Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
1° semestre 2020

Ayudantía 01

19 de Marzo

MAT1106 - Introducción al Cálculo

1) Demuestre que para todo a, b con $a, b \neq 0$, se cumple $(ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

Demostración. Por definición de inverso multiplicativo, basta probar que $(a^{-1}b^{-1}) \cdot (ab) = 1$. Para esto, operando un poco se tiene

$$\begin{aligned}
(a^{-1}b^{-1}) \cdot (ab) &= ((a^{-1}b^{-1})a)b \\
&= ((b^{-1}a^{-1})a)b \\
&= (b^{-1}(a^{-1}a))b \\
&= (b^{-1} \cdot 1)b \\
&= b^{-1} \cdot b \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Como la multiplicación entre (ab) y $a^{-1}b^{-1}$ es 1, por inverso multiplicativo tenemos que $a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$, que es lo que queríamos demostrar. ■

2) Sean a, b, c con $b, c \neq 0$. Pruebe que

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= a \cdot b^{-1} \\
&= (a \cdot 1) \cdot b^{-1} \\
&= (a \cdot (c \cdot c^{-1})) \cdot b^{-1} \\
&= ((ac) \cdot c^{-1}) \cdot b^{-1} \\
&= (ac) \cdot (c^{-1}b^{-1}) \\
&= (ac) \cdot (b^{-1}c^{-1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (ac) \cdot (bc)^{-1} \\
&= \frac{ac}{bc}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, tenemos que $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, que es lo que queríamos probar. ∎

3) Sean a, b, c, d con $b, d \neq 0$. Demuestre que

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Demostración. Por la pregunta anterior, podemos transformar el lado izquierdo en

$$\frac{ad}{bd} - \frac{cb}{db}$$

Ahora, operando con estas fracciones, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{ad}{bd} - \frac{bc}{db} &= (ad)(bd)^{-1} - [(bc)(db)^{-1}] \\
&= (ad)(bd)^{-1} + (-1)[(bc)(db)^{-1}] \\
&= (ad)(bd)^{-1} + [(-1)(bc)](db)^{-1} \\
&= (ad)(bd)^{-1} + [(-1)(bc)](bd)^{-1} \\
&= (ad + (-1)(bc))(bd)^{-1} \\
&= (ad + (-bc))(bd)^{-1} \\
&= (ad - bc)(bd)^{-1} \\
&= \frac{ad - bc}{bd},
\end{aligned}
$$

que era lo buscado. Por lo tanto, se tiene que $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad - bc}{bd}$. ∎

4) El axioma de neutro multiplicativo no indica que $1 \neq 0$. ¿Qué sucede cuando $1 = 0$?

Solución. Supongamos que $0 = 1$. Sea a algún real. Notar que se tiene

$$
\begin{aligned}
a &= a \cdot 1 \\
&= a \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Esto implica directamente que si $1 = 0$, entonces todos los números son 0. $\blacksquare$

5) Pruebe que $-(-a) = a$ para todo a y use esto para concluir que $(-1)(-1) = 1$.

Demostración. Notemos que por definición de inverso aditivo de a,

$$a + (-a) = 0.$$

De esta misma ecuación se llega a que a es el inverso de $(-a)$. Esto implica que a debe ser $-(-a)$ por definición de inverso aditivo, que es lo que se quería demostrar.
Ahora, para ver que $(-1)(-1) = 1$, reemplazando x por 1 en la pregunta, llegamos a

$$-(-1) = 1.$$

Además, en clases vieron que $-x = (-1)x$. Usando esto en el lado izquierdo, tenemos

$$(-1)(-1) = x,$$

que es lo que queríamos demostrar. $\blacksquare$

6) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $ax + b = 0$, si $a \neq 0$?

Solución. Supongamos que se cumple la igualdad. Trabajando la expresión del enunciado, se tiene que

$$\begin{aligned}
(ax + b) + (-b) &= 0 + (-b) \\
ax + (b + (-b)) &= (-b) \\
ax + 0 &= (-b) \\
ax &= (-b) \\
a^{-1}(ax) &= a^{-1}(-b) \\
(a^{-1}a)x &= a^{-1}(-b) \\
1 \cdot x &= a^{-1}(-b) \\
x &= a^{-1}(-b)
\end{aligned}$$

Luego, si existe alguna solución, debe ser $a^{-1}(-b)$. Es importante destacar que esto no garantiza que el valor anterior sea una solución (!), por lo que hay que verificar que el valor encontrado cumpla la igualdad. Para esto basta reemplazar x y verificar:

$$\begin{aligned}(a \cdot (a^{-1}(-b))) + b &= ((a \cdot a^{-1}) \cdot (-b)) + b \\ &= (1 \cdot (-b)) + b \\ &= (-b) + b \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como el valor que encontramos es solución, y es el único valor posible, existe solo una solución. ■

Nota: Otra solución puede ser mostrar que una solución existe, y probando que la solución es única (asumiendo que existe más de una).