Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° semestre 2020

Ayudantía 02

24 de Marzo

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Demuestre que $-(a^{-1}) = (-a)^{-1}$.

Demostración. Notemos que el lado derecho es el inverso multiplicativo de $(-a)$, por lo que basta ver que el lado izquierdo multiplicado por $(-a)$ resulte ser 1. Para esto, veamos que

$$\begin{aligned}
(-a) \cdot -(a^{-1}) &= (-a) \cdot ((-1) \cdot a^{-1}) \\
&= ((-1) \cdot a) \cdot ((-1) \cdot a^{-1}) \\
&= (a \cdot (-1)) \cdot ((-1) \cdot a^{-1}) \\
&= a \cdot ((-1) \cdot ((-1) \cdot a^{-1})) \\
&= a \cdot (((-1) \cdot (-1)) \cdot a^{-1}) \\
&= a \cdot (1 \cdot a^{-1}) \\
&= a \cdot a^{-1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Como esto se cumple, se tiene que $-(a^{-1})$ es el inverso multiplicativo de $(-a)$, por lo que debe ser $(-a)^{-1}$, que es lo que queríamos demostrar. ∎

2) Muestre que si x es inverso multiplicativo de si mismo, entonces $x = 1$ o $x = -1$.

Demostración. Lo que nos piden probar es

$$x^2 = 1 \Rightarrow (x = 1 \text{ o } x = -1).$$

Sabemos que $1 = 1^2$. Luego, operando la igualdad, tenemos que

$$\begin{aligned}
x^2 = 1 &\Rightarrow x^2 = 1^2 \\
&\Rightarrow x^2 - 1^2 = 0 \\
&\Rightarrow (x-1)(x+1) = 0
\end{aligned}$$

En clases vieron que el producto de dos números es 0 si y solo si uno de los números es 0. Esto nos da dos casos:

- $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.
- $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$.

Por lo tanto, $x = 1$ o $x = -1$, que es lo que queríamos demostrar. ■

3) Sea un C un conjunto de números reales que cumple los siguientes axiomas:

(A1) 2 está en C.

(A2) 3 no está en C.

(A3) Si x e y están en C, entonces $x + y$ también.

(A4) Si x está en C, entonces $3x + 1$ también.

Usando esto y los axiomas de cuerpo, pruebe las siguientes propiedades sobre C:

a) 9 pertenece a C.

Demostración. Usando (A4) con $x = 2$, tenemos que $3 \cdot 2 + 1 = 7$ está en C. Luego, usando (A3) con $x = 7, y = 2$ tenemos que $7 + 2 = 9$ está en C, que es lo que buscábamos. ■

b) 1 no pertenece a C.

Demostración. Supongamos que 1 pertenece a C. Usando (A3) con $x = 1, y = 2$, tenemos que $1 + 2 = 3$ está en C. Pero (A2) indica que 3 no está en C, $\rightarrow\leftarrow$.
Por lo tanto, 1 no está en C. ■

c) Si x e y pertenecen a C, entonces $3x + 1 + 3y$ también.

Demostración. Usando (A3) con y e y tenemos que $y + y = 2y$ está en C. Usando (A3) de nuevo con $2y$ e y, tenemos que $3y$ está en C. Ahora, usando (A4) con x, tenemos que $3x+1$ está en C. Finalmente, usando (A3) con $3x + 1$ y $3y$, tenemos que $3x + 1 + 3y$ está en C, que es lo que queríamos demostrar. ■

Desafío: Muestre que C con la suma y multiplicación de los reales no puede ser un cuerpo.

Demostración. Supongamos que C es un cuerpo. Luego, tiene que existir un neutro multiplicativo $y \neq 1$ (ya que 1 no está en C) tal que para todo x en C, se cumple

$$xy = x.$$

En particular, para algún x distinto de 0 en C se tiene que $xy = x$. Como son reales con la multiplicación de $\mathbb{R}$, tenemos que en $\mathbb{R}$ también se cumple $xy = x$. Cancelando x se tiene que $y = 1$, $\rightarrow\leftarrow$.
Por lo tanto C no puede ser un cuerpo. ∎

4) *(I1 2019)* Sean a, b, c, d cuatro reales tales que

$$ad \neq bc.$$

Pruebe que si x, y son reales tales que

$$ax + by = 0 \qquad \text{y} \qquad cx + dy = 0,$$

entonces $x = y = 0$.
Hint: Muestre que $(ad)x = (bc)x$ para concluír que $x = 0$.

Demostración. Multiplicando la primera igualdad por d por la izquierda a ambos lados, se tiene que

$$\begin{aligned} d(ax + by) &= d \cdot 0 \\ d(ax) + d(by) &= 0 \\ (da)x + (db)y &= 0 \\ (ad)x + (bd)y &= 0 \end{aligned}$$

Análogamente, multiplicando en la segunda igualdad por b por la izquierda se llega a

$$(bc)x + (bd)y = 0.$$

Como ambas expresiones son iguales a 0, son iguales entre sí. Luego, se tiene que

$$(ad)x + (bd)y = (bc)x + (bd)y.$$

Cancelando $(bd)y$ a ambos lados se tiene que

$$(ad)x = (bc)x \Rightarrow (ad - bc)x = 0.$$

Como el producto de dos términos es 0, al menos uno de esos términos debe ser 0. Pero sabemos que $ad - bc \neq 0$, ya que $ad \neq bc$. Por lo tanto, x debe ser 0.

Sabiendo esto, nuestras igualdades iniciales se reducen a

$$by = 0, \qquad dy = 0.$$

Supongamos que y no es 0. Multiplicando por y^{-1} en ambas igualdades por la derecha y operando un poco se tiene que

$$b = 0, \qquad d = 0.$$

Pero si esto pasa, entonces $bc = 0$ y $ad = 0$, lo que implica que $ad = bc$, $\rightarrow\leftarrow$.

Por lo tanto y también debe ser 0, lo que termina la demostración. $\blacksquare$