Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
2° semestre 2020

Ayudantía 01

14 de Agosto

MAT2225 -Teoría de Números

1) Demuestre que para todo natural n, $4 \nmid n^2 + 2$.

Demostración 1. Supongamos que $4 \mid n^2+2$. Esto implica que $n^2+2 = 4k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Luego, $n^2 = 4k-2$, por lo que n^2 es par. Así, n también es par.

Reemplazando $n = 2j$, se tiene $4j^2 + 2 = 4k$, lo que se reduce a $2j^2 + 1 = 2k$, pero el lado izquierdo es impar y el derecho es par, $\rightarrow\leftarrow$.

Por lo tanto, no hay naturales que cumplan lo pedido. ■

Demostración 2. Supongamos que $4 \mid n^2 + 2$. Hay dos casos posibles:

- n es par: Luego, $n = 2k$ para algún k natural. Así, $4 \mid 4k^2 + 2$. Pero también tenemos $4 \mid 4$, por lo que divide a cualquier combinación lineal. En particular,
$$4 \mid (4k^2 + 2) + 4(-k^2) = 2,$$
$\rightarrow\leftarrow$.
- n es impar: Luego, $n = 2k + 1$, para algún k natural. Así, $4 \mid (2k + 1)^2 + 2 = 4k^2 + 4k + 3$. Como también $4 \mid 4$, tenemos que
$$4 \mid (4k^2 + 4k + 3) + 4(-k^2 - k) = 3,$$
$\rightarrow\leftarrow$.

Juntando ambos casos tenemos lo pedido. ■

2) Sea p un número primo y a, b enteros tales que $p \mid ab$. Pruebe que $p \mid a$ o $p \mid b$.

Demostración 1. Supongamos que $p \nmid a$. Luego, $(p,a)=1$. Esto implica que $p \mid b$ por propiedad vista en clases, que es lo que queríamos demostrar. ■

Demostración 2. Supongamos que $p \nmid a$. Luego, $(p,a)=1$. Existen $x,y \in \mathbb{Z}$ tales que

$$ax + py = 1.$$

Multiplicando b en ambos lados, se tiene

$$abx + pby = b$$

Como $p \mid ab$, se tiene que $ab = pz$, con $z \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$b = p(zx) + p(by) = p\underbrace{(zx+by)}_{\in \mathbb{Z}}$$

Esto dice que $p \mid b$, que es lo que buscábamos. ■

3) Sean a,b,c naturales tales que:

- $(a,b)=1$.
- $a \mid c$.
- $b \mid c$.

Pruebe que $ab \mid c$.

Demostración. Como $a \mid c$, $c = ak$, con $k \in \mathbb{Z}$. Análogamente, $c = bj$, con $j \in \mathbb{Z}$. También, como $(a,b)=1$ existen $x,y \in \mathbb{Z}$ tales que

$$ax + by = 1.$$

Multiplicando por c a ambos lados, se tiene

$$axc + byc = c.$$

Reemplazando c de manera conveniente, se tiene

$$ab(xj) + ab(yk) = c,$$

Luego, $c = ab(xj+yk)$ donde $xj + yk \in \mathbb{Z}$, por lo que $ab \mid c$. ■

4) Sean a, b enteros. Muestre que $3 \mid a + b$ si y solo si $3 \mid a^3 + b^3$.

Demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$ Como $3 \mid a + b$, entonces $3 \mid (a + b)k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Tomando $k = (a^2 - ab + b^2)$, se tiene que $3 \mid (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Como $3 \mid a^3+b^3$ y $3 \mid 3(a^2b+ab^2)$, entonces $3 \mid a^3+b^3+3(a^2b+ab^2) = (a + b)^3$. Por la pregunta 2), $3 \mid a + b$ o $3 \mid (a + b)^2$. Si divide a $a + b$ ganamos, en caso contrario basta usar la pregunta 2) de nuevo.

Juntando ambas implicancias se concluye lo pedido. ■

5) Encuentre (o determine que no existen) enteros x, y tales que

a) $91x + 49y = 100$.

Solución. Notar que

$$91x + 49y = 7(13x + 7y).$$

Luego, $7 \mid 13x + 7y$. Como $7 \nmid 100$, no existen enteros que cumplan lo pedido. ■

b) $2020x + 2225y = 15$.

Solución. Usando el algoritmo de Euclides, se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned} 2225 &= 2020 \cdot 1 + 205 \\ 2020 &= 205 \cdot 9 + 175 \\ 205 &= 175 \cdot 1 + 30 \\ 175 &= 30 \cdot 5 + 25 \\ 30 &= 25 \cdot 1 + 5 \\ 25 &= 5 \cdot 5 \end{aligned}$$

Así, $(2020, 2225) = 5$. Como $5 \mid 15$, existen soluciones enteras. Para encontrar una, basta usar el algoritmo, donde al "devolverse" se tiene:

$$\begin{aligned}
5 &= 30 - 25 \\
&= 30 - (175 - 5 \cdot 30) \\
&= -175 + 6 \cdot 30 \\
&= -175 + 6(205 - 175) \\
&= 6 \cdot 205 - 7 \cdot 175 \\
&= 6 \cdot 205 - 7(2020 - 205 \cdot 9) \\
&= -7 \cdot 2020 + 69 \cdot 205 \\
&= -7 \cdot 2020 + 69(2225 - 2020) \\
&= 69 \cdot 2225 - 76 \cdot 2020
\end{aligned}$$

Solo basta multiplicar por 3 a ambos lados para llegar a

$$15 = 207 \cdot 2225 - 228 \cdot 2020.$$

Por lo tanto, $x = -228, y = 207$ cumplen lo pedido. ■

Bonus: Sean a, b, c enteros positivos tales que $\mathrm{mcd}(a, \mathrm{mcd}(b, c)) = 1$. Pruebe que existen enteros α, β, γ tales que

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 1.$$

Demostración. Como $\mathrm{mcd}(a, \mathrm{mcd}(b, c)) = 1$, existen enteros x, y tales que

$$ax + (b, c)y = 1. \tag{1}$$

También, por definición de (b, c), existen enteros z, w tales que

$$bz + cw = (b, c). \tag{2}$$

Reemplazando (2) en (1), se tiene

$$1 = ax + (bz + cw)y = ax + b(zy) + c(wy),$$

lo que muestra lo pedido. ■