

Lima, Elon Lages

**Análisis Real, Volumen 1.**

Instituto de Matemática y Ciencias Afines, UNI, 1997.  
240pp. (Colección Textos del IMCA)

Textos del IMCA

# Análisis Real

*Volumen 1*

Elon Lages Lima

Traducido por Rodrigo Vargas

IMCA Instituto de Matemática y Ciencias Afines

Copyright ©, 1997 by Elon Lages Lima  
Impreso en Chile / Printed in Chile  
Carátula: Rodolfo Capeto y Noni Geiger

Textos del IMCA

Editor: César Camacho

Con esta serie de textos el IMCA inicia sus trabajos contribuyendo a la difusión de la cultura matemática por medio de una literatura de alta calidad científica.

Esta colección busca poner a disposición de alumnos y profesores universitarios, libros escritos con rigor y claridad, que sirvan como textos de cursos de graduación.

La publicación de este libro contó con el apoyo decidido de la *Sociedad Brasileira de Matemática* y de la *Universidad Nacional de Ingeniería del Perú* que compartieron su costo. A estas instituciones damos nuestro agradecimiento.

**El Editor**

# Prefacio

Este libro pretende servir de texto para un primer curso de Análisis Matemático. Los temas tratados se exponen de manera simple y directa, evitando digresiones. Así espero facilitar el trabajo del profesor que, al adoptarlo, no necesitará perder mucho tiempo seleccionando los temas que tratará y los que omitirá. Grupos especiales, estudiantes avanzados, lectores que deseen una presentación más completa y los alumnos, por así decirlo, normales que busquen lecturas complementarias pueden consultar el “Curso de Análisis Matemático, vol. 1” que trata de la misma materia con un enfoque más amplio, y que tiene aproximadamente el doble de tamaño.

Los lectores que tengo en mente son alumnos con conocimientos equivalentes a dos períodos lectivos de Cálculo\*, ya familiarizados con las ideas de derivada e integral en sus aspectos más elementales, principalmente los cálculos con las funciones más conocidas y la resolución de ejercicios sencillos. También espero que tengan una idea suficientemente clara de lo que es una demostración matemática. La lista de prerrequisitos termina diciendo que el lector debe estar habituado a las notaciones usuales de la teoría de conjuntos, tales como  $x \in A$ ,  $A \subset B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ , etc.

Una parte importante de este libro son sus ejercicios, que sirven para fijar ideas, desarrollar algunos temas esbozados en el texto y como oportunidad para que el lector compruebe si realmente ha entendido lo que acabó de leer. En el capítulo final se presentan las soluciones, de forma completa o resumida, de 190 ejercicios seleccionados. Los restantes son, en mi opinión, bastante fáciles. Naturalmente, me gustaría que el lector sólo consultase las soluciones después de haber hecho un serio esfuerzo para resolver cada pro-

---

\*N.T. dos cuatrimestres

blema. Precisamente es este esfuerzo, con o sin éxito, el que nos conduce a buenos resultados en el proceso de aprendizaje.

El procesamiento del manuscrito, por el sistema  $\text{\TeX}$ , lo realizaron María Celano Maia y Solange Villar Visgueiro, supervisadas por Jonas de Miranda Gomes, al que debo bastantes consejos y opiniones sensatas durante la preparación del libro. La revisión del texto original en portugués la hicieron Levi Lopes de Lima, Ricardo Galdo Camelier y Rui Tojeiro. A todas estas personas debo mis agradecimientos cordiales.

La publicación de la edición original brasileña fue financiada por la CAPES; con su director, profesor José Ubirajara Alves, estoy en deuda por el apoyo y la comprensión demostrados.

Rio de Janeiro

Elon Lages Lima

## Prefacio a la edición en español

La iniciativa de editar este libro en español se debe al Profesor César Camacho que, con su empeño característico, tuvo la idea, supervisó la traducción, cuidó de la impresión y aseguró la publicación. Es a él, por lo tanto, que tengo la satisfacción de manifestar mis agradecimientos.

También estoy agradecido a Lorenzo Diaz Casado, que hizo la traducción y a Roger Metzger y Francisco León por el trabajo de revisión.

Rio de Janeiro, noviembre de 1997.

Elon Lages Lima





# Índice general

<b>Capítulo 1. Conjuntos finitos e infinitos</b>	<b>1</b>
1. Números naturales . . . . .	1
2. Conjuntos finitos . . . . .	4
3. Conjuntos infinitos . . . . .	6
4. Conjuntos numerables . . . . .	7
5. Ejercicios . . . . .	10
<b>Capítulo 2. Números reales</b>	<b>13</b>
1. $\mathbb{R}$ es un cuerpo . . . . .	13
2. $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado . . . . .	15
3. $\mathbb{R}$ es un cuerpo completo . . . . .	18
5. Ejercicios . . . . .	23
<b>Capítulo 3. Sucesiones de números reales</b>	<b>25</b>
1. Limite de una sucesión . . . . .	25
2. Límites y desigualdades . . . . .	29
3. Operaciones con límites . . . . .	30
4. Límites infinitos . . . . .	34
5. Ejercicios . . . . .	37
<b>Capítulo 4. Series de números</b>	<b>41</b>
1. Series convergentes . . . . .	41
2. Series absolutamente convergentes . . . . .	44
3. Criterios de convergencia . . . . .	45
4. Reordenaciones . . . . .	48
5. Ejercicios . . . . .	50
<b>Capítulo 5. Algunas nociones de topología</b>	<b>53</b>
1. Conjuntos abiertos . . . . .	53
2. Conjuntos cerrados . . . . .	54

3. Puntos de acumulación . . . . .	57
4. Conjuntos compactos . . . . .	59
5. El conjunto de Cantor . . . . .	61
6. Ejercicios . . . . .	64
<b>Capítulo 6. Límites de funciones</b>	<b>69</b>
1. Definición y primeras propiedades . . . . .	69
2. Límites laterales . . . . .	74
3. Límites en el infinito . . . . .	77
4. Ejercicios . . . . .	81
<b>Capítulo 7. Funciones continuas</b>	<b>83</b>
1. Definición y propiedades básicas . . . . .	83
2. Funciones continuas en un intervalo . . . . .	86
3. Funciones continuas en conjuntos compactos . . . . .	90
4. Continuidad uniforme . . . . .	93
5. Ejercicios . . . . .	96
<b>Capítulo 8. Derivadas</b>	<b>101</b>
1. La noción de derivada . . . . .	102
2. Reglas de derivación . . . . .	105
3. Derivada y crecimiento local . . . . .	107
4. Funciones derivables en un intervalo . . . . .	109
5. Ejercicios . . . . .	112
<b>Capítulo 9. Fórmula de Taylor y aplicaciones de la derivada</b>	<b>117</b>
1. Fórmula de Taylor . . . . .	117
2. Funciones cóncavas y convexas . . . . .	121
3. Aproximaciones sucesivas y el método de Newton . . . . .	127
5. Ejercicios . . . . .	131
<b>Capítulo 10. La integral de Riemann</b>	<b>135</b>
1. Revisión de sup e ínf . . . . .	135
2. Integral de Riemann . . . . .	137
3. Propiedades de la integral . . . . .	141
4. Condiciones suficientes para la integrabilidad . . . . .	145
5. Ejercicios . . . . .	148

<b>Capítulo 11. Cálculo con integrales</b>	<b>151</b>
1. Teorema clásicos del Cálculo Integral . . . . .	151
2. La integral como límite de sumas de Riemann . . . . .	155
3. Logaritmos y exponenciales . . . . .	157
4. Integrales impropias . . . . .	161
5. Ejercicios . . . . .	166
<b>Capítulo 12. Sucesiones y series de funciones</b>	<b>171</b>
1. Convergencia puntual y convergencia uniforme . . . . .	171
2. Propiedades de la convergencia uniforme . . . . .	175
3. Series de potencias . . . . .	180
4. Series trigonométricas . . . . .	184
5. Series de Taylor . . . . .	186
5. Ejercicios . . . . .	189
<b>Capítulo 13. Soluciones de los ejercicios</b>	<b>193</b>
<b>Lecturas recomendadas</b>	<b>223</b>



# Conjuntos finitos e infinitos

En este capítulo se establecerá con precisión la diferencia entre conjunto finito y conjunto infinito. También se hará la distinción entre conjunto numerable y conjunto no numerable. El punto de partida es el conjunto de los números naturales.

## 1. Números naturales

El conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales se caracteriza por las siguientes propiedades:

1. Existe una función inyectiva  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . La imagen  $s(n)$  de cada número natural  $n$  se llama *sucesor* de  $n$ .
2. Existe un único número natural  $1 \in \mathbb{N}$  tal que  $1 \neq s(n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Si un conjunto  $X \subset \mathbb{N}$  es tal que  $1 \in X$  y  $s(X) \subset X$  (esto es,  $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$ ) entonces  $X = \mathbb{N}$ .

Estas afirmaciones pueden ser reformuladas así:

- 1'. Todo número natural tiene un sucesor, que también es un número natural; números diferentes tienen sucesores diferentes.
- 2'. Existe un único número natural que no es sucesor de ninguno.
- 3'. Si un conjunto de números naturales contiene el número 1 y también contiene el sucesor de cada uno de sus elementos, entonces ese conjunto contiene a todos los números naturales.

Las propiedades 1, 2, 3 de arriba se llaman axiomas de Peano. El axioma 3 es conocido como “principio de inducción”. Intuitivamente, éste significa que todo número natural puede obtenerse a partir del 1, tomando su sucesor  $s(1)$ , el sucesor de éste,  $s(s(1))$  y así en adelante, en un número finito de etapas. (Evidentemente “número finito” es una expresión que, en este momento, no tiene todavía significado. La formulación del axioma 3 es una manera extraordinariamente hábil de evitar la introducción de un nuevo principio hasta que la noción de conjunto finito esté dada).

El principio de inducción es la base de un método para demostrar teoremas sobre números naturales, conocido como el *método de inducción* (o *recurrencia*), que funciona así: “si una propiedad  $P$  es válida para el número 1 y si, suponiendo  $P$  válida para el número  $n$ , como consecuencia se tiene que  $P$  también es válida para su sucesor, entonces  $P$  es válida para todos los números naturales”.

Como ejemplo de demostración por inducción, probaremos que para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene  $s(n) \neq n$ . Esta afirmación es verdadera cuando  $n = 1$ , porque el axioma 2 se tiene  $1 \neq s(1)$  para todo  $n$ , luego, en particular,  $1 \neq s(1)$ . Si suponemos verdadera la afirmación para algún  $n \in \mathbb{N}$ , se cumple  $n \neq s(n)$ . Como la función  $s$  es inyectiva, entonces  $s(n) \neq s(s(n))$ , esto es, la afirmación es verdadera para  $s(n)$ .

En el conjunto de los números naturales se definen dos operaciones fundamentales, la *adición*, que asocia a cada par de números naturales  $(m, n)$  su *suma*  $m + n$ , y la *multiplicación* que hace corresponder al par  $(m, n)$  su producto  $m \cdot n$ . Estas dos operaciones se caracterizan por las siguientes igualdades, que sirven como defi-

nición:

$$\begin{aligned} m + 1 &= s(m); \\ m + s(n) &= s(m + n), \text{ esto es, } m + (n + 1) = (m + n) + 1; \\ m \cdot 1 &= m \\ m \cdot (n + 1) &= m \cdot n + m. \end{aligned}$$

Con otras palabras: sumar 1 a  $m$  significa tomar su sucesor. Y una vez conocida la suma  $m + n$  también es conocido  $m + (n + 1)$ , que es el sucesor de  $m + n$ . En cuanto a la multiplicación: multiplicar por 1 no altera el número. Y conocido el producto  $m \cdot n$  es conocido  $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$ . La demostración de la existencia de las operaciones  $+$  y  $\cdot$  con las propiedades anteriores, así como su unicidad, se hace por inducción. Los detalles se omiten aquí. El lector interesado puede consultar el “Curso de Análisis Matemático”, vol. 1, o las referencias bibliográficas de dicho libro, donde se demuestran (inductivamente) las siguientes propiedades de la adición y la multiplicación:

$$\begin{aligned} \text{asociativa:} \quad & (m + n) + p = m + (n + p), \quad m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p; \\ \text{distributiva:} \quad & m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p; \\ \text{conmutativa:} \quad & m + n = n + m, \quad m \cdot n = n \cdot m; \\ \text{ley de corte:} \quad & m + n = m + p \Rightarrow m = p, \quad m \cdot n = m \cdot p \Rightarrow n = p. \end{aligned}$$

Dados dos números reales  $m, n$  se escribe  $m < n$  cuando existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $m + p = n$ . Se dice que  $m$  es *menor* que  $n$ . La notación  $m \leq n$  significa que  $m < n$  ó  $m = n$ . Se puede probar que  $m < n$  y  $n < p \Rightarrow m < p$  (transitividad) y que dados  $m, n \in \mathbb{N}$  cualesquiera, se cumple una, y sólo una, de estas tres posibilidades:  $m < n$ ,  $m = n$  ó  $m > n$ .

Una de las propiedades más importantes de la *relación de orden*  $m < n$  entre números naturales es el llamado *principio de buena ordenación*, enunciado y probado a continuación.

*Todo subconjunto no vacío  $A \subset \mathbb{N}$  posee un menor elemento, esto es, un elemento  $n_0 \in A$  tal que  $n_0 \leq n$  para todo  $n \in A$ .*

Para probar esta afirmación llamemos, para cada número  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n$  al conjunto de los números naturales  $\leq n$ . Si  $1 \in A$  entonces

1 es el menor elemento de  $A$ . Si  $1 \notin A$  entonces consideramos el conjunto  $X$  de los números naturales  $n$  tales que  $I_n \subset \mathbb{N} - A$ . Como  $I_1 = \{1\} \subset \mathbb{N} - A$ , vemos que  $1 \in X$ . Por otra parte, como  $A$  no es vacío, concluimos que  $X \neq \mathbb{N}$ . Luego la conclusión del axioma 3 no es válida. Se sigue que debe existir  $n \in X$  tal que  $n + 1 \notin X$ . Entonces  $I_n = \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N} - A$  y  $n_0 = n + 1 \in A$ . Por lo tanto  $n_0$  es el menor elemento del conjunto  $A$ .

## 2. Conjuntos finitos

Continuaremos usando la notación  $I_n = \{p \in \mathbb{N}; p \leq n\}$ . Un conjunto  $X$  se dice finito cuando es vacío o bien existen  $n \in \mathbb{N}$  y una biyección  $f : I_n \rightarrow X$ . Escribiendo  $x_1 = f(1)$ ,  $x_2 = f(2)$ ,  $\dots$ ,  $x_n = f(n)$  tenemos  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . La biyección  $f$  se llama *enumeración* de los elementos de  $X$ , y el número  $n$  se llama *número de elementos o cardinal* del conjunto finito  $X$ . El Corolario 1 más adelante prueba que el cardinal está bien definido, esto es, que no depende de la enumeración  $f$  escogida.

**Lema 1.** Si existe una biyección  $f : X \rightarrow Y$ , entonces dados  $a \in X$  y  $b \in Y$  también existe una biyección  $g : X \rightarrow Y$  tal que  $g(a) = b$ .

**Demostración:** Sea  $b' = f(a)$ . Como  $f$  es sobreyectiva, existe  $a' \in X$  tal que  $f(a') = b$ . Definamos  $g : X \rightarrow Y$  como  $g(a) = b$ ,  $g(a') = b'$  y  $g(x) = f(x)$  si  $x \in X$  no es igual ni a  $a$  ni a  $a'$ . Es fácil ver que  $g$  es una biyección.  $\square$

**Teorema 1.** Si  $A$  es un subconjunto propio de  $I_n$ , no puede existir una biyección  $f : A \rightarrow I_n$ .

**Demostración:** Supongamos, por reducción al absurdo, que el teorema sea falso y consideremos  $n_0 \in \mathbb{N}$  el menor número natural para el que existen un subconjunto propio  $A \subset I_{n_0}$  y una biyección  $f : A \rightarrow I_{n_0}$ . Si  $n_0 \in A$  entonces, por el Lema, existe una biyección  $g : A \rightarrow I_{n_0}$  con  $g(n_0) = n_0$ . En este caso la restricción de  $g$  a  $A - \{n_0\}$  es una biyección del subconjunto propio  $A - \{n_0\}$  en  $I_{n_0-1}$ , lo que contradice la minimalidad de  $n_0$ . Si, por el contrario, tuviésemos  $n_0 \notin A$  entonces tomaríamos  $a \in A$  con  $f(a) = n_0$  y la



restricción de  $f$  al subconjunto propio  $A - \{a\} \subset I_{n_0-1}$  sería una biyección en  $I_{n_0-1}$ , lo que de nuevo contradice la minimalidad de  $n_0$ .  $\square$

**Corolario 1.** Si  $f : I_m \rightarrow X$  y  $g : I_n \rightarrow X$  son biyecciones, entonces  $m = n$ .

En efecto, si tuviésemos  $m < n$  entonces  $I_n$  sería un subconjunto propio de  $I_m$ , lo que violaría el Teorema 1, pues  $g^{-1} \circ f : I_m \rightarrow I_n$  es una biyección. Análogamente se demuestra que no es posible  $m < n$ . Luego  $m = n$ .  $\square$

**Corolario 2.** Sea  $X$  un conjunto finito. Una aplicación  $f : X \rightarrow X$  es inyectiva si, y sólo si, es sobreyectiva.

En efecto, existe una biyección  $\varphi : I_n \rightarrow X$ . La aplicación  $f : X \rightarrow X$  es inyectiva o sobreyectiva si, y sólo si,  $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi : I_n \rightarrow I_n$  lo es. Luego podemos considerar  $f : I_n \rightarrow I_n$ . Si  $f$  es inyectiva entonces tomando  $A = f(I_n)$  tendremos una biyección  $f^{-1} : A \rightarrow I_n$ . Por el Teorema 1,  $A = I_n$  y  $f$  es sobreyectiva. Recíprocamente, si  $f$  es sobreyectiva entonces, para cada  $x \in I_n$  podemos escoger  $y = g(x) \in I_n$  tal que  $f(y) = x$ . Entonces  $g$  es inyectiva y, por lo que acabamos de probar,  $g$  es sobreyectiva. Así, si  $y_1, y_2 \in I_n$  son tales que  $f(y_1) = f(y_2)$ , tomamos  $x_1, x_2$  con  $g(x_1) = y_1$ ,  $g(x_2) = y_2$  y tendremos  $x_1 = f \circ g(x_1) = f(y_1) = f(y_2) = f(g(x_2)) = x_2$ , de donde  $y_1 = g(x_1) = g(x_2) = y_2$ , luego  $f$  es inyectiva.

**Corolario 3.** No puede existir una biyección entre un conjunto finito y una parte propia de éste.

El Corolario 3 es una mera reformulación del Teorema 1.

**Teorema 2.** Todo subconjunto de un conjunto finito es finito.

**Demostración:** En primer lugar probaremos el siguiente caso particular: si  $X$  es finito y  $a \in X$  entonces  $X - \{a\}$  es finito. En efecto, existe una biyección  $f : I_n \rightarrow X$  que, por el Lema, podemos suponer que cumple  $f(n) = a$ . Si  $n = 1$  entonces  $X - \{a\}$  es finito. Si  $n > 1$ , la restricción de  $f$  a  $I_{n-1}$  es una biyección en  $X - \{a\}$ , luego  $X - \{a\}$  es finito y tiene  $n - 1$  elementos. El caso general se prueba por inducción sobre el número  $n$  de elementos de  $X$ . Este es

evidente si  $X = \emptyset$  ó  $n = 1$ . Supongamos el Teorema verdadero para conjuntos de  $n$  elementos, sean  $X$  un conjunto de  $n + 1$  elementos e  $Y$  un subconjunto de  $X$ . Si  $Y = X$  no hay nada que probar. En caso contrario, existe  $a \in X$  tal que  $a \notin Y$ . Entonces también se cumple  $Y \subset X - \{a\}$ . Como  $X - \{a\}$  tiene  $n$  elementos, se sigue que  $Y$  es finito.  $\square$

**Corolario 1.** *Dada  $f : X \rightarrow Y$ , si  $Y$  es finito y  $f$  es inyectiva entonces  $X$  es finito; si  $X$  es finito y  $f$  es sobreyectiva entonces  $Y$  es finito.*

En efecto, si  $f$  es inyectiva entonces es una biyección de  $X$  en el subconjunto  $f(X)$  del conjunto finito  $Y$ . Por otra parte, si  $f$  es sobreyectiva y  $X$  es finito entonces, para cada  $y \in Y$  podemos elegir  $x = g(y) \in X$  tal que  $f(x) = y$ . Esto define una aplicación  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $f(g(y)) = y$  para todo  $y \in Y$ . Se concluye que  $g$  es inyectiva luego, por lo que acabamos de probar,  $Y$  es finito.  $\square$

Un subconjunto  $X \subset \mathbb{N}$  se dice *acotado* cuando existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $x \leq p$  para todo  $x \in X$ .

**Corolario 2.** *Un subconjunto  $X \subset \mathbb{N}$  es finito si, y sólo si, está acotado.*

En efecto, si  $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{N}$  es finito, tomando  $p = x_1 + \dots + x_n$  vemos que  $x \in X \Rightarrow x < p$ , luego  $X$  está acotado. Recíprocamente, si  $X \subset \mathbb{N}$  está acotado entonces  $X \subset I_p$  para algún  $p \in \mathbb{N}$ , por tanto del Teorema 2 se sigue que  $X$  es finito.  $\square$

### 3. Conjuntos infinitos

Se dice que un conjunto es *infinito* cuando no es finito. Así,  $X$  es infinito cuando ni es el conjunto vacío ni existe para ningún  $n \in \mathbb{N}$  una biyección  $f : I_n \rightarrow X$ .

Por ejemplo, en virtud del Corolario 2 del Teorema 2, el conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales es infinito. Por el mismo motivo, si  $k \in \mathbb{N}$  entonces el conjunto  $k \cdot \mathbb{N}$  de los múltiplos de  $k$  es infinito.

**Teorema 3.** *Si  $X$  es un conjunto infinito, entonces existe una aplicación inyectiva  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ .*

**Demostración:** Para cada subconjunto no vacío  $A \subset X$  escogemos un elemento  $x_A \in A$ . A continuación, definimos  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  inductivamente. Hacemos  $f(1) = x_X$  y, suponiendo ya definidos  $f(1), \dots, f(n)$ , escribimos  $A_n = X - \{f(1), \dots, f(n)\}$ . Como  $X$  es infinito  $A_n$  no es vacío. Entonces definimos  $f(n+1) = x_{A_n}$ . Esto completa la definición de  $f$ . Para probar que  $f$  es inyectiva, sean  $m, n \in \mathbb{N}$ , por ejemplo  $m < n$ . Entonces  $f(m) \in \{f(1), \dots, f(n-1)\}$  mientras que  $f(n) \in X - \{f(1), \dots, f(n-1)\}$ , luego  $f(m) \neq f(n)$ .  $\square$

**Corolario.** *Un conjunto  $X$  es infinito si, y sólo si, existe una biyección  $\varphi : X \rightarrow Y$  es un subconjunto propio  $Y \subset X$ .*

En efecto, sea  $X$  infinito y  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  una aplicación inyectiva. Escribimos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(n) = x_n$ . Consideremos el subconjunto propio  $Y = X - \{x_1\}$ . Definimos entonces la biyección  $\varphi : X \rightarrow Y$  tomando  $\varphi(x) = x$  si  $x$  no es ninguno de los  $x_n$  y  $\varphi(x_n) = x_{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Recíprocamente, si existe una biyección de  $X$  en un subconjunto propio entonces  $X$  es infinito, en virtud del Corolario 3 del Teorema 1.  $\square$

Si  $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N} - \{1\}$  entonces  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_1$ ,  $\varphi(n) = n + 1$ , es una biyección de  $\mathbb{N}$  en su subconjunto propio  $\mathbb{N}_1 = \{2, 3, \dots\}$ . De forma general, dado  $p \in \mathbb{N}$  podemos considerar  $\mathbb{N}_p = \{p+1, p+2, \dots\}$  y definir la biyección  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_p$ ,  $\varphi(n) = n + p$ . Este tipo de fenómenos ya eran conocidos por Galileo, el primero en observar que “hay tantos números pares como números naturales”, que demostró que si  $P = \{2, 4, 6, \dots\}$  es el conjunto de los números pares entonces  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow P$ , dada por  $\varphi(n) = 2n$ , es una biyección. Evidentemente, si  $I = \{1, 3, 5, \dots\}$  es el conjunto de los números impares, entonces  $\psi : \mathbb{N} \rightarrow I$ ,  $\psi(n) = 2n - 1$ , también es una biyección. En estos dos últimos ejemplos,  $\mathbb{N} - P = I$  y  $\mathbb{N} - I = P$  son infinitos, mientras que  $\mathbb{N} - \mathbb{N}_p = \{1, 2, \dots, p\}$  es finito.

#### 4. Conjuntos numerables

Un conjunto  $X$  se dice *numerable* cuando es finito o cuando existe una biyección  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ . En este caso,  $f$  se llama numeración de los elementos de  $X$ . Si escribimos  $f(1) = x_1, f(2) = x_2, \dots, f(n) = x_n, \dots$  se tiene entonces  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ .

**Teorema 4.** *Todo subconjunto  $X \subset \mathbb{N}$  es numerable.*

**Demostración:** Si  $X$  es finito no hay nada que demostrar. En caso contrario, numeramos los elementos de  $X$  tomando  $x_1 =$  menor elemento de  $X$ . Suponiendo definidos  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ , escribimos  $A_n = X - \{x_1, \dots, x_n\}$ . Observando que  $A \neq \emptyset$ , pues  $X$  es infinito, definimos  $x_{n+1} =$  menor elemento de  $A_n$ . Entonces  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ . En efecto, si existiese algún elemento de  $X$  diferente de todos los  $x_n$  tendríamos que  $x \in A_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , luego  $x$  sería un número natural mayor que todos los elementos del conjunto infinito  $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ , lo que contradice el Corolario 2 de Teorema 2.  $\square$

**Corolario 1.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  inyectiva. Si  $Y$  es numerable  $X$  también lo es. En particular, todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.*

En efecto, basta considerar el caso en que existe una biyección  $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{N}$ . Entonces  $\varphi \circ f : X \rightarrow \mathbb{N}$  es una biyección de  $X$  en un subconjunto de  $\mathbb{N}$ , que es numerable, por el Teorema 4. En el caso particular  $X \subset Y$ , tomamos  $f : X \rightarrow Y$  igual a la aplicación inclusión.  $\square$

**Corolario 2.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  sobreyectiva. Si  $X$  es numerable entonces  $Y$  también lo es.*

En efecto, para cada  $y \in Y$  podemos tomar  $x = g(y) \in X$  tal que  $f(x) = y$ . Esto define una aplicación  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $f(g(y)) = y$  para todo  $y \in Y$ . De donde se concluye que  $g$  es inyectiva. Por el Corolario 1,  $Y$  es numerable.  $\square$

**Corolario 3.** *El producto cartesiano de dos conjuntos numerables es un conjunto numerable.*

En efecto, si  $X$  e  $Y$  son numerables entonces existen aplicaciones sobreyectivas  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  y  $g : \mathbb{N} \rightarrow Y$ , luego  $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X \times Y$  dada por  $\varphi(m, n) = (f(m), g(n))$  es sobreyectiva. Por tanto, es suficiente probar que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  es numerable. Para esto consideremos la aplicación  $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $\psi(m, n) = 3^m \cdot 2^n$ . Por la unicidad de la descomposición de un número en factores primos,  $\psi$  es inyectiva. Se concluye que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  es numerable.  $\square$

**Corolario 4.** *La unión de una familia numerable de conjuntos numerables es numerable.*

Tomando  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ , definimos la aplicación sobreyectiva  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X$  haciendo  $f(m, n) = f_n(m)$ . El caso de unión finita se reduce al caso anterior ya que  $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup X_{n+1} \cup \dots$ .

□

El Teorema 3 significa que el infinito numerable es el “menor” de los infinitos. En efecto, el teorema se puede reformular como sigue:

*Todo conjunto infinito contiene un subconjunto infinito numerable.*

**Ejemplo 1.** El conjunto  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  de los números *enteros* es numerable. Se puede definir una biyección  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  como  $f(n) = (n-1)/2$  si  $n$  es impar y  $f(n) = -n/2$  si  $n$  es par.

**Ejemplo 2.** El conjunto  $\mathbb{Q} = \{m/n : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$  de los números *racionales* es numerable. En efecto, si escribimos  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$  podemos definir una función sobreyectiva  $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Q}$  como  $f(m, n) = m/n$ .

**Ejemplo 3.** (Un conjunto no numerable). Sea  $S$  el conjunto de todas las sucesiones infinitas formadas con los símbolos 0 y 1, como por ejemplo  $s = (0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \dots)$ . Con otras palabras,  $S$  es el conjunto de todas las funciones  $s : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , el valor  $s(n)$ , igual a 0 ó 1, es el  $n$ -ésimo término de la sucesión  $s$ . Afirmamos que ningún subconjunto numerable  $X = \{s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\} \subset S$  es igual a  $S$ . En efecto, dado  $X$ , indiquemos mediante  $s_{nn}$  el  $n$ -ésimo término de la sucesión  $s_n \in X$ . Formamos una nueva sucesión  $s^* \in S$  tomando el  $n$ -ésimo término de  $s^*$  igual a 0 si  $s_{nn} = 1$ . La sucesión  $s^*$  no pertenece al conjunto  $X$  porque su  $n$ -ésimo término es diferente del  $n$ -ésimo término de  $s_n$ . (Este argumento, debido a G. Cantor, es conocido como “método de la diagonal”).

En el próximo capítulo demostraremos que el conjunto  $\mathbb{R}$  de los números reales no es numerable.

## 5. Ejercicios

## Sección 1: Números naturales

1. Usando el método de inducción, pruebe que

$$(a) \quad 1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2.$$

$$(b) \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

2. Dados  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $n > m$ , pruebe que ó  $n$  es múltiplo de  $m$  o que existen  $q, r \in \mathbb{N}$  tales que  $n = mq + r$ ,  $r < m$ . Pruebe que  $q$  y  $r$  son únicos con esta propiedad.
3. Sea  $X \subset \mathbb{N}$  un subconjunto no vacío tal que  $m, n \in X \Leftrightarrow m, m+n \in X$ . Pruebe que existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $X$  es el conjunto de los múltiplos de  $k$ .
4. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , pruebe que no existe  $x \in \mathbb{N}$  tal que  $n < x < n+1$ .
5. Obtenga el principio de inducción como consecuencia del principio de buena ordenación.

## Sección 2: Conjuntos finitos

1. Indicando mediant  $\text{card } X$  el número de elementos del conjunto finito  $X$ , pruebe que:

$$(a) \quad \text{Si } X \text{ es finito e } Y \subset X, \text{ entonces } \text{card } Y \leq \text{card } X.$$

$$(b) \quad \text{Si } X \text{ e } Y \text{ son finitos, entonces } X \cup Y \text{ es finito y}$$

$$\text{card}(X \cup Y) = \text{card } X + \text{card } Y - \text{card}(X \cap Y).$$

$$(c) \quad \text{Si } X \text{ e } Y \text{ son finitos, entonces } X \times Y \text{ es finito y}$$

$$\text{card}(X \times Y) = \text{card } X \cdot \text{card } Y.$$

2. Sea  $\mathcal{P}(X)$  el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de  $X$ . Pruebe, usando el método de inducción, que si  $X$  es finito entonces  $\text{card } \mathcal{P}(X) = 2^{\text{card } X}$ .
3. Sea  $\mathcal{F}(X; Y)$  el conjunto de las funciones  $f : X \rightarrow Y$ . Si  $\text{card } X = m$  y  $\text{card } Y = n$ , pruebe que  $\text{card}(\mathcal{F}(X; Y)) = n^m$ .

