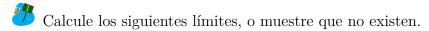
Pontificia Universidad Católica de Chile Facultad de Matemáticas 1° semestre 2020

## Límites

25 de Mayo MAT1106 - Introducción al Cálculo



$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2-1}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin(n)}{n}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\cos(n)}{n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_j n^j + a_{j-1} x^{j-1} + \dots + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_0}, \text{ donde } k, j \in \mathbb{N} \text{ (TODOS los casos)}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n\frac{1}{2^k}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2020^n}{n!}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k^n}{n!}, \text{ con } k\in\mathbb{N} \text{ fijo.}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n-2)}{n}.$$

- Sea  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Pruebe que  $\lim_{n \to \infty} x_{n+p} x_n = 0$  para cualquier  $p \in \mathbb{N}$  fijo.
- Sea  $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  una sucesión de enteros que converge a algún real L. Pruebe que la sucesión eventualmente se vuelve constante.
- (Convergencia de Cesàro) Sea  $\{x_n\}$  una sucesión. Sea  $c_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ .
  - Encuentre una sucesión  $x_n$  tal que  $x_n$  no converja, pero  $c_n \to L \in \mathbb{R}$ .
  - Muestre que si  $x_n \to 0$ , entonces  $c_n \to 0$ .
  - Muestre que si  $x_n \to L$  con  $L \in \mathbb{R}$ , entonces  $c_n \to L$ .
- Sea n natural. Sea la función  $\sigma_0: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$  que para cada natural entrega su cantidad de divisores (por ejemplo,  $\sigma_0(1) = 1$ ,  $\sigma_0(3) = 2$ ,  $\sigma_0(6) = 4$  y  $\sigma_0(2020) = 12$ ). También definimos  $\sigma_1: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ , que para cada natural entrega la suma de sus divisores (por ejemplo,  $\sigma_1(1) = 1$ ,  $\sigma_1(3) = 4$ ,  $\sigma_1(6) = 12$  y  $\sigma_1(2020) = 4284$ ).
  - Muestre que  $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_0(n)}{n^2} = 0.$
  - Muestre que  $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_1(n)}{n^3} = 0$ .
  - Muestre que  $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_0(n)}{n} = 0$ .