Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° semestre 2020

Ayudantía 16

14 de Mayo

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Muestre que $2 \cdot (-1)^n$ no converge a ningún valor real y use esto para mostrar que una sucesión puede estar acotada y no converger a un valor real.

Demostración. Supongamos que $2 \cdot (-1)^n \to L$. Esto implica que para todo $\varepsilon > 0$ existe un n_0 natural tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple $|2(-1)^n - L| < \varepsilon$. Lo anterior es equivalente a $-\varepsilon < 2(-1)^n - L < \varepsilon$. Sumando L a ambos lados, tenemos que

$$L - \varepsilon < 2(-1)^n < L + \varepsilon$$

Tomando $\varepsilon = |L|(*)$, tenemos que

$$L - |L| < 2(-1)^n < L + |L|$$

Como alguna de las cotas es 0, esto implica que la sucesión es eventualmente negativa o eventualmente positiva, pero esto es claramente falso (todos los términos pares son positivos y todos los impares son negativos), $\rightarrow\leftarrow$.

$(*)$ Esto funciona solo si $L \neq 0$. Supongamos que $L = 0$. Esto implica que para todo $\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, se cumple $|x_n| = |2(-1)^n| = 2 < \varepsilon$. Tomando $\varepsilon = 1$, llegamos a una contradicción.

Por lo tanto, x_n no puede converger a algún valor real. Como $-3 < 2(-1)^n < 3$, tenemos que una sucesión puede estar acotada y no converger.

■

2) Sean a, b, c, d distintos de 0. Muestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{an+b}{cn+d} = \frac{a}{c}.$$

Demostración. Notar que

$$\frac{an+b}{cn+d} = \frac{\frac{an+b}{n}}{\frac{cn+d}{n}} = \frac{a+\frac{b}{n}}{c+\frac{d}{n}}.$$

Sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$. Sabemos lo mismo para $\lim\limits_{n\to\infty} b$, $\lim\limits_{n\to\infty} c$, $\lim\limits_{n\to\infty} d$ y también sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Usando álgebra de límites tenemos que

$$0 = b \cdot 0 = \lim_{n\to\infty} b \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n}$$

Análogamente, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d}{n} = 0$. Luego, tenemos que

$$a = a + 0 = \lim_{n\to\infty} a + \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n} = \lim_{n\to\infty} a + \frac{b}{n}.$$

Del mismo modo, $\lim\limits_{n\to\infty} c + \dfrac{d}{n} = c$. Finalmente, como $c \neq 0$, tenemos que

$$\frac{a}{c} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a + \dfrac{b}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} c + \dfrac{d}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a+\frac{b}{n}}{c+\frac{d}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{an+b}{cn+d},$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

3) Muestre que x_n converge a L si y solo si $y_n = x_n - L$ converge a 0.

Demostración. Sabemos que x_n converge a L si y solo si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |x_n - L| < \varepsilon$$

Por otro lado, y_n converge a 0 si y solo si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |y_n| = |x_n - L| < \varepsilon$$

Como la equivalencia es simétrica y transitiva, tenemos lo pedido. ■

4)

a) Sea $x_n = c$. Muestre por definición que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \to c$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Notar que para todo $n \geq 1$ se cumple que $|x_n - c| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon$. Por lo tanto, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \to c$. ∎

b) Sea x_n una sucesión que cumple $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$, con $L \in \mathbb{R}$. ¿Es cierto que $\lim\limits_{n\to\infty} \lfloor x_n \rfloor = \lfloor L \rfloor$? ($\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x)

Demostración. No necesariamente. Sea $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Por álgebra de límites sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 1$. Por otro lado, sabemos que $0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$, por lo que $\lfloor x_n \rfloor = 0$. Luego, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \lfloor x_n \rfloor = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq 1.$$

Por lo tanto, la propiedad no necesariamente se cumple. ∎

c) Sea $0 < c < 1$. Pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c^k = \frac{1}{1-c}.$$

Sabemos que

$$\sum_{k=0}^{n} c^k = \frac{1-c^{n+1}}{1-c}$$

Por taller, como $-1 < c < 1$, tenemos que $c^{n+1} \to 0$. Luego, usando álgebra de límites, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} 1 - c^{n+1} = 1$. Como $1 - c \neq 0$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-c^{n+1}}{1-c} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - c^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - c} = \frac{1}{1-c},$$

que es lo que queríamos probar.