Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° semestre 2020

Ayudantía 07

14 de Abril

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Demuestre por inducción que $n^2 \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por inducción:
Caso base ($n = 1$): $1^2 \geq 1$ se cumple.
Hipótesis inductiva: Supongamos que se cumple para k, es decir: $k^2 \geq k$ para algún k.
Notemos que $(k+1)^2 = k^2+2k+1$. Sabemos que $k^2 \geq k$ (por hipótesis), y además $2k+1 \geq 1$ (ya que k es natural). Luego, por transitividad tenemos que

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \geq k + 1,$$

que es lo que buscábamos.

Por lo tanto, tenemos lo pedido para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

2) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$,

a)
$$\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1} - 1} + \frac{1}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2}.$$

Demostración. El lado izquierdo se puede escribir como

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n + k}$$

Notar que para todo $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$, tenemos que

$$2^n + k \leq 2^n + 2^n \Rightarrow \frac{1}{2^n + k} \geq \frac{1}{2^{n+1}}$$

Luego, usando transitividad una cantidad finita de veces, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n + k} \geq \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}(2^n - 1 + 1) = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

∎

b)

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

Demostración. Usando inducción:
Caso base ($n = 1$): $1 + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{2}$ se cumple.
Hipótesis inductiva: Supongamos que para algún k se cumple que

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + \frac{k}{2}.$$

Ahora, notar que

$$\sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} + \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i}.$$

Sabemos que la primera suma está acotada por $1 + \frac{k}{2}$ (por hipótesis).
Por otro lado, notar que

$$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} = \sum_{i=2^k+1-2^k}^{2^{k+1}-2^k} \frac{1}{(i + 2^k)} = \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{2^k + i} \geq \frac{1}{2},$$

donde las igualdades se tienen por cambio de índice y la desigualdad por la parte a). Así, se tiene

$$\sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} + \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k+1}{2},$$

que es lo que buscábamos.

Por lo tanto, por inducción se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

3) Demuestre que para todo $n \geq 2$ natural se cumple que

$$\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

Demostración. Denotemos como $S_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k+i}$. Luego,

$$S_{k+1} - S_k = \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}\right) - \frac{1}{k+1}.$$

Así, si $S_k > \frac{13}{24}$, solo necesitamos probar que $\left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}\right) - \frac{1}{k+1} \geq 0$ para ver que $S_{k+1} \geq \frac{13}{24}$. Luego, usando inducción:

Caso base ($n = 2$): $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$, por lo que se cumple.

Hipótesis inductiva: Supongamos que se cumple para k, es decir $S_k > \frac{13}{24}$. Ahora, solo necesitamos notar que

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}\right) - \frac{1}{k+1} &= \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}\right) - \frac{2}{2k+2} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k+2}}_{=0} \\ &> 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $S_{k+1} = S_k + \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}\right) - \frac{1}{k+1} > \frac{13}{24} + 0 = \frac{13}{24}$, que es lo que buscábamos.

Por lo tanto, por inducción tenemos lo pedido para todo $n \in \mathbb{N} \geq 2$. ■

4) Sea $n \in \mathbb{N}, x > 0$. Pruebe que

$$\frac{(x+1)^{n+1} - x^{n+1}}{n+1} \geq x^n.$$

Demostración. Notar que

$$\begin{aligned}\frac{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}{n+1} \geq x^n &\Leftrightarrow (x+1)^{n+1}-x^{n+1} \geq (n+1)x^n \\ &\Leftrightarrow (x+1)^{n+1} \geq x^{n+1} + (n+1)x^n \\ &\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1} \geq 1+(n+1)\left(\frac{1}{x}\right),\end{aligned}$$

donde el último paso se tiene dividiendo todo por $x^{n+1} > 0$. Como el último paso es cierto por Bernoulli y los pasos son reversibles, se tiene lo pedido. ∎

5) Sean $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$. Muestre que existe una constante C positiva tal que $\alpha^n > Cn$ para todo n.

Demostración. Notar que $\alpha = 1 + (\alpha - 1)$. Como $\alpha > 1$, $\alpha - 1 > 0 > -1$, por lo que usando Bernoulli tenemos que

$$\alpha^n = (1 + (\alpha - 1))^n \geq 1 + n(\alpha - 1) > n(\alpha - 1).$$

Por transitividad, esto implica que $\alpha^n > (\alpha - 1)n$, que es lo que buscábamos ($C = \alpha - 1 > 0$). ∎