Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° semestre 2020

Ayudantía 12

30 de Abril

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión tal que

   I) $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada.

   II) $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ deja una cantidad finita de índices de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fuera.

   a) Pruebe que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

   Demostración. Como $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada, existe un M_1 tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $|x_{n_k}| \leq M_1$.

   Sean $y_1, \ldots, y_m$ los elementos que están fuera de la subsucesión. Como son finitos, entonces existe $\max\{|y_1|, |y_2|, \ldots, |y_m|\} = M_2$. Sea $M = \max\{M_1, M_2\}$.

   Sea n natural. Notemos que x_n puede estar o no en la subsucesión. Si x_n está en la subsucesión, entonces $|x_n| \leq M_1 \leq M$ (ya que la subsucesión está acotada). Si x_n no está en la subsucesión, entonces $x_n = y_i$ para algún i entre 1 y m. Luego, $|x_n| \leq \max\{|y_1|, |y_2|, \ldots, |y_m|\} = M_2 \leq M$. Luego, en ambos tenemos que $|x_n| \leq M$, por lo que la sucesión es acotada, que es lo que buscábamos. ■

   b) Muestre que si la propiedad II) no se cumple, entonces la parte a) no siempre se cumple.

   Solución. Consideremos la sucesión

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

   Notemos que la subsucesión x_{2n-1} es constante, por lo que es acotada, pero la sucesión no es acotada superiormente (los términos pares corresponden a los naturales). ■

2) Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones tales que:

- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada superiormente.
- Para todo n natural, $y_n \geq x_n$.

Pruebe que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada superiormente.

Demostración. Supongamos que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente. Esto implica que existe un M tal que $y_n \leq M$ para todo n. Como x_n no está acotada superiormente, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} > M$. Luego, tenemos que $y_{n_0} \geq x_{n_0} > M \geq y_{n_0} \Rightarrow y_{n_0} > y_{n_0}$, $\rightarrow\leftarrow$.

Por lo tanto, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada superiormente. ∎

3) Muestre que $x_n = n^2 - n$ converge a infinito.

Demostración. Sabemos que $n^2 - n = n(n-1) > (n-1)^2$. Sea $M > 0$. Como $n^2 \to \infty$, existe un n_0 natural tal que para todo $n \geq n_0$, $n^2 \geq (n_0)^2 > M$.

Luego, para todo $n \geq n_0+1$, se tiene que $n^2-n > (n-1)^2 \geq (n_0+1-1)^2 \geq (n_0)^2 > M$.

Por lo tanto, $x_n \to \infty$, que es lo que queríamos demostrar. ∎

4) Sea k una constante real. Muestre que $x_n = n^2 - kn$ converge a infinito.

Demostración. Notemos que $n^2 - kn = n(n-k)$. Entonces, para un n lo suficientemente grande $(n-k > 1 \Rightarrow n > k+1)$ tenemos que $n(n-k) > n$.

Sea $M > 0$, como $n \to \infty$, existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, se cumple $n > M$. Luego, para todo $n \geq \max\{n_0, \lfloor k+1 \rfloor + 1\}$ tenemos que $n(n-k) > n > M$, por lo que $x_n > M$ para todo $n \geq \max\{n_0, \lfloor k+1 \rfloor + 1\}$.

Por lo tanto, $x_n \to \infty$, que es lo que queríamos probar. ∎

5) Encuentre una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no esté acotada superiormente pero x_n no converge a infinito.

Demostración. Consideremos la sucesión

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Vimos anteriormente que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada superiormente. Supongamos que $x_n \to \infty$. Luego, existe un n_0 natural, tal que para todo $n \geq n_0$, se cumple que $x_n > 2$. Tomando $2n_0 + 1 \geq n_0$, tenemos que $x_{2n_0+1} = 1 > 2$, $\rightarrow\leftarrow$.

Por lo tanto, x_n no converge a infinito, completando la demostración. ∎