Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
2° semestre 2020

Ayudantía 02

21 de Agosto

MAT2225 - Teoría de Números

1) Sean a, b enteros positivos. Asuma que $\operatorname{mcd}(a, b) + \operatorname{mcm}(a, b) = a + b$. Pruebe que $a \mid b$ o $b \mid a$.
Puede usar (por la lista de problemas) que $\operatorname{mcm}(a, b) \cdot \operatorname{mcd}(a, b) = ab$.

2) Pruebe que hay infinitos primos de la forma $4k + 3$.

3) *a)* *(Fórmula de Legendre/de De Polignac)* Sea p un primo y n natural. Muestre que
$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor,$$
donde $\lfloor x \rfloor$ denota la función piso de x.

   b) Determine con cuantos ceros termina 2020!.

4) *a)* Muestre que $\nu_p(\operatorname{mcd}(a, b)) = \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$.

   b) Pruebe que $\nu_p(a \pm b) \geq \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$ para todos $a, b \in \mathbb{P}$, y muestre que se transforma en igualdad si las valuaciones de a y b son distintas.

Bonus: *(Putnam 2000 - B2)* Sean $n \geq k$ enteros positivos. Muestre que $\binom{n}{k} \cdot \frac{(n,k)}{n}$ es natural.
Hint: Se puede hacer solo con materia de la semana pasada, o usando valuaciones.