Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° semestre 2020

Límites

25 de Mayo

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1. Calcule los siguientes límites, o muestre que no existen.

   a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^2-1}$.

   b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n+1}{n}$.

   c. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n)}{n}$.

   d. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(n)}{n}$.

   e. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

   f. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_j n^j + a_{j-1}x^{j-1} + \cdots + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_0}$, donde $k, j \in \mathbb{N}$ *(TODOS los casos)*.

   g. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$.

   h. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k}$.

   i. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2020^n}{n!}$.

   j. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k^n}{n!}$, con $k \in \mathbb{N}$ fijo.

   k. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi(n-2)}{n}$.

2 Sea $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+p} - x_n = 0$ para cualquier $p \in \mathbb{N}$ fijo.

3 Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de enteros que converge a algún real L. Pruebe que la sucesión eventualmente se vuelve constante.

4 *(Convergencia de Cesàro)* Sea $\{x_n\}$ una sucesión. Sea $c_n = \frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}$.

- **a** Encuentre una sucesión x_n tal que x_n no converja, pero $c_n \to L \in \mathbb{R}$.
- **b** Muestre que si $x_n \to 0$, entonces $c_n \to 0$.
- **c** Muestre que si $x_n \to L$ con $L \in \mathbb{R}$, entonces $c_n \to L$.

5 Sea n natural. Sea la función $\sigma_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que para cada natural entrega su cantidad de divisores (por ejemplo, $\sigma_0(1) = 1$, $\sigma_0(3) = 2$, $\sigma_0(6) = 4$ y $\sigma_0(2020) = 12$). También definimos $\sigma_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que para cada natural entrega la suma de sus divisores (por ejemplo, $\sigma_1(1) = 1$, $\sigma_1(3) = 4$, $\sigma_1(6) = 12$ y $\sigma_1(2020) = 4284$).

- **a** Muestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sigma_0(n)}{n^2} = 0$.
- **b** Muestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sigma_1(n)}{n^3} = 0$.
- **c** Muestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sigma_0(n)}{n} = 0$.