4. Pruebe que todo conjunto finito  $X$  de números naturales posee un elemento máximo (esto es, existe  $x_0 \in X$  tal que  $x \leq x_0 \forall x \in X$ ).

## Sección 3: Conjuntos infinitos

1. Dada  $f : X \rightarrow Y$ , pruebe que:
  - (a) Si  $X$  es infinito y  $f$  es inyectiva entonces  $Y$  es infinito.
  - (b) Si  $Y$  es infinito y  $f$  es sobreyectiva entonces  $X$  es infinito.
2. Sean  $X$  un conjunto finito e  $Y$  un conjunto infinito. Pruebe que existe una función inyectiva  $f : X \rightarrow Y$  y una función sobreyectiva  $g : Y \rightarrow X$ .
3. Pruebe que el conjunto  $\mathcal{P}$  de los números primos es infinito.
4. Dé un ejemplo de una sucesión decreciente  $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$  de conjuntos infinitos cuya intersección  $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$  sea vacía.

## Sección 4: Conjuntos numerables

1. Defina  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mediante  $f(1, n) = 2n - 1$  y  $f(n + 1, n) = 2^n(2n - 1)$ . Pruebe que  $f$  es una biyección.
2. Pruebe que existe  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  sobreyectiva tal que  $g^{-1}(n)$  es infinito para cada  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Escriba  $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \cdots \cup \mathbb{N}_n \cup \cdots$  como unión infinita de subconjuntos infinitos disjuntos dos a dos.
4. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $\mathcal{P}_n = \{X \subset \mathbb{N} : \text{card } X = n\}$ . Pruebe que  $\mathcal{P}_n$  es numerable. Concluya que el conjunto  $\mathcal{P}_f$  de los subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$  es numerable.
5. Pruebe que el conjunto  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  de todos los subconjuntos de  $\mathbb{N}$  no es numerable.
6. Sea  $Y$  numerable y  $f : X \rightarrow Y$  sobreyectiva tal que, para cada  $y \in Y$ ,  $f^{-1}(y)$  es numerable. Pruebe que  $X$  es numerable.





## 2

# Números reales

El conjunto de los números reales se denotará por  $\mathbb{R}$ . En este capítulo haremos una descripción completa de sus propiedades; éstas, así como sus consecuencias, se utilizarán en los próximos capítulos.

### 1. $\mathbb{R}$ es un cuerpo

Esto significa que en  $\mathbb{R}$  están definidas dos operaciones, llamadas *adición* y *multiplicación*, que cumplen ciertas condiciones, especificadas a continuación.

La adición hace corresponder a cada par de elementos  $x, y \in \mathbb{R}$ , su suma  $x + y \in \mathbb{R}$ , mientras que la multiplicación asocia a estos elementos su producto  $x \cdot y \in \mathbb{R}$ .

Los axiomas a los que obedecen estas operaciones son:

*Asociatividad:* para cualesquiera  $x, y, z \in \mathbb{R}$  se tiene  $(x + y) + z = x + (y + z)$  y  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ .

*Conmutatividad:* para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}$  se tiene  $x + y = y + x$  y  $x \cdot y = y \cdot x$ .

*Elementos neutros:* existen en  $\mathbb{R}$  dos elementos distintos 0 y 1 tales que  $x + 0 = x$  y  $x \cdot 1 = x$  para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ .

*Inversos:* todo  $x \in \mathbb{R}$  posee un inverso aditivo  $-x \in \mathbb{R}$  tal que  $x + (-x) = 0$  y si  $x \neq 0$ , también existe un *inverso multiplicativo*  $x^{-1} \in \mathbb{R}$  tal que  $x \cdot x^{-1} = 1$ .

*Distributividad:* para cualesquiera  $x, y, z \in \mathbb{R}$  se tiene  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ .

De estos axiomas resultan todas las reglas familiares del cálculo con números reales. A título de ejemplo, establecemos algunas.

De la conmutatividad resulta que  $0 + x = x$  y  $-x + x = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Análogamente,  $1 \cdot x = x$  y  $x^{-1} \cdot x = 1$  cuando  $x \neq 0$ . La suma  $x + (-y)$  se indicará con  $x - y$  y se llama *diferencia* entre  $x$  e  $y$ . Si  $y \neq 0$ , el producto  $x \cdot y^{-1}$  también se representará por  $x/y$  y se llamará cociente entre  $x$  e  $y$ . Las operaciones  $(x, y) \rightarrow x - y$  y  $(x, y) \rightarrow x/y$  se llaman, respectivamente, *substracción* y *división*. Evidentemente, la división de  $x$  por  $y$  sólo tiene sentido cuando  $y \neq 0$ , pues el número 0 no tiene inverso multiplicativo.

De la distributividad se concluye que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , se tiene  $x \cdot 0 + x = x \cdot 0 + x \cdot 1 = x \cdot (0 + 1) = x \cdot 1 = x$ . Sumando  $-x$  a ambos miembros de la igualdad  $x \cdot 0 + x = x$  obtenemos  $x \cdot 0 = 0$ .

Por otro parte, si  $x \cdot y = 0$  podemos concluir que  $x = 0$  ó  $y = 0$ . En efecto, si  $y \neq 0$  entonces podemos multiplicar ambos miembros de la igualdad por  $y^{-1}$  y obtenemos  $x \cdot y \cdot y^{-1} = 0 \cdot y^{-1}$ , de donde  $x = 0$ .

También es resultado de la distributividad la “regla de los signos”:  $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$  y  $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$ . En efecto,  $x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot (-y + y) = x \cdot 0$ , sumando  $-(x \cdot y)$  a ambos miembros de la igualdad  $x \cdot (-y) + x \cdot y = 0$  se tiene  $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$ . Análogamente,  $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ . Luego  $(-x) \cdot (-y) = -[x \cdot (-y)] = -[-(x \cdot y)] = x \cdot y$ . En particular  $(-1) \cdot (-1) = 1$ . (Observación: la igualdad  $-(-z) = z$ , anteriormente usada, resulta al sumar  $z$  a ambos miembros de la igualdad  $-(-z) + (-z) = 0$ .)

Si dos números reales  $x, y$  tienen cuadrados iguales, entonces

$x = \pm y$ . En efecto, si  $x^2 = y^2$  entonces  $0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ , y como sabemos, el producto de dos números reales sólo es cero si al menos uno de los factores es nulo.

## 2. $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado

Esto significa que existe un subconjunto  $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$  llamado conjunto de los *números reales positivos*, que cumple las siguientes condiciones:

- P1. La suma y el producto de números reales positivos son positivos. O sea,  $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^+$  y  $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$ .
- P2. Dado  $x \in \mathbb{R}$  se verifica una, y sólo una, de las 3 alternativas siguientes: ó  $x = 0$ , ó  $x \in \mathbb{R}^+$  ó  $-x \in \mathbb{R}^+$ .

Si indicamos mediante  $\mathbb{R}^-$  al conjunto de los números  $-x$ , donde  $x \in \mathbb{R}^+$ , la condición P2 nos dice que  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ , y que los conjuntos  $\mathbb{R}^+$ ,  $\mathbb{R}^-$  y  $\{0\}$  son disjuntos dos a dos. Los números  $y \in \mathbb{R}^-$  se llaman *negativos*.

Todo número real  $x \neq 0$  tiene cuadrado positivo. En efecto, si  $x \in \mathbb{R}^+$  entonces  $x^2 = x \cdot x \in \mathbb{R}^+$  por P1. Si  $x \notin \mathbb{R}^+$  entonces (como  $x \neq 0$ )  $-x \in \mathbb{R}^+$ , luego, también por P1, tenemos  $x^2 = (-x) \cdot (-x) \in \mathbb{R}^+$ . En particular, 1 es un número positivo, pues  $1 = 1^2$ .

Se escribe  $x < y$ , y se dice que  $x$  es menor que  $y$ , cuando  $y - x \in \mathbb{R}^+$ , esto es,  $y = x + z$  donde  $z$  es positivo. En este caso, también se escribe  $y > x$ , y se dice que  $y$  es mayor que  $x$ . En particular,  $x > 0$  significa que  $x \in \mathbb{R}^+$ , esto es, que  $x$  es positivo, mientras que  $x < 0$  quiere decir que  $x$  es negativo, esto es, que  $-x \in \mathbb{R}^+$ .

Se tiene las siguientes propiedades para la relación de orden  $x < y$  en  $\mathbb{R}$ :

- O1. *Transitiva*: si  $x < y$  e  $y < z$  entonces  $x < z$ .
- O2. *Tricotomía*: dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , ocurre una, y sólo una, de las siguientes alternativas siguientes, ó  $x = y$ , ó  $x < y$  ó  $x > y$ .

O3. *Monotonía de la adición:* si  $x < y$  entonces, para todo  $z \in \mathbb{R}$ , se tiene  $x + z < y + z$ .

O4. *Monotonía de la multiplicación:* si  $x < y$  entonces para todo  $z > 0$  se tiene  $x \cdot z < y \cdot z$ . Si, por el contrario,  $z < 0$  entonces  $x < y$  implica  $x \cdot z > y \cdot z$ .

**Demostración:** O1.  $x < y$  e  $y < z$  significan  $y - x \in \mathbb{R}^+$  e  $z - y \in \mathbb{R}^+$ . De P1 se sigue que  $(y - x) + (z - y) \in \mathbb{R}^+$ , esto es,  $z - x \in \mathbb{R}^+$ , o sea,  $x < z$ .

O2. Dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , ó  $y - x \in \mathbb{R}^+$ , ó  $y - x = 0$  ó  $y - x \in \mathbb{R}^-$  (esto es,  $x - y \in \mathbb{R}^+$ ). En el primer caso se tiene  $x < y$ , en el segundo  $x = y$  y en tercero  $y < x$ . Por P2 estas posibilidades se excluyen mutuamente.

O3. Si  $x < y$  entonces  $y - x \in \mathbb{R}^+$ , de donde  $(y + z) - (x + z) = y - x \in \mathbb{R}^+$ , esto es  $x + z < y + z$ .

O4. Si  $x < y$  y  $z > 0$  entonces  $y - x \in \mathbb{R}^+$  y  $z \in \mathbb{R}^+$ , luego  $(y - x) \cdot z \in \mathbb{R}^+$ , o sea,  $yz - xz \in \mathbb{R}^+$ , lo que significa que  $xz < yz$ . Si  $x < y$  y  $z < 0$  entonces  $y - x \in \mathbb{R}^+$  y  $y - z \in \mathbb{R}^+$ , de donde  $xz - yz = (y - x)(-z) \in \mathbb{R}^+$ , lo que significa que  $yz < xz$ .  $\square$

En general,  $x < y$  y  $x' < y'$  implican  $x + x' < y + y'$  pues  $yy' - xx' = yy' - yx' + yx' - xx' = y(y' - x') + (y - x)x' > 0$ .

Si  $0 < x < y$  entonces  $y^{-1} < x^{-1}$ . Para probar esto observe primero que  $x > 0 \Rightarrow x^{-1} = x(x^{-1})^2 > 0$ . A continuación multiplicando ambos miembros de la desigualdad  $x < y$  por  $x^{-1}y^{-1}$  se tiene  $y^{-1} < x^{-1}$ .

Como  $1 \in \mathbb{R}$  es positivo, se sigue que  $1 < 1+1 < 1+1+1 < \dots$ . Entonces podemos considerar  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ . Se tiene  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ , pues  $0 \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{R} \Rightarrow -n \in \mathbb{R}$ . Además, si  $m, n \in \mathbb{Z}$ , donde  $n \neq 0$ , entonces  $m/n = mn^{-1} \in \mathbb{R}$ , lo que no permite concluir que  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . Así,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

En la próxima sección veremos que la inclusión  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  es propia.

**Ejemplo 1.** (*Desigualdad de Bernoulli*) Para todo número real  $x \geq -1$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene  $(1+x)^n \geq 1+nx$ . Esto se demuestra por inducción respecto a  $n$ . La desigualdad es obvia si  $n = 1$ . Suponiendo la desigualdad válida para  $n$ , multiplicamos ambos miembros por el número  $(1+x) \geq 0$  y obtenemos

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

Usando el mismo argumento se puede ver que  $(1+x)^n > 1+nx$  cuando  $n > 1$ ,  $x > -1$  y  $x \neq 0$ .

La relación de orden de  $\mathbb{R}$  nos permite definir el *valor absoluto* (o *módulo*) de un número real  $x \in \mathbb{R}$  como sigue:  $|x| = x$  si  $x > 0$ ,  $|0| = 0$  y  $|x| = -x$  si  $x < 0$ . Con otras palabras,  $|x| = \max\{x, -x\}$  es el mayor de los números reales  $x$  y  $-x$ .

Se tiene  $-|x| \leq x \leq |x|$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . En efecto, la desigualdad  $x \leq |x|$  es obvia, mientras que  $-|x| \leq x$  resulta al multiplicar por  $-1$  ambos miembros de la desigualdad  $-x \leq |x|$ . Así podemos caracterizar  $|x|$  como el único número  $\geq 0$  cuyo cuadrado es  $x^2$ .

**Teorema 1.** Si  $x, y \in \mathbb{R}$  entonces  $|x+y| \leq |x|+|y|$  y  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ .

**Demostración:** Sumando miembro a miembro las desigualdades  $|x| \geq x$  e  $|y| \geq y$  se tiene  $|x|+|y| \geq x+y$ . Análogamente, de  $|x| \geq -x$  y  $|y| \geq -y$  resulta  $|x|+|y| \geq -(x+y)$ . Luego  $|x|+|y| \geq |x+y| = \max\{x+y, -(x+y)\}$ . Para probar  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$  es suficiente demostrar que estos dos números tienen el mismo cuadrado, pues ambos son  $\geq 0$ . Ahora bien, el cuadrado de  $|x \cdot y|$  es  $(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$ , mientras que  $(|x| \cdot |y|)^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 = x^2 \cdot y^2$ .  $\square$

**Teorema 2.** Sean  $a, x, \delta \in \mathbb{R}$ . Se tiene  $|x-a| < \delta$  si, y sólo si,  $a-\delta < x < a+\delta$ .

**Demostración:** Como  $|x-a|$  es el mayor de los dos números  $x-a$  y  $-(x-a)$ , afirmar que  $|x-a| < \delta$  es equivalente a decir que se tiene  $x-a < \delta$  y  $-(x-a) < \delta$ , o sea,  $x-a < \delta$  y  $x-a > -\delta$ . Al sumar  $a$  se concluye:  $|x-a| < \delta \Leftrightarrow x < a+\delta$  y  $x > a-\delta \Leftrightarrow a-\delta < x < a+\delta$ .  $\square$

De modo análogo se puede ver que  $|x - a| \leq \delta \Leftrightarrow a - \delta \leq x \leq a + \delta$ .

Usaremos la siguiente notación para representar tipos especiales de conjuntos de números reales, llamados intervalos:

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} & (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\ (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} & [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} & (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \\ & & (-\infty, +\infty) &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Los cuatro intervalos de la izquierda están *acotados*, sus extremos son  $a, b$ ;  $[a, b]$  es un intervalo *cerrado*,  $(a, b)$  es *abierto*,  $[a, b)$  es *cerrado por la izquierda* y  $(a, b]$  *cerrado por la derecha*. Los cinco intervalos a la derecha son *no acotados*:  $(-\infty, b]$  es la semirrecta cerrada a la derecha con origen en  $b$ . Los demás tienen denominaciones análogas. Cuando  $a = b$ , el intervalo  $[a, b]$  se reduce a un único elemento y se llama *intervalo degenerado*.

En términos de intervalos, el Teorema 2 afirma que  $|x - a| < \delta$  si, y sólo si,  $x$  pertenece al intervalo abierto  $(a - \delta, a + \delta)$ . Análogamente,  $|x - a| \leq \delta \Leftrightarrow x \in [a - \delta, a + \delta]$ .

Es muy útil imaginar el conjunto  $\mathbb{R}$  como una recta (la “recta real”) y los números reales como sus puntos. Entonces la relación  $x < y$  significa que el punto  $x$  está a la izquierda de  $y$  (e  $y$  a la derecha de  $x$ ), los intervalos son segmentos de la recta y  $|x - y|$  es la distancia del punto  $x$  al punto  $y$ . Así, el significado del Teorema 2 es que el intervalo  $(a - \delta, a + \delta)$  está formado por los puntos que distan menos que  $\delta$  del punto  $a$ . Tales interpretaciones geométricas constituyen un valioso auxilio para comprender los conceptos y teoremas del Análisis Matemático.

### 3. $\mathbb{R}$ es un cuerpo completo

Nada de lo dicho hasta ahora nos permite distinguir  $\mathbb{R}$  de  $\mathbb{Q}$ , pues los números racionales también forman un cuerpo ordenado. A continuación acabaremos nuestra caracterización de  $\mathbb{R}$ , describiéndolo como un cuerpo ordenado y completo, propiedad que no

cumple  $\mathbb{Q}$ .

Un conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  se dice *acotado superiormente* cuando existe  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $x \leq b$  para todo  $x \in X$ . En este caso se dice que  $b$  es una *cota superior* de  $X$ . Análogamente, se dice que el conjunto  $X$  está *acotado inferiormente* cuando existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $a \leq x$  para todo  $x \in X$ . Entonces el número  $a$  es una *cota inferior* de  $X$ . Si  $X$  está acotado superiormente e inferiormente se dice que es un conjunto *acotado*. Esto significa que  $X$  está contenido en algún intervalo acotado de la forma  $[a, b]$ , o, equivalentemente, que existe  $k > 0$  tal que  $x \in X \Rightarrow |x| \leq k$ .

Sea  $X \subset \mathbb{R}$  acotado superiormente y no vacío. Un número  $b \in \mathbb{R}$  se llama *supremo* del conjunto  $X$  cuando es la menor de las cotas superiores de  $X$ . De forma explícita,  $b$  es el supremo de  $X$  cuando se cumple las dos condiciones siguientes:

- S1. Para todo  $x \in X$  se tiene  $x \leq b$ .
- S2. Si  $c \in \mathbb{R}$  es tal que  $x \leq c$  para todo  $x \in X$ , entonces  $b \leq c$ .

La condición S2 admite la siguiente reformulación

- S2'. Si  $c < b$  entonces existe  $x \in X$  tal que  $c < x$ .

En efecto, S2' afirma que ningún número real menor que  $b$  puede ser una cota superior de  $X$ . A veces S2' se escribe así: para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $x \in X$  tal que  $b - \varepsilon < x$ .

Escribimos  $b = \sup X$  para indicar que  $b$  es el supremo del conjunto  $X$ .

Análogamente, si  $X$  es un conjunto no vacío acotado, inferiormente se dice que un número real  $a$  es el *ínfimo* de  $X$ , y se escribe  $a = \inf X$ , cuando es la mayor de las cotas inferiores de  $X$ . Esto es equivalente a las dos afirmaciones siguientes:

- I1. Para todo  $x \in X$  se tiene  $a \leq x$ .
- I2. Si  $c \leq x$  para todo  $x \in X$ , entonces  $c \leq a$ .

La condición I2 se puede formular también así:

I2'. Si  $a < c$  entonces existe  $x \in X$  tal que  $x < c$ .

De hecho, I2' nos dice que ningún número mayor que  $a$  es una cota inferior de  $X$ . Equivalentemente: para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $x \in X$  tal que  $x < a + \varepsilon$ .

Se dice que un número  $b \in X$  es el *máximo* del conjunto  $X$  cuando  $b \geq x$  para todo  $x \in X$ . Esto quiere decir que  $b$  es una cota superior de  $X$  que *pertenece* a  $X$ . Por ejemplo  $b$  es el máximo del intervalo  $[a, b]$ , sin embargo el intervalo  $[a, b)$  no posee máximo. Evidentemente, si un conjunto  $X$  posee un máximo éste es su supremo. La noción de supremo sirve precisamente para substituir a la idea de máximo de un conjunto cuando éste no existe. El supremo del conjunto  $[a, b)$  es  $b$ . Se pueden hacer consideraciones totalmente análogas con relación al ínfimo.

Afirmar que el cuerpo ordenado  $\mathbb{R}$  es *completo* significa afirmar que todo conjunto no vacío y acotado superiormente  $X \subset \mathbb{R}$  posee un supremo  $b = \sup X$ .

No es necesario postular también que todo conjunto no vacío y acotado inferiormente posee un ínfimo. En efecto, en este caso el conjunto  $Y = \{-x : x \in X\}$  no es vacío y está acotado superiormente, luego posee un supremo  $b \in \mathbb{R}$ . Entonces, como se puede ver fácilmente, el número  $a = -b$  es el ínfimo de  $X$ .

A continuación veremos algunas consecuencias de la completitud de  $\mathbb{R}$ .

### Teorema 3.

- i) El conjunto  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  de los números naturales no está acotado superiormente;
- ii) El ínfimo del conjunto  $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$  es igual a 0;
- iii) Dados  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \cdot a > b$ .

**Demostración:** Si  $\mathbb{N}$  estuviese acotado superiormente, existiría  $c = \sup \mathbb{N}$ . Entonces  $c - 1$  no sería una cota superior de  $\mathbb{N}$ , esto es, existiría  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $c - 1 < n$ . De donde  $c < n + 1$ , luego



$c$  no sería una cota superior de  $\mathbb{N}$ . Esta contradicción prueba i). Respecto a ii): 0 es, evidentemente, una cota inferior de  $X$ . Entonces basta probar que cualquier  $c > 0$  no es una cota inferior de  $X$ . Ahora bien, dado  $c > 0$ , existe, por i), un número natural  $n > 1/c$ , de donde  $1/n < c$ , lo que prueba ii). Finalmente, dados  $a, b \in \mathbb{R}^+$  usamos i) para obtener  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n > b/a$ . Entonces  $na > b$ , lo que demuestra iii).  $\square$

Las propiedades i), ii) y iii) del teorema anterior son equivalentes y significan que  $\mathbb{R}$  es un cuerpo *arquimediano*. En realidad, iii) se debe al matemático griego Eudoxo, que vivió algunos siglos antes que Arquímedes.

**Teorema 4. (Principio de los intervalos encajados)** *Dada una sucesión decreciente  $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$  de intervalos cerrados y acotados,  $I_n = [a_n, b_n]$ , existe al menos un número real  $c$  tal que  $c \in I_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Demostración:** Las inclusiones  $I_n \supset I_{n+1}$  significan que

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

El conjunto  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$  está, por tanto, acotado superiormente; sea  $c = \sup A$ . Evidentemente,  $a_n \leq c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Además, como cada  $b_n$  es una cota superior de  $A$ , tenemos  $c \leq b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por tanto  $c \in I_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Teorema 5.** *El conjunto de los números reales no es numerable.*

**Demostración:** Demostraremos que ninguna función  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  puede ser sobreyectiva. Para esto, suponiendo  $f$  dada, construiremos una sucesión decreciente  $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$  de intervalos cerrados y acotados tales que  $f(n) \notin I_n$ . Entonces, si  $c$  es un número real que pertenece a todos los  $I_n$  ningún valor de  $f(n)$  puede ser igual a  $c$ , luego  $f$  no es sobreyectiva. Para obtener los intervalos, comenzaremos tomando  $I_1 = [a_1, b_1]$  tal que  $f(1) < a_1$  y, suponiendo obtenidos  $I_1, I_2, \dots, I_n$  tales que  $f(j) \notin I_j$ , consideraremos  $I_n = [a_n, b_n]$ . Si  $f(n+1) \in I_n$ , al menos uno de los extremos, por ejemplo  $a_n$ , es diferente de  $f(n+1)$ , esto es,  $a_n < f(n+1)$ . En este caso tomamos  $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ , donde  $a_{n+1} = a_n$  y  $b_{n+1} = (a_n + f(n+1))/2$ .  $\square$

Un número se llama *irracional* cuando no es racional. Como el conjunto  $\mathbb{Q}$  de los números racionales es numerable, del teorema anterior resulta que existen números irracionales y, aún más, como  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ , los irracionales constituyen un conjunto no numerable (por tanto son la “mayoría” de los números reales) pues la unión de dos conjuntos numerables es numerable. Evidentemente, se pueden exhibir número irracionales explícitamente. En el Capítulo 3, Ejemplo 15, veremos que la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , dada por  $f(x) = x^2$ , es sobreyectiva. Luego existe un número real positivo, expresado por  $\sqrt{2}$ , cuyo cuadrado es igual a 2. Pitágoras y sus discípulos demostraron que ningún número racional puede tener cuadrado igual a 2. (En efecto, si  $(p/q)^2 = 2$  entonces  $2q^2 = p^2$ , donde  $p$  y  $q$  son enteros, lo que es absurdo pues el factor primo 2 aparece un número par de veces en la descomposición de  $p^2$  en factores primos y un número impar de veces en la de  $2q^2$ ).

**Corolario 1.** *Todo intervalo no degenerado no es numerable.*

En efecto, todo intervalo no degenerado contiene un intervalo abierto  $(a, b)$ . Como la función  $f : (-1, 1) \rightarrow (a, b)$ , definida como  $f(x) = \frac{1}{2}[(b-a)x + a+b]$ , es una biyección, basta probar que  $(-1, 1)$  no es numerable. Ahora bien, la función  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ , dada por  $\varphi(x) = x/(1+|x|)$ , es una biyección cuya inversa es  $\psi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante  $\psi(y) = y/(1-|y|)$ , pues  $\varphi(\psi(y)) = y$  e  $\psi(\varphi(x)) = x$  para cualesquiera  $y \in (-1, 1)$  y  $x \in \mathbb{R}$ , como se puede ver fácilmente. □

**Teorema 6.** *Todo intervalo no degenerado  $I$  contiene números racionales e irracionales.*

**Demostración:** Obviamente  $I$  contiene números irracionales, pues en caso contrario  $I$  sería numerable. Para probar que  $I$  contiene números racionales consideramos  $[a, b] \subset I$ , donde  $a < b$  se pueden tomar irracionales. Tomemos  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $1/n < b - a$ . Los intervalos  $I_m = [m/n, (m+1)/n]$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , cubren la recta real, esto es,  $\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} I_m$ . Por lo tanto existe  $m$  tal que  $a \in I_m$ . Como  $a$  es irracional, tenemos  $m/n < a < (m+1)/n$ . Como  $1/n$ , la longitud del intervalo  $I_m$ , es menor que  $b - a$ , se tiene que  $(m+1)/n < b$ . Luego el número racional  $(m+1)/n$  pertenece al intervalo  $[a, b]$ , y por tanto al intervalo  $I$ . □

**5. Ejercicios**

Sección 1:  $\mathbb{R}$  es un cuerpo.

1. Pruebe las siguientes unicidades:

- (a) Si  $x + \theta = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  entonces  $\theta = 0$ ;
  - (b) Si  $x \cdot u = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  entonces  $u = 1$ ;
  - (c) Si  $x + y = 0$  entonces  $y = -x$ ;
  - (d) Si  $x \cdot y = 1$  entonces  $y = x^{-1}$ .
2. Dados  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , si  $b \neq 0$  y  $d \neq 0$  pruebe que  $(a/b + c/d) = (ad + bc)/bd$  y  $(a/b)(c/d) = (ac/bd)$ .
3. Si  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$ , pruebe que  $(ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$  y concluya que  $(a/b)^{-1} = b/a$ .
4. Pruebe que  $(1 - x^{n+1})/(1 - x) = 1 + x + \cdots + x^n$  para todo  $x \neq 1$ .

Sección 2:  $\mathbb{R}$  es un cuerpo ordenado

- 1. Para cualesquiera  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , pruebe que  $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ .
- 2. Pruebe que  $||x| - |y|| \leq |x - y|$  para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 3. Dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , si  $x^2 + y^2 = 0$  pruebe que  $x = y = 0$ .
- 4. Pruebe por el método de inducción que  $(1 + x)^n \geq 1 + nx + [n(n - 1)/2]x^2$  si  $x \geq 0$ .
- 5. Para todo  $x \neq 0$ , pruebe que  $(1 + x)^{2n} > 1 + 2nx$ .
- 6. Pruebe que  $|a - b| < \varepsilon \Rightarrow |a| < |b| + \varepsilon$ .
- 7. Usando que el trinomio de segundo grado  $f(\lambda) = \sum_{i=1}^n (x_i + \lambda y_i)^2$  es  $\geq 0$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  pruebe la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

Pruebe también que se tiene la igualdad si, y sólo si, existe  $\lambda$  tal que  $x_i = \lambda y_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

8. Si  $a_1/b_1, \dots, a_n/b_n$  pertenecen al intervalo  $(\alpha, \beta)$  y  $b_1, \dots, b_n$  son positivos, pruebe que  $(a_1 + \dots + a_n)/(b_1 + \dots + b_n)$  pertenece a  $(\alpha, \beta)$ . Con las mismas hipótesis, si  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^+$ , pruebe que  $(t_1 a_1 + \dots + t_n a_n)/(t_1 b_1 + \dots + t_n b_n)$  también pertenece al intervalo  $(\alpha, \beta)$ .

Sección 3:  $\mathbb{R}$  es un cuerpo ordenado completo

1. Se dice que una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  está *acotada superiormente* cuando su imagen  $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$  es un conjunto acotado superiormente. Entonces se escribe  $\sup(f) = \sup\{f(x) : x \in X\}$ . Pruebe que si  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  están acotadas superiormente ocurre lo mismo con la suma  $f + g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ; además se tiene  $\sup(f + g) \leq \sup(f) + \sup(g)$ . Dé un ejemplo en el que  $\sup(f + g) < \sup(f) + \sup(g)$ . Enuncie y pruebe un resultado análogo con  $\inf$ .
2. Dadas funciones  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  acotadas superiormente pruebe que el producto  $f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función acotada (superior e inferiormente) tal que  $\sup(f \cdot g) \leq \sup(f) \sup(g)$  e  $\inf(f \cdot g) \geq \inf(f) \cdot \inf(g)$ . Dé ejemplos en los que se tenga  $<$  en vez de  $=$ .
3. Con las hipótesis del ejercicio anterior demuestre que  $\sup(f^2) = \sup(f)^2$  e  $\inf(f^2) = \inf(f)^2$ .
4. Dados  $a, b \in \mathbb{R}^+$  con  $a^2 < 2 < b^2$ , tome  $x, y \in \mathbb{R}^+$  tales que  $x < 1$ ,  $x < (2 - a^2)/(2a + 1)$  e  $y < (b^2 - 2)/2b$ . Pruebe que  $(a + x)^2 < 2 < (b - y)^2$  y  $(b - y) > 0$ . A continuación, considere el conjunto acotado  $X = \{a \in \mathbb{R}^+ : a^2 < 2\}$  y concluya que el número real  $c = \sup X$  cumple  $c^2 = 2$ .
5. Pruebe que el conjunto de los polinomios con coeficientes enteros es numerable. Un número real se llama *algebraico* cuando es raíz de un polinomio con coeficientes enteros. Pruebe que el conjunto de los números algebraicos es numerable. Un número real se llama *trascendente* cuando no es algebraico. Pruebe que existen números trascendentes.
6. Pruebe que un conjunto  $I \subset \mathbb{R}$  es un intervalo si, y sólo si,  $a < x < b$ ,  $a, b \in I \Rightarrow x \in I$ .

