Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° semestre 2020

Ayudantía 20

11 de Junio

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Sea $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tales que

$$-3 < z_j < -3/2 \quad \text{para todo } j.$$

Muestre que es imposible que

$$z_j^3 + \frac{3\left(1+\frac{1}{j}\right)^j}{e} z_j^2 + 3z_j + 1 = 0$$

para todo natural j.
Hint: Muestre que en otro caso, existiría una subsucesión convergente a -1.

Demostración. Supongamos que funciona para todo j. Como z_j está acotada, tiene una subsucesión z_{k_j} convergente a L. Como funciona para todo j, en particular para todo k_j se cumple

$$z_{k_j}^3 + \frac{3\left(1+\frac{1}{j}\right)^j}{e} z_{k_j}^2 + 3z_{k_j} + 1 = 0$$

Luego, enviando j a infinito, se tiene

$$L^3 + \frac{3e}{e} L^2 + 3L + 1 = 0,$$

que es equivalente a

$$(L+1)^3 = 0.$$

Luego, $L = -1$. Pero $-3/2 < -1$, $\rightarrow\leftarrow$.

Por lo tanto, debe fallar para algún j, que es lo que queríamos probar. ∎

2) Demuestre que para todo n natural y expansión decimal a_i,

$$0, a_1 a_2 \cdots a_n \leq 1 - \frac{1}{10^n}.$$

Demostración. Sabemos que

$$0, a_1 a_2 \cdots a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = 9 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k}$$

Calculando la serie geométrica, tenemos que

$$9 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k} = 9 \left(\frac{(1/10)^{n+1} - 1/10}{1/10 - 1} \right) = 9 \left(\frac{(1/10)^n - 1}{-9} \right) = 1 - \frac{1}{10^n}$$

Por transitividad tenemos lo pedido. ∎

3) Demuestre que $0, 101001000100001000000\ldots$ es irracional.

Demostración. Corresponde a la expansión decimal

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = \frac{j(j+1)}{2} \text{ para algún natural } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Supongamos que es racional. Luego, existe un n_0 y un k tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple $a_n = a_{n+k}$. Sea $z = \text{máx}\{n_0, k\}$. Sabemos que $a_{z(z+1)/2} = 1$ por definición. Luego, como es periódica, $a_{z(z+1)/2+k} = 1$. Pero

$$\frac{z(z+1)}{2} < \frac{z(z+1)}{2} + k < \frac{(z+2)(z+1)}{2}$$

por lo que $a_{z(z+1)/2+k}$ debería ser 0, $\rightarrow\leftarrow$.

Por lo tanto el número es irracional. ∎

4)

a) Demuestre que 0 tiene solo una expansión decimal.

Demostración. Sabemos que $0 = 0,000\ldots$. Supongamos que hay otra expansión x. Como son distintas, existe un dígito a_i distinto de 0 tal que i sea minimal (existe por buen orden). Luego,

$$0 = 0 \cdot 10^i = x \cdot 10^i = a_i, a_{i+1}a_{i+2} \ldots \geq a_i > 0.$$

Esto implica que $0 > 0$, $\rightarrow\leftarrow$.

Por lo tanto, 0 solo tiene una representación decimal. ∎

b) Muestre que un real tiene a lo más una expansión decimal finita.

Demostración. Sean $a, a_1a_2 \ldots a_i0000..$ y $b, b_1b_2 \ldots b_j0000...$ expansiones decimales del mismo número. Si $i = j$, multiplicando por 10^j tenemos que

$$aa_1a_2a_3 \ldots a_i = bb_1b_2 \ldots b_i$$

Esto implica que

$$aa_1a_2a_3 \ldots a_i - bb_1b_2 \ldots b_i = 0$$

Agrupando de manera conveniente, se tiene que

$$10(aa_1a_2a_3 \ldots a_{i-1} - bb_1b_2 \ldots b_{i-1}) + (a_i - b_i) = 0.$$

Como ambos lados son enteros, y tanto 0 como $10(aa_1a_2a_3 \ldots a_{i-1} - bb_1b_2 \ldots b_{i-1})$ son divisibles por 10, $a_i - b_i$ también debe serlo. Como $a_i - b_i$ está entre -9 y 9, debe ser 0, lo que implica $a_i - b_i$. Así,

$$aa_1a_2a_3 \ldots a_{i-1} - bb_1b_2 \ldots b_{i-1} = 0,$$

donde reordenando de manera conveniente se tiene

$$10(aa_1a_2a_3 \ldots a_{i-2} - bb_1b_2 \ldots b_{i-2}) + (a_{i-1} - b_{i-1}) = 0.$$

De manera recursiva, tenemos que ambas expansiones deben ser iguales.

Ahora, si $i < j$ (el otro caso es análogo), multiplicando por 10^i se tiene

$$a_1a_2 \ldots a_i = b_1b_2 \ldots b_i, b_{i+1} \ldots b_j.$$

Esto dice que

$$(b_1 b_2 \ldots b_i - a_1 a_2 \ldots a_i), b_{i+1} \ldots b_j = 0.$$

Pero ya sabemos que la expansión decimal en 0 es única. Esto implica que $b_{i+1} \ldots b_j = \underbrace{0 \ldots 0}_{j-i \text{ veces}}$, por lo que se reduce a

$$b_1 b_2 \ldots b_i - a_1 a_2 \ldots a_i = 0,$$

que vimos en el caso anterior. Luego, ambas expansiones son iguales.

Juntando ambos casos tenemos lo pedido. ■

5) Sean $x = a, a_1 a_2 \ldots a_i$, $y = b, b_1 b_2 \ldots b_i$ reales con expansiones decimales convergentes. Diremos que $x <_d y$ si sucede alguna de las siguientes:

   I) $a < b$.

   II) $a = b$, pero existe un j natural tal que $a_j < b_j$ y $a_i = b_i$ para todo $i < j$.

   Muestre que existen reales x, y tales que $x <_d y$ pero $x \geq y$.

   Hint: Recuerde la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k}$.

   Demostración. Antes probamos que $0, \bar{9} = 1$. Luego, tenemos que $1 = 0, \bar{9}$ y $1 = 1, 000 \ldots$. Así, $1 <_d 1$ (ya que $0 < 1$, por lo que la primera condición se cumple), pero $1 = 1$, por lo que $1 \geq 1$. Por lo tanto, existen reales que cumplen lo pedido. ■