Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° semestre 2020

Ayudantía 03

26 de Marzo

MAT1106 - Introducción al Cálculo

0) Usando los axiomas de cuerpo y las propiedades vistas en clase, demuestre que $a(b-c) = ab - ac$.

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned} a(b-c) &= a(b+(-c)) && (Def.\ de\ resta) \\ &= ab + a(-c) && (Distributividad) \\ &= ab + a((-1)c) && (Visto\ en\ clase) \\ &= ab + (a(-1))c && (Asociatividad) \\ &= ab + ((-1)a)c && (Conmutatividad) \\ &= ab + (-1)(ac) && (Asociatividad) \\ &= ab + (-ac) && (Visto\ en\ clase) \\ &= ab - ac && (Def.\ de\ resta) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a(b-c) = ab - ac$, que es lo que se quería demostrar ■

1) Pruebe que si $-b < -a$, entonces $a < b$.

Demostración. Como $-b < -a$, entonces $-a - (-b) = -a + b$ es positivo. Como $-a + b = b - a$, entonces $b - a$ es positivo, por lo que por definición $a < b$, que es lo que queríamos probar. ■

2) Sean a, b, c, d reales tales que $a < b$ y $c < d$. Pruebe que $ad + bc < ac + bd$.

Probar $ad+bc < ac+bd$ es equivalente a probar que $0 < ac+bd-(ad+bc)$. Además, notar que $ac+bd-(ad+bc) = b(d-c)-a(d-c) = (b-a)(d-c)$. Con esto, podemos empezar la demostración.

Demostración. Notar que $0 < b - a$, y que $0 < d - c$. Como ambos son positivos, se tiene que:

$$\begin{aligned} & & 0 &< (b-a)(d-c) \\ \Leftrightarrow & & 0 &< b(d-c) - a(d-c) \\ \Leftrightarrow & & 0 &< bd - bc - ad + ac \\ \Leftrightarrow & & ad + bc &< ac + bd, \end{aligned}$$

ya que sumar una constante no cambia el signo de la desigualdad. Luego, tenemos que $ad + bc < ac + bd$, que es lo que queríamos demostrar. ∎

3) Demuestre que si $L - \varepsilon \leq M$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $L \leq M$.

Demostración. Supongamos que $L > M$. Esto implica que $L - M > 0$. Como $\frac{1}{2} > 0$, entonces $\frac{L-M}{2} > 0$. Usando $\varepsilon = \frac{L-M}{2} > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} & & L - \frac{L-M}{2} &\leq M & & \text{Como } 2 > 0 \\ \Rightarrow & & 2L - (L-M) &\leq 2M \\ \Rightarrow & & L &\leq M \end{aligned}$$

Pero habíamos asumido que $L > M$, $\rightarrow\leftarrow$.
Por lo tanto, $L \leq M$. ∎

4) Sea $\max\{a, b\}$ definido como sigue:

$$\max\{a, b\} = \begin{cases} a & \text{si } a \geq b \\ b & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que $\max\{a, b\} = \frac{|a-b|}{2} + \frac{(a+b)}{2}$.

Demostración. Notar que $|a - b| = |b - a|$. Luego, sin perder generalidad, supongamos que $a \geq b$. Tenemos entonces que $|a-b| = a-b$ y $\max\{a, b\} = a$. Luego, lo que nos piden probar es equivalente a probar que

$$a = \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2},$$

pero

$$\frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2} = \frac{(a-b) + (a+b)}{2} = \frac{2a}{2} = a.$$

Por lo tanto, tenemos la igualdad pedida. ∎

5) Muestre que $|x_1 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$ para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n$ (con $n \in \mathbb{N}$).

Demostración. Por inducción:

Caso base: $n = 1$ es trivial ($|x_1| \leq |x_1|$ siempre se cumple).
Caso base: $n = 2$ ($|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$) se tiene por desigualdad triangular.

Hipótesis: Supongamos que se cumple para k (es decir, $|x_1 + \ldots + x_k| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k|$).

Notar que $|x_1 + \ldots + x_k + x_{k+1}| = |(x_1 + \ldots + x_k) + x_{k+1}|$. Por desigualdad triangular, tenemos que

$$|x_1 + \ldots + x_k + x_{k+1}| \leq |x_1 + \ldots + x_k| + |x_{k+1}|$$

Por hipótesis inductiva, tenemos que

$$|x_1 + \ldots + x_k + x_{k+1}| \leq |x_1 + \ldots + x_k| + |x_{k+1}| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k| + |x_{k+1}|$$

Por transitividad, esto implica que

$$|x_1 + \ldots + x_k + x_{k+1}| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k| + |x_{k+1}|$$

Por lo tanto, por inducción tenemos lo pedido. ∎