# 3

## Sucesiones de números reales

En este capítulo se introducirá la noción de límite en su forma más simple, el límite de una sucesión. A partir de aquí, todos los conceptos importantes del Análisis Matemático, de una forma u otra se reducirán a algún tipo de límite.

### 1. Límite de una sucesión

Una sucesión de números reales es una función  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  que asocia a cada número natural  $n$  un número real  $x_n$ , llamado  $n$ -ésimo término de la sucesión.

Se escribe  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  o  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , o simplemente  $(x_n)$ , para indicar la sucesión cuyo  $n$ -ésimo término es  $x_n$ .

No debe confundirse la sucesión  $(x_n)$  con el conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  de sus términos. Por ejemplo, la sucesión  $(1, 1, \dots, 1, \dots)$  no es lo mismo que el conjunto  $\{1\}$ . O de otra forma: las sucesiones  $(0, 1, 0, 1, \dots)$  y  $(0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$  son diferentes pero el conjunto de sus términos es el mismo, igual a  $\{0, 1\}$ .

Una sucesión  $(x_n)$  se dice *acotada superiormente* (respectivamente *inferiormente*) cuando existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $x_n \leq c$  (respectivamente  $x_n \geq c$ ) para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se dice que la sucesión  $(x_n)$

está *acotada* cuando está acotada superior e inferiormente. Esto equivale a decir que existe  $k > 0$  tal que  $|x_n| \leq k$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Ejemplo 1.** Si  $a > 1$  entonces la sucesión  $(a, a^2, \dots, a^n, \dots)$  está acotada inferiormente pero no superiormente. En efecto, multiplicando ambos miembros de la desigualdad  $1 < a$  por  $a^n$  obtenemos  $a^n < a^{n+1}$ . Se sigue que  $a < a^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , luego  $(a^n)$  está acotada inferiormente por  $a$ . Por otra parte, tenemos  $a = 1 + d$ , con  $d > 0$ . Por la desigualdad de Bernoulli, para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene  $a^n > 1 + nd$ . Por tanto, dado cualquier  $c \in \mathbb{R}$  podemos hacer  $a^n > c$  siempre que tomemos  $1 + nd > c$ , esto es,  $n > (c - 1)/d$ .

Dada una sucesión  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , una *subsucesión* de  $x$  es la restricción de la función  $x$  a un subconjunto infinito de  $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$  de  $\mathbb{N}$ . Se escribe  $x' = (x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$  ó  $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$ , ó  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  para indicar la subsucesión  $x' = x|_{\mathbb{N}'}$ . La notación  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  indica que una subsucesión se puede considerar como una sucesión, esto es, una función cuyo dominio es  $\mathbb{N}$ .

Recordemos que  $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$  es infinito si, y sólo si, no está acotado, esto es, para todo  $n_0 \in \mathbb{N}$  existe  $n_k \in \mathbb{N}'$  tal que  $n_k > n_0$ .

**Ejemplo 2.** Dado un número real  $a < -1$ , consideremos la sucesión  $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Si  $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$  es el conjunto de los números pares y  $\mathbb{N}''$  es el conjunto de los números impares entonces la subsucesión  $(a^n)_{n \in \mathbb{N}''}$  sólo está acotada superiormente.

Se dice que un número real  $a$  es el *límite* de la sucesión  $(x_n)$  cuando para todo número real  $\varepsilon > 0$ , dado arbitrariamente, se puede obtener  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que todos los términos  $x_n$  con índice  $n > n_0$  cumplen la condición  $|x_n - a| < \varepsilon$ . Se escribe entonces  $a = \lim x_n$ .

Esta importante definición significa que, para valores muy grandes de  $n$ , los términos  $x_n$  permanecen tan próximos a  $a$  cuando se desee. Más precisamente, estipulándose un error  $\varepsilon > 0$ , existe un índice  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que todos los términos de la sucesión con índice  $n > n_0$  son valores aproximados de  $a$  con un error menor que  $\varepsilon$ .

Con símbolos matemáticos, se escribe:

$$a = \lim x_n \quad \cdot \equiv \cdot \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon,$$

en donde el símbolo  $\cdot \equiv \cdot$  significa que lo que sigue es la definición de lo que antecede,  $\forall$  significa “para todo” o “cualquier que sea” y  $\exists$  significa “existe”. El punto y como quiere decir “tal que” y la flecha  $\Rightarrow$  significa “implica”.

Es conveniente recordar que  $|x_n - a| < \varepsilon$  es lo mismo que  $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ , esto es,  $x_n$  pertenece al intervalo  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

Así, decir que  $a = \lim x_n$  significa que cualquier intervalo abierto centrado en  $a$  contiene todos los términos  $x_n$  de la sucesión excepto un número finito de éstos (a saber, los de índice  $n \leq n_0$ , donde  $n_0$  se escoge en función del radio  $\varepsilon$  del intervalo).

En vez de  $a = \lim x_n$ , también se escribe  $a = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n$ ,  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , ó  $x_n \rightarrow a$ . Esta última expresión se lee “ $x_n$  tiende a  $a$ ” o “ $x_n$  converge a  $a$ ”. Una sucesión que posee límite se llama *convergente*. En caso contrario se llama *divergente*.

**Teorema 1. (Unicidad del límite)** *Una sucesión no puede converger a dos límites diferentes.*

**Demostración:** Sea  $\lim x_n = a$ . Dado  $b \neq a$  podemos tomar  $\varepsilon > 0$  tal que los intervalos abiertos  $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  y  $J = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  sean disjuntos. Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_0$ , implica  $x_n \in I$ . Entonces, para todo  $n \geq n_0$ , tenemos  $x_n \notin J$ . Luego no se tiene  $\lim x_n = b$ .  $\square$

**Teorema 2.** *Si  $\lim x_n = a$  entonces toda subsucesión de  $(x_n)$  converge a  $a$ .*

**Demostración:** Sea  $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$  una subsucesión. Dado cualquier intervalo abierto centrado en  $a$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que todos los términos  $x_n$ , con  $n \geq n_0$ , pertenecen a  $I$ . En particular, todos los términos  $x_{n_k}$  con  $n_k \geq n_0$ , también pertenecen a  $I$ . Luego  $\lim x_{n_k} = a$ .  $\square$

**Teorema 3.** *Toda sucesión convergente está acotada.*

**Demostración:** Sea  $a = \lim x_n$ . Tomando  $\varepsilon = 1$  vemos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - 1, a + 1)$ . Sean  $b$  el mayor y  $c$  el menor elemento del conjunto finito  $\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, a - 1, a + 1\}$ .

Todos los términos  $x_n$  de la sucesión están contenidos en  $[c, b]$ , luego la sucesión está acotada.  $\square$

**Ejemplo 3.** La sucesión  $(2, 0, 2, 0, \dots)$ , cuyo  $n$ -ésimo término es  $x_n = 1 + (-1)^{n+1}$ , está acotada. Sin embargo no es convergente porque posee dos sucesiones constantes,  $x_{2n-1} = 2$  y  $x_{2n} = 0$ , con límites diferentes.

**Ejemplo 4.** La sucesión  $(1, 2, 3, \dots)$ , con  $x_n = n$ , no es convergente porque no está acotada.

Una sucesión  $(x_n)$  se llama *monótona* cuando se tiene  $x_n \leq x_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , o bien  $x_n \geq x_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . En el primer caso se dice que  $(x_n)$  es *monótona creciente*, y en el segundo caso que  $(x_n)$  es *monótona decreciente*. En particular, si tenemos  $x_n < x_{n+1}$  (respec.  $x_n > x_{n+1}$ ) para todo  $n \in \mathbb{N}$  decimos que la sucesión es *estrictamente creciente* (respc. *estrictamente decreciente*).

Toda sucesión monótona creciente (resp. decreciente) está acotada inferiormente (respec. superiormente) por su primer término. Para que esté acotada es suficiente que tenga una subsucesión acotada. En efecto, sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$  una subsucesión acotada de una sucesión monótona (supongamos creciente)  $(x_n)$ . Tenemos,  $x_n \leq c$  para todo  $n \in \mathbb{N}'$ . Dado cualquier  $n \in \mathbb{N}$  existe  $n' \in \mathbb{N}'$  tal que  $n < n'$ . Entonces  $x_n \leq x_{n'} \leq c$ .

El próximo teorema nos da una condición suficiente para que una sucesión converja. Cuando intentaba demostrarlo mientras preparaba sus clases, a mediados del siglo XIX, R. Dedekind percibió la necesidad de una formalización rigurosa del concepto de número real.

**Teorema 4.** *Toda sucesión monótona y acotada es convergente.*

**Demostración.** Sea  $(x_n)$  monótona, supongamos que creciente, y acotada. Escribimos  $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$  y  $a = \sup X$ . Afirmamos que  $a = \lim x_n$ . En efecto, dado  $\varepsilon > 0$ , el número  $a - \varepsilon$  no es una cota superior de  $X$ . Luego existe  $n_0$  tal que  $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$ . Así,  $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$ , de donde  $\lim x_n = a$ .  $\square$

Análogamente, si  $(x_n)$  es decreciente y acotada entonces  $\lim x_n$  es el ínfimo del conjunto de valores  $x_n$ .



**Corolario.** (Teorema de Bolzano.Weierstrass) *Toda sucesión acotada de números reales posee una subsucesión convergente.*

En efecto, basta demostrar que toda sucesión acotada  $(x_n)$  posee una subsucesión monótona. Decimos que  $x_n$  es un término *destacado* de la sucesión  $(x_n)$  si  $x_n \geq x_p$  para todo  $p > n$ . Sea  $D$  el conjunto de índices  $n$  tal que  $x_n$  es un término destacado. Si  $D$  es un conjunto infinito,  $D = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ , entonces la subsucesión  $(x_n)_{n \in D}$  es monótona decreciente. Por el contrario, si  $D$  es finito sea  $n \in \mathbb{N}$  el mayor de los  $n \in D$ . Entonces  $x_{n_1}$ , donde  $n_1 = n + 1$ , no es destacado, luego existe  $n_2 > n_1$  tal que  $x_{n_1} < x_{n_2}$ . A su vez,  $x_{n_2}$  no es destacado, luego existe  $n_3 > n_2$  con  $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$ . Prosiguiendo obtenemos una sucesión estrictamente creciente  $x_{n_1} < x_{n_2} < \cdots < x_{n_k} < \cdots$ .  $\square$

**Ejemplo 5.** La sucesión cuyo  $n$ -ésimo término es  $x_n = 1/n$  es monótona, estrictamente decreciente y acotada. Tenemos entonces  $\lim 1/n = \inf\{1/n; n \in \mathbb{N}\} = 0$ , por el Teorema 3, Capítulo 2.

**Ejemplo 6.** Sea  $0 < a < 1$ . La sucesión  $(a, a^2, \dots, a^n, \dots)$ , formada por las sucesivas potencias, de  $a$  es estrictamente decreciente y acotada, pues multiplicando  $0 < a < 1$  por  $a^n$  resulta  $0 < a^{n+1} < a^n$ . Afirmamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ . En efecto, como  $1/a > 1$ , del Ejemplo 1 se deduce que, dado  $\varepsilon > 0$  arbitrario existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $(1/a)^{n_0} > 1/\varepsilon$ , o sea,  $a^{n_0} < \varepsilon$ . Se sigue que  $\lim a^n = \inf\{a^n; n \in \mathbb{N}\} = 0$ .

## 2. Límites y desigualdades

Sea  $P$  una propiedad referente a los términos de una sucesión  $(x_n)$ . Diremos que “para todo  $n$  suficientemente grande  $x_n$  cumple la propiedad  $P$ ” para significar que “existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_0 \Rightarrow x_n$  cumple la propiedad  $P$ ”.

**Teorema 5.** Sea  $a = \lim x_n$ . Si  $b < a$  entonces, para todo  $n$  suficientemente grande, se tiene  $b < x_n$ . Análogamente, si  $a < b$  entonces  $x_n < b$  para todo  $n$  suficientemente grande.

**Demostración:** Tomando  $\varepsilon = a - b$ , tenemos  $\varepsilon > 0$  y  $b = a - \varepsilon$ . Por la definición de límite, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Rightarrow b < x_n$ . La otra afirmación se prueba de forma análoga.  $\square$

**Corolario 1.** Sea  $a = \lim x_n$ . Si  $a > 0$  entonces, para todo  $n$  suficientemente grande, se tiene  $x_n > 0$ . Análogamente, si  $a < 0$  entonces  $x_n < 0$  para todo  $n$  suficientemente grande.

**Corolario 2.** Sean  $a = \lim x_n$  y  $b = \lim y_n$ . Si  $x_n \leq y_n$ , para todo  $n$  suficientemente grande entonces  $a \leq b$ . En particular, si  $x_n \leq b$  para todo  $n$  suficientemente grande entonces  $\lim x_n \leq b$ .

En efecto, si tuviésemos  $b < a$  entonces tomaríamos  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $b < c < a$  y tendríamos, por el Teorema 5,  $y_n < c < x_n$  para todo  $n$  suficientemente grande, contradiciendo la hipótesis.  $\square$

**Observación:** Si tuviésemos  $x_n < y_n$  no podríamos concluir que  $a < b$ . Basta considerar  $x_n = 0$  e  $y_n = 1/n$ .

**Teorema 6. (Teorema del Sandwich.)** Si  $\lim x_n = \lim y_n = a$  y  $x_n \leq z_n \leq y_n$  para todo  $n$  suficientemente grande entonces  $\lim z_n = a$ .

**Demostración:** Dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , existen  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tales que  $n > n_1 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$  y  $n > n_2 \Rightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ . Sea  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ . Entonces  $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon \Rightarrow z_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , luego  $\lim z_n = a$ .  $\square$

### 3. Operaciones con límites

**Teorema 7.** Si  $\lim x_n = 0$  e  $(y_n)$  es una sucesión acotada (convergente o no) entonces  $\lim(x_n y_n) = 0$ .

**Demostración:** Existe  $c > 0$  tal que  $|y_n| \leq c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \varepsilon/c$ . Entonces,  $n > n_0 \Rightarrow |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < (\varepsilon/c) \cdot c = \varepsilon$ . Luego  $\lim(x_n y_n) = 0$ .  $\square$

**Ejemplo 7.** Si  $x_n = 1/n$  e  $y_n = \sin(n)$  entonces  $(y_n)$  no es convergente, sin embargo como  $-1 \leq y_n \leq 1$ , se tiene  $\lim(x_n \cdot y_n) = \lim(\sin(n)/n) = 0$ . Por otra parte, si  $\lim x_n = 0$  pero  $(y_n)$  no está acotada, la sucesión producto  $(x_n \cdot y_n)$  puede ser divergente (tome  $x_n = 1/n$  e  $y_n = n^2$ ) o tender a cualquier valor  $c$  (tome  $x_n = 1/n$  e  $y_n = c \cdot n$ ).

Para uso posterior, observamos que, como resultado directo de la definición de límite, se tiene:

$$\lim x_n = a \Leftrightarrow \lim(x_n - a) = 0 \Leftrightarrow \lim |x_n - a| = 0.$$

**Teorema 8.** Si  $\lim x_n = a$  y  $\lim y_n = b$  entonces:

1.  $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$
2.  $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
3.  $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$  si  $b \neq 0$ .

**Demostración:** 1. Dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , existen  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tales que  $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon/2$  y  $n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon/2$ . Sea  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ . Entonces  $n > n_0 \Rightarrow n > n_1$  y  $n > n_2$ , luego  $|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ . Por lo tanto,  $\lim(x_n + y_n) = a + b$ . El mismo argumento sirve para  $(x_n - y_n)$ .

2. Tenemos  $x_n y_n - ab = x_n \cdot y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + (x_n - a)b$ . Por el Teorema 3,  $(x_n)$  está acotada. Además,  $\lim(y_n - b) = \lim(x_n - a) = 0$ . Se deduce del Teorema 7 y de la parte 1 que  $\lim(x_n y_n - ab) = \lim[x_n(y_n - b)] + \lim[(x_n - a)b] = 0$ , de donde  $\lim(x_n y_n) = ab$ .

3. Se cumple  $x_n/y_n - a/b = (x_n b - y_n a)/y_n b$ . Como  $\lim(x_n b - y_n a) = ab - ba = 0$ , para concluir que  $\lim\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = 0$ , y por tanto que  $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$ , basta probar que  $(1/y_n b)$  es una sucesión acotada. Ahora, escribiendo  $c = b^2/2$ , tenemos  $0 < c < b^2$ . Como  $\lim y_n b = b^2$ , se sigue del Teorema 5 que, para todo  $n$  suficientemente grande, se tiene  $c < y_n b$ , y por tanto  $1/y_n b < 1/c$ , lo que completa la demostración.

**Ejemplo 8.** Si  $x_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $\lim(x_{n+1}/x_n) = a < 1$  entonces  $\lim x_n = 0$ . En efecto, tomemos  $c \in \mathbb{R}$  con  $a < c < 1$ . Entonces  $0 < x_{n+1}/x_n < c$  para todo  $n$  suficientemente grande. Se sigue que  $0 < x_{n+1} = (x_{n+1}/x_n)x_n < cx_n < x_n$ , luego, para  $n$  suficientemente grande, la sucesión  $(x_n)$  es monótona y acotada. Sea  $b = \lim x_n$ . De  $x_{n+1} < c \cdot x_n$  para todo  $n$  suficientemente grande

resulta, haciendo  $n \rightarrow \infty$ , que  $b \leq c \cdot b$ , esto es,  $(1 - c)b \leq 0$ . Como  $b \geq 0$  y  $0 < c < 1$ , concluimos que  $b = 0$ .

**Ejemplo 9.** Como aplicación del ejemplo anterior, se obtiene que, si  $a > 1$  y  $k \in \mathbb{N}$  son constantes, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

En efecto, escribiendo  $x_n = \frac{n^k}{a^n}$ ,  $y_n = \frac{a^n}{n!}$  y  $z_n = \frac{n!}{n^n}$  resulta  $y_{n+1}/y_n = a/n + 1$ , luego  $\lim(y_{n+1}/y_n) = 0$  y, por el Ejemplo 8,  $\lim y_n = 0$ . También tenemos  $x_{n+1}/x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \cdot a^{-1}$ , por tanto (por el Teorema 8)  $\lim(x_{n+1}/x_n) = 1/a < 1$ . Del Ejemplo 8 se deduce  $\lim x_n = 0$ . Finalmente,  $z_{n+1}/z_n = [n/(n+1)]^n$ , de donde  $\lim(z_{n+1}/z_n) = 1/e$ . (vea el Ejemplo 12 más adelante). Como  $1/e < 1$ , se sigue que  $\lim z_n = 0$ .

**Ejemplo 10.** Dado  $a > 0$  demostraremos que la sucesión dada por  $x_n = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$  tiene límite igual a 1. En efecto, se trata de una sucesión monótona (estrictamente decreciente si  $a > 1$  y creciente si  $a < 1$ ) y acotada, por lo tanto existe  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n}$ . Se tiene  $L > 0$ . En efecto, si  $0 < a < 1$  entonces  $a^{1/n} > a$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , de donde  $L \geq a$ . Sin embargo, si  $a > 1$  entonces  $a^{1/n} > 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , de donde  $L \geq 1$ . Consideremos la subsucesión  $(a^{1/n(n+1)}) = (a^{1/2}, a^{1/6}, a^{1/12}, \dots)$ . Como  $1/n(n+1) = 1/n - 1/(n+1)$ , el Teorema 2 y el apartado 3 del Teorema 8 nos dan:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{1/n}}{a^{1/(n+1)}} = \frac{L}{L} = 1.$$

**Ejemplo 11.** Sea  $0 < a < 1$ . La sucesión cuyo término general es  $x_n = 1 + a + \dots + a^n = (1 - a^{n+1})/(1 - a)$  es estrictamente creciente y acotada, pues  $x_n < 1/(1 - a)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Además,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/(1 - a) - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n/(1 - a) = 0$ , por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a + \dots + a^n) = 1/(1 - a)$ .

La igualdad anterior también es válida cuando se tiene  $-1 < a < 1$ , esto es,  $|a| < 1$ . En efecto, el argumento se basa en que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ , lo que persiste cuando se tiene solamente  $|a| < 1$ , pues  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ .

**Ejemplo 12.** La sucesión cuyo término general es

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

es, evidentemente, creciente. También está acotada pues

$$2 \leq a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 3.$$

Escribimos  $e = \lim a_n$ . El número  $e$  es una de las constantes más importantes del Análisis Matemático. Como acabamos de ver, se tiene  $2 < e \leq 3$ . En realidad la expresión de  $e$  con sus cuatro primeros decimales es  $e = 2,7182$ .

**Ejemplo 13.** Consideremos la sucesión cuyo término general es  $b_n = (1 + 1/n)^n = [(n+1)/n]^n$ . Por la fórmula del binomio de Newton:

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \frac{n \cdot 1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 1}{n!} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Luego  $b_n$  es una suma donde todos los sumandos son positivos. El número de sumandos, así como cada una de ellos, crece con  $n$ . Por tanto la sucesión  $(b_n)$  es estrictamente creciente. Es claro que  $b_n < a_n$  (ver el Ejemplo 12). Se sigue que  $b_n < 3$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Afirmamos que  $\lim b_n = \lim a_n$ . En efecto, si  $n > p$ :

$$b_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{p!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right).$$

Tomando un  $p$  cualquiera y haciendo  $n \rightarrow \infty$ , de la última desigualdad obtenemos  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{p!} = a_p$ . Como esta desigualdad es válida para todo  $p \in \mathbb{N}$ , se sigue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq \lim_{p \rightarrow \infty} a_p = e$ . Pero como ya hemos visto que  $b_n < a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\lim b_n \leq \lim a_n$ . Esto completa la prueba de  $\lim b_n = e$ .

**Ejemplo 14.** Consideremos la sucesión cuyo  $n$ -ésimo término es  $x_n = \sqrt[n]{n} = n^{1/n}$ . Tenemos  $x_n \geq 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Esta sucesión es estrictamente decreciente a partir del tercer término. En efecto, la desigualdad  $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$  es equivalente a  $n^{n+1} > (n+1)^n$ , esto es,  $n > (1+1/n)^n$ , que es verdad si  $n \geq 3$  pues, como acabamos de ver,  $(1+1/n)^n < 3$  para todo  $n$ . Por tanto existe  $L = \lim n^{1/n}$  y se tiene  $L \geq 1$ . Consideremos la subsucesión  $(2n)^{1/2n}$  tenemos:

$$L^2 = \lim[(2n)^{1/2n}]^2 = \lim[2^{1/n} \cdot n^{1/n}] = \lim 2^{1/n} \cdot \lim n^{1/n} = L,$$

(cfr. Ejemplo 10.) Como  $L \neq 0$ , de  $L^2 = L$  resulta  $L = 1$ . Concluimos por tanto que  $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ .

**Ejemplo 15.** (*Aproximaciones sucesivas de la raíz cuadrada.*)

El siguiente método iterativo para obtener, con error tan pequeño cuanto se desee, raíces cuadradas de un número real  $a > 0$  ya era conocido por lo babilonios 17 siglos antes de la era cristiana. Se toma de forma arbitraria un valor  $x_1 > 0$  y se define inductivamente  $x_{n+1} = [x_n + a/x_n]/2$ . Para demostrar que la sucesión  $(x_n)$  así obtenida converge a  $\sqrt{a}$  primero observamos que, para todo  $x \neq 0$ , se tiene  $[x + a/x]^2 \geq 4a$ . En efecto, desarrollando el cuadrado y pasando  $4a$  al primer término, vemos que esta desigualdad es equivalente a afirmar que  $(x - a/x)^2 \geq 0$ , lo que es obvio. De aquí resulta  $x_{n+1}^2 = [x_n + a/x_n]^2/4 \geq a$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Además, si  $x^2 \geq a$  entonces  $[x + a/x]^2/4 = x^2$ . En efecto,  $a \leq x^2 \Rightarrow [x + a/x]^2/4 \leq [x + x^2/x]^2/4 = x^2$ . Como  $x_{n+1}^2 \geq a$  para todo  $n$ , se sigue que  $x_{n+2}^2 \leq x_{n+1}^2$ , luego  $x_{n+2} \leq x_{n+1}$ , pues estos números son  $\geq 0$ . Por lo tanto, inclusive si  $x_1 < \sqrt{a}$ , siempre se cumple  $x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq \dots$ , con  $x_{n+1}^2 \geq a$  para todo  $n$ . Por lo tanto, existe  $c = \lim x_n$ . Haciendo  $n \rightarrow \infty$  en la igualdad  $x_{n+1} = [x_n + a/x_n]/2$  obtenemos  $c = [c + a/c]/2$ , de donde  $c^2 = a$ , esto es  $\lim x_n = \sqrt{a}$ . Así vemos que todo número real  $a > 0$  posee una raíz cuadrada real. Más aún, el proceso iterativo  $x_{n+1} = [x_n + a/x_n]/2$  muestra rápidamente buenas aproximaciones de  $\sqrt{a}$ , como se puede verificar tomando ejemplos concretos.

#### 4. Límites infinitos

Dada una sucesión  $(x_n)$ , se dice que “el límite de  $x_n$  es más infinito” y se escribe  $\lim x_n = +\infty$ , para significar que, dado cualquier

$A > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0$  implica  $x_n > A$ .

Análogamente,  $\lim x_n = -\infty$  significa que, para todo  $A > 0$  dado, se puede encontrar  $n_0$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow x_n < -A$ .

Se debe enfatizar que  $+\infty$  y  $-\infty$  no son números y que, si  $\lim x_n = +\infty$  y  $\lim y_n = -\infty$ , las sucesiones  $(x_n)$  e  $(y_n)$  no son convergentes.

Como  $\lim(x_n) = +\infty \Leftrightarrow \lim(-x_n) = -\infty$ , limitaremos nuestros comentarios al primer caso.

Si  $\lim x_n = +\infty$  entonces la sucesión  $(x_n)$  no está acotada superiormente. El recíproco es falso. La sucesión dada por  $x_n = n + (-1)^n n$  no está acotada superiormente, sin embargo no se tiene  $\lim x_n = +\infty$ , pues  $x_{2n-1} = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . No obstante si  $(x_n)$  es creciente, entonces  $(x_n)$  no es acotada  $\Rightarrow \lim x_n = +\infty$ .

En el Ejemplo 1 demostramos que las potencias  $a, a^2, a^3, \dots$  de un número  $a > 1$  forman una sucesión que no está acotada y realmente probamos que  $\lim a^n = +\infty$ .

### Teorema 9.

- (1) Si  $\lim x_n = +\infty$  y  $(y_n)$  está acotada inferiormente entonces  $\lim(x_n + y_n) = +\infty$ .
- (2) Si  $\lim x_n = +\infty$  y existe  $c > 0$  tal que  $y_n > c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  entonces  $\lim(x_n y_n) = +\infty$ .
- (3) Si  $x_n > c > 0$ ,  $y_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $\lim y_n = 0$  entonces  $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$ .
- (4) Si  $(x_n)$  está acotada y  $\lim(y_n) = +\infty$  entonces  $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$ .

**Demostración:** (1) Existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $y_n \geq c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Dado cualquier  $A > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow x_n > A - c$ . Se sigue que  $n > n_0 \Rightarrow x_n + y_n > A - c + c = A$ . Luego  $\lim(x_n + y_n) = +\infty$ .

(2) Dado cualquier  $A > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow x_n > A/c$ . Luego  $n > n_0 \Rightarrow x_n y_n > (A/c) \cdot c = A$ , de donde  $\lim(x_n y_n) =$

$+\infty$ .

(3) Dado  $A > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow y_n < c/a$ . Entonces  $n > n_0 \Rightarrow x_n/y_n > c \cdot A/c = A$ , de donde  $\lim(x_n/y_n) = +\infty$ .

(4) Existe  $c > 0$  tal que  $|x_n| \leq c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow y_n > c/\varepsilon$ . Entonces  $n > n_0 \Rightarrow |x_n/y_n| < c \cdot \varepsilon/c = \varepsilon$ , luego  $\lim(x_n/y_n) = 0$ .  $\square$

Las hipótesis de los diversos apartados del teorema anterior tienen por objeto evitar algunas de las llamadas “expresiones indeterminadas”. En el apartado (1) se intenta evitar la expresión  $+\infty - \infty$ . De hecho, si  $\lim(x_n) = +\infty$  y  $\lim(y_n) = -\infty$  nada puede afirmarse sobre  $\lim(x_n + y_n)$ . Este límite puede no existir (como en el caso en que  $x_n = n + (-1)^n$  e  $y_n = -n$ ), puede ser igual a  $+\infty$  (si  $x_n = 2n$  e  $y_n = -n$ ), puede ser  $-\infty$  (tome  $x_n = n$  e  $y_n = -2n$ ) o puede ser un valor cualquiera  $c \in \mathbb{R}$  (por ejemplo,  $x_n = n + c$  e  $y_n = -n$ ). Debido a este compartamiento errático, se dice que  $+\infty - \infty$  es una expresión indeterminada. En los apartados (2), (3) y (4), las hipótesis excluyen los límites del tipo  $0 \times \infty$  (también evitado en el Teorema 7),  $0/0$  y  $\infty/\infty$ , respectivamente, que constituyen expresiones indeterminadas en el sentido que acabamos de explicar. Otras expresiones indeterminadas frecuentes son  $\infty^0$ ,  $1^\infty$  y  $0^0$ .

Los límites más importantes del Análisis Matemático casi siempre aparecen en forma de expresiones indeterminadas. Por ejemplo, el número  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$  es de la forma  $1^\infty$ . Y, como veremos más adelante, la derivada es un límite del tipo  $0/0$ .

Proseguimos con una afirmación sobre el orden de magnitud. Si  $k \in \mathbb{N}$  y  $a$  es un número real  $> 1$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n! = \lim_{n \rightarrow \infty} n^n$ . Todas estas sucesiones tienen límite infinito. El Ejemplo 9 nos dice que, para valores muy grandes de  $n$ , tenemos  $n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$ , donde el símbolo  $\ll$  quiere decir “es una fracción muy pequeña de” o “es insignificante en comparación con”. Por eso se dice que el crecimiento exponencial supera al polinomial, el crecimiento factorial supera al exponencial con base constante pero es superado por el crecimiento exponencial con base creciente. Por otro lado, el crecimiento de  $n^k$  (inclusive cuando  $k = 1$ ) supera al crecimiento logarítmico, como demostraremos a continuación.



En el Capítulo 9 probaremos la existencia de una función estrictamente creciente  $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\log(xy) = \log x + \log y$  y  $\log x < x$  para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}^+$ . De aquí resulta que  $\log x = \log(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) = 2 \log \sqrt{x}$ , de donde  $\log \sqrt{x} = (\log x)/2$ . Además,  $\log x = \log 1 + \log x$ , de donde  $\log 1 = 0$ . Como  $\log$  es estrictamente creciente, se tiene  $\log x > 0$  para todo  $x > 1$ . También se cumple  $\log(2^n) = n \log(2)$ , por tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(2^n) = +\infty$ . Como  $\log$  es creciente, se sigue  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log n = +\infty$ .

