Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° semestre 2020

Ayudantía 01

19 de Marzo

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Demuestre que para todo a real, $a \cdot 0 = 0$.

Demostración. Notemos que como 0 es neutro aditivo, se tiene que $0 = 0 + 0$. Usando esto, se tiene que

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot (0 + 0) \\ a \cdot 0 &= a \cdot 0 + a \cdot 0 \\ a \cdot 0 + (-a \cdot 0) &= (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0) \\ 0 &= a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) \\ 0 &= a \cdot 0 + 0 \\ 0 &= a \cdot 0, \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. ■

2) El axioma de neutro multiplicativo indica que $1 \neq 0$. ¿Qué sucedería si se elimina esa restricción?

Solución. Supongamos que $0 = 1$. Sea a algún real. Notar que se tiene

$$\begin{aligned} a &= a \cdot 1 \\ &= a \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto implica directamente que si $1 = 0$, entonces todos los números son 0. ■

3) Demuestre que el inverso aditivo es único.

Demostración. Sea x un real y supongamos que tiene dos inversos, a y b. Esto implica que

$$\begin{aligned} x + a &= 0 \\ x + b &= 0 \end{aligned}$$

Luego, como ambas expresiones son 0, esto significa que

$$x + a = x + b.$$

Sumando a por la izquierda, se tiene

$$\begin{aligned} a + (x + a) &= a + (x + b) \\ (a + x) + a &= (a + x) + b \\ 0 + a &= 0 + b \\ a &= b. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si hay 2 inversos aditivos, son iguales entre sí. Esto implica que el inverso aditivo es único. ∎

Nota: Desde aquí se asume que el inverso multiplicativo también es único (queda como ejercicio propuesto).

4) Pruebe que $-(-a) = a$ para todo a.

Demostración. Notemos que por definición de inverso aditivo de a,

$$a + (-a) = 0.$$

Por otro lado, por definición de inverso aditivo de $(-a)$, además

$$(-a) + -(-a) = 0.$$

Así, tenemos que $(-a)$ posee dos inversos aditivos. Pero en el problema anterior demostrarmos que el inverso aditivo es único, por lo que los dos inversos de $(-a)$ deben ser iguales, demostrando lo pedido. ∎

5) Demuestre que $-x = (-1) \cdot x$ y use esto para concluir que $(-1)(-1) = 1$.

Demostración. Notemos que $x + (-x) = 0$ por definición de inverso aditivo. Por otro lado, $x = 1 \cdot x$, ya que 1 es neutro multiplicativo. Con esto, operando un poco se tiene que

$$\begin{aligned}(-1) \cdot x + 1 \cdot x &= ((-1) + 1) \cdot x \\ &= 0 \cdot x \\ &= 0.\end{aligned}$$

Luego, $(-1) \cdot x$ también es un inverso aditivo de x. Como el inverso aditivo es único, esto implica que $-x = (-1) \cdot x$, que es lo que se quería probar.

Ahora, para ver que $(-1)(-1) = 1$, reemplazando x por (-1) en la pregunta, llegamos a

$$-(-1) = (-1) \cdot (-1).$$

Como ya probamos que $-(-x) = x$, el lado izquierdo es lo mismo que 1. Así, tenemos que $(-1)(-1) = 1$. ■

6) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $ax + b = 0$, si $a \neq 0$?

Solución. Supongamos que se cumple la igualdad. Trabajando la expresión del enunciado, se tiene que

$$\begin{aligned}(ax + b) + (-b) &= 0 + (-b) \\ ax + (b + (-b)) &= (-b) \\ ax + 0 &= (-b) \\ ax &= (-b) \\ a^{-1}(ax) &= a^{-1}(-b) \\ (a^{-1}a)x &= a^{-1}(-b) \\ 1 \cdot x &= a^{-1}(-b) \\ x &= a^{-1}(-b)\end{aligned}$$

Luego, si existe alguna solución, debe ser $a^{-1}(-b)$. Es importante destacar que esto no garantiza que el valor anterior sea una solución (!), por lo que hay que verificar que el valor encontrado cumpla la igualdad. Para esto basta reemplazar x y verificar:

$$\begin{aligned}(a \cdot (a^{-1}(-b))) + b &= ((a \cdot a^{-1}) \cdot (-b)) + b \\ &= (1 \cdot (-b)) + b \\ &= (-b) + b \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como el valor que encontramos es solución, y es el único valor posible, existe solo una solución. $\blacksquare$

Nota: Otra solución puede ser mostrar que una solución existe, y probando que la solución es única (asumiendo que existe más de una).