Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° semestre 2020

Ayudantía 24

25 de Junio

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Sea $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$. Demuestre que $10x = a_1, a_2 a_3 a_4 \ldots$.

Demostración. Tenemos que

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
10x &= 10 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^{k-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^{k-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} a_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{10^{k-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{10^{k}} \\
&= a_1 + 0, a_2 a_3 a_4 \ldots \\
&= a_1, a_2 a_3 a_4 \ldots,
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. ∎

2) Demuestre que la expansión decimal de un número $x \in [0, 1)$ es finita ssi $x = p/q$, donde $(p, q) = 1$ y q solo tiene a 2 y 5 como factores primos.

Demostración. Probaremos ambas implicancias por separado.
$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $x = 0, a_1 a_2 \ldots a_j$. Multiplicando por 10^j a ambos lados, se tiene $10^j x = k$, donde $k = a_1 a_2 \ldots a_j \in \mathbb{N}$. Esto implica que $x = k/10^j$. Simplificando ambos términos por $(10^j, k)$ se tiene lo pedido.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $x = p/q$, con $(p, q) = 1$ y $0 \leq p < q$. Como q solo tiene a 2 y 5 como factores primos, entonces $q = 2^a 5^b$. Sin perder generalidad, $a < b$ (el otro caso es análogo). Amplificando por 2^{b-a}, tenemos que

$$x = \frac{2^{b-a} p}{10^b}$$

Como el denominador es una potencia de 10, esta es una expansión finita, que es lo que buscábamos.

Habiendo probado ambas partes, tenemos la equivalencia pedida. ∎

3) Muestre que si q es divisible por 7, entonces la expansión decimal de p/q (con $(p, q) = 1$) es única.

Demostración. Por la pregunta 2), no tiene expansiones finitas. Como tiene una única expansión infinita, tenemos que la expansión es única, que es lo que queríamos demostrar. ∎

4) Muestre que $\mathbb{Q}^c$ es denso en $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea x real. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, existe una sucesión de racionales q_n que converge a $x - \sqrt{2}$. Luego, $q_n + \sqrt{2} \to (x - \sqrt{2}) + \sqrt{2} = x$. Notar que $q_n + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}^c$. En caso contrario, $q_n + \sqrt{2} = k$ con $k \in \mathbb{Q}$, lo que implica $\sqrt{2} = k - q_n$, y por lo tanto es racional, $\rightarrow\leftarrow$.

Por lo tanto, para cada real tenemos una sucesión de irracionales convergente, lo que significa que los irracionales son densos. ∎