Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° semestre 2020

Ayudantía 19

09 de Junio

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Muestre que si $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq x_n \leq \frac{1}{n}$ para todo n natural, entonces $x_n \to 0$.

Demostración. Sabemos que $\frac{1}{n} \to 0$. Además, $\sqrt{n} \to \infty$, por lo que $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ y $-\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$. Luego, usando Sandwich se tiene $x_n \to 0$. ■

2) Analice la convergencia de las siguientes sucesiones:

a) $x_n = n^5 + n^4 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$.

Demostración. Notar que $x_n \geq n^5 - n^4 = n^4(n-1)$. Como $n-1 \to \infty$ y $n^4 \geq 1$, entonces $n^5 - n^4 \to \infty$. Esto implica directamente que $x_n \to \infty$. ■

b) $x_n = \frac{n^5 + n^4 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n^4+1}$.

Demostración. Notar que $x_n \geq \frac{n^5-n^4}{n^4+1}$. Como el numerador tiene grado mayor y los coeficientes líderes del numerador y denominador son positivos, entonces $\frac{n^5-n^4}{n^4+1} \to \infty$, por lo que $x_n \to \infty$. ■

3) Sea $k_1, k_2, \ldots, k_j > 1$ fijos.

a) Muestre que

$$\min\{k_1, \ldots, k_j\} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k_1^n + \ldots + k_j^n} \leq \max\{k_1, \ldots, k_j\}$$

Demostración. Notar que

$$\sqrt[n]{k_1^n + \ldots + k_j^n} \geq \sqrt[n]{(\min\{k_1, \ldots, k_j\})^n} = \min\{k_1, \ldots, k_j\}.$$

Sea $M = \text{máx}\{k_1, \ldots, k_j\}$. Luego,

$$\sqrt[n]{k_1^n + \ldots + k_j^n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{M^n + \ldots + M^n}}_{j \ veces} = \sqrt[n]{jM^n} = M\sqrt[n]{j}$$

Juntando ambas partes, tenemos que

$$\text{mín}\{k_1, \ldots, k_j\} \leq \sqrt[n]{k_1^n + \ldots + k_j^n} \leq \text{máx}\{k_1, \ldots, k_j\} \cdot \sqrt[n]{j}.$$

Como ambos extremos convergen (mín y máx son constantes, $\sqrt[n]{j} \to 1$, aplicando límite tenemos que

$$\text{mín}\{k_1, \ldots, k_j\} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k_1^n + \ldots + k_j^n} \leq \text{máx}\{k_1, \ldots, k_j\},$$

que es lo que buscábamos. ∎

b) Muestre que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k_1^n + \ldots + k_j^n} = \text{máx}\{k_1, \ldots, k_j\}$$

Demostración. Directo desde la parte a) dejando el máximo en vez del mínimo en la primera desigualdad. ∎

4) Sean a, b naturales. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{n}\left\lfloor \dfrac{n}{b} \right\rfloor$, donde $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x.

Demostración. Sabemos que

$$\frac{n}{b} - 1 \leq \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor \leq \frac{n}{b}$$

Multiplicando por $\frac{a}{n} > 0$, se tiene

$$\frac{a}{b} - \frac{a}{n} = \frac{an}{bn} - \frac{a}{n} = \frac{a}{n}\left(\frac{n}{b} - 1\right) \leq \frac{a}{n}\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor \leq \frac{an}{bn} = \frac{a}{b}$$

Como $\frac{a}{n} \to 0$ y $\frac{a}{b}$ es constante, por Sandwich tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{n}\left\lfloor \dfrac{n}{b} \right\rfloor = \dfrac{a}{b}$. ∎