Probaremos ahora que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$ .

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos  $\log \sqrt{n} < \sqrt{n}$ . Como  $\log \sqrt{n} = \frac{1}{2} \log n$ , se deduce que  $\log n < 2\sqrt{n}$ . Dividiendo por  $n$  resulta que  $0 < \log n/n < 2/\sqrt{n}$ . Haciendo  $n \rightarrow \infty$  se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$ .

## 5. Ejercicios

Sección 1: Límite de una sucesión.

1. Se dice que una sucesión  $(x_n)$  es periódica cuando existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $x_{n+p} = x_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Pruebe que toda sucesión periódica convergente es constante.
2. Dadas las sucesiones  $(x_n)$  e  $(y_n)$ , defina  $(z_n)$  como  $z_{2n-1} = x_n$  y  $z_{2n} = y_n$ . Pruebe que si  $\lim x_n = \lim y_n = a$  entonces  $\lim z_n = a$ .
3. Pruebe que si  $\lim x_n = a$  entonces  $\lim |x_n| = |a|$ .
4. Si una sucesión monótona tiene una subsucesión convergente, pruebe que entonces la propia sucesión es convergente.
5. Un número  $a$  se llama *valor de adherencia* de la sucesión  $(x_n)$  cuando es el límite de alguna subsucesión de  $(x_n)$ . Para cada una de los conjuntos  $A, B$  y  $C$  dados a continuación encuentre sucesiones que tengan dichos conjuntos como valores de adherencia:  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \mathbb{N}$ ,  $C = [0, 1]$ .
6. Para que un número real  $a$  sea valor de adherencia de la sucesión  $(x_n)$  es necesario y suficiente que, para todo  $\varepsilon > 0$  y  $k \in \mathbb{N}$ , exista  $n > k$  tal que  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

7. Para que un número real  $b$  no sea valor de adherencia de la sucesión  $(x_n)$  es necesario y suficiente que exista  $n_0 \in \mathbb{N}$  y  $\varepsilon > 0$  tales que  $n > n_0 \Rightarrow |x_n - b| \geq \varepsilon$ .

### Sección 2: Límites y desigualdades

1. Si  $\lim x_n = a$ ,  $\lim y_n = b$  y  $|x_n - y_n| \geq \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pruebe que entonces  $|a - b| \geq \varepsilon$ .
2. Sean  $\lim x_n = a$  y  $\lim y_n = b$ . Pruebe que si  $a > b$  entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow x_n < y_n$ .
3. Si el número real  $a$  no es el límite de la sucesión acotada  $(x_n)$ , pruebe que existe alguna subsucesión convergente de  $(x_n)$  con límite  $b \neq a$ .
4. Pruebe que una sucesión acotada es convergente si, y sólo si, posee un único valor de adherencia.
5. ¿Cuáles son los valores de adherencia de la sucesión  $(x_n)$  definida por  $x_{2n-1} = n$  y  $x_{2n} = 1/n$ ? ¿Es esta sucesión convergente?
6. Dados  $a, b \in \mathbb{R}^+$  defina inductivamente las sucesiones  $(x_n)$  e  $(y_n)$  como  $x_1 = \sqrt{ab}$ ,  $y_1 = (a + b)/2$  y  $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ ,  $y_{n+1} = (x_n + y_n)/2$ . Pruebe que  $(x_n)$  e  $(y_n)$  convergen al mismo límite.
7. Se dice que  $(x_n)$  es una *sucesión de Cauchy* cuando, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$ .
  - (a) Pruebe que toda sucesión de Cauchy está acotada.
  - (b) Pruebe que una sucesión de Cauchy no puede tener dos valores de adherencia distintos.
  - (c) Pruebe que una sucesión  $(x_n)$  es convergente si, y sólo si, es de Cauchy.

### Sección 3: Operaciones con límites

1. Pruebe que, para todo  $p \in \mathbb{N}$ , se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{n} = 1$ .
2. Si existen  $\varepsilon > 0$  y  $k \in \mathbb{N}$  tales que  $\varepsilon \leq x_n \leq n^k$  para todo  $n$  suficientemente grande, pruebe que  $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$ . Use esto para calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+k}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n\sqrt{n}}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\log n}$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \log n}$ .

3. Dado  $a > 0$ , defina inductivamente la sucesión  $(x_n)$  mediante  $x_1 = \sqrt{a}$  y  $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$ . Pruebe que  $(x_n)$  es convergente y calcule su límite:

$$L = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots}}}$$

4. Sea  $e_n = (x_n - \sqrt{a})/\sqrt{a}$  el *error relativo* de la  $n$ -ésima etapa del cálculo de  $\sqrt{a}$ . Pruebe que  $e_{n+1} = e_n^2/2(1 + e_n)$ . Concluya que  $e_n \leq 0,01 \Rightarrow e_{n+1} \leq 0,00005 \Rightarrow e_{n+2} \leq 0,00000000125$  y observe la rapidez de la convergencia del método.
5. Dado  $a > 0$ , defina inductivamente la sucesión  $(x_n)$  como  $x_1 = 1/a$  y  $x_{n+1} = 1/(a + x_n)$ . Considere  $c$  la raíz positiva de la ecuación  $x^2 + ax - 1 = 0$ , el único número positivo tal que  $c = 1/(a + c)$ . Suponga que  $x_1 < c$  (El caso  $x_1 > c$  se puede tratar de forma análoga). Pruebe que  $x_1 < x_3 < \cdots < x_{2n-1} < \cdots < c < \cdots < x_{2n} < \cdots < x_4 < x_2$  y que  $\lim x_n = c$ . El número  $c$  se puede considerar como la suma de la *fracción continua*:

$$\frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \cdots}}}}$$

6. Dado  $a > 0$ , defina inductivamente la sucesión  $(y_n)$  mediante  $y_1 = a$  e  $y_{n+1} = a + 1/y_n$ . Demuestre que  $\lim y_n = a + c$ , donde  $c$  está definido como en el ejercicio anterior.
7. Defina la sucesión  $(a_n)$  inductivamente como  $a_1 = a_2 = 1$  y  $a_{n+1} = a_{n+1} + a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Escriba  $x_n = a_n/a_{n+1}$  y pruebe que  $\lim x_n = a$ , donde  $a$  es el único número positivo tal que  $1/(a + 1) = a$ . El término  $a_n$  se llama  $n$ -ésimo *número de Fibonacci* y  $a = (-1 + \sqrt{5})/2$  es el *número de oro* de la Geometría Clásica.

#### Sección 4: Límites infinitos

1. Pruebe que  $\lim \sqrt[n]{n} = +\infty$ .

2. Si  $\lim x_n = +\infty$  y  $a \in \mathbb{R}$ , pruebe que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{\log(x_n + a)} - \log \sqrt{x_n}] = 0 .$$

3. Dados  $k \in \mathbb{N}$  y  $A > 1$ , determine el  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^k \cdot a^n}$ . Suponiendo que  $a > 1$  y  $a \neq e$ , calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n}$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k \cdot a^n \cdot n!}{n^n}$ .

4. Demuestre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(n+1)/\log(n) = 1$ .

5. Sean  $(x_n)$  cualquier sucesión y  $(y_n)$  una sucesión estrictamente creciente tal que  $\lim y_n = +\infty$ . Suponiendo que  $\lim (x_{n+1} - x_n)/(y_{n+1} - y_n) = a$ , pruebe que  $\lim x_n/y_n = a$ . Concluya que si  $\lim (x_{n+1} - x_n) = a$  entonces  $\lim x_n/n = a$ . En particular, de  $\lim \log(1 + 1/n) = 0$ , concluya que  $\lim (\log n)/n = 0$ .

6. Si  $\lim x_n = a$  y  $(t_n)$  es una sucesión de números positivos tal que:

$$\lim (t_1 + \cdots + t_n) = +\infty ,$$

entonces pruebe que:

$$\lim \frac{t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n}{t_1 + \cdots + t_n} = a .$$

En particular, si  $y_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ , también se tiene  $\lim y_n = a$ .

# Series de números

Una serie es una suma  $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$  con un número infinito de sumandos. Para que esto tenga sentido escribiremos  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + \cdots + a_n)$ . Como todo límite, éste puede existir o no. Por eso hay series convergentes y divergentes. Aprender a distinguir las unas de las otras es el objetivo principal de este capítulo.

## 1. Series convergentes

A partir de una sucesión  $(a_n)$  de números reales dada formamos una nueva sucesión  $(s_n)$ , donde

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad \text{etc.}$$

Los números  $s_n$  se llaman *sumas parciales* de la serie  $\sum a_n$ . El sumando  $a_n$  es el *n-ésimo término* o *término general* de la serie.

Cuando existe el límite  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , decimos que la serie  $\sum a_n$  es *convergente* y  $s = \sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$  se llama *suma* de la serie. Si  $\lim s_n$  no existe decimos que  $\sum a_n$  es una serie *divergente*.

A veces es conveniente considerar series del tipo  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  que empiezan en  $a_0$  en vez de  $a_1$ .

**Ejemplo 1.** Como ya hemos visto (Ejemplos 11 y 12, Capítulo 3), cuando  $|a| < 1$  la *serie geométrica*  $1 + a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots$  es convergente y su suma es  $1/(1 - a)$  y la serie  $1 + 1 + 1/2! + \cdots + 1/n! + \cdots$  también es convergente, y su suma es igual a  $e$ .

**Ejemplo 2.** La serie  $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ , cuyo término general es  $(-1)^{n+1}$ , es divergente, pues la suma parcial  $s_n$  es cero si  $n$  es par, e igual a 1 si  $n$  es impar. Por lo tanto no existe  $\lim s_n$ .

**Ejemplo 3.** La serie  $\sum 1/n(n+1)$ , cuyo término general es  $a_n = 1/n(n+1) = 1/n - 1/(n+1)$ , tiene como  $n$ -ésima suma parcial:

$$s_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Por lo tanto  $\lim s_n = 1$ , esto es,  $\sum 1/n(n+1) = 1$ .

Si  $a_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , las sumas parciales de la serie  $\sum a_n$  forman una sucesión creciente. Por lo tanto una serie  $\sum a_n$  cuyos términos no son negativos, converge si, y sólo si, existe una constante  $k$  tal que  $a_1 + \cdots + a_n \leq k$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por esto usaremos la notación  $\sum a_n < +\infty$  para expresar que la serie  $\sum a_n$ , tal que  $a_n \geq 0$ , es convergente.

Si  $a_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $(a'_n)$  es una subsucesión de  $(a_n)$  entonces  $\sum a_n < +\infty$  implica  $\sum a'_n < +\infty$ .

**Ejemplo 4.** (*La serie armónica*) La serie  $\sum 1/n$  es divergente. De hecho, si  $\sum \frac{1}{n} = s$  fuese convergente entonces  $\sum \frac{1}{2n} = t$  y  $\sum \frac{1}{2n-1} = u$  también lo serían. Además  $s_n = t_n + u_n$ , haciendo  $n \rightarrow \infty$  tendríamos  $s = t + u$ . Pero  $t = \sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n} = \frac{s}{2}$ , por lo tanto  $u = t = \frac{s}{2}$ .

Por otra parte

$$\begin{aligned} u - t &= \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - t_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} \right) > 0, \end{aligned}$$

luego  $u > t$ . Lo que nos da una contradicción.

**Teorema 1. (Criterio de comparación)** Sean  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  series de términos mayores o iguales a 0. Si existen  $c > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que  $a_n \leq cb_n$ , para todo  $n > n_0$ , entonces la convergencia de  $\sum b_n$  implica la de  $\sum a_n$ , mientras que la divergencia de  $\sum a_n$  implica la de  $\sum b_n$ .

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $a_n \leq cb_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demostración:** Las sumas parciales  $s_n$  y  $t_n$ , de  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  respectivamente, forman sucesiones crecientes tales que  $s_n \leq ct_n$  para todo  $n > n_0$ . Como  $c > 0$ ,  $(t_n)$  acotada implica  $(s_n)$  acotada, y si  $(s_n)$  no está acotada entonces  $(t_n)$  tampoco está acotada, pues  $t_n \geq s_n/c$ .  $\square$

**Ejemplo 5.** Si  $r > 1$ , la serie  $\sum 1/n^r$  converge. En efecto, sea  $c$  la suma de la serie geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} (2/2^r)^n$ . Demostraremos que toda suma parcial  $s_n$  de la serie  $\sum \frac{1}{n^r}$  es menor que  $c$ . Sea  $n$  tal que  $m \leq 2^n - 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} s_m &\leq 1 + \left( \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} \right) + \left( \frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{6^r} + \frac{1}{7^r} \right) + \\ &\quad + \cdots + \left( \frac{1}{(2^{n-1})^r} + \cdots + \frac{1}{(2^n - 1)^r} \right), \\ s_m &< 1 + \frac{2}{2^r} + \frac{4}{4^r} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^r} = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{2}{2^r} \right)^i < c. \end{aligned}$$

Como la serie armónica diverge, del criterio de comparación resulta que  $\sum \frac{1}{n^r}$  también diverge cuando  $r < 1$  pues, en este caso,  $1/n^r > 1/n$ .

**Teorema 2.** *El término general de una serie convergente tiene cero como límite.*

**Demostración:** Si la serie  $\sum a_n$  es convergente, entonces escribiendo  $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ , existe  $s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ . Consideremos la sucesión  $(t_n)$  con  $t_1 = 0$  y  $t_n = s_{n-1}$  cuando  $n > 1$ . Evidentemente,  $\lim t_n = s$  y  $s_n - t_n = a_n$ . Por lo tanto  $\lim a_n = \lim(s_n - t_n) = \lim s_n - \lim t_n = s - s = 0$ .  $\square$

El criterio contenido en el Teorema 2 es la primera cosa que se debe verificar cuando se quiere saber si una serie es convergente o no. Si el término general no tiende a cero, la serie diverge. La serie armónica demuestra que la condición  $\lim a_n = 0$  no es suficiente para garantizar la convergencia de  $\sum a_n$ .

## 2. Series absolutamente convergentes

Una serie  $\sum a_n$  se dice *absolutamente convergente* cuando  $\sum |a_n|$  converge.

**Ejemplo 6.** Una serie convergente cuyos términos son todos del mismo signo es absolutamente convergente. Cuando  $-1 < a < 1$ , la serie geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$  es absolutamente convergente, pues  $|a^n| = |a|^n$ , con  $0 \leq |a| < 1$ .

El ejemplo clásico de serie convergente  $\sum a_n$  tal que  $\sum |a_n| = +\infty$  es dado por  $\sum (-1)^{n+1}/n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ . Cuando tomamos la suma de los valores absolutos, obtenemos la serie armónica, que diverge. La convergencia de la serie dada se deduce del siguiente resultado:

**Teorema 3. (Leibniz)** Si  $(a_n)$  es una sucesión monótona decreciente que tiende a cero entonces  $\sum (-1)^{n+1} a_n$  es una serie convergente.

**Demostración:** Sea  $s_n = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n+1} a_n$ . Entonces  $s_{2n} = s_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n}$  e  $s_{2n+1} = s_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1}$ . Luego las sumas parciales de índice par forman una sucesión creciente (pues  $a_{2n-1} - a_{2n} \geq 0$ ) y las de índice impar una sucesión decreciente (pues  $-a_{2n} + a_{2n+1} \leq 0$ ). Además, como  $s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n}$ , tenemos  $s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n} \geq 0$ . Esto demuestra que

$$s_2 \leq s_4 \leq \dots \leq s_{2n} \leq \dots \leq s_{2n-1} \leq \dots \leq s_3 \leq s_1$$

y que  $\lim s_{2n} = \lim s_{2n-1}$ , pues  $\lim a_n = 0$ . Luego  $(s_n)$  converge y el teorema está probado.  $\square$

**Ejemplo 7.** Por el Teorema 3, la serie  $\sum (-1)^{n+1} \log(1 + \frac{1}{n})$  es convergente. Sin embargo no es absolutamente convergente pues la  $n$ -ésima suma parcial de la serie  $\sum \log(1 + 1/n) = \sum \log(\frac{n+1}{n})$  es

$$\begin{aligned} s_n &= \log 2 + \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{4}{3}\right) + \dots + \log\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \log 2 + \log 3 - \log 2 + \log 4 - \log 3 + \dots + \log(n+1) - \log(n) \\ &= \log(n+1). \end{aligned}$$

Por tanto,  $\lim s_n = +\infty$ .



Una serie convergente  $\sum a_n$  tal que  $\sum |a_n| = +\infty$  se llama *condicionalmente convergente*.

El próximo teorema se puede interpretar de la siguiente manera: si tomamos una serie convergente cuyos términos son todos  $\geq 0$  y, de forma completamente arbitraria, cambiamos el signo de algunos términos (inclusive de un número infinito de estos), obtenemos una serie que también es convergente.

**Teorema 4.** *Toda serie absolutamente convergente es convergente.*

**Demostración:** Sea  $\sum |a_n|$  convergente. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos los números  $p_n$  y  $q_n$  del modo siguiente:  $p_n = a_n$ , si  $a_n \geq 0$  y  $p_n = 0$  si  $a_n < 0$ ; análogamente,  $q_n = -a_n$  si  $a_n \leq 0$  y  $q_n = 0$  si  $a_n > 0$ . Los números  $p_n$  y  $q_n$  se llaman, respectivamente, *parte positiva* y *parte negativa* de  $a_n$ . Entonces  $p_n \geq 0$ ,  $q_n \geq 0$ ,  $p_n + q_n = |a_n|$  (en particular  $p_n \leq |a_n|$  y  $q_n \leq |a_n|$ ) y  $p_n - q_n = a_n$ . (Observe que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , al menos uno de los números  $p_n$  y  $q_n$  es cero). Por el Teorema 1 las series  $\sum p_n$  y  $\sum q_n$  son convergentes. Luego también es convergente la serie  $\sum a_n = \sum (p_n - q_n) = \sum p_n - \sum q_n$ .  $\square$

Dada la serie  $\sum a_n$ , acabamos de definir los números  $p_n = \max\{a_n, 0\}$  y  $q_n = \max\{-a_n, 0\}$ , las partes positiva y negativa de  $a_n$ . Si  $\sum a_n$  es condicionalmente convergente, necesariamente  $\sum p_n = +\infty$  y  $\sum q_n = +\infty$ . En efecto, si sólo una de estas dos series fuese convergente (por ejemplo, la primera), tendríamos  $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n = +\infty - \infty = -\infty$ . Y si ambas,  $\sum p_n$  y  $\sum q_n$ , fuesen convergentes tendríamos  $\sum |a_n| = \sum p_n + \sum q_n < +\infty$ , y la serie sería absolutamente convergente.

### 3. Criterios de convergencia

**Teorema 5.** *Sea  $\sum b_n$  una serie absolutamente convergente tal que  $b_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Si la sucesión  $(a_n/b_n)$  está acotada (en particular, converge) entonces la serie  $\sum a_n$  es absolutamente convergente.*

**Demostración:** Si para algún  $c > 0$  tuviésemos  $|a_n/b_n| \leq c$ , sea cual fuere  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $|a_n| \leq c|b_n|$ . Por el criterio de comparación (Teorema 1) la serie  $\sum a_n$  es absolutamente convergente.  $\square$

**Corolario. (Criterio de d'Alambert)** Sea  $a_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Si existe una constante  $c$  tal que  $|a_{n+1}/a_n| \leq c < 1$  para todo  $n$  suficientemente grande (en particular, si  $\lim |a_{n+1}/a_n| < 1$ ) entonces la serie  $\sum a_n$  es absolutamente convergente.

En efecto, si para todo  $n$  suficientemente grande se tiene  $|a_{n+1}/a_n| \leq c = c^{n+1}/c^n$ , entonces  $|a_{n+1}|/c^{n+1} \leq |a_n|/c^n$ .

Así la sucesión de números mayores o iguales a cero  $|a_n|/c^n$  es decreciente a partir de un determinado índice, luego está acotada. Como la serie  $\sum c^n$  es absolutamente convergente, se deduce del Teorema 5 que  $\sum a_n$  converge absolutamente. En el caso particular en que existe  $\lim |a_{n+1}|/|a_n| = L < 1$ , escogemos un número  $c$  tal que  $L < c < 1$  y así tendremos  $|a_{n+1}|/|a_n| < c$  para todo  $n$  suficientemente grande (Teorema 5 del Capítulo 3). Estamos entonces en el caso ya demostrado.

**Observación:** Cuando se aplica el criterio de d'Alambert, en general se intenta calcular  $\lim |a_{n+1}/a_n| = L$ . Si  $L > 1$  entonces la serie es divergente pues se tiene  $|a_{n+1}/a_n| > 1$ , de donde  $|a_{n+1}| > |a_n|$  para todo  $n$  suficientemente grande y así el término general  $a_n$  no tiende a cero. Si  $L = 1$  el criterio nada nos permite concluir; la serie puede ser convergente (como en el caso  $\sum 1/n^2$ ) o divergente (como en el caso  $\sum 1/n$ ).

**Ejemplo 8.** Sea  $a_n = 1/(n^2 - 3n - 1)$ . Considerando la serie convergente  $\sum 1/n^2$ , como  $\lim[(n^2 - 2n + 1)/n^2] = \lim[1/(1 - 3/n + 1/n^2)] = 1$ , concluimos que la serie es convergente.

**Ejemplo 9.** Se sigue del Ejemplo 9 del Capítulo 3 y del criterio de d'Alambert que las series  $\sum(a^n/n!)$ ,  $\sum(n!/n^n)$  y  $\sum(n^k/a^n)$ , esta última con  $a > 1$ , son convergentes.

**Teorema 6. (Criterio de Cauchy)** Si existe un número real  $c$  tal que  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande (en particular, si  $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ ) la serie  $\sum a_n$  es absolutamente convergente.

**Demostración:** Si  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$  entonces  $|a_n| \leq c^n$  para todo  $n$  suficientemente grande. Como la serie geométrica  $\sum c^n$  es convergente, del criterio de comparación se deduce que  $\sum a_n$  converge absolutamente. En el caso particular en que existe  $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$ ,

escogemos  $c$  tal que  $L < c < 1$  y tendremos  $\sqrt[n]{|a_n|} < c$  para todo  $n$  suficientemente grande (Teorema 5, Capítulo 3) y estamos así en el caso anterior.  $\square$

**Observación:** Cuando se aplica el criterio de Cauchy también se intenta calcular  $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$ . Si  $L > 1$ , la serie es divergente. En efecto, en este caso se tiene  $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$  para todo  $n$  suficientemente grande, de donde  $|a_n| > 1$ , luego la serie  $\sum a_n$  es divergente pues su término general no tiende a cero. Cuando  $L = 1$ , la serie puede ser divergente (como en el caso  $\sum(1/n)$ ) o convergente (como  $\sum(1/n^2)$ ).

**Ejemplo 10.** Sea  $a_n = (\log n/n)^n$ . Como  $\sqrt[n]{a_n} = \log/n$  tiende a cero, la serie  $\sum a_n$  es convergente.

El próximo teorema relaciona los criterios de d'Alembert y Cauchy.

**Teorema 7.** Sea  $(a_n)$  una sucesión cuyos términos son diferentes de cero. Si  $\lim |a_{n+1}|/|a_n| = L$ , entonces  $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$ .

**Demostración:** Para simplificar la notación supondremos que  $a_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . En primer lugar consideremos el caso  $L \neq 0$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , fijamos  $K, M$  tales que  $L - \varepsilon < K < L < M < L + \varepsilon$ . Entonces existe  $p$  tal que  $n \geq p \Rightarrow K < a_{n+1}/a_n < M$ . Multiplicando miembro a miembro las  $n - p$  desigualdades  $K < a_{p+i}/a_{p+i-1} < M$   $i = 1, \dots, n - p$ , obtenemos  $K^{n-p} < a_n/a_p < M^{n-p}$  para todo  $n > p$ . Escribimos  $\alpha = a_p/K^p$  y  $\beta = a_p/M^p$ . Entonces  $K^n \alpha < a_n < M^n \beta$ . Extrayendo raíces se obtiene  $K \sqrt[n]{\alpha} < \sqrt[n]{a_n} < M \sqrt[n]{\beta}$  para todo  $n > p$ . Si tenemos en cuenta  $L - \varepsilon < K$ ,  $M < L + \varepsilon$ ,  $\lim \sqrt[n]{\alpha} = 1$  y  $\lim \sqrt[n]{\beta} = 1$ , concluimos que existe  $r_0 > p$  tal que  $n > r_0 \Rightarrow L - \varepsilon < K \sqrt[n]{\alpha}$  y  $M \sqrt[n]{\beta} < L + \varepsilon$ . Entonces  $n > r_0 \Rightarrow L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$ . Si  $L = 0$  es suficiente considerar exclusivamente  $M$  en la prueba del caso  $L \neq 0$ .  $\square$

**Ejemplo 11.** Del Teorema 7 resulta que  $\lim n/\sqrt[n]{n!} = e$ . En efecto, escribiendo  $a_n = n^n/n!$  se tiene  $n/\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{a_n}$ . Ahora bien,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \frac{n!}{n * n} = \left( \frac{n+1}{n} \right)^n,$$

luego  $\lim(a_{n+1}/a_n) = e$ , y de aquí  $\lim \sqrt[n]{a_n} = e$ .

#### 4. Reordenaciones

Una serie  $\sum a_n$  se dice *incondicionalmente convergente* si, para cualquier biyección  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , haciendo  $b_n = a_{\varphi(n)}$ , la serie  $\sum b_n$  es convergente. (En particular, tomando  $\varphi(n) = n$ , vemos que  $\sum a_n$  es convergente). Como consecuencia de los resultados que demostraremos más adelante, se tiene que si  $\sum a_n$  es incondicionalmente convergente, entonces  $\sum b_n = \sum a_n$ , independiente de la biyección  $\varphi$ . Esta es la manera más precisa de afirmar que la suma  $\sum a_n$  no depende del orden de sus términos. No obstante, esto no ocurre siempre.

**Ejemplo 12.** La serie

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

converge, pero no incondicionalmente. En efecto, tenemos

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots.$$

Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} s &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \\ \frac{s}{2} &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots. \end{aligned}$$

Sumando término a término

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots.$$

La última serie, cuya suma es  $\frac{3s}{2}$ , tiene los mismos términos que la serie inicial, cuya suma es  $s$ , pero en orden diferente.

**Teorema 8.** Si  $\sum a_n$  es absolutamente convergente entonces para toda biyección  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , haciendo  $b_n = a_{\varphi(n)}$ , se tiene  $\sum b_n = \sum a_n$ .

**Demostración:** Supongamos inicialmente que  $a_n \geq 0$ . Escribimos  $s_n = a_1 + \cdots + a_n$  y  $t_n = b_1 + \cdots + b_n$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , los números

$\varphi(1), \dots, \varphi(n)$  pertenecen al conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$ , donde  $m$  es el mayor de los  $\varphi(i)$ . Entonces:

$$t_n = \sum_{j=1}^n b_n \leq \sum_{j=1}^m a_j = s_m.$$

Así, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $t_n \leq s_m$ . Recíprocamente, (considerando  $\varphi^{-1}$  es vez de  $\varphi$ ) para cada  $m \in \mathbb{N}$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $s_m \leq t_n$ . Se sigue que  $\lim t_n = \lim s_n$ , esto es,  $\sum b_n = \sum a_n$ . En el caso general, tenemos  $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$ , donde  $p_n$  es la parte positiva y  $q_n$  la parte negativa de  $a_n$ . Toda reordenación  $(b_n)$  de los términos  $a_n$  determinan reordenaciones  $(u_n)$  de los  $p_n$  y  $(v_n)$  de los  $q_n$ , de forma que  $u_n$  es la parte positiva y  $v_n$  la parte negativa de  $b_n$ . Por lo que acabamos de ver  $\sum u_n = \sum p_n$  y  $\sum v_n = \sum q_n$ . Luego  $\sum a_n = \sum u_n - \sum v_n = \sum b_n$ .  $\square$

El próximo teorema implica que solamente las series absolutamente convergentes son incondicionalmente convergentes.

**Teorema 9. (Riemann)** *Alterando convenientemente el orden de los términos de una serie condicionalmente convergente es posible hacer que su suma sea igual a cualquier número real prefijado.*

**Demostración:** Sea  $\sum a_n$  la serie dada. Escogido un número  $c$ , empezamos a sumar los términos positivos de  $\sum a_n$ , en su orden natural, uno a uno, parando cuando, al sumar  $a_{n_1}$ , la suma supere por primera vez a  $c$ . (Esto es posible por que la suma de los términos positivos de  $\sum a_n$  es  $+\infty$ ). A esta suma añadimos los términos negativos, también en su orden natural, uno a uno, parando en cuanto al sumar  $a_{n_2}$  ( $< 0$ ) la suma resulte menor que  $c$  (lo que es posible porque la suma de los términos negativos es  $-\infty$ ). Prosiguiendo análogamente, obtenemos una nueva serie, cuyos términos son los mismos de  $\sum a_n$  en orden diferente. Las sumas parciales de esta nueva serie oscilan alrededor de  $c$  de forma que (a partir del índice  $n_1$ ) la diferencia entre cada una de ellas es inferior, en valor absoluto, al término  $a_{n_k}$  donde tuvo lugar el último cambio de signo. Ahora bien,  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = 0$  pues la serie  $\sum a_n$  converge. Luego las sumas parciales de la nueva serie convergen a  $c$ .  $\square$

## 5. Ejercicios

### Sección 1: Series Convergentes

1. Dadas las series  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$ , tales que  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  y  $b_n = \log(1 - \frac{1}{n})$ , demuestre que  $\lim a_n = \lim b_n = 0$ . Calcule explícitamente las  $n$ -ésimas sumas parciales  $s_n$  y  $t_n$  de dichas series y demuestre que  $\lim s_n = \lim t_n = +\infty$ , luego las series dadas son divergentes.
2. Use el criterio de comparación para probar, a partir de la convergencia de  $\sum 2/n(n+1)$ , que  $\sum 1/n^2$  es convergente.
3. Sea  $s_n$  la  $n$ -ésima suma parcial de la serie armónica. Pruebe que para  $n = 2^m$  se tiene  $s_n > 1 + \frac{m}{2}$  y concluya de aquí que la serie armónica es divergente.
4. Demuestre que la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$  diverge.
5. Demuestre que si  $r > 1$  la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^r}$  converge.
6. Pruebe que la serie  $\sum \frac{\log n}{n^2}$  converge.
7. Pruebe que si  $a_1 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$  y  $\sum a_n$  converge, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ .

### Sección 2: Series absolutamente convergentes

1. Si  $\sum a_n$  es convergente y  $a_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  entonces la serie  $\sum a_n x^n$  es absolutamente convergente para todo  $x \in [-1, 1]$  y

$$\sum a_n \sin(nx) \quad , \quad \sum a_n \cos(nx)$$

son absolutamente convergentes para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

2. La serie  $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} + \dots$  tiene términos alternadamente positivos y negativos y su término general tiende a cero. No obstante es divergente. ¿Por qué esto no contradice el Teorema de Leibniz?

