Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
2° semestre 2020

Ayudantía 03

28 de Agosto

MAT2225 - Teoría de Números

1) Pruebe que si f, g son funciones multiplicativas, entonces $(f \cdot g)(n) = f(n) \cdot g(n)$ también lo es. ¿Es cierto el recíproco?

Demostración. Sean a, b tales que $(a, b) = 1$. Notemos que

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(ab) &= f(ab) \cdot g(ab) \\ &= (f(a) \cdot f(b)) \cdot (g(a) \cdot g(b)) \\ &= (f(a) \cdot g(a)) \cdot (f(b) \cdot g(b)) \\ &= (f \cdot g)(a) \cdot (f \cdot g)(b)\end{aligned}$$

Luego, $(f \cdot g)$ es multiplicativa. Para mostrar que el recíproco es falso, consideremos $f(n) = n - 1$ y $g(n) = 0$. Operando, se tiene

$$(f \cdot g)(n) = f(n) \cdot g(n) = (n-1) \cdot 0 = 0,$$

la cual es multiplicativa:

$$(f \cdot g)(ab) = 0 = 0 \cdot 0 = (f \cdot g)(a) \cdot (f \cdot g)(b).$$

Sin embargo, $f(1) = 0$ y f no es trivial. ∎

2) Sea n un entero positivo. Muestre que

$$\sum_{d^2 \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es libre de cuadrados} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que n no es libre de cuadrados. Luego, por TFA, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$ y $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \cdots p_k^{\beta_k}$, donde $\beta_i \leq \alpha_i/2$. Por otro lado, si $\beta_i > 1$ para algún i se tiene $\mu(d) = 0$, por lo que podemos re-escribir la suma como

$$\sum_{\beta_i \leq 1} \mu(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \cdots p_k^{\beta_k})$$

Por otro lado, no nos importa saber cuales β_i son 1, solo cuantos $(*)$. Con esto, podemos re-escribir la suma como

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i \cdot 1^{k-i} = (1-1)^k = 0.$$

Ahora, si n es libre de cuadrados,

$$\sum_{d^2 | n} \mu(d) = \mu(1) = 1,$$

lo que concluye la demostración. ∎

$(*)$ *A priori algunos β_i pueden ser solo 0, pero esos se pueden sacar del conteo y queda una suma equivalente. Notar que no pueden ser todos, o se tendría que es libre de cuadrados.*

3) *(Función de von Mangoldt)* Definimos la función $\Lambda(n) : \mathbb{P} \to \mathbb{C}$ de la siguiente manera:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{si } n = p^k \text{ para algún primo } p \text{ y } k \in \mathbb{P} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definimos también $f'(n) = \log(n) f(n)$.

a) Muestre que Λ no es multiplicativa.

Demostración 1. Notar que $\Lambda(6) = 0 \neq \log(2) \cdot \log(3) = \Lambda(2) \cdot \Lambda(3)$. Por lo tanto, no es multiplicativa. ∎

Demostración 2. Notar que $\Lambda(1) = 0$ y $\Lambda(2) = \log(2)$. Por lo tanto, no es multiplicativa. ∎

b) Muestre que $(f + g)' = f' + g'$ y que $(f * g)' = f' * g + f * g'$.

Demostración. Para la primera parte, al calcular tenemos que

$$\begin{aligned}(f+g)'(n) &= \log(n)(f+g)(n)\\ &= \log(n)(f(n)+g(n))\\ &= \log(n)f(n)+\log(n)g(n)\\ &= f'(n)+g'(n).\end{aligned}$$

Para la convolución, tenemos

$$\begin{aligned}(f*g)'(n) &= \log(n)(f*g)(n)\\ &= \log(n)\sum_{d|n} f(d)g(n/d)\\ &= \sum_{d|n} f(d)g(n/d)\log(n)\\ &= \sum_{d|n} f(d)g(n/d)(\log(d)+\log(n/d))\\ &= \sum_{d|n} f(d)g(n/d)\log(d)+\sum_{d|n} f(d)g(n/d)\log(n/d)\\ &= \sum_{d|n} f'(d)g(n/d)+\sum_{d|n} f(d)g'(n/d)\\ &= (f'*g)(n)+(f*g')(n)\end{aligned}$$

■

c) Muestre que $\sum_{d|n}\Lambda(d) = \log(n)$ y concluya que $\Lambda * u = u'$, donde $u(n) = 1$ para todo n.

Demostración. Sea $n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$. Notar que

$$\log(n) = \log(p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}) = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\log(p_i).$$

Por otro lado, sabemos que si d no es una potencia de un primo, entonces $\Lambda(d) = 0$. Luego, trabajando en el lado izquierdo, se tiene

$$\sum_{d|n}\Lambda(d) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\Lambda(p_i^j) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\log(p_i) = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\log(p_i),$$

por lo que ambos lados son iguales. Para la segunda parte, basta ver que

$$(\Lambda * u)(n) = \sum_{d|n} \Lambda(d) u\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \Lambda(d) = \log(n) = \log(n)u(n) = u'(n),$$

por lo que $\Lambda * u = u'$. ■

Bonus: *(Identidad de Selberg)* Muestre que

$$\Lambda(n)\log n + \sum_{d|n} \Lambda(d)\Lambda(n/d) = \sum_{d|n} \mu(d)\log^2(n/d).$$

Demostración. Tenemos $\Lambda * u = u'$. Derivando de nuevo, se llega a

$$\Lambda' * u + \Lambda * u' = u''.$$

Reemplazando $u' = \Lambda * u$, se tiene

$$\Lambda' * u + (\Lambda * \Lambda) * u = u''.$$

Operando μ por la derecha a ambos lados y trabajando un poco, se llega a

$$\Lambda' * (u * \mu) + (\Lambda * \Lambda) * (u * \mu) = u'' * \mu$$

Como u y μ son inversos, lo anterior se reduce a

$$\Lambda' + (\Lambda * \Lambda) = u'' * \mu$$

Reemplazando cada término por su definición, se tiene lo pedido. ■