



Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
2° semestre 2020

Ayudantía 03

28 de Agosto

MAT2225 - Teoría de Números

- 1) Pruebe que si f, g son funciones multiplicativas, entonces $(f \cdot g)(n) = f(n) \cdot g(n)$ también lo es. ¿Es cierto el recíproco?
- 2) Sea n un entero positivo. Muestre que

$$\sum_{d^2|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es libre de cuadrados} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- 3) (*Función de von Mangoldt*) Definimos la función $\Lambda(n) : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{C}$ de la siguiente manera:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{si } n = p^k \text{ para algún primo } p \text{ y } k \in \mathbb{P} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definimos también $f'(n) = \log(n)f(n)$.

- a) Muestre que Λ no es multiplicativa.
- b) Muestre que $(f + g)' = f' + g'$ y que $(f * g)' = f' * g + f * g'$.
- c) Muestre que $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log(n)$ y concluya que $\Lambda * u = u'$, donde $u(n) = 1$ para todo n .

Bonus: (*Identidad de Selberg*) Muestre que

$$\Lambda(n) \log n + \sum_{d|n} \Lambda(d) \Lambda(n/d) = \sum_{d|n} \mu(d) \log^2(n/d).$$