3. Dé un ejemplo de una serie convergente  $\sum a_n$  y de una sucesión acotada  $(x_n)$  tales que la serie  $\sum a_n x_n$  se divergente. Examine lo que sucede si una de los siguientes hipótesis se cumple: (a)  $x_n$  es convergente; (b)  $\sum a_n$  es absolutamente convergente.
4. Pruebe que la serie obtenida a partir de la serie armónica alternando el signo de los términos de modo que a  $p$  términos positivos ( $p \in \mathbb{N}$  fijo) sigan  $p$  términos negativos es convergente.
5. Si  $\sum a_n$  es absolutamente convergente y  $\lim b_n = 0$ , escriba  $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$ . Pruebe que  $\lim c_n = 0$ .
6. Si  $\sum a_n$  es absolutamente convergente, pruebe que entonces  $\sum a_n^2$  converge.
7. Si  $\sum a_n^2$  y  $\sum b_n^2$  convergen, pruebe que  $\sum a_n b_n$  converge absolutamente.
8. Pruebe que una serie es absolutamente convergente si, y sólo si, el conjunto de todas las sumas finitas formadas con los términos  $a_n$  está acotado.

### Sección 3: Criterios de convergencia

1. Pruebe que si existen infinitos índices  $n$  tales que  $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$  entonces la serie  $\sum a_n$  diverge. Si  $a_n \neq 0$  para todo  $n$  y  $|a_n + 1/a_n| \geq 1$  para todo  $n > n_0$  entonces  $\sum a_n$  diverge. Por otra parte, la serie  $1/2 + 1/2 + 1/2^2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^3 + \cdots$  converge y sin embargo se tiene  $a_{n+1}/a_n = 1$  para todo  $n$  impar.
2. Si  $0 < a < b < 1$ , la serie  $a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots$  es convergente. Demuestre que el criterio de Cauchy nos lleva a este resultado y que, sin embargo, el criterio de d’Alambert nada nos permite concluir.
3. Determine si la serie  $\sum (\log n/n)^n$  es convergente usando los criterios de d’Alambert y Cauchy.
4. Dada una sucesión de números positivos  $x_n$ , tal que  $\lim x_n = a$ , demuestre que  $\lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a$ .

5. Determine para qué valores de  $x$  converge cada una de las siguientes series:

$$\sum n^k x^n, \quad \sum n^n x^n, \quad \sum x^n/n^n, \quad \sum n! x^n, \quad \sum x^n/n^2$$

#### Sección 4: Reordenaciones

1. Demuestre que si una serie es condicionalmente convergente entonces existen reordenaciones tales que las sumas de las nuevas series son iguales a  $+\infty$  y  $-\infty$ .
2. Efectúe explícitamente una reordenación de los términos de la serie  $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \dots$  de modo que su suma sea igual a  $1/2$ .
3. Se dice que una sucesión  $(a_n)$  es *sumable*, con suma  $s$ , cuando para todo  $\varepsilon > 0$  existe un subconjunto finito  $J_0 \subset \mathbb{N}$  tal que, para todo  $J$  finito,  $J_0 \subset J \subset \mathbb{N}$ , se tiene  $|s - \sum_{n \in J} a_n| < \varepsilon$ . Pruebe que:
  - (a) Si la sucesión  $(a_n)$  es sumable entonces, para toda función sobreyectiva  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , la sucesión  $b_n$ , definida como  $b_n = a_{\varphi(n)}$ , es sumable, con la misma suma.
  - (b) Si la sucesión  $(a_n)$  es sumable, con suma  $s$ , entonces la serie  $\sum a_n = s$  es absolutamente convergente.
  - (c) Recíprocamente, si  $\sum a_n$  es una serie absolutamente convergente, entonces la sucesión  $(a_n)$  es sumable.



# Algunas nociones de topología

La topología es la rama de las matemáticas donde se estudian, con gran generalidad, las nociones de límite y de continuidad y las ideas anexas. En este capítulo abordaremos algunos conceptos topológicos de carácter elemental referentes a subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , pretendiendo establecer las bases para desarrollar adecuadamente los próximos capítulos. Adoptaremos un lenguaje geométrico, diciendo “punto” en vez de “número real”, y “recta” en vez del “conjunto  $\mathbb{R}$ ”.

## 1. Conjuntos abiertos

Se dice que  $a$  es un punto *interior* del conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  cuando existe un número  $\varepsilon > 0$  tal que el intervalo abierto  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  está contenido en  $X$ . El conjunto de los puntos interiores de  $X$  se llama *interior* del conjunto  $X$ , y se representa mediante  $\text{int } X$ . Cuando  $a \in \text{int } X$  se dice que el conjunto  $X$  es un *entorno* o una *vencidad* del punto  $a$ . Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  se llama *abierto* si  $A = \text{int } A$ , esto es, cuando todos los puntos de  $A$  son puntos interiores de  $A$ .

**Ejemplo 1.** Todo punto  $c$  del intervalo abierto  $(a, b)$  es un punto interior de  $(a, b)$ . Los puntos  $a$  y  $b$ , extremos del intervalo cerrado  $[a, b]$ , no son interiores. El interior del conjunto  $\mathbb{Q}$  de los números racionales es vacío. Por otra parte,  $\text{int } [a, b] = (a, b)$ . El intervalo cerrado  $[a, b]$  no es un entorno ni de  $a$  ni de  $b$ . Un intervalo abierto

es un conjunto abierto. Todo intervalo abierto (acotado o no) es un conjunto abierto.

La definición de límite de una sucesión puede ser reformulado en términos de conjuntos abiertos: se tiene  $a = \lim x_n$  si, y sólo si, para todo abierto  $A$  que contiene a  $a$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow x_n \in A$ .

**Teorema 1.**

- a) Si  $A_1$  y  $A_2$  son conjuntos abiertos entonces la intersección  $A_1 \cap A_2$  es un conjunto abierto.
- b) Si  $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$  es una familia cualquiera de conjuntos abiertos, la unión  $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$  es un conjunto abierto.

**Demostración:** a) Si  $x \in A_1 \cap A_2$  entonces  $x \in A_1$  y  $x \in A_2$ . Como  $A_1$  y  $A_2$  son abiertos, existen  $\varepsilon_1 > 0$  y  $\varepsilon_2 > 0$  tales que  $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset A_1$  y  $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset A_2$ . Sea  $\varepsilon$  el menor de los números  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . Entonces  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_1$  y  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_2$ , luego  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_1 \cap A_2$ . Así, todo punto  $x \in A_1 \cap A_2$  es un punto interior, o sea, el conjunto  $A_1 \cap A_2$  es abierto.

b) Si  $x \in A$  entonces existe  $\lambda \in L$  tal que  $x \in A_\lambda$ . Como  $A_\lambda$  es abierto, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_\lambda \subset A$ , luego todo punto de  $A$  es interior, esto es,  $A$  es abierto.  $\square$

**Ejemplo 2.** Resulta inmediatamente de a) en el Teorema 1 que la intersección  $A_1 \cap \dots \cap A_n$  de un número finito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto. No obstante, aunque por b) la unión finita de conjuntos abiertos también es un conjunto abierto, la intersección de un número infinito de conjuntos abiertos no es necesariamente abierta. Por ejemplo, si  $A = (-1, 1)$ ,  $A_2 = (-1/2, 1/2)$ ,  $\dots$ ,  $A_n = (-1/n, 1/n)$ ,  $\dots$  entonces  $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \dots = \{0\}$ . En efecto, si  $x \neq 0$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $|x| > 1/n$ , luego  $x \notin A_n$ , de donde  $x \notin A$ .

## 2. Conjuntos cerrados

Se dice que un punto  $a$  es *adherente* al conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  cuando es límite de alguna sucesión de puntos  $x_n \in X$ . Evidentemente, todo punto  $a \in X$  es adherente a  $X$ : basta tomar todos los  $x_n = a$ .

Se llama *cierre*, *clausura* o *adherencia* de un conjunto  $X$  al conjunto  $\overline{X}$  formado por todos los puntos adherentes a  $X$ . Se tiene  $X \subset \overline{X}$ . Si  $X \subset Y$  entonces  $\overline{X} \subset \overline{Y}$ . Un conjunto se dice *cerrado* cuando  $X = \overline{X}$ , esto es, cuando todo punto adherente a  $X$  pertenece a  $X$ . Si  $X \subset Y$ , se dice que  $X$  es denso en  $Y$  cuando  $Y \subset \overline{X}$ , esto es, cuando todo  $b \in Y$  es adherente a  $X$ . Por ejemplo,  $\mathbb{Q}$  es denso en  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 2.** *Un punto  $a$  es adherente al conjunto  $X$  si, y sólo si, todo entorno de  $a$  contiene algún punto de  $X$ .*

**Demostración:** Sea  $a$  adherente a  $X$ . Entonces  $a = \lim x_n$ , donde  $x_n \in X$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Dada cualquier entorno  $V$  de  $a$  tenemos  $x_n \in V$  para todo  $n$  suficientemente grande (por la definición de límite), luego  $V \cap X \neq \emptyset$ . Recíprocamente, si todo entorno  $V$  de  $a$  contiene puntos de  $X$  podemos escoger en cada intervalo  $(a - 1/n, a + 1/n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , un punto  $x_n \in X$ . Entonces  $|x_n - a| < 1/n$ , luego  $\lim x_n = a$ , y así  $a$  es adherente a  $X$ .  $\square$

Por el teorema anterior, para que un punto  $a$  no pertenezca a  $\overline{X}$  es necesario y suficiente que exista un entorno  $V$  de  $a$  tal que  $V \cap X = \emptyset$ .

**Corolario.** *El cierre de cualquier conjunto es un conjunto cerrado. (O sea,  $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$  para todo  $X \subset \mathbb{R}$ ).*

En efecto, si  $a$  es adherente a  $\overline{X}$  entonces todo conjunto abierto  $A$  que contiene a  $a$  también contiene algún punto  $b \in \overline{X}$ . Así,  $A$  es un entorno de  $b$ . Como  $b$  es adherente a  $X$ , se sigue que  $A$  contiene algún punto de  $X$ . Luego cualquier punto adherente a  $\overline{X}$  también es adherente a  $X$ , esto es,  $a \in \overline{X}$ .

**Teorema 3.** *Un conjunto  $F \subset \mathbb{R}$  es cerrado si, y sólo si, su complementario  $A = \mathbb{R} - F$  es abierto.*

**Demostración:** Sean  $F$  cerrado y  $a \in A$ , esto es  $a \notin F$ . Por el Teorema 2, existe algún entorno  $V$  de  $a$  que no contiene puntos de  $F$ , esto es,  $V \subset A$ . Así, todo punto de  $A$  es interior a  $A$ , o sea,  $A$  es abierto. Recíprocamente, si el conjunto  $A$  es abierto y el punto  $a$  es adherente a  $F = \mathbb{R} - A$  entonces todo entorno de  $a$  contiene puntos de  $F$ , luego  $a$  no es interior a  $A$ . Como  $A$  es abierto, tenemos  $a \notin A$ ,

o sea,  $a \in F$ . Así, todo punto adherente a  $F$  pertenece a  $F$ , luego  $F$  es cerrado.  $\square$

**Teorema 4.**

- a) Si  $F_1$  y  $F_2$  son cerrados entonces  $F_1 \cup F_2$  es cerrado.
- b) Si  $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$  es una familia cualquiera de conjuntos cerrados entonces su intersección  $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$  es un conjunto cerrado.

**Demostración:** a) Los conjuntos  $A_1 = \mathbb{R} - F_1$  y  $A_2 = \mathbb{R} - F_2$  son abiertos, por el Teorema 3. Luego, por el Teorema 1,  $A_1 \cap A_2 = \mathbb{R} - (F_1 \cup F_2)$  es abierto. De nuevo por el Teorema 3,  $F_1 \cup F_2$  es cerrado.

b) Para cada  $\lambda \in L$ ,  $A_\lambda = \mathbb{R} - F_\lambda$  es abierto. Se sigue que  $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$  es abierto. Como  $A = \mathbb{R} - F$ ,  $F$  es cerrado.  $\square$

**Ejemplo 3.** Sea  $X$  acotado no vacío. Entonces  $a = \inf X$  y  $b = \sup X$  son adherentes a  $X$ . En efecto, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , podemos escoger  $x_n \in X$  tal que  $a \leq x_n < a + 1/n$ , luego  $a = \lim x_n$ . Análogamente se ve que  $b = \lim y_n$ , con  $y_n \in X$ . En particular,  $a$  y  $b$  son adherentes a  $(a, b)$ .

**Ejemplo 4.** El cierre de los intervalos  $(a, b)$ ,  $(a, b]$  y  $[a, b)$  es el intervalo  $[a, b]$ .  $\mathbb{Q}$  es denso en  $\mathbb{R}$  y, para todo intervalo  $I$ ,  $\mathbb{Q} \cap I$  es denso en  $I$ . Una unión infinita de conjuntos cerrados puede no ser un conjunto cerrado; en efecto, *todo* conjunto (cerrado o no) es la unión de sus puntos, que son conjuntos cerrados.

Una *escisión* de un conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  es una descomposición  $X = A \cup B$  tal que  $A \cap \overline{B} = \emptyset$  y  $\overline{A} \cap B = \emptyset$ , esto es, ningún punto de  $A$  es adherente a  $B$  y ningún punto de  $B$  es adherente a  $A$ . (En particular,  $A$  y  $B$  son disjuntos). La descomposición  $X = X \cup \emptyset$  se llama *escisión trivial*.

**Ejemplo 5.** Si  $X = \mathbb{R} - \{0\}$ , entonces  $X = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$  es una escisión. Dado un número irracional  $\alpha$ , sean  $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \alpha\}$  y  $B = \{x \in \mathbb{Q} : x > \alpha\}$ . La descomposición  $\mathbb{Q} = A \cup B$  es una escisión del conjunto  $\mathbb{Q}$  de los racionales. Por otra parte, si  $a < c < b$ , entonces  $[a, b] = [a, c] \cup (c, b]$  no es una escisión.

**Teorema 5.** Un intervalo de la recta sólo admite la escisión trivial.

**Demostración:** Supongamos, por reducción al absurdo, que el intervalo  $I$  admite una escisión no trivial  $I = A \cup B$ . Tomemos  $a \in A$ ,  $b \in B$  y supongamos que  $a < b$ , con lo que  $[a, b] \subset I$ . Sea  $c$  el punto medio del intervalo  $[a, b]$ . Entonces  $c \in A$  ó  $c \in B$ . Si  $c \in A$ , tomaremos  $a_1 = c$ ,  $b_1 = b$ . Si  $c \in B$ , escribiremos  $a_1 = a$  y  $b_1 = c$ . En cualquier caso obtendremos un intervalo  $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ , con  $b_1 - a_1 = (b - a)/2$  y  $a_1 \in A$ ,  $b_1 \in B$ . A su vez, el punto medio de  $[a_1, b_1]$  descompone a éste en dos intervalos cerrados yuxtapuestos de longitud  $(b - a)/4$ . Para uno de estos intervalos, que llamaremos  $[a_2, b_2]$ , se tiene  $a_2 \in A$  y  $b_2 \in B$ .

Prosiguiendo análogamente obtendremos una sucesión de intervalos encajados  $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$  tales que  $(b_n - a_n) = (b - a)/2^n$ ,  $a_n \in A$  y  $b_n \in B$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por el Teorema 4, Capítulo 2, existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $a_n \leq c \leq b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . El punto  $c \in I = A \cup B$  no puede estar ni en  $A$ , pues  $c = \lim b_n \in \overline{B}$ , ni en  $B$ , pues  $c = \lim a_n \in \overline{A}$ , lo que nos lleva a una contradicción.  $\square$

**Corolario.** *Los únicos subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que son simultáneamente abiertos y cerrados son el conjunto vacío y  $\mathbb{R}$ .*

En efecto, si  $A \subset \mathbb{R}$  es abierto y cerrado, entonces  $\mathbb{R} = A \cup (\mathbb{R} - A)$  es una escisión, luego ó  $A = \emptyset$  y  $\mathbb{R} - A = \mathbb{R}$ , o bien  $A = \mathbb{R}$  y  $\mathbb{R} - A = \emptyset$ .

### 3. Puntos de acumulación

Se dice que  $a \in \mathbb{R}$  es un *punto de acumulación* del conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  cuando todo entorno  $V$  de  $a$  contiene algún punto de  $X$  diferente del propio  $a$ . (Esto es,  $V \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$ ). Equivalentemente: para todo  $\varepsilon > 0$  se tiene  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$ . Se representa mediante  $X'$  al conjunto de los puntos de acumulación de  $X$ . Por lo tanto,  $a \in X' \Leftrightarrow a \in \overline{X - \{a\}}$ . Si  $a \in X$  no es un punto de acumulación de  $X$  se dice que  $a$  es un *punto aislado* de  $X$ . Esto significa que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $a$  es el único punto de  $X$  en el intervalo  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Cuando todos los puntos del conjunto  $X$  son aislados se dice que  $X$  es un conjunto *discreto*.

**Teorema 6.** *Dados  $X \subset \mathbb{R}$  y  $a \in \mathbb{R}$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1)  $a$  es punto de acumulación de  $X$ ;
- (2)  $a$  es límite de una sucesión de puntos  $x_n \in X - \{a\}$ ;
- (3) Todo intervalo abierto centrado en  $a$  contiene infinitos puntos de  $X$ .

**Demostración:** Suponiendo (1), para todo  $n \in \mathbb{N}$  podemos encontrar un punto  $x_n \in X$ ,  $x_n \neq a$ , en el entorno  $(a - 1/n, a + 1/n)$ . Luego  $\lim x_n = a$ , lo que prueba (2). Por otra parte, suponiendo (2), entonces, para cualquier  $n_0 \in \mathbb{N}$ , el conjunto  $\{x_n : n > n_0\}$  es infinito, pues en caso contrario existiría un término  $x_{n_1}$  que se repite infinitas veces, lo que nos daría una sucesión constante con límite  $x_{n_1} \neq a$ . Por lo tanto, de la definición de límite se ve que (2) $\Rightarrow$ (3). Finalmente, la implicación (3) $\Rightarrow$ (1) es obvia.  $\square$

**Ejemplo 6.** Si  $X$  es finito entonces  $X' = \emptyset$  (un conjunto finito no tiene puntos de acumulación).  $\mathbb{Z}$  es infinito pero todos los puntos de  $\mathbb{Z}$  son aislados.  $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ . Si  $X = [a, b]$  entonces  $X' = [a, b]$ . Si  $X = \{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$  entonces  $X' = \{0\}$ , esto es, 0 es el único punto de acumulación de  $X$ . Observe que todos los puntos de este último conjunto son aislados ( $X$  es discreto).

A continuación presentaremos una versión del Teorema de Bolzano-Weiertrass en términos de puntos de acumulación.

**Teorema 7.** *Todo conjunto infinito y acotado de números reales tiene, al menos, un punto de acumulación.*

**Demostración:** Sea  $X$  infinito y acotado;  $X$  posee un subconjunto infinito numerable  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ . Fijando esta numeración tenemos una sucesión  $(x_n)$  de términos, distintos dos a dos, pertenecientes a  $X$ , por lo tanto una sucesión acotada que, por el Teorema de Bolzano-Weiertrass, posee una subsucesión convergente. Eliminado los términos que no están en esta subsucesión y cambiando la notación, podemos admitir que  $(x_n)$  converge. Sea  $a = \lim x_n$ . Como los términos  $x_n$  son todos distintos, como máximo uno de ellos puede ser igual a  $a$ . Descartándolo, en caso de que éste exista, tendremos que  $a$  es el límite de una sucesión de puntos  $x_n \in X - \{a\}$ , luego  $a \in X'$ .  $\square$

#### 4. Conjuntos compactos

Un conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  se llama *compacto* si es cerrado y acotado.

Todo conjunto finito es compacto. Un intervalo de la forma  $[a, b]$  es compacto. Por otra parte,  $(a, b)$  está acotado pero no es cerrado, luego no es compacto. Tampoco  $\mathbb{Z}$  es compacto pues no está acotado, aunque es cerrado (su complementario  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$  es la unión de los intervalos abiertos  $(n, n+1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , luego es un conjunto abierto).

**Teorema 8.** *Un conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  es compacto si, y sólo si, toda sucesión de puntos de  $X$  posee una subsucesión que converge a un punto de  $X$ .*

**Demostración:** Si  $X \subset \mathbb{R}$  es compacto, toda sucesión de puntos de  $X$  está acotada, luego (por Bolzano-Weierstrass) posee una subsucesión convergente, cuyo límite es un punto de  $X$  (pues  $X$  es cerrado). Recíprocamente, sea  $X$  un conjunto tal que toda sucesión de puntos  $x_n \in X$  posee una subsucesión que converge a un punto de  $X$ . Entonces  $X$  está acotado pues, en caso contrario, para cada  $n \in \mathbb{N}$  podríamos encontrar  $x_n \in X$  con  $|x_n| > n$ . La sucesión  $(x_n)$  así obtenida no contendría ninguna subsucesión acotada luego no tendría ninguna subsucesión convergente. Además,  $X$  es cerrado pues en caso contrario existiría un punto  $a \notin X$  con  $a = \lim x_n$ , donde cada  $x_n \in X$ . La sucesión  $x_n$  no poseería entonces ninguna subsucesión convergente a un punto de  $X$  pues todas sus subsucesiones tendrían límite  $a$ . Luego  $X$  es compacto.  $\square$

**Observación:** Si  $X \subset \mathbb{R}$  es compacto entonces, por el Ejemplo 3,  $a = \inf X$  y  $b = \sup X$  pertenecen a  $X$ . Así, todo conjunto compacto posee un elemento mínimo y un elemento máximo. O sea,  $X$  compacto  $\Rightarrow \exists x_0, x_1 \in X$  tales que  $x_0 \leq x \leq x_1$  para todo  $x \in X$ .

El próximo teorema generaliza el principio de los intervalos encajados.

**Teorema 9.** *Dada una sucesión decreciente  $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$  de conjuntos compactos no vacíos, existe (como mínimo) un número real que pertenece a todos los  $X_n$ .*

**Demostración:** Definimos una sucesión  $(x_n)$  escogiendo, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , un punto  $x_n \in X_n$ . Esta sucesión está contenida en el

compacto  $X_1$ , luego posee una subsucesión  $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$  que converge a un punto  $a \in X_1$ . Dado cualquier  $n \in \mathbb{N}$  tenemos  $x_{n_k} \in X_n$  siempre que  $n_k > n$ . Como  $X_n$  es compacto, se sigue que  $a \in X_n$ . Esto prueba el teorema.  $\square$

Terminamos nuestro estudio de los conjuntos compactos de la recta con la demostración del Teorema de Heine-Borel.

Se llama *recubrimiento* de un conjunto  $X$  a una familia  $\varphi$  de conjuntos  $C_\lambda$  cuya unión contiene a  $X$ . La condición  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$  significa que, para cada  $x \in X$ , existe, necesariamente, (al menos) un  $\lambda \in L$  tal que  $x \in C_\lambda$ . Cuando todos los conjuntos  $C_\lambda$  son abiertos, se dice que  $\varphi$  es un *recubrimiento abierto*. Cuando  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  es un conjunto finito, se dice que  $X \subset C_{\lambda_1} \cup \dots \cup C_{\lambda_n}$  es un *recubrimiento finito*. Si existe  $L' \subset L$  tal que aún se tiene  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$ , se dice que  $\varphi' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$  es un subrecubrimiento de  $\varphi$ .

**Teorema 10. (Borel-Lebesgue)** *Todo recubrimiento abierto de un conjunto compacto posee un subrecubrimiento finito.*

**Demostración:** Inicialmente consideremos un recubrimiento abierto  $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$  del intervalo compacto  $[a, b]$ . Supongamos, por reducción al absurdo, que  $\varphi = (A_\lambda)_{\lambda \in L}$  no admite ningún subrecubrimiento finito. El punto medio del intervalo  $[a, b]$  lo subdivide en dos intervalos de longitud  $(b - a)/2$ . Al menos uno de estos intervalos, que llamaremos  $[a_1, b_1]$ , no puede ser recubierto por un número finito de conjuntos  $A_\lambda$ . Mediante subdivisiones sucesivas obtenemos una sucesión decreciente  $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$  de intervalos tales que  $(b_n - a_n) = (b - a)/2^n$  y ningún  $[a_n, b_n]$  puede estar contenido en una unión finita de abiertos  $A_\lambda$ . Por el Teorema 9 existe un número real  $c$  que pertenece a todos los intervalos  $[a_n, b_n]$ . En particular  $c \in [a, b]$ . Por la definición de recubrimiento, existe  $\lambda \in L$  tal que  $c \in A_\lambda$ . Como  $A_\lambda$  es abierto, tenemos  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset A_\lambda$  para un cierto  $\varepsilon > 0$ . Entonces, tomando  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $(b - a)/2^n < \varepsilon$ , tenemos  $c \in [a_n, b_n] \subset [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ , de donde  $[a_n, b_n] \subset A_\lambda$ , luego  $[a_n, b_n]$  se puede recubrir con el conjunto  $A_\lambda$ , lo que es absurdo. En el caso general, tenemos un recubrimiento abierto  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$  del compacto  $X$ . Tomemos un intervalo compacto  $[a, b]$  que contenga a  $X$  y, añadiendo a los  $A_\lambda$  el nuevo



abierto  $A_{\lambda_0} = \mathbb{R} - X$ , obtenemos un recubrimiento abierto de  $[a, b]$ , del que podemos extraer, por la parte ya probada, un subrecubrimiento finito  $[a, b] \subset A_{\lambda_0} \cup A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$ . Como ningún punto de  $X$  puede pertenecer a  $A_{\lambda_0}$ , tenemos  $X \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$ ; esto completa la demostración.  $\square$

**Ejemplo 7.** Los intervalos  $A_n = (1/n, 2)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , forman un recubrimiento abierto del conjunto  $X = (0, 1]$ , pues  $(0, 1] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . No obstante, este recubrimiento no admite un subrecubrimiento finito pues, como  $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ , toda unión finita de los conjuntos  $A_n$  coincide con el conjunto de mayor índice, luego no contiene a  $(0, 1]$ .

El Teorema de Borel-Lebesgue, cuya importancia es crucial, se usará en este libro solamente una vez, en el Capítulo 10, Sección 4, (cfr. Teorema 7 en dicho capítulo.) Se puede probar, recíprocamente, que si todo recubrimiento abierto de un conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  posee un subrecubrimiento finito entonces  $X$  es cerrado y acotado (cfr. Curso de Análisis Matemático, vol. 1, p.147.)

## 5. El conjunto de Cantor

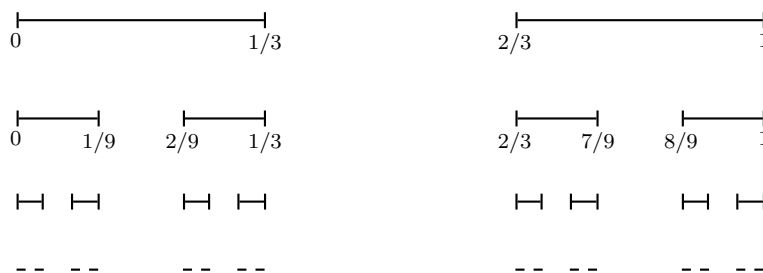
El conjunto de Cantor, que describiremos a continuación, tiene las siguientes propiedades:

- 1) Es compacto.
- 2) Tiene interior vacío (no contiene intervalos).
- 3) No contiene puntos aislados (todos sus puntos son puntos de acumulación).
- 4) No es numerable.

El *conjunto de Cantor*  $K$  es un subconjunto cerrado del intervalo  $[0, 1]$  obtenido como el complemento de una unión de intervalos abiertos, de la siguiente forma. Se retira del intervalo  $[0, 1]$  el intervalo abierto centrado en el punto medio de  $[0, 1]$  de longitud  $1/3$ ,  $(1/3, 2/3)$  (su tercio central). Se retiran después los tercios centrales de cada uno de los intervalos restantes,  $[0, 1/3]$  y  $[2/3, 1]$ . Entonces sobra  $[0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$ . A continuación se retira el tercio central de cada uno de estos cuatro intervalos. Se

repite este proceso inductivamente. El conjunto  $K$  de los puntos no retirados es el conjunto de Cantor.

Si indicamos mediante  $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$  los intervalos retirados vemos que  $F = \mathbb{R} - \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$  es un conjunto cerrado, luego  $K = F \cap [0, 1]$  es cerrado y acotado, o sea, el conjunto de Cantor es compacto.



**Fig. 1** - Construyendo el conjunto de Cantor

Para demostrar que  $K$  tiene interior vacío, observamos que después de la etapa  $n$ -ésima de la construcción sólo restan intervalos de longitud  $1/3^n$ . Por tanto, dado cualquier intervalo  $J \subset [0, 1]$  de longitud  $c > 0$ , si tomamos  $n$  tal que  $1/3^n < c$ , el intervalo  $J$  habrá sido subdividido después de la  $n$ -ésima etapa de la construcción de  $K$ . Así,  $K$  no contiene intervalos.

Los puntos extremos de los intervalos retirados en las diversas etapas de la construcción de  $K$ , tales como  $1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9$ , etc, pertenecen a  $K$ , pues en cada etapa sólo se retiran puntos interiores de los intervalos que quedaban de la etapa anterior. Éstos forman un conjunto numerable, sin puntos aislados. En efecto, sea  $c \in K$  extremo de algún intervalo, digamos  $(c, b)$ , retirado de  $[0, 1]$  para obtener  $K$ . Cuando  $(c, b)$  fue retirado quedó un cierto intervalo  $[a, c]$ . En las siguientes etapas de la construcción de  $K$ , quedarán siempre tercios finales de intervalos, del tipo  $[a_n, c]$ , con  $a_n \in K$ . La longitud de  $[a_n, c]$  tiende a cero, luego  $a_n \rightarrow c$  y así  $c$  no es un punto aislado de  $K$ .

Ahora supongamos que  $c \in K$  no es extremo de ningún intervalo retirado de  $[0, 1]$  durante la construcción de  $K$ . (De hecho, hasta ahora, no sabemos si tales puntos existen, pero en seguida vamos a ver que éstos constituyen la mayoría de los puntos de  $K$ ). Probemos que  $c$  no es un punto aislado de  $K$ . En efecto, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c$  pertenece al interior de un intervalo  $[x_n, y_n]$  de los que quedaron después de la  $n$ -ésima etapa de la construcción de  $K$ . Tenemos  $x_n < c < y_n$ , con  $x_n, y_n \in K$ , y  $x_n - y_n = 1/3^n$ . Luego  $c = \lim x_n = \lim y_n$  es un punto de acumulación de  $K$ .

Constatamos así que  $K$  no posee puntos aislados. Probaremos ahora que el conjunto de Cantor no es numerable. Dado cualquier subconjunto numerable  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset K$ , obtendremos un punto  $c \in K$  tal que  $c \neq x_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Para esto, con centro en un punto de  $K$ , tomamos un intervalo compacto  $I_1$  tal que  $x_1 \notin I_1$ . Como ningún punto de  $K$  en el interior de  $I_1$ , tomamos un intervalo compacto  $I_2 \subset I_1$  tal que  $x_2 \notin I_2$ . Prosiguiendo de forma análoga, obtenemos una sucesión decreciente de intervalos compactos  $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$  tales que  $x_n \in I_n$  e  $I_n \cap K \neq \emptyset$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $I_n$  tiene longitud  $< 1/n$ . Entonces el punto  $c$ , perteneciente a todos los  $I_n$  (cuya existencia está asegurada por el Teorema 9), es único, esto es,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$ . Escogiendo, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , un punto  $y_n \in I_n \cap K$ , tendremos  $|y_n - c| \leq 1/n$ , de donde  $\lim y_n = c$ . Como  $K$  es cerrado, se deduce que  $c \in K$ . Por otra parte, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos  $c \in I_n$ , luego  $c \neq x_n$ , concluyendo la demostración.

