Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° semestre 2020

Ayudantía 26

02 de Julio

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Encuentre una sucesión x_n tal que

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| \to 0,$$

pero x_n NO sea de Cauchy.

Demostración. Consideremos la serie armónica:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Luego, tenemos que $|x_{n+1} - x_n| = 1/(n+1) \to 0$, pero x_n no puede ser de Cauchy ya que $x_n \to \infty$. ∎

2) Sea $\alpha > 1$, y $q > 0$ racional. Pruebe que $\alpha^q > 1$. Concluya que si $r > 0$ es real y $\alpha > 1$, entonces $\alpha^r \geq 1$.

Demostración. Sean p, s naturales, y $x > 1$. Sabemos que $x^p > 1$ y $\sqrt[s]{x} > 1$. Como q es racional y positivo, podemos escribir $q = m/n$, donde n, m son naturales. Como $\alpha > 1$ y m es natural, $\alpha^m > 1$. Como $\alpha^m > 1$ y n es natural, tenemos que $1 < \sqrt[n]{\alpha^m} = \alpha^{\frac{m}{n}} = \alpha^q$, que es lo que queríamos demostrar.

Para la segunda parte, consideremos una sucesión $r_n \to r$ de racionales positivos. Sabemos que $\alpha^r = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{r_n}$. Pero $\alpha^{r_n} > 1$ para todo n por lo probado arriba, por lo que $\alpha^r \geq 1$ por propiedad vista en clases. ∎

3) Sea $a > 1$ y $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que

$$\sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < x\} = \inf\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q > x\}.$$

Demostración. Sea $z > x$ racional. Sea $r_n < x$ una sucesión de racionales tal que $r_n \to x$. Por teorema visto en clases, se tiene que $a^{r_n} < a^z$. Enviando $n \to \infty$, tenemos que

$$\sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < x\} = a^x \leq a^z.$$

Esto nos dice que $\sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < x\}$ es cota inferior de $\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q > x\}$.

Ahora, consideremos una sucesión de racionales $z_n > x$ tales que $z_n \to x$. Luego, a^{z_n} pertenece a $\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q > x\}$, y además converge a $\sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < x\}$, que era cota inferior. Esto implica que es el ínfimo, que es lo que queríamos demostrar. ∎

4) Demuestre que $\text{ínf}\{x \in \mathbb{R} : 4x + 3 > 0\} = -\frac{3}{4}$.

Demostración. Notemos que

$$\{x \in \mathbb{R} : 4x + 3 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > -3/4\} = (-3/4, \infty)$$

Esto implica directamente el resultado buscado. ∎