = 0$, $\rightarrow\leftarrow$), ver que $(a - b)(a^2 + ab + b^2) > 0$ es equivalente a ver que $(a - b) > 0$ (basta multiplicar por $(a^2 + ab + b^2)^{-1} > 0$ a ambos lados), que pasa si y solo si $a > b$.

Como solo usamos equivalencias los pasos son reversibles, por lo que se concluye lo pedido. ■

3) Demuestre que

$$x^2 = |x^2| = |x|^2.$$

Demostración. Notar que $x^2 \geq 0$ por ser el cuadrado de un real, por lo que $|x^2| = x^2$ por definición. Por otro lado, notar que

$$|x^2| = |x \cdot x| = |x| \cdot |x| = |x|^2,$$

ya que el valor absoluto separa la multiplicación.

Por lo tanto, tenemos que $x^2 = |x^2| = |x|^2$, que es lo que queríamos probar. ∎

4) ¿Bajo qué condiciones $|x+y| = |x| + |y|$?

Demostración. Notar que $|x+y| = |x|+|y|$ si y solo si $|x+y|^2 = (|x|+|y|)^2$. Luego, solo basta ver que el lado izquierdo queda como

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

mientras que el lado derecho queda como

$$(|x|+|y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = x^2 + y^2 + 2|xy|.$$

Así, la igualdad que buscamos se cumple si y solo si

$$x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 + 2|xy|,$$

lo que es equivalente (después de cancelar) a

$$xy = |xy|,$$

lo que sucede si y solo si $ab \geq 0$. Como solo usamos equivalencias, encontrar las condiciones para que $|x+y| = |x|+|y|$ es equivalente a encontrar cuando se cumple $xy = |xy|$, por lo nos concentraremos en esto. Por definición, $|xy| = xy$ solo si $xy \geq 0$. Desde aquí tenemos dos casos:

- $xy = 0$. Esto implica directamente que $x = 0$ o $y = 0$ (no son mutuamente excluyentes).
- $xy > 0$. Por propiedades vistas en clase (el producto de un negativo por un positivo es negativo, y el producto de dos números negativos es positivo), tenemos que x e y debe tener el mismo signo.

Por lo tanto, para que $|x+y| = |x| + |y|$ ambos números deben tener el mismo signo, o al menos uno debe ser 0. $\blacksquare$

5) Sean a, b, c, d reales tales que $|a| \neq |c|$. Demuestre que la ecuación

$$|ax+b| = |cx+d|$$

tiene a lo más dos soluciones.

Demostración. Notar que $|ax+b| = ax+b$ o $|ax+b| = -(ax+b)$. Del mismo modo, $|cx+d| = cx+d$ o $|cx+d| = -(cx+d)$. Luego, a priori tendríamos 4 casos:

- $ax+b = cx+d$.
- $-(ax+b) = -(cx+d)$.
- $ax+b = -(cx+d)$.
- $-(ax+b) = cx+d$.

Notar que el primer y segundo caso son equivalentes entre si, mientras que el tercer y cuarto caso son equivalentes entre si. Falta ver los casos:

$$ax+b = cx+d \Rightarrow (a-c)x = d-b.$$

Como $|a| \neq |c|$, $a-c$ no es 0, por lo que se puede dividir, quedando

$$x = \frac{d-b}{a-c}.$$

Análogamente, la solución al tercer caso sería

$$x = -\frac{b+d}{a+c}.$$

Por lo tanto, $|ax+b| = |cx+d|$ tiene a lo más dos soluciones, que es lo que queríamos probar. $\blacksquare$

Nota: Es importante destacar que lo que probamos es lo siguiente: Si existen x que cumplen la ecuación, entonces $x = \frac{d-b}{a-c}$ *y/o* $x = -\frac{b+d}{a+c}$. *Eso no implica que esas sean realmente soluciones, por lo que no podemos decir que existen exactamente dos soluciones.*