Los puntos del conjunto de Cantor admiten una caracterización interesante y útil en términos de su representación en base 3. Dado  $x \in [0, 1]$ , representar  $x$  en base 3 significa escribir  $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$ , donde cada uno de los dígitos  $x_n$  es 0, 1 ó 2, de modo que

$$x = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \dots + \frac{x_n}{3^n} + \dots.$$

Para tener  $x = 0, x_1 x_2 \dots x_n 000$  es necesario y suficiente que  $x$  sea un número de la forma  $m/3^n$ , con  $m$  y  $n$  enteros y  $m \leq 3^n$ . Por ejemplo,  $17/27 = 0, 122000\dots$  en base 3. Cuando el denominador de la fracción irreducible  $p/q$  no es una potencia de 3 la representación de  $p/q$  en base 3 es periódica. Por ejemplo, en base 3,

$1/4 = 0,020202\dots$  y  $1/7 = 0,010212010212\dots$ . Los números irracionales tienen representación no periódica.

En la primera etapa de la formación del conjunto de Cantor, al retirar el intervalo abierto  $(1/3, 2/3)$  quedan excluidos los números  $x \in [0, 1]$  cuya representación en base 3 tienen  $x_1 = 1$ , con la única excepción de  $1/3 = 0,1$ , que permanece. En la segunda etapa, son excluidos los números de los intervalos  $(1/9, 2/9)$  y  $(7/9, 8/9)$ , o sea, aquellos de la forma  $0,01x_3x_4\dots$  o de la forma  $0,21x_3x_4\dots$  (excepto  $1/9 = 0,01$  y  $7/9 = 0,21$  que permanecen). En general, podemos afirmar que los elementos del conjunto de Cantor son los números del intervalo  $[0, 1]$  cuya representación  $x = 0, x_1x_2\dots x_n\dots$  en base 3 sólo contiene los dígitos 0 y 2, excepto aquellos que sólo contienen un único dígito 1 como dígito final, como, por ejemplo,  $x = 0,20221$ . Si observamos que  $0,02222\dots = 0,1$  podemos substituir el dígito 1 por la sucesión  $0222\dots$ . Por ejemplo:  $0,20201 = 0,20200222\dots$ . Con este acuerdo se puede afirmar, sin excepciones, que los elementos del conjunto de Cantor son los números del intervalo  $[0, 1]$  cuya representación en base 3 sólo contiene los dígitos 0 y 2.

De aquí resulta fácilmente que el conjunto de Cantor no es numerable (ver Ejemplo 3, Capítulo 1) y que  $1/4 = 0,0202$  pertenece al conjunto de Cantor.

## 6. Ejercicios

### Sección 1: Conjuntos Abiertos

1. Pruebe que, para todo  $X \subset \mathbb{R}$ , se tiene  $\text{int}(\text{int } X) = \text{int } X$ ; concluya que  $\text{int } X$  es un conjunto abierto.
2. Sea  $A \subset \mathbb{R}$  un conjunto con la siguiente propiedad: “Si  $(x_n)$  es una sucesión que converge hacia un punto  $a \in A$ , entonces  $x_n$  pertenece a  $A$  para todo  $n$  suficientemente grande”. Pruebe que  $A$  es abierto.
3. Pruebe que  $\text{int}(A \cup B) \supset \text{int } A \cup \text{int } B$  e  $\text{int}(A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int } B$  para cualesquiera  $A, B \subset \mathbb{R}$ . Si  $A = (0, 1]$  y  $B = [1, 2]$ , demuestre que  $\text{int}(A \cup B) \neq \text{int } A \cup \text{int } B$ .

4. Para todo  $X \subset \mathbb{R}$ , pruebe que se tiene la unión disjunta  $\mathbb{R} = \text{int } X \cup \text{int } (\mathbb{R} - x) \cup F$ , donde  $F$  está formado por los puntos  $x \in \mathbb{R}$  tales que todo entorno de  $x$  contiene puntos de  $X$  y puntos de  $\mathbb{R} - X$ . El conjunto  $F = f_r X = \partial X$  se llama *frontera* o *borde* de  $X$ . Pruebe que  $A \subset \mathbb{R}$  es abierto si, y sólo si,  $A \cap f_r A = \emptyset$ .
5. Determine la frontera de cada uno de los siguientes conjuntos:  $X = [0, 1]$ ,  $Y = (0, 1) \cup (1, 2)$ ,  $Z = \mathbb{Q}$  y  $W = \mathbb{Z}$ .
6. Sean  $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$  intervalos acotados distintos dos a dos cuya intersección  $I = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$  no es vacía. Pruebe que  $I$  es un intervalo, que nunca es abierto.

### Sección 2: Conjuntos cerrados

1. Sean  $I$  un intervalo no degenerado y  $k > 1$  un número natural. Pruebe que el conjunto de los números racionales  $m/k^n$ , cuyos denominadores son potencias de  $k$  con exponente  $n \in \mathbb{N}$ , es denso en  $I$ .
2. Pruebe que, para todo  $X \subset \mathbb{R}$ , se tiene  $\overline{X} = X \cup f_r X$ . Concluya que  $X$  es cerrado si, y sólo si,  $X \supset f_r X$ .
3. Pruebe que, para todo  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R} - \text{int } X = \overline{\mathbb{R} - X}$  e  $\mathbb{R} - \overline{X} = \text{int } (\mathbb{R} - X)$ .
4. Si  $X \subset \mathbb{R}$  es abierto (respectivamente, cerrado) y  $X = A \cup B$  es una escisión, pruebe que  $A$  y  $B$  son abiertos (respectivamente, cerrados).
5. Pruebe que si  $X \subset \mathbb{R}$  tiene frontera vacía entonces  $X = \emptyset$  o  $X = \mathbb{R}$ .
6. Sean  $X, Y \subset \mathbb{R}$ . Pruebe que  $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$  y que  $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$ . Dé un ejemplo en el que  $\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y}$ .
7. Dada una sucesión  $(x_n)$ , pruebe que la clausura del conjunto  $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  es  $\overline{X} = X \cup A$ , donde  $A$  es el conjunto de los puntos adherentes de  $(x_n)$ .

## Sección 3: Puntos de acumulación

1. Pruebe que, para todo  $X \subset \mathbb{R}$ , se tiene  $\overline{X} = X \cup X'$ . Concluya que  $X$  es cerrado si, y sólo si, contiene a todos sus puntos de acumulación.
2. Pruebe que toda colección de intervalos no degenerados disjuntos dos a dos es numerable.
3. Pruebe que si todos los puntos del conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  son aislados entonces, para cada  $x \in X$ , se puede escoger un intervalo  $I_x$  centrado en  $x$  tal que  $x \neq y \Rightarrow I_x \cap I_y = \emptyset$ .
4. Pruebe que todo conjunto no numerable  $X \subset \mathbb{R}$  posee algún punto de acumulación  $a \in X$ .
5. Pruebe que, para todo  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $X'$  es un conjunto cerrado.
6. Sea  $a$  un punto de acumulación del conjunto  $X$ . Pruebe que existe una sucesión estrictamente creciente o estrictamente decreciente de puntos  $x_n \in X$  tal que  $\lim x_n = a$ .

## Sección 4: Conjuntos Compactos

1. Pruebe que el conjunto  $A$  de los valores de adherencia de una sucesión  $(x_n)$  es cerrado. Si la sucesión está acotada,  $A$  es compacto, luego existen  $\ell$  y  $L$ , respectivamente, el menor y el mayor valor de adherencia de la sucesión acotada  $(x_n)$ . Se suele escribir  $\ell = \liminf x_n$  y  $L = \limsup x_n$ .
2. Pruebe que la unión finita y la intersección arbitraria de conjuntos compactos es un conjunto compacto.
3. Dé ejemplos de una sucesión decreciente de conjuntos cerrados no vacíos  $F_1 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$  y de una sucesión decreciente de conjuntos acotados no vacíos  $L_1 \supset \cdots \supset L_n \supset \cdots$  tales que  $\bigcap F_n = \emptyset$  y  $\bigcap L_n = \emptyset$ .
4. Sean  $X, Y$  conjuntos disjuntos no vacíos,  $X$  compacto e  $Y$  cerrado. Pruebe que existen  $x_0 \in X$  e  $y_0 \in Y$  tales que  $|x_0 - y_0| \leq |x - y|$  para cualesquiera  $x \in X$  e  $y \in Y$ .

5. Un conjunto compacto cuyos puntos son todos aislados es finito. Dé ejemplos de un conjunto cerrado y acotado  $X$  y de un conjunto acotado que no sea cerrado  $Y$ , cuyos puntos sean todos aislados.
6. Pruebe que si  $X$  es compacto los siguientes conjuntos también son compactos:
  - a)  $S = \{x + y : x, y \in X\}$
  - b)  $D = \{x - y : x, y \in X\}$
  - c)  $P = \{x \cdot y : x, y \in X\}$
  - d)  $C = \{x/y : x, y \in X\}$ , si  $0 \notin X$ .

## Sección 5: El conjunto de Cantor

1. Determine qué números  $1/n$ ,  $2 \leq n \leq 10$ , pertenecen al conjunto de Cantor.
2. Dado cualquier  $a \in [0, 1]$  pruebe que existen  $x < y$  pertenecientes al conjunto de Cantor tales que  $y - x = a$ .
3. Pruebe que la suma de la serie cuyos términos son las longitudes de los intervalos retirados al formar el conjunto de Cantor es igual a 1.
4. Pruebe que los extremos de los intervalos retirados forman un subconjunto numerable denso en el conjunto de Cantor.





# 6

## Límites de funciones

El concepto de límite, que estudiamos en el Capítulo 3 en el caso particular de sucesiones, se extenderá ahora al caso más general en el que se tiene una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en un subconjunto cualquiera de  $\mathbb{R}$ .

### 1. Definición y primeras propiedades

Sean  $X \subset \mathbb{R}$  un conjunto de números reales,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función cuyo dominio es  $X$  y  $a \in X'$  un punto de acumulación del conjunto  $X$ . Se dice que el número real  $L$  es el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$ , y se escribe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , cuando, para cualquier  $\varepsilon > 0$ , se puede obtener  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  siempre que  $x \in X$  y  $0 < |x - a| < \delta$ .

Con símbolos matemáticos se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L. \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in X; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Informalmente:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  quiere decir que se puede tomar  $f(x)$  tan próximo a  $L$  cuanto se quiera siempre que se tome  $x \in X$  suficientemente próximo, pero diferente, a  $a$ .

La restricción  $0 < |x - a|$  significa  $x \neq a$ . Así, en el límite  $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  no está permitido que la variable  $x$  tome el valor  $a$ . Por lo tanto, el valor  $f(a)$  no tiene ninguna importancia cuando

se quiere determinar  $L$ : lo que importa es el comportamiento de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a  $a$ , siempre con  $x \neq a$ .

En la definición de límite es esencial que  $a$  sea un punto de acumulación del conjunto  $X$ , pero es irrelevante si  $a$  pertenece o no a  $X$ , esto es, que  $f$  esté definida o no en el punto  $a$ . Por ejemplo, en uno de los límites más importantes, a saber, la derivada, se estudia  $\lim_{x \rightarrow a} q(x)$ , donde la función  $q(x) = (f(x) - f(a))/(x - a)$  no está definida en el punto  $x = a$ .

En las condiciones  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in X'$ , negar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  es equivalente a decir que existe un número  $\varepsilon > 0$  con la siguiente propiedad: sea cual fuere  $\delta > 0$ , siempre se puede encontrar  $x_\delta \in X$  tal que  $0 < |x_\delta - a| < \delta$  y  $|f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon$ .

**Teorema 1.** Sean  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in X'$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ . Si  $L < M$  entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) < g(x)$  para todo  $x \in X$  con  $0 < |x - a| < \delta$ .

**Demostración:** Sea  $K = (L + M)/2$ . Si tomamos  $\varepsilon = K - L = M - K$  tenemos  $\varepsilon > 0$  y  $K = L + \varepsilon = M - \varepsilon$ . Por la definición de límite, existen  $\delta_1 > 0$  y  $\delta_2 > 0$  tales que  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < K$  y  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow K < f(x) < M + \varepsilon$ . Por tanto, escribiendo  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  se tiene:  $x \in X'$ ,  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < K < g(x)$ . Lo que prueba el Teorema.  $\square$

**Observación:** En el Teorema 1 no se puede substituir la hipótesis  $L < M$  por  $L \leq M$ .

**Observación:** Para el Teorema 1 y sus corolarios, así como para el Teorema 2 abajo, valen versiones análogas con  $>$  en lugar de  $<$ . Usaremos tales versiones sin mayores comentarios.

**Corolario 1.** Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L < M$  entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) < M$  para todo  $x \in X$  con  $0 < |x - a| < \delta$ .

**Corolario 2.** Sean  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ . Si  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in X - \{a\}$  entonces  $L \leq M$ .

En efecto, si se tuviese  $M < L$  entonces tomaríamos un número real  $K$  tal que  $M < K < L$ . En tal caso, existiría  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow g(x) < K < f(x)$ , lo que es absurdo.  $\square$

**Teorema 2. (Teorema del Sandwich)** Sean  $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in X'$ , y  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ . Si  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in X - \{a\}$  entonces  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ .

**Demostración:** Dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , existen  $\delta_1 > 0$  y  $\delta_2 > 0$  tales que  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$  y  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$ . Sea  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Entonces  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$ . Luego  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ .  $\square$

**Observación:** La noción de límite es *local*, esto es, dadas funciones  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in X'$ , si existe un entorno  $V$  del punto  $a$  tal que  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \neq a$  en  $V \cap X$  entonces existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  si, y sólo si, existe  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ . Además, si existen, estos límites son iguales. Así, por ejemplo, en el Teorema 2, no es necesario suponer que  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in X - \{a\}$ . Es suficiente que exista un entorno  $V$  del punto  $a$  tal que estas desigualdades valgan para todo  $x \neq a$  perteneciente a  $V \cap X$ . Una observación análoga vale para el Teorema 1 y su Corolario 2.

**Teorema 3.** Sean  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in X'$ . Para que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  es necesario y suficiente que, para toda sucesión de puntos  $x_n \in X - \{a\}$  con  $\lim x_n = a$ , se tenga  $\lim f(x_n) = L$ .

**Demostración:** En primer lugar supongamos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y que se tiene una sucesión de puntos  $x_n \in X - \{a\}$  con  $\lim x_n = a$ . Dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$  y  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ . Existe también  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta$  (ya que  $x_n \neq a$  para todo  $n$ ). Por consiguiente,  $n > n_0 \Rightarrow |f(x_n) - L| < \varepsilon$ , luego  $\lim f(x_n) = L$ . Recíprocamente, supongamos que  $x_n \in X - \{a\}$  y  $\lim x_n = a$  impliquen  $\lim f(x_n) = L$  y probemos que en tal caso  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ . En efecto, negar esta igualdad es equivalente a afirmar que existe un número  $\varepsilon > 0$  con la siguiente propiedad: para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  podemos encontrar

$x_n \in X$  tal que  $0 < |x_n - a| < 1/n$  y  $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$ . Entonces tenemos  $x_n \in X - \{a\}$ ,  $\lim x_n = a$  sin que  $\lim f(x_n) = L$ . Esta contradicción completa la demostración.  $\square$

**Corolario 1. (Unicidad del límite)** Sean  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in X'$ . Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$  entonces  $L = M$ .

En efecto, basta tomar una sucesión de puntos  $x_n \in X - \{a\}$  con  $\lim x_n = a$ , la que es siempre posible por el Teorema 6 del Capítulo 5. Tendremos entonces  $L = \lim f(x_n)$  y  $M = \lim f(x_n)$ . De la unicidad del límite de la sucesión  $(f(x_n))$  se tiene  $L = M$ .  $\square$

**Corolario 2. (Operaciones con límites)** Sean  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in X'$ , con  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ . Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] &= L \pm M \\ \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] &= L \cdot M \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{L}{M} \quad \text{si } M \neq 0.\end{aligned}$$

Además, si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  y  $g$  está acotada en un entorno de  $a$ , se tiene  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$ .

En efecto, dada cualquier sucesión de puntos  $x_n \in X - \{a\}$  tal que  $\lim x_n = a$ , por el Teorema 8 del Capítulo 3 se tiene  $\lim [f(x_n) \pm g(x_n)] = \lim f(x_n) \pm \lim g(x_n) = L \pm M$ ,  $\lim f(x_n) \cdot g(x_n) = \lim f(x_n) \cdot \lim g(x_n) = L \cdot M$  y también  $\lim [f(x_n)/g(x_n)] = \lim f(x_n)/\lim g(x_n) = L/M$ . Finalmente, si existen un entorno  $V$  de  $a$  y una constante  $c$  tal que  $|g(x)| \leq c$  para todo  $x \in V$  entonces, como  $x_n \in V$  para todo  $n$  suficientemente grande, la sucesión  $g(x_n)$  está acotada; luego, por el Teorema 7 del Capítulo 3, se tiene  $\lim f(x_n) \cdot g(x_n) = 0$ , pues  $\lim f(x_n) = 0$ . Por lo tanto, el Corolario 2 es consecuencia del Teorema.  $\square$

**Teorema 4.** Sean  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in X'$ . Si existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  entonces  $f$  está acotada en un entorno de  $a$ , esto es, existen  $\delta > 0$  y  $c > 0$  tales que  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq c$ .

**Demostración:** Sea  $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Tomando en la definición de límite  $\varepsilon = 1$ , se obtiene  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1 \Rightarrow |f(x)| = |f(x) - L + L| \leq |f(x) - L| + |L| < |L| + 1$ . Basta entonces tomar  $c = |L| + 1$ .  $\square$

El Teorema 4 generaliza el hecho de que toda sucesión convergente está acotada.

**Ejemplo 1.** Si  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  están dadas por  $f(x) = c$  y  $g(x) = x$  (función constante y función identidad), entonces es evidente que, para todo  $a \in \mathbb{R}$ , se tiene  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = a$ . Del Corolario 2 del Teorema 3 se sigue que, para todo polinomio  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ , se tiene  $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$ , sea cual fuere  $a \in \mathbb{R}$ . Análogamente, para toda función racional  $f(x) = p(x)/q(x)$ , cociente de dos polinomios, se tiene  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = p(a)/q(a)$  siempre que se tenga  $q(a) \neq 0$ . Cuando  $q(a) = 0$ , el polinomio es divisible por  $x - a$  y en tal caso escribimos  $q(x) = (x - a)^m q_1(x)$  y  $p(x) = (x - a)^k p_1(x)$ , donde  $m \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $q_1(a) \neq 0$  y  $p_1(a) \neq 0$ . Si  $m = k$  entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = p_1(a)/q_1(a)$ . Si  $k > m$ , se tiene  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  pues  $f(x) = (x - a)^{k-m} [p_1(x)/q_1(x)]$  para todo  $x \neq a$ . No obstante, si  $k < m$ , entonces  $f(x) = p_1(x)/[(x - a)^{m-k} q_1(x)]$  para todo  $x \neq a$ . En este caso, el denominador de  $f(x)$  tiene límite cero y el numerador no. Esto implica que no puede existir  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . En efecto, si  $f(x) = \varphi(x)/\psi(x)$ , donde  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$  y existe  $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , entonces existe  $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow a} [\psi(x) \cdot f(x)] = L \cdot 0 = 0$ . Por tanto se trata de una regla general: si  $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 0$ , entonces sólo puede existir  $\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x)/\psi(x)]$  en el caso que también se tenga  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$  (aunque esta condición de por sí no es suficiente para garantizar la existencia de  $\lim_{x \rightarrow a} [\varphi/\psi]$ .)

**Ejemplo 2.** Sea  $X = \mathbb{R} - \{0\}$ . Entonces  $0 \in X'$ . La función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante  $f(x) = \sin(1/x)$  no posee límite cuando  $x \rightarrow 0$ . En efecto, la sucesión de puntos  $x_n = 2/(2n - 1)\pi$  es tal que  $\lim x_n = 0$ , pero  $f(x_n) = \pm 1$  según sea  $n$  impar o par, luego no existe  $\lim f(x_n)$ . Por otra parte, si  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  se define como  $g(x) = x \sin(1/x)$ , se tiene  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ , pues  $|\sin(1/x)| \leq 1$  para

todo  $x \in X$ , y  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ . Los gráficos de estas dos funciones están en la Fig.2 abajo.

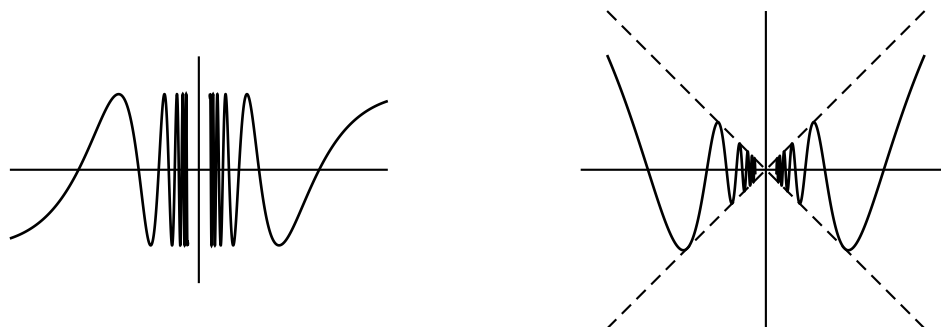


Fig. 2

**Ejemplo 3.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $f(x) = 0$  si  $x$  es racional y  $f(x) = 1$  si  $x$  es irracional. Dado cualquier  $a \in \mathbb{R}$ , podemos obtener una sucesión de números racionales  $x_n \neq a$  y otra de números irracionales  $y_n \neq a$  con  $\lim x_n = \lim y_n = a$ . Entonces,  $\lim f(x_n) = 0$  y  $\lim f(y_n) = 1$ , luego no existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

**Observación:** Dos de los límites más importantes que aparecen en el Análisis Matemático son  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x/x) = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$ . Para calcularlos es necesario, sin embargo, realizar un estudio riguroso de las funciones trigonométricas y de la función exponencial. Esto se hará en los Capítulos 9 y 10. Continuaremos, no obstante, usando estas funciones, así como sus inversas (como el logaritmo), en ejemplos, inclusive antes de estos capítulos, debido a que estos ejemplos ayudan a fijar ideas sin interferir en el encadenamiento lógico de la materia presentada. Informamos al lector interesado que una presentación rigurosa de carácter elemental sobre logaritmos y la función exponencial puede encontrarse en el librito “Logaritmos”, citado en la bibliografía.

## 2. Límites laterales

Sea  $X \subset \mathbb{R}$ . Se dice que el número real  $a$  es un *punto de acumulación* por la derecha de  $X$ , y se escribe  $a \in X'_+$ , cuando todo entorno de  $a$  contiene algún punto de  $x \in X$  tal que  $x > a$ . Equivalentemente: para todo  $\varepsilon > 0$  se tiene  $X \cap (a, a + \varepsilon) \neq \emptyset$ . Para

que  $a \in X'_+$  es necesario y suficiente que  $a$  se límite de una sucesión de puntos  $x_n > a$ , pertenecientes a  $X$ . Finalmente,  $a$  es un punto de acumulación por la derecha del conjunto  $X$  si, y sólo si, es un punto de acumulación ordinario del conjunto  $Y = X \cap (a, +\infty)$ .

Análogamente se define *punto de acumulación por la izquierda*. Por definición,  $a \in X'_-$  significa que, para todo  $\varepsilon > 0$ , se tiene  $X \cap (a - \varepsilon, a) \neq \emptyset$ , o sea,  $a \in Z'$ , donde  $Z = (-\infty, a) \cap X$ . Para que esto suceda, es necesario y suficiente que  $a = \lim x_n$ , donde  $(x_n)$  es una sucesión cuyos términos  $x_n < a$  pertenecen a  $X$ . Cuando  $a \in X'_+ \cap X'_-$  se dice que  $a$  es un *punto de acumulación bilateral* de  $X$ .

**Ejemplo 4.** Sea  $X = \{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$ ; entonces  $0 \in X'_+$  pero  $0 \notin X'_-$ . Sea  $I$  un intervalo. Si  $c \in \text{int } I$  entonces  $c \in I'_+ \cap I'_-$ ; sin embargo, si  $c$  es uno de los extremos de  $I$  entonces solamente se tiene  $c \in I'_+$  si  $c$  es el extremo inferior y  $c \in I'_-$  si  $c$  es el extremo superior de  $I$ .

**Ejemplo 5.** Sea  $K$  el conjunto de Cantor. Sabemos que todo punto  $a \in K$  es punto de acumulación. Si  $a$  es extremo de un intervalo retirado en alguna de las etapas de la construcción de  $K$  entonces sólo una de las posibilidades  $a \in K'_+$  ó  $a \in K'_-$  es válida. Sin embargo, si  $a \in K$  no es extremo de ningún intervalo retirado, entonces  $a \in K'_+ \cap K'_-$  como se deduce de los argumentos usados en el Capítulo 5, sección 5.

Sean  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in X'_+$ . Se dice que el número real  $L$  es el *límite por la derecha* de  $f(x)$  cuando  $x$  tiene a  $a$ , y se escribe  $L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  cuando para todo  $\varepsilon > 0$ , es posible obtener  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  siempre que  $x \in X$  y  $0 < x - a < \delta$ . Con símbolos matemáticos:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L. \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in X \cap (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Análogamente se define el *límite por la izquierda*  $L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ , en el caso en que  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in X'_-$ : esto significa que, para cualquier  $\varepsilon > 0$ , se puede escoger  $\delta > 0$  tal que  $x \in X \cap (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ .

Las demostraciones de las propiedades generales de los límites, sección 1, se adaptan fácilmente a los límites laterales. Basta observar que el límite por la derecha  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  se reduce al límite ordinario  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , donde  $g$  es la restricción de la función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  al conjunto  $X \cap (a, +\infty)$ . Análogamente para el límite por la izquierda.

Por ejemplo, el Teorema 3 en el caso del límite por la derecha se expresa así:

“Para que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$  es necesario y suficiente que para toda sucesión de puntos  $x_n \in X$  con  $x_n > a$  y  $\lim x_n = a$ , se tenga  $\lim f(x_n) = L$ .”

Como puede verse fácilmente, dado  $a \in X'_+ \cap X'_-$ , existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  si, y sólo si, existen y son iguales los límites laterales  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ .

**Ejemplo 6.** Las funciones  $f, g, h : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas como  $f(x) = \sin(1/x)$ ,  $g(x) = x/|x|$  y  $h(x) = 1/x$  no poseen límites cuando  $x \rightarrow 0$ . Respecto a los límites laterales, tenemos  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1$  porque  $g(x) = 1$  para  $x > 0$  y  $g(x) = -1$  si  $x < 0$ . Las funciones  $f$  y  $h$  no poseen límites laterales cuando  $x \rightarrow 0$ , ni por la izquierda ni por la derecha. Por otra parte,  $\varphi : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $\varphi(x) = e^{-1/x}$ , posee límite por la derecha,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 0$ , pero no existe  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x)$  pues  $\varphi(x)$  no está acotada para valores negativos de  $x$  próximos a cero.

**Ejemplo 7.** Sea  $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función ‘parte entera de  $x$ ’. Para cada  $x \in \mathbb{R}$ , existe un único número entero  $n$  tal que  $n \leq x < n+1$ ; se escribe entonces  $I(x) = n$ . Si  $n \in \mathbb{Z}$  se tiene y  $\lim_{x \rightarrow n^-} I(x) = n-1$ . En efecto,  $n < x < n+1 \Rightarrow I(x) = n$ , mientras que  $n-1 < x < n \Rightarrow I(x) = n-1$ . Por otra parte, si  $a$  no es entero entonces  $\lim_{x \rightarrow a^+} I(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} I(x) = I(a)$  pues en este caso  $I(x)$  es constante en un entorno de  $a$ .

Se dice que una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es *monótona creciente* cuando para todo  $x, y \in X$ ,  $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ . Si  $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$  se dice que  $f$  es *monótona decreciente*. Si se cumple la implicación con la desigualdad estricta,  $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ , decimos que



$f$  es *estrictamente creciente*. Finalmente, si  $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$  decimos que  $f$  es una función *estrictamente decreciente*.

**Teorema 5.** Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función monótona y acotada. Para todo  $a \in X'_+$  y todo  $b \in X'_-$  existen  $L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  y  $L = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ . O sea: siempre existen los límites laterales de una función monótona y acotada.

**Demostración:** Para fijar ideas, supongamos que  $f$  es creciente. Sea  $L = \inf\{f(x) : x \in X, x > a\}$ . Afirmamos que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ . En efecto, dado cualquier  $\varepsilon > 0$ ,  $L + \varepsilon$  no es una cota inferior del conjunto acotado  $\{f(x) : x \in X, x > a\}$ . Luego existe  $\delta > 0$  tal que  $a + \delta \in X$  y  $L \leq f(a + \delta) < L + \varepsilon$ . Como  $f$  es creciente  $x \in X \cap (a, a + \delta) \Rightarrow L \leq f(x) < L + \varepsilon$ , lo que prueba la afirmación. De forma análoga se ve que  $M = \sup\{f(x) : x \in X, x < b\}$  es el límite por la izquierda, esto es,  $M = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ .  $\square$

**Observación:** Si en el Teorema 5 tenemos que  $a \in X$  entonces no es necesario suponer que  $f$  esté acotada. En efecto, supongamos, para fijar ideas, que  $f$  es monótona creciente y que  $a \in X'_+$ . Entonces  $f(a)$  es una cota inferior de  $\{f(x) : x \in X, x < a\}$  y el ínfimo de este conjunto es  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ . Análogamente, si  $a \in X'_-$  entonces  $f(a)$  es una cota superior del conjunto  $\{f(x) : x \in X, x < a\}$ , cuyo supremo es el límite por la izquierda  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .

### 3. Límites en el infinito, límites infinitos, expresiones indeterminadas

Sea  $X \subset \mathbb{R}$  un conjunto no acotado superiormente. Dada  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , se escribe

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

cuando el número real  $L$  cumple la siguiente condición:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0; x \in X, x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

O sea, dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $A > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  siempre que  $x > A$ .

De manera análoga se define  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ , cuando el dominio de  $f$  no está acotado inferiormente: para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $A > 0$  tal que  $x < -A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ .

En estos casos son válidos los resultados ya demostrados para el límite cuando  $x \rightarrow a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , con las adaptaciones obvias.

Los límites cuando  $x \rightarrow +\infty$  y  $x \rightarrow -\infty$  son, de cierta forma, límites laterales (el primero es un límite por la izquierda y el segundo por la derecha). Luego el resultado del Teorema 5 es válido: si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es monótona y acotada entonces existen  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (si el dominio  $X$  no está acotado superiormente) y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  (si el dominio  $X$  no está acotado inferiormente).

El límite de una sucesión es un caso particular de límite en el infinito: se trata de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , donde  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función definida en el conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales.

**Ejemplo 8.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1/x = 0$ . Por otra parte, no existen  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$  ni  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$ . Se tiene  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  pero no existe  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$ , en el sentido de la definición anterior. Como hicimos en el caso de las sucesiones, introduciremos “límites infinitos” para abarcar situaciones como ésta.

En primer lugar, sean  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in X'$  y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  cuando, para todo  $A > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < |x - a| < \delta$ ,  $x \in X \Rightarrow f(x) > A$ .

Por ejemplo,  $\lim_{x \rightarrow a} 1/(x - a)^2 = +\infty$ , pues dado  $A > 0$ , tomamos  $\delta = 1/\sqrt{A}$ . Entonces  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 0 < (x - a)^2 < 1/A \Rightarrow 1/(x - a)^2 > A$ .

Definiremos  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  de modo semejante. Esto significa que, para todo  $A > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -A$ . Por ejemplo,  $\lim_{x \rightarrow a} -1/(x - a)^2 = -\infty$ .

Evidentemente, las definiciones de  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ , etc no presentan mayores dificultades y se dejan a cargo del lector. También omitiremos las definiciones obvias de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ , etc. Por ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x-a)} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x-a)} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Insistimos en que  $+\infty$  y  $-\infty$  no son números reales; así pues, las afirmaciones  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  no expresan límites en el sentido estricto del término.

**Observación:** Se tiene para  $\lim(f+g)$ ,  $\lim(f \cdot)$  y  $\lim(f/g)$  resultados análogos a los del Capítulo 3 (cf. Teorema 9) sobre límites de sucesiones.

**Observación:** Admitiendo límites infinitos, existen siempre los límites laterales de una función monótona  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  en todos los puntos  $a \in X'$ , inclusive cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Se tiene  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ ,  $L \in \mathbb{R}$ , si, y sólo si, para algún  $\delta > 0$ ,  $f$  está acotada en el conjunto  $X \cap (a, a + \delta)$ . Si, por el contrario, para todo  $\delta > 0$ ,  $f$  no está acotada (por ejemplo superiormente) en  $X \cap (a, a + \delta)$  entonces  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ .

En añadidura a los comentarios hechos en la sección 4 del Capítulo 3, diremos algunas palabras sobre las expresiones indeterminadas  $0/0$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \times \infty$ ,  $\infty/\infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$  y  $1^\infty$ .

Veamos, por ejemplo,  $0/0$ . Como la división por cero no está definida, esta expresión no tiene sentido aritmético. Afirmar que  $0/0$  es un indeterminada tiene el siguiente significado preciso:

Sean  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in X'$ . Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  y que, escribiendo  $Y = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$ , aún se tiene  $a \in Y'$ . Entonces cuando  $x \in Y$ ,  $f(x)/g(x)$  está definido y tiene sentido preguntarse si existe o no el  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$ . No obstante,

en general nada puede afirmarse sobre dicho límite. Dependiendo de las funciones  $f$  y  $g$ , éste puede ser cualquier valor real o no existir. Por ejemplo, dada cualquier  $c \in \mathbb{R}$ , si tomamos  $f(x) = cx$  y  $g(x) = x$ , tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ , mientras que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x) = c$ . Por otra parte, si tomásemos  $f(x) = x \sin(1/x)$ , ( $x \neq 0$ ), y  $g(x) = x$ , tendríamos  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ , sin que exista  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x)$ .

Por el mismo motivo,  $\infty - \infty$  es una indeterminada. Esto quiere decir: podemos encontrar funciones  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ , tales que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ , mientras que  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$ , dependiendo de nuestra elección de  $f$  y  $g$ , puede tomar cualquier valor  $c \in \mathbb{R}$  o no existir. Por ejemplo, si  $f, g : \mathbb{R} - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  son dadas por:

$$f(x) = c + \frac{1}{(x-a)^2} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{(x-a)^2},$$

entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = c$ . Análogamente, si

$$f(x) = \sin \frac{1}{x-a} + \frac{1}{(x-a)^2} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{(x-a)^2},$$

entonces no existe  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$ .

Para terminar, un nuevo ejemplo: Dado cualquier número real  $c \in \mathbb{R}$  podemos encontrar funciones  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $a \in X'$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  y  $f(x) > 0$  para todo  $x \in X$ , tales que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = c$ . Basta, por ejemplo, definir  $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  como  $f(x) = x$ ,  $g(x) = \log c / \log x$ . En este caso, se tiene  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)^{g(x)} = c$ . (Tome los logaritmos de ambos miembros.) Todavía en este caso, es posible escoger  $f$  y  $g$  de forma que el límite de  $f(x)^{g(x)}$  no exista. Basta tomar, por ejemplo,  $f(x) = x$  y  $g(x) = \log(1 + |\sin 1/x|) \cdot (\log x)^{-1}$ . Entonces  $f(x)^{g(x)} = 1 + |\sin 1/x|$  y por tanto no existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)^{g(x)}$ .

Estos ejemplos deben ser suficientes para entender el significado de “expresiones indeterminada”. El instrumento más eficaz para

el cálculo del límite de una expresión indeterminada es la llamada “Regla de L’Hôpital”, objeto de un sinfín de ejercicios en los cursos de Cálculo.

#### 4. Ejercicios

##### Sección 1: Definición y primeras propiedades

1. Sean  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in X'$  e  $Y = f(X - \{a\})$ . Pruebe que si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , entonces  $L \in \overline{Y}$ .
2. Sean  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in X'$ . Pruebe que para que exista  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  es suficiente que, para toda sucesión de puntos  $x_n \in X - \{a\}$  tal que  $\lim x_n = a$ , la sucesión  $(f(x_n))$  sea convergente.
3. Sean  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(X) \subset Y$ ,  $a \in X'$  y  $b \in Y' \cap Y$ . Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  y  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$ , pruebe que  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$ , siempre que  $c = g(b)$  o que  $x \neq a$  implique  $f(x) \neq b$ .
4. Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas mediante  $f(x) = 0$  si  $x$  es irracional y  $f(x) = x$  si  $x \in \mathbb{Q}$ ;  $g(0) = 1$  y  $g(x) = 0$  si  $x \neq 0$ . Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ , y que sin embargo no existe  $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x))$ .
5. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante  $f(0) = 0$  y  $f(x) = \sin(1/x)$  si  $x \neq 0$ . Demuestre que para todo  $c \in [-1, 1]$  existe una sucesión de puntos  $x_n \neq 0$  tales que  $\lim x_n = 0$  y  $\lim f(x_n) = c$ .

##### Sección 2: Límites laterales

1. Pruebe que  $a \in X'_+$  (respectivamente,  $a \in X'_-$ ) si, y sólo si,  $a = \lim x_n$  es el límite de una sucesión estrictamente decreciente (respectivamente, estrictamente creciente) de puntos pertenecientes al conjunto  $X$ .

2. Pruebe que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$  (respectivamente,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ ) si, y sólo si, para toda sucesión estrictamente decreciente (respectivamente, estrictamente creciente) de puntos  $x_n \in X$  tal que  $\lim x_n = a$  se tiene  $\lim f(x_n) = L$ .
3. Sea  $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante  $f(x) = 1/(1 + a^{1/x})$ , donde  $a > 1$ . Pruebe que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ .
4. Sean  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  monótona y  $a \in X'_+$ . Si existe una sucesión de puntos  $x_n \in X$  tal que  $x_n > qa$ ,  $\lim x_n = a$  y  $\lim f(x_n) = L$ , pruebe que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ .
5. Dada  $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $f(x) = \sin(1/x)/(1 + 2^{1/x})$ , determine el conjunto de los números  $L$  tales que  $L = \lim f(x_n)$ , con  $\lim x_n = 0$ ,  $x_n \neq 0$ .

### Sección 3: Límites en el infinito, límites infinitos, etc.

1. Sea  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un polinomio no constante, esto es, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ , con  $a_n \neq 0$  y  $n \geq 1$ . Pruebe que, si  $n$  es par, entonces  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty$  si  $a_n > 0$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$  si  $a_n < 0$ . Si  $n$  es impar entonces  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$  cuando  $a_n > 0$  y los signos de los límites se invierten cuando  $a_n < 0$ .
2. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x \sen x$ . Pruebe que, para todo  $c \in \mathbb{R}$ , existe una sucesión  $x_n \in \mathbb{R}$  con  $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ .
3. Sea  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Para cada  $t \geq a$  denotaremos mediante  $M_t$  y  $m_t$  el sup y el ínf de  $f$  en el intervalo  $I = [t, +\infty)$ , respectivamente. Mediante  $w_t = M_t - m_t$  denotamos la *oscilación* de  $f$  en  $I$ . Pruebe que existen  $\lim_{t \rightarrow +\infty} M_t$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} m_t$ . Pruebe que existe  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(x)$  si, y sólo si,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} w_t = 0$ .

# Funciones continuas

La noción de función continua es uno de los puntos centrales de la Topología. Será estudiada en este capítulo en sus aspectos más básicos, como introducción a un enfoque más amplio y como instrumento que será usado en capítulos posteriores.

## 1. Definición y propiedades básicas

Una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en el conjunto  $X \subset \mathbb{R}$ , se dice que es *continua en el punto*  $a \in X$  cuando, para todo  $\varepsilon > 0$ , se puede obtener  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$  y  $|x - a| < \delta$  impliquen  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ . Con símbolos matemáticos,  $f$  continua en el punto  $a$  significa:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 ; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

Se llama *discontinua en el punto*  $a \in X$  a una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  que no es continua en dicho punto. Esto quiere decir que existe  $\varepsilon > 0$  con la siguiente propiedad: para todo  $\delta > 0$  se puede encontrar  $x_\delta \in X$  tal que  $|x_\delta - a| < \delta$  y  $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon$ . En particular, si tomamos  $\delta$  igual a  $1, 1/2, 1/3, \dots$  y así sucesivamente y escribimos  $x_n$  en vez de  $x_{1/n}$ , vemos que  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es discontinua en el punto  $a \in X$  si, y sólo si, existe  $\varepsilon > 0$  con la siguiente propiedad: para cada  $n \in \mathbb{N}$  se puede encontrar  $x_n \in X$  con  $|x_n - a| < 1/n$  y  $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ . Evidentemente,  $|x_n - a| < 1/n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  implica  $\lim x_n = a$ .

Se dice que  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una *función continua* cuando  $f$  es continua en todos los puntos  $a \in X$ .

La continuidad es un fenómeno *local*, esto es, la función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es continua si, y sólo si, existe un entorno  $V$  de  $a$  tal que la restricción de  $f$  a  $V \cap X$  es continua en el punto  $a$ .

Si  $a$  es un punto aislado del conjunto  $X$ , esto es, si existe  $\delta > 0$  tal que  $X \cap (a - \delta, a + \delta) = \{a\}$ , entonces toda función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en el punto  $a$ . En particular, si  $X$  es un conjunto discreto, como por ejemplo  $\mathbb{Z}$ , entonces toda función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.

Si  $a \in X \cap X'$  esto es, si  $a \in X$  es un punto de acumulación de  $X$ , entonces  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en el punto  $a$  si, y sólo si,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Al contrario de lo que sucede con el límite, en la definición de función continua el punto  $a$  pertenece necesariamente al conjunto  $X$  y se puede tomar  $x = a$ , pues en tal caso, la condición  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  se convierte en  $0 < \varepsilon$ , lo que es obvio.

**Teorema 1.** Sean  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  continuas en el punto  $a \in X$ , con  $f(a) < g(a)$ . Entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) < g(x)$  para todo  $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$ .

**Demostración:** Tomemos  $c = [g(a) + f(a)]/2$  y  $\varepsilon = g(a) - c = c - f(a)$ . Entonces  $\varepsilon > 0$  y  $f(a) + \varepsilon = g(a) - \varepsilon = c$ . Por la definición de continuidad, existen  $\delta_1 > 0$  y  $\delta_2 > 0$  tales que  $x \in X$ ,  $|x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < c$  y  $x \in X$ ,  $|x - a| < \delta_2 \Rightarrow c < g(x) < g(a) + \varepsilon$ . Sea  $\delta$  el menor de los números  $\delta_1$  y  $\delta_2$ . Entonces  $x \in X$ ,  $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < c < g(x)$ , lo que prueba el teorema.  $\square$

**Corolario 1.** Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua en el punto  $a \in X$ . Si  $f(a) \neq 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$ ,  $f(x)$  tiene el mismo signo que  $f(a)$ .

En efecto, para fijar ideas supongamos que  $f(a) < 0$ . Entonces basta tomar  $g$  idénticamente nula en el Teorema 1.  $\square$

**Corolario 2.** Dadas  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  continuas, sean  $Y = \{x \in X : f(x) < g(x)\}$  y  $Z = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ . Existen  $A \subset \mathbb{R}$  abierto



y  $F \subset \mathbb{R}$  cerrado tales que  $Y = X \cap A$  y  $Z = X \cap F$ . En particular, si  $X$  es abierto también  $Y$  es abierto, y si  $X$  es cerrado también  $Z$  es cerrado.

En efecto, por el Teorema 1, para cada  $y \in Y$  existe un intervalo abierto  $I_y$ , centrado en  $y$ , tal que  $\{y\} \subset X \cap I_y \cap Y$ . De donde  $\bigcup_{y \in Y} \{y\} \subset \bigcup_{y \in Y} (X \cap I_y) \subset Y$ , o sea:  $Y \subset X \cap (\bigcup_{y \in Y} I_y) \subset Y$ . Escribiendo  $A = \bigcup_{y \in Y} I_y$ , el Teorema 1, Capítulo 5, nos asegura que  $A$  es un conjunto abierto. Además, de  $Y \subset X \cap A \subset Y$  concluimos que  $Y = X \cap A$ . Respecto al conjunto  $Z$ , tenemos que  $Z = X - \{x \in X : g(x) < f(x)\}$ . Por lo que acabamos de ver, existe  $B \subset \mathbb{R}$  abierto tal que  $Z = X - (X \cap B) = X \cap (\mathbb{R} - B)$ . Por el Teorema 3 del Capítulo 5,  $F = \mathbb{R} - B$  es cerrado, y por tanto  $Z = X \cap F$  como pretendíamos demostrar.  $\square$

**Teorema 2.** Para que la función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  sea continua en el punto  $a$  es necesario y suficiente que, para toda sucesión de puntos  $x_n \in X$  con  $\lim x_n = a$ , se tenga  $\lim f(x_n) = f(a)$ .

La demostración se deduce usando exactamente los mismos argumentos que en el Teorema 3, Capítulo 6, y por tanto se omite.

**Corolario 1.** Si  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas en el punto  $a \in X$  entonces también son continuas en dicho punto las funciones  $f + g, f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}$ , así como la función  $f/g$ , en el caso en que  $g(a) \neq 0$ .

El dominio de la función  $f/g$ , bien entendido, es el subconjunto de  $X$  formado por los puntos  $x$  tales que  $g(x) \neq 0$ . Así, existe  $\delta > 0$  tal que  $X \cap (a - \delta, a + \delta)$  está contenido en dicho dominio.

**Ejemplo 1.** Todo polinomio  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua. Toda función racional  $p(x)/q(x)$  (cociente de dos polinomios) es continua en su dominio, que es el conjunto de los puntos  $x$  tales que  $q(x) \neq 0$ . La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante  $f(x) = \text{sen}(1/x)$  si  $x \neq 0$  y  $f(0) = 0$ , es discontinua en el punto 0 y continua en los demás puntos de la recta. La función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada como  $g(x) = x \text{sen}(1/x)$  si  $x \neq 0$  y  $g(0) = 0$ , es continua en toda la recta. La función  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\varphi(x) = 0$  para todo  $x$  racional y  $\varphi(x) = 1$  para todo  $x$  irracional, es discontinua en todos los puntos de la recta; sin embargo, sus restricciones a  $\mathbb{Q}$  y a

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  son continuas porque son constantes. Si definimos  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  escribiendo  $\psi(x) = x \cdot \varphi(x)$  vemos que  $\psi$  es continua exclusivamente en el punto  $x = 0$ .

**Teorema 3.** Sean  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua en el punto  $a \in X$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  continua en el punto  $b = f(a) \in Y$  y  $f(X) \subset Y$ , de forma que la función compuesta  $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$  está bien definida. Entonces  $g \circ f$  es continua en el punto  $a$ . (La composición de dos funciones continuas es continua.)

**Demostración:** Dado  $\varepsilon > 0$  existe, por la continuidad de  $g$  en el punto  $b$ , un número  $\eta > 0$  tal que  $y \in Y$ ;  $|y - b| < \eta$  implican  $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$ . A su vez, la continuidad de  $f$  en el punto  $a$  nos asegura que existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$ ,  $|x - a| < \delta$  implican  $|f(x) - b| < \eta$ . Por consiguiente,  $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow |g(f(x)) - g(b)| = |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \varepsilon$ , lo que prueba el teorema.  $\square$

## 2. Funciones continuas en un intervalo

**Teorema 4. (Teorema del valor intermedio)** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Si  $f(a) < d < f(b)$  entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = d$ .

**Demostración:** Consideremos los conjuntos  $A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq d\}$  y  $B = \{x \in [a, b] : f(x) \geq d\}$ . Por el corolario 2 del Teorema 1,  $A$  y  $B$  son cerrados, luego  $\overline{A} \cap B = A \cap B = A \cap \overline{B}$ . Además, es claro que  $[a, b] = A \cup B$ . Si tuviéramos  $A \cap B \neq \emptyset$  entonces el teorema estaría demostrada ya que  $f(c) = d$  para cualquier  $c \in A \cap B$ . Si, por el contrario, tuviésemos  $A \cap B = \emptyset$  entonces  $[a, b] = A \cup B$  sería una escisión no trivial (pues  $a \in A$  y  $b \in B$ ), lo que está prohibido por el Teorema 5 del Capítulo 5. Luego necesariamente  $A \cap B \neq \emptyset$ ; así pues el teorema está probado.  $\square$

**Corolario 1.** Si  $I \subset \mathbb{R}$  es un intervalo y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces  $f(I)$  es un intervalo.

El resultado es obvio si  $f$  es constante. En caso contrario, sea  $\alpha = \inf(f(I)) = \inf\{f(x) : x \in I\}$  y  $\beta = \sup(f(I)) = \sup\{f(x) : x \in I\}$ . Si  $f(I)$  no está acotado tomaremos  $\alpha = -\infty$  y  $\beta = +\infty$ . Para probar que  $f(I)$  es un intervalo (abierto, cerrado o semiabierto) cuyos extremos son  $\alpha$  y  $\beta$  tomemos  $d$  tal que  $\alpha < d < \beta$ . Por

las definiciones de ínf y sup, existen  $a, b \in I$  tales que  $\alpha \leq f(a) < d < f(b) \leq \beta$ . Por el Teorema 4 existe  $C \in [a, b]$ , por tanto  $c \in I$ , tal que  $f(c) = d$ . Así  $d \in f(I)$ . Esto prueba que  $(\alpha, \beta) \subset f(I)$ . Como  $\alpha$  es el ínf y  $\beta$  es el sup de  $f(I)$ , ningún número real menor que  $\alpha$  o mayor que  $\beta$  puede pertenecer a  $f(I)$ . Por tanto  $f(I)$  es un intervalo cuyos extremos son  $\alpha$  y  $\beta$ .  $\square$

**Observación:** Si  $I = [a, b]$  es un intervalo compacto entonces  $f(I)$  también es un intervalo compacto; ver el Teorema 7 más adelante. Pero si  $I$  no es cerrado o no está acotado,  $f(I)$  puede no ser del mismo tipo que  $I$ . Por ejemplo, sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sin x$ . Tomando sucesivamente los intervalos abiertos  $I_1 = (0, 7)$ ,  $I_2 = (0, \pi/2)$  e  $I_3 = (0, \pi)$ , tenemos  $f(I_1) = [-1, 1]$ ,  $f(I_2) = (0, 1)$  y  $f(I_3) = (0, 1]$ .

**Ejemplo 2.** Como aplicación demostraremos que todo polinomio  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de grado impar tiene alguna raíz real. Sea  $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$  con  $n$  impar y  $a_n \neq 0$ . Para fijar ideas supongamos que  $a_n > 0$ . Sacando  $a_nx^n$  como factor común, podemos escribir  $p(x) = a_nx^n \cdot r(x)$ , donde

$$r(x) = \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n} + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + 1.$$

Es claro que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} r(x) = 1$ . Luego  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_nx^n = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_nx^n = -\infty$  (pues  $n$  es impar). Por tanto, el intervalo  $p(\mathbb{R})$  no está acotado, ni superior ni inferiormente, esto es,  $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Esto significa que  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es sobreyectiva. En particular existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $p(c) = 0$ . Evidentemente, un polinomio de grado par puede no tener raíces reales, como por ejemplo,  $p(x) = x^2 + 1$ .

**Ejemplo 3.** (*Existencia de  $\sqrt[n]{a}$* ) Dado  $n \in \mathbb{N}$ , la función  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ , definida como  $f(x) = x^n$ , es creciente (por tanto inyectiva), con  $f(0) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Por tanto, su imagen es un subintervalo no acotado de  $[0, +\infty)$  que contiene a su extremo inferior, igual a cero. Luego  $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$ , esto es,  $f$  es una biyección de  $[0, +\infty)$  en sí mismo. Esto significa que, para todo número real  $a \geq 0$ , existe un único número real  $b \geq 0$  tal que

$a = b^n$ , o sea,  $b = \sqrt[n]{a}$ . En el caso particular en que  $n$  es impar, la función  $x \rightarrow x^n$  es una biyección de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ ; así, en este caso, todo número real  $a$  tiene una única raíz  $n$ -ésima que es positiva cuando  $a > 0$  y negativa cuando  $a < 0$ .

**Ejemplo 4.** El Teorema 4 es uno de los denominados “teoremas de existencia”. En ciertas condiciones nos asegura la existencia de una raíz para la ecuación  $f(x) = d$ . Una de sus aplicaciones más sencillas es la que sigue. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $f(a) \leq a$  y  $b \leq f(b)$ . En estas condiciones existe al menos un número  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = c$ . En efecto, la función  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante  $\varphi(x) = x - f(x)$ , es continua con  $\varphi(a) \geq 0$  y  $\varphi(b) \leq 0$ . Por el Teorema 4, existe  $c \in [a, b]$  tal que  $\varphi(c) = 0$ , esto es,  $f(c) = c$ . Un punto  $x \in X$  tal que  $f(x) = x$  se denomina *punto fijo* de la función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . El resultado que acabamos de probar es una versión unidimensional del conocido “Teorema del punto fijo de Brouwer”.

Otra aplicación del Teorema 4 es la que se refiere a la continuidad de la función inversa. Sean  $X, Y \subset \mathbb{R}$  y  $f : X \rightarrow Y$  una biyección. Suponiendo que  $f$  es continua, ¿se puede concluir que su inversa  $f^{-1}$  también lo es? La respuesta es, en general, negativa, como lo demuestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.** Sean  $X = [-1, 0] \cup (1, 2]$  e  $Y = [0, 4]$ . La función  $f : X \rightarrow Y$  definida como  $f(x) = x^2$ , es una biyección de  $X$  en  $Y$ , que es obviamente continua (ver Fig. 3). Su inversa  $g : Y \rightarrow X$  está dada por  $g(y) = -\sqrt{y}$  si  $0 \leq y \leq 1$  y  $g(y) = \sqrt{y}$  si  $1 < y \leq 4$ . Luego  $g$  es discontinua en el punto  $y = 1$  (pues  $\lim_{y \rightarrow 1^-} g(y) = -1$  y  $\lim_{y \rightarrow 1^+} g(y) = 1$ .)

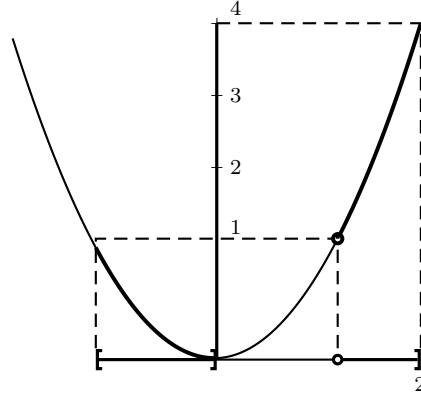


Fig. 3

Demostraremos ahora que si una biyección entre intervalos  $f : I \rightarrow J$  es continua, entonces su inversa también lo es. En la sección 3, más adelante, veremos que, si el dominio es compacto, la inversa de una biyección continua también es continua. (En el Ejemplo 5 el dominio de  $f$  no es ni un intervalo ni un conjunto compacto.)

**Teorema 5.** *Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo. Toda función continua e inyectiva  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es monótona y su inversa  $g : J \rightarrow I$ , definida en el intervalo  $J = f(I)$ , es continua.*

**Demostración:** Supongamos, inicialmente, que  $I = [a, b]$  sea un intervalo cerrado y acotado. Para fijar ideas, sea  $f(a) < f(b)$ . Demostraremos que  $f$  es estrictamente creciente. En caso contrario existirían puntos  $x < y$  en  $[a, b]$  con  $f(x) > f(y)$ . Hay dos posibilidades:  $f(a) < f(y)$  y  $f(a) > f(y)$ . En el primer caso, tenemos  $f(a) < f(y) < f(x)$ , luego, por el Teorema 4, existe  $c \in (a, x)$  con  $f(c) = f(y)$ , contradiciendo la inyectividad de  $f$ . En el segundo caso, se tiene  $f(y) < f(a) < f(b)$ , por tanto existe  $c \in (y, b)$  con  $f(c) = f(a)$ , obteniéndose otra contradicción, luego  $f$  es estrictamente creciente. Sea ahora  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua e inyectiva en un intervalo cualquiera  $I$ . Si  $f$  no fuese monótona existirían puntos  $u < v$  y  $x < y$  en  $I$  tales que  $f(u) < f(v)$  y  $f(x) > f(y)$ . Sean  $a$  el menor y  $b$  el mayor de los números  $u, v, x, y$ . Entonces, la restricción de  $f$  al intervalo  $[a, b]$ , sería continua e inyectiva, pero no monótona, contradiciendo lo que acabamos de probar. Finalmente, consideremos la inversa  $g : J \rightarrow I$  de la biyección continua

estrictamente creciente  $f : I \rightarrow J$ . Evidentemente,  $g$  es estrictamente creciente. Sea  $a \in I$  un punto cualquiera y  $b = f(a)$ . Para probar que  $g$  es continua en el punto  $b$  comenzaremos suponiendo que  $a$  es interior a  $I$ . Entonces, dado  $\varepsilon > 0$  podemos admitir que  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset I$ . Así,  $f(a - \varepsilon) = b - \alpha$  y  $f(a + \varepsilon) = b + \beta$ , donde  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$ . Sea  $\delta = \min\{\alpha, \beta\}$ . Como  $g$  es estrictamente creciente,  $y \in J$ ,  $b - \delta < y < b + \delta \Rightarrow b - \alpha < y < b + \beta \Rightarrow g(b - \alpha) < g(y) < g(b + \beta) \Rightarrow a - \varepsilon < g(y) < a + \varepsilon$ . Luego  $g$  es continua en el punto  $b$ . Si, por el contrario,  $a$  es un extremo de  $I$ , supongamos inferior, entonces  $b = f(a)$  es el extremo inferior de  $J$ . Dado cualquier  $\varepsilon > 0$  podemos suponer que  $a + \varepsilon \in I$  y tendremos que  $f(a + \varepsilon) = b + \delta$ ,  $\delta > 0$ . Entonces:

$$\begin{aligned} y \in J, b - \delta < y < b + \delta &\Rightarrow b \leq y < b + \delta \\ &\Rightarrow a \leq g(y) \leq g(b + \delta) \\ &\Rightarrow a \leq g(y) < a + \varepsilon \\ &\Rightarrow a - \varepsilon < g(y) < a + \varepsilon, \end{aligned}$$

luego  $g$ , también en este caso, es continua en el punto  $b$ . □

**Corolario 1.** *Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la función  $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ , definida mediante  $g(x) = \sqrt[n]{x}$  es continua.*

En efecto,  $g$  es la inversa de la biyección continua  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  definida como  $f(x) = x^n$ . □

En el caso particular en que  $n$  es impar,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^n$  es una biyección continua y su inversa  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , también denotada por  $g(x) = \sqrt[n]{x}$ , es continua en toda la recta.

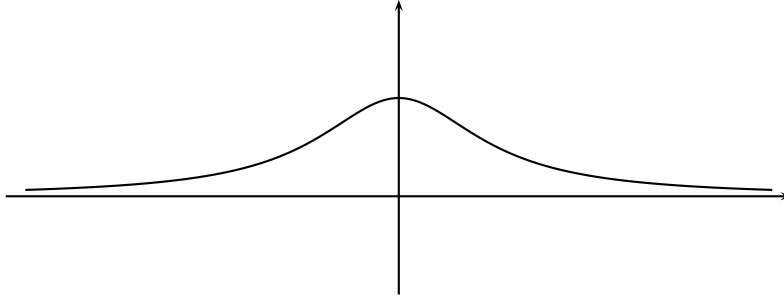
Sean  $X \subset \mathbb{R}$  e  $Y \subset \mathbb{R}$ . Un homeomorfismo entre  $X$  e  $Y$  es una biyección continua  $f : X \rightarrow Y$  cuya inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  también es continua. El Teorema 5 nos dice, por tanto, que si  $I$  es un intervalo entonces toda función continua e inyectiva  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es un homeomorfismo local entre  $I$  y el intervalo  $J = f(I)$ .

### 3. Funciones continuas en conjuntos compactos

Muchos problemas de las matemáticas, así como de sus aplicaciones, consisten en encontrar los puntos de un conjunto  $X$  en

los que una determinada función real  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  alcanza su valor máximo o su valor mínimo. Antes de intentar resolver un problema de este tipo es necesario saber si tales puntos existen. Para empezar, la función  $f$  puede no estar acotada superiormente (y entonces no posee valor máximo) o inferiormente (y entonces no posee valor mínimo). Sin embargo, inclusive en el caso de estar acotada,  $f$  puede no alcanzar un valor máximo en  $X$ , o el mínimo, o ninguno de los dos.

**Ejemplo 6.** Sean  $X = (0, 1)$  y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x$ . Entonces  $f(X) = (0, 1)$ , luego para todo  $x \in X$  existen  $x', x'' \in X$  tales que  $f(x') < f(x) < f(x'')$ . Esto significa que, para cualquier  $x \in X$ , el valor  $f(x)$  no es ni el mayor ni el menor que  $f$  alcanza en  $X$ . Un ejemplo: podemos considerar  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 1/(1+x^2)$ . Tenemos  $0 < g(x) \leq 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Como  $g(0) = 1$ , vemos que  $g(0)$  es el mayor máximo de  $g(x)$ , donde  $x \in \mathbb{R}$ . Sin embargo, no existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $g(x)$  sea el menor valor  $g$ . En efecto, si  $x > 0$  basta tomar  $x' > x$  para tener  $g(x') < g(x)$ . Y si  $x < 0$ , basta tomar  $x' < x$  y nuevamente se tiene  $g(x') < g(x)$ .



**Fig. 4** - Gráfico de la función  $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

El próximo teorema garantiza la existencia de valores máximos y mínimos de una función continua cuando su dominio es compacto.

**Teorema 6. (Weierstrass)** Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua en el conjunto compacto  $X \subset \mathbb{R}$ . Entonces existen  $x_0, x_1 \in X$  tales que  $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$  para todo  $x \in X$ .

Obtendremos el Teorema de Weierstrass como consecuencia del

**Teorema 7.** *La imagen  $f(X)$  de un conjunto compacto  $X \subset \mathbb{R}$  por una función continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es un conjunto compacto.*

**Demostración:** Por el Teorema 8 del Capítulo 5 tenemos que probar que toda sucesión de puntos  $y_n \in f(X)$  posee una subsucesión que converge a algún punto  $b \in f(X)$ . Ahora bien, para cada  $n \in \mathbb{N}$  tenemos  $y_n = f(x_n)$ , con  $x_n \in X$ . Como  $X$  es compacto, la sucesión  $(x_n)$  posee una subsucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$  que converge a un punto  $a \in X$ . Como  $f$  es continua en el punto  $a$ , de  $\lim_{n \in \mathbb{N}'} x_n = a$  concluimos que  $b = \lim_{n \rightarrow \mathbb{N}'} y_n = \lim_{n \in \mathbb{N}'} f(x_n) = f(a)$ , y así  $b = f(a)$  y  $b \in f(X)$ , como queríamos demostrar.  $\square$

**Demostración:** (del Teorema 6) Como vimos en la sección 4 del Capítulo 5, el conjunto compacto  $f(X)$  posee un menor elemento  $f(x_0)$  y un mayor elemento  $f(x_1)$ . Esto quiere decir que existen  $x_0, x_1 \in X$  tales que  $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$  para todo  $x \in X$ .  $\square$

**Corolario 1.** *Si  $X \subset \mathbb{R}$  es compacto entonces toda función continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  está acotada, esto es, existe  $c > 0$  tal que  $|f(x)| \leq c$  para todo  $x \in X$ .*

**Ejemplo 7.** La función  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante  $f(x) = 1/x$ , es continua pero no está acotada. Esto es posible ya que el dominio  $(0, 1]$  no es compacto.

**Teorema 8.** *Si  $X \subset \mathbb{R}$  es compacto entonces toda biyección continua  $f : X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$  tiene inversa continua  $g : Y \rightarrow X$ .*

**Demostración:** Tomaremos un punto cualquiera  $b = f(a) \in Y$  y demostraremos que  $g$  es continua en el punto  $b$ . Si no fuese así, existirían un número  $\varepsilon > 0$  y una sucesión de puntos  $y_n = f(x_n) \in Y$  tales que  $\lim y_n = b$  y  $|g(y_n) - g(b)| \geq \varepsilon$ , esto es,  $|x_n - a| \geq \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Considerando, si así fuese necesario, una subsucesión, podemos suponer que  $\lim x_n = a' \in X$ , pues  $X$  es compacto. Se tiene  $|a' - a| \geq \varepsilon$ . En particular,  $a' \neq a$ . Sin embargo, por la continuidad de  $f$ ,  $\lim y_n = \lim f(x_n) = f(a')$ . Como ya tenemos  $\lim y_n = b = f(a)$ , se deduce que  $f(a) = f(a')$ , contradiciendo la inyectividad de  $f$ .  $\square$

**Ejemplo 8.** El conjunto  $Y = \{0, 1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$  es compacto y la biyección  $f : \mathbb{N} \rightarrow Y$ , definida mediante  $f(1) = 0$ ,  $f(n) =$



$1/(n-1)$  si  $n > 1$ , es continua, pero su inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow \mathbb{N}$  es discontinua en el punto 0. Luego en el Teorema 8 la compacidad de  $X$  no puede ser substituida por la de  $Y$ .

#### 4. Continuidad uniforme

Sea  $f : X \rightarrow Y$  continua. Dado  $\varepsilon > 0$ , para cada  $x \in X$  se puede encontrar  $\delta > 0$  tal que  $y \in X$ ,  $|x-y| < \delta$  implican  $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ . El número positivo  $\delta$  depende no sólo del  $\varepsilon > 0$  dado sino también del punto  $x$  donde se examina la continuidad. Dado  $\varepsilon > 0$  no es siempre posible encontrar un  $\delta > 0$  que sirva para todos los puntos  $x \in X$  (inclusive cuando  $f$  es continua en todos estos puntos).

**Ejemplo 9.** Sea  $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante  $f(x) = \frac{x}{|x|}$ , luego  $f(x) = 1$  si  $x > 0$  y  $f(x) = -1$  para  $x < 0$ . Esta función es continua en  $\mathbb{R} - \{0\}$  pues es constante en un entorno de cada punto  $x \neq 0$ . No obstante, si tomamos  $\varepsilon < 2$ , para todo  $\delta > 0$  escogido, siempre existirán puntos  $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$  tales que  $|y - x| < \delta$  y  $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ . Basta tomar  $x = \delta/3$  e  $y = -\delta/3$ .

**Ejemplo 10.** La función  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante  $f(x) = 1/x$ , es continua. Sin embargo, dado  $\varepsilon > 0$ , con  $0 < \varepsilon < 1$ , sea cual fuere el  $\delta > 0$  escogido, tomamos un número natural  $n > 1/\delta$  y escribimos  $x = 1/n$  e  $y = 1/2n$ . Entonces  $0 < y < x < \delta$ , de donde  $|y - x| < \delta$ , pero  $|f(y) - f(x)| = 2n - n = n \geq 1 > \varepsilon$ .

Una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  se dice *uniformemente continua* en el conjunto  $X$  cuando, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, se puede obtener  $\delta > 0$  tal que  $x, y \in X$ ,  $|y - x| < \delta$  implican  $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ .

Una función uniformemente continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en todos los puntos del conjunto  $X$ . El recíproco es falso, como puede verse en los Ejemplos 9 y 10 de arriba.

La continuidad de una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  en el punto  $a \in X$  significa que  $f(x)$  está tan próximo a  $f(a)$  cuanto se desee, siempre que se tome  $x$  suficientemente próximo a  $a$ . Obsérvese la asimetría: el punto  $a$  está fijo y  $x$  tiene que aproximarse a  $a$  para que  $f(x)$  se aproxime a  $f(a)$ . En la continuidad uniforme se puede hacer que  $f(x) - f(y)$  estén tan próximos cuanto se quiera: basta con que  $x$

e  $y$  también lo estén. Aquí,  $x$  e  $y$  son variables y juegan papeles simétricos en la definición.

Otra diferencia entre la mera continuidad y la continuidad uniforme es la siguiente: si cada punto  $x \in X$  posee un entorno  $V$  tal que la restricción de  $f$  a  $V \cap X$  es continua, entonces la función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es continua. Sin embargo, como lo demuestran los Ejemplos 9 y 10, si cada punto  $x \in X$  posee un entorno  $V$  tal que  $f$  es uniformemente continua en  $X \cap V$ , no se puede concluir que  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  sea uniformemente continua en el conjunto  $X$ . Esto se expresa diciendo que la continuidad es una noción *local*, mientras que la continuidad uniforme es un concepto *global*.

**Ejemplo 11.** Una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  se llama *lipschitziana* cuando existe una constante  $k > 0$  (llamada *constante de Lipschitz* de la función  $f$ ) tal que  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$  sean cuales fueren  $x, y \in X$ . Para que  $f$  sea Lipschitziana es necesario y suficiente que el cociente  $(f(x) - f(y))/(x - y)$  esté acotado, esto es, exista una constante  $k > 0$  tal que  $x, y \in X, x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)|/|x - y| \leq k$ . Toda función lipschitziana  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es uniformemente continua: dado  $\varepsilon > 0$ , se toma  $\delta = \varepsilon/k$ . Entonces  $x, y \in X, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq k|x - y| < k \cdot \varepsilon/k = \varepsilon$ . Si  $f$  es un polinomio de grado  $\leq 1$ , esto es,  $f(x) = ax + b$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces  $f$  es lipschitziana con constante  $k = |a|$ , pues  $|f(y) - f(x)| = |ay + b - (ax + b)| = |a||y - x|$ . La función del Ejemplo 10, evidentemente, no es lipschitziana pues no es uniformemente continua. No obstante, para todo  $a > 0$ , la restricción de  $f$  al intervalo  $[a, +\infty)$  es lipschitziana (y, por tanto, uniformemente continua) con constante de Lipschitz  $k = 1/a^2$ . En efecto, si  $x \geq a$  e  $y \geq a$  entonces  $|f(y) - f(x)| = |y - x|/|xy| \leq |y - x|/a^2 = k|y - x|$ .

**Teorema 9.** Para que  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  sea uniformemente continua es necesario y suficiente, para todo par de sucesiones  $(x_n), (y_n)$  en  $X$  tales que  $\lim(y_n - x_n) = 0$ , se tenga  $\lim(f(y_n) - f(x_n)) = 0$ .

**Demostración:** Si  $f$  es uniformemente continua y  $\lim |y_n - x_n| = 0$  entonces dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x, y \in X, |y - x| < \delta$  implican  $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ . Existe también  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0$  implica  $|y_n - x_n| < \delta$ . Luego  $n > n_0$  implica  $|f(y_n) - f(x_n)| < \varepsilon$ , de donde  $\lim(f(y_n) - f(x_n)) = 0$ . Recíprocamente, supongamos

válida la condición estipulada en el enunciado del teorema. Si  $f$  no fuese uniformemente continua, existiría  $\varepsilon > 0$  con la siguiente propiedad: para todo  $n \in \mathbb{N}$  podríamos encontrar puntos  $x_n, y_n$  en  $X$  tales que  $|x_n - y_n| < 1/n$  y  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ . Tendríamos entonces  $\lim(y_n - x_n) = 0$  sin que  $\lim(f(y_n) - f(x_n)) = 0$ . Esta contradicción concluye la prueba del teorema.  $\square$

**Ejemplo 12.** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = x^2$  no es uniformemente continua. En efecto, tomando  $x_n = n$  e  $y_n = n + (1/n)$  tenemos  $\lim(y_n - x_n) = \lim(1/n) = 0$ , pero  $f(y_n) - f(x_n) = n^2 + 2 + (1/n^2) - n^2 = 2 + 1/n^2 > 2$ , luego no se tiene  $\lim[f(y_n) - f(x_n)] = 0$ .

**Teorema 10.** Sea  $X \subset \mathbb{R}$  compacto. Toda función continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es uniformemente continua.

**Demostración:** Si  $f$  no fuese uniformemente continua existirían  $\varepsilon > 0$  y dos sucesiones  $(x_n), (y_n)$  en  $X$  tales que  $\lim(y_n - x_n) = 0$  y  $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Considerando una subsucesión, si así fuese necesario, podemos suponer, en virtud de la compacidad de  $X$ , que  $\lim x_n = a \in X$ . Entonces, como  $y_n = (y_n - x_n) + x_n$ , también se tiene  $\lim y_n = a$ . Como  $f$  es continua en el punto  $a$ , tenemos  $\lim[f(y_n) - f(x_n)] = \lim f(y_n) - \lim f(x_n) = f(a) - f(a) = 0$ , lo que contradice que  $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Ejemplo 13.** La función  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por  $f(x) = \sqrt{x}$ , no es lipschitziana. En efecto, multiplicando el numerador y el denominador por  $(\sqrt{y} + \sqrt{x})$  vemos que  $(\sqrt{y} - \sqrt{x})/(y - x) = 1/(\sqrt{y} + \sqrt{x})$ . Tomando  $x \neq y$  suficientemente pequeños, podemos conseguir que  $\sqrt{y} + \sqrt{x}$  sea tan pequeño como se desee, luego el cociente  $(\sqrt{y} - \sqrt{x})/(y - x)$  no está acotado. No obstante,  $f$  es lipschitziana (por tanto uniformemente continua) en el intervalo  $[1, +\infty)$ , ya que  $x, y \in [1, +\infty) \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2 \Rightarrow |\sqrt{y} - \sqrt{x}| = |y - x|/(\sqrt{y} + \sqrt{x}) \leq \frac{1}{2}|y - x|$ . En el intervalo  $[0, 1]$ ,  $f$  también es uniformemente continua aunque no es lipschitziana, pues  $[0, 1]$  es compacto. De aquí resulta que  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es uniformemente continua. En efecto, dado  $\varepsilon > 0$  existen  $\delta_1 > 0$  y  $\delta_2 > 0$  tales que  $x, y \in [0, 1]$ ,  $|y - x| < \delta_1 \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , y  $x, y \in [1, +\infty)$ ,  $|y - x| < \delta_2 \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon/2$ . Sea  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Dados  $x, y \in [0, +\infty)$  con  $|y - x| < \delta$ , obviamente si  $x, y \in [0, 1]$  ó  $x, y \in [1, +\infty)$  tenemos  $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ . Si, por ejemplo,

$x \in [0, 1]$  e  $y \in [1, +\infty)$  entonces  $|y - 1| < \delta$  y  $|x - a| < \delta$ , luego  $|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f(1)| + |f(1) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

**Teorema 11.** *Toda función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente continua en un conjunto acotado  $X$  está acotada.*

**Demostración:** Si  $f$  no estuviera acotada (supongamos superiormente) existiría una sucesión de puntos  $x_n \in X$  tales que  $f(x_{n+1}) > f(x_n) + 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $X$  está acotado, podemos (considerando una subsucesión si así fuera necesario) suponer que la sucesión  $(x_n)$  es convergente. Entonces, escribiendo  $y_n = x_{n+1}$ , tendríamos  $\lim(y_n - x_n) = 0$ , pero como  $f(y_n) - f(x_n) > 1$ , no es verdad que  $\lim[f(y_n) - f(x_n)] = 0$ , luego  $f$  no sería uniformemente continua.  $\square$

El Teorema 11 nos da otra forma de ver que  $f(x) = 1/x$  no es uniformemente continua en el intervalo  $(0, 1]$ , pues  $f(0, 1] = [1, +\infty)$ .

**Teorema 12.** *Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es uniformemente continua entonces, para todo  $a \in X'$  (inclusive si  $a$  no pertenece a  $X$ ), existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .*

**Demostración:** Escojamos una sucesión de puntos  $a_n \in X - \{a\}$  tal que  $\lim a_n = a$ . Del Teorema 11 se sigue que la sucesión  $(f(a_n))$  está acotada. Considerando una subsucesión, si así fuese necesario, podemos suponer que  $\lim f(a_n) = b$ . Ahora afirmamos que se tiene  $\lim f(x_n) = b$  se cual fuere la sucesión de puntos  $x_n \in X - \{a\}$  con  $\lim x_n = a$ . En efecto, tenemos  $\lim(x_n - a_n) = 0$ . Como  $f$  es uniformemente continua, se sigue que  $\lim[f(x_n) - f(a_n)] = 0$ , luego  $\lim f(x_n) = \lim f(a_n) + \lim[f(x_n) - f(a_n)] = b$ .  $\square$

**Ejemplo 14.** El Teorema 12 implica que  $1/x$  en  $\mathbb{R}^+$ , así como  $x/|x|$  y  $\sin(1/x)$  en  $\mathbb{R} - \{0\}$ , no son uniformemente continuas.

## 5. Ejercicios

### Sección 1: Definición y primeras propiedades

- Sean  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  continuas en el punto  $a \in X$ . Pruebe que también son continuas en el punto  $a$  las funciones  $\varphi, \psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas mediante  $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ ,  $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$  para todo  $x \in X$ .

2. Sean  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  continuas. Pruebe que si  $X$  es abierto entonces el conjunto  $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$  es abierto, y que si  $X$  es cerrado el conjunto  $F = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$  es cerrado.
3. Una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  se dice *semicontinua superiormente* (scs) en el punto  $a \in X$  cuando, para todo  $c > f(a)$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$ ,  $|x - a| < \delta$ , implican  $f(x) < c$ . Defina el concepto de función *semicontinua inferiormente* (sci) en el punto  $a$ . Pruebe que  $f$  es continua en el punto  $a$  si, y sólo si, es scs y sci en dicho punto. Pruebe que si  $f$  es scs,  $g$  es sci y  $f(a) < g(a)$  entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$ ,  $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < g(x)$ .
4. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua. Pruebe que si  $f(x) = 0$  para todo  $x \in X$  entonces  $f(x) = 0$  para todo  $x \in \overline{X}$ .
5. Pruebe que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua si, y sólo si, para todo  $X \subset \mathbb{R}$  se tiene  $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$ .
6. Sean  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  continuas en el punto  $a$ . Suponga que, para cada entorno  $V$  de  $a$ , existen puntos  $x, y$  tales que  $f(x) < g(x)$  y  $f(y) > g(y)$ . Pruebe que  $f(a) = g(a)$ .
7. Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  discontinua en el punto  $a \in X$ . Pruebe que existe  $\varepsilon > 0$  con la siguiente propiedad: o se puede encontrar una sucesión de puntos  $x_n \in X$  con  $\lim x_n = a$  y  $f(x_n) > f(a) + \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , o bien se encuentra  $(y_n)$  con  $y_n \in X$ ,  $\lim y_n = a$  y  $f(y_n) < f(a) - \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Sección 2: Funciones continuas en un intervalo

1. Una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  se dice *localmente constante* cuando todo punto de  $X$  posee un entorno  $V$  tal que  $f$  es constante en  $V \cap X$ . Pruebe que toda función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  localmente constante en un intervalo  $I$  es constante.
2. Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función monótona definida en un intervalo  $I$ . Si la imagen  $f(I)$  es un intervalo pruebe que entonces  $f$  es continua.

3. Se dice que una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un intervalo  $I$  tiene la *propiedad del valor intermedio* cuando la imagen  $f(J)$  de cualquier intervalo  $J \subset I$  es un intervalo. Demuestre que la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \sin(1/x)$  si  $x \neq 0$  y  $f(0) = 0$  tiene la propiedad del valor intermedio y sin embargo no es continua.
4. Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función con la propiedad del valor intermedio. Si para cada  $c \in \mathbb{R}$  existen como máximo un número finito de puntos  $x \in I$  tales que  $f(x) = c$ , pruebe que  $f$  es continua.
5. Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y tal que  $f(0) = f(1)$ . Pruebe que existe  $x \in [0, 1]$  tal que  $f(x) = f(x + 1/2)$ . Pruebe el mismo resultado con  $1/3$  en vez de  $1/2$ . Generalice.

### Sección 3: Funciones continuas en conjuntos compactos

1. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua, tal que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ . Pruebe que existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x_0) \leq f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ . Pruebe que, para todo  $c \in \mathbb{R}$ , entre las raíces de la ecuación  $f(x) = c$  existe una cuyo módulo  $|x|$  es mínimo.
3. Pruebe que no existe ninguna función continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que alcance cada uno de sus valores  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , exactamente 2 veces.
4. Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice periódica cuando existe  $p \in \mathbb{R}^+$  tal que  $f(x + p) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Pruebe que toda función continua periódica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  está acotada y alcanza sus valores máximo y mínimo, esto es, existen  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$  tales que  $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
5. Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua en un conjunto compacto  $X$ . Pruebe que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $k_\varepsilon > 0$  tal que  $x, y \in X$ ,  $|y - x| \geq \varepsilon \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq k_\varepsilon |y - x|$ . (Esto significa que  $f$  cumple la condición de Lipschitz siempre que los puntos  $x, y$  no estén muy próximos.)

## Sección 4: Continuidad uniforme

1. Si toda función continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es uniformemente continua pruebe que el conjunto  $X$  es cerrado pero no necesariamente compacto.
2. Demuestre que la función continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \sin(x^2)$ , no es uniformemente continua.
3. Dada  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente continua, defina  $\varphi : \overline{X} \rightarrow \mathbb{R}$  mediante  $\varphi(x) = f(x)$  si  $x \in X$  es un punto aislado y  $\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow x} f(y)$  si  $x \in X'$ . Pruebe que  $\varphi$  es uniformemente continua y que  $\varphi(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ .
4. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Pruebe que si existen  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  entonces  $f$  es uniformemente continua. La misma conclusión es válida si existen los límites de  $f(x) - x$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ .
5. Sean  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente continua. Pruebe que  $f + g$  es uniformemente continua. Lo mismo ocurre con el producto  $f \cdot g$  siempre que  $f$  y  $g$  estén acotadas. Pruebe que  $\varphi, \psi : X \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  y  $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ ,  $x \in X$ , son uniformemente continuas.





## 8

## Derivadas

Sean  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in X$ . El cociente  $q(x) = [f(x) - f(a)]/(x - a)$  tiene sentido si  $x \neq a$ , luego define una función  $q : X - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ ; el valor  $q(x)$  es la *pendiente de la secante* (recta que une los puntos  $(a, f(a))$  y  $(x, f(x))$  del gráfico de  $f$ ) en relación al eje  $x$ .

Si imaginamos  $x$  como el tiempo y  $f(x)$  como la abscisa, en el instante  $x$ , de un punto móvil que se desplaza a lo largo del eje  $x$ , entonces  $q(x)$  es la *velocidad media* de dicho punto en el intervalo de tiempo comprendido entre los instantes  $a$  y  $x$ .

De modo general, el cociente  $q(x)$  es la relación existente entre la variación de  $f(x)$  y la variación de  $x$  a partir del punto  $x = a$ .

En el caso en que  $a \in X' \cap X$  es natural considerar  $\lim_{x \rightarrow a} q(x)$ . Las interpretaciones de este límite en los contextos anteriores sonm respectivamente, la pendiente de la tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$ , y la velocidad instantánea del móvil en el instante  $x = a$ , o, en general, el “cociente incremental” de la función  $f$  en el punto  $a$ .

Dicho límite es una de las nociones más importantes de las Matemáticas y de sus aplicaciones. Éste será el objetivo de estudio de este capítulo.

### 1. La noción de derivada

Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in X \cap X'$ . La derivada de la función  $f$  en el punto  $a$  es el límite:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Bien entendido, el límite anterior puede existir o no. Si existe se dice que  $f$  es *derivable en el punto  $a$* . Cuando existe la derivada  $f'(x)$  en todos los puntos  $x \in X \cap X'$  se dice que la función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es *derivable en el conjunto  $x$* , obteniéndose una nueva función  $f' : X \cap X' \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow f'(x)$ , llamada *función derivada de  $f$* . Si  $f'$  es continua se dice que  $f$  es de clase  $C^1$ .

Otras notaciones para la derivada de  $f$  en el punto  $a$  son

$$Df(a), \quad \frac{df}{dx}(a), \quad \text{y} \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}$$

**Teorema 1.** Para que  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  sea derivable en el punto  $a \in X \cap X'$  es necesario y suficiente que exista  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $a+h \in X \Rightarrow f(a+h) = f(a) + c \cdot h + r(h)$ , donde  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = 0$ . En caso afirmativo se tiene  $c = f'(a)$ .

**Demostración:** Sea  $Y = \{h \in \mathbb{R} : a+h \in X\}$ . Entonces  $0 \in Y \cap Y'$ . Suponiendo que  $f'(a)$  exista, definimos  $r : Y \rightarrow \mathbb{R}$  como  $r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h$ . Entonces,

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a),$$

luego  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = 0$ . La condición es, por tanto, necesaria. Recíprocamente, si la condición es válida, entonces  $r(h)/h = [f(a+h) - f(a)]/h - c$ , luego  $\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a))/h - c = \lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = 0$ , por tanto  $f'(a)$  existe y es igual a  $c$ .  $\square$

**Corolario 1.** Una función es continua en los puntos donde es derivable.

En efecto, si  $f$  es derivable en el punto  $a$ , entonces  $f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + [r(h)/h]h$  con  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = 0$ , luego  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$ , o sea,  $f$  es continua en el punto  $a$ .

**Observación:** Para *toda* función  $f$ , definida en los puntos  $a$  y  $a + h$ , y todo número real  $c$ , siempre se puede escribir la igualdad  $f(a + h) = f(a) + c \cdot h + r(h)$ , que simplemente define el número  $r(h)$ . Lo que afirma el Teorema 1 es que existe como máximo un único  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = 0$ . Dicho número  $c$ , cuando existe, es igual a  $f'(a)$ . El Teorema 1 nos dice también que, cuando  $f'(a)$  existe, el incremento  $f(a + h) - f(a)$  es igual a la suma de una “parte lineal”  $c \cdot h$ , proporcional al incremento  $h$  de la variable independiente, y de un resto  $r(h)$ , que es infinitamente pequeño en relación a  $h$ , en el sentido de que el cociente  $r(h)/h$  tiende a cero con  $h$ .

Cuando  $a \in X$  es un punto de acumulación por la derecha, esto es,  $a \in X \cap X'_+$ , se puede considerar el límite  $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} q(x)$ . Cuando existe, dicho límite se llama *derivada por la derecha* de  $f$  en el punto  $a$ . Análogamente, si  $a \in X \cap X'_-$ , tiene sentido considerar el límite por la izquierda  $f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} q(x)$ ; si existe, éste se llama *derivada por la izquierda* de  $f$  en el punto  $a$ .

En el caso en que  $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ , esto es, si  $a$  es un punto de acumulación bilateral, la función  $f$  es derivable en el punto  $a$  si, y sólo si, existen y son iguales las derivadas por la derecha y por la izquierda, en cuyo caso  $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$ . El Teorema 1 (con  $\lim_{h \rightarrow 0^+} r(h)/h = 0$  y  $\lim_{h \rightarrow 0^-} r(h)/h = 0$ ), así como su contrario valen para las derivadas laterales. Por ejemplo, si existe la derivada por la derecha  $f'_+(a)$  entonces  $f$  es continua por la derecha en el punto  $a$ , esto es,  $f(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(a + h)$ .

En particular, si  $a \in X \cap X'_- \cap X'_+$  y existen ambas derivadas laterales,  $f_+(a)$  y  $f'_-(a)$ , entonces  $f$  es continua en el punto  $a$ . (Inclusive si estas derivadas laterales son diferentes).

**Ejemplo 1.** Una función constante es derivable y su derivada es idénticamente nula. Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  está dada por  $f(x) = ax + b$  entonces, para cualesquiera  $c \in \mathbb{R}$  y  $h \neq 0$ ,  $[f(c + h) - f(c)]/h = a$ , luego  $f'(c) = a$ . Para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ , la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f(x) = x^n$ , tiene derivada  $f'(x) = nx^{n-1}$ . En efecto, por el binomio de Newton,  $f(x + h) = (x + h)^n = x^n + hnx^{n-1} + h^2p(x, h)$ , donde

$p(x, h)$  es un polinomio en  $x$  y  $h$ . Por tanto  $[f(x+h) - f(x)]/h = nx^{n-1} + hp(x, h)$ . Se sigue que  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)]/h = nx^{n-1}$ .

**Ejemplo 2.** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante  $f(x) = x \sin(1/x)$  cuando  $x \neq 0$  y  $f(0) = 0$ , es continua y posee derivada en todo punto  $x \neq 0$ . En el punto 0, tenemos  $[f(0+h) - f(0)]/h = [h \sin(1/h)]/h = \sin(1/h)$ . Como no existe  $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(1/h)$ , se concluye que  $f$  no es derivable en el punto  $x = 0$ , donde tampoco existe ninguna derivada lateral. Por otra parte, la función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante  $g(x) = x \cdot f(x)$ , esto es,  $g(x) = x^2 \sin(1/x)$ ,  $x \neq 0$ ,  $g(0) = 0$ , es derivable en el punto  $x = 0$ , porque  $\lim_{h \rightarrow 0} [g(0+h) - g(0)]/h = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \sin(1/h) = 0$ . Luego  $g'(0) = 0$ . Cuando  $x \neq 0$  las reglas de derivación conocidas nos dan  $g'(x) = 2x \cdot \sin(1/x) - \cos(1/x)$ . Observe que no existe  $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$ . En particular, la función derivada,  $g' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , no es continua en el punto 0, luego  $g$  no es de clase  $C^1$ .

**Ejemplo 3.** La función  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $\varphi(x) = |x|$ , es derivable en todo  $x \neq 0$ . En efecto,  $\varphi(x) = x$  si  $x > 0$  y  $\varphi(x) = -x$  si  $x < 0$ . Luego  $\varphi(x) = 1$  para  $x > 0$  y  $\varphi'(x) = -1$  si  $x < 0$ . En el punto 0 no existe la derivada  $\varphi'(0)$ . De hecho, existen  $\varphi'_+(0) = 1$  y  $\varphi'_-(0) = -1$ . La función  $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $I(x) = n$  cuando  $n \leq x < n+1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , es derivable, con  $I'(x) = 0$ , en los puntos  $x \notin \mathbb{Z}$ . Si  $n$  es entero, existe  $I'_+(n) = 0$  pero no existe  $I'_-(n)$ . En efecto, si  $1 > h > 0$ , se tiene  $I(n+h) = I(n) = n$ , pero para  $-1 < h < 0$ ,  $I(n+h) = n-1$ ,  $I(n) = n$ . Por tanto  $\lim_{h \rightarrow 0^+} [I(n+h) - I(n)]/h = 0$  y  $\lim_{h \rightarrow 0^-} [I(n+h) - I(n)]/h = \lim_{h \rightarrow 0} (-1/h)$ , que no existe.

**Ejemplo 4.** *Regla de L'Hôpital* Esta regla constituye una de las aplicaciones más populares de la derivada. En su forma más sencilla sirve para calcular límites de la forma  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$  cuando  $f$  y  $g$  son derivables en el punto  $a$  y  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 0 = g(a) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ . Así, por la definición de derivada,  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)/(x-a)$  y  $g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)/(x-a)$ . Si  $g'(a) \neq 0$ , la Regla de L'Hôpital nos

dice que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ . La prueba es inmediata:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)}{(x-a)}}{\frac{g(x)}{(x-a)}} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Como aplicación consideremos los límites  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x/x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x$ . Aplicando la Regla de L'Hôpital, el primer límite se reduce a  $\cos 0 = 1$  y el segundo a  $e^0 = 1$ . Sin embargo, conviene observar que estas aplicaciones (y otras análogas) de la Regla de L'Hôpital no son totalmente correctas pues, para utilizarla, es necesario conocer las derivadas  $f'(a)$  y  $g'(a)$ . En estos dos ejemplos los límites a calcular son, por definición, las derivadas de  $\sin x$  y de  $e^x$  en el punto  $x = 0$ .

## 2. Reglas de derivación

**Teorema 2.** Sean  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  derivables en el punto  $a \in X \cap X'$ . Las funciones  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$  y  $f/g$  (si  $g(a) \neq 0$ ) también son derivables en el punto  $a$ , con

$$\begin{aligned} (f \pm g)'(a) &= f'(a) \pm g'(a), \\ (f \cdot g)'(a) &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \quad y \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}. \end{aligned}$$

**Demostración:** Vea cualquier libro de Cálculo. □

**Teorema 3. (Regla de la Cadena)** Sean  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in X \cap X'$ ,  $b \in Y \cap Y'$ ,  $f(X) \subset Y$  y  $f(a) = b$ . Si  $f$  es derivable en el punto  $a$  y  $g$  derivable en el punto  $b$  entonces  $g \circ f$  es derivable en el punto  $a$ , con  $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$ .

**Demostración:** Consideremos una sucesión de puntos  $x_n \in X - \{a\}$  tal que  $\lim x_n = a$  y escribamos  $y_n = f(x_n)$ , de modo que  $\lim y_n = b$ . Sean  $N_1 = \{n \in \mathbb{N} : f(x_n) \neq f(a)\}$  y  $N_2 = \{n \in \mathbb{N} : f(x_n) = f(a)\}$ . Si  $n \in N_1$  entonces  $y_n \in Y - \{b\}$  y

$$\frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = \frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} \cdot \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}.$$

Por lo tanto, si  $N_1$  es infinito, se tiene  $\lim_{n \in N_1} [g(f(x_n)) - g(f(a))]/(x_n - a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$ . Si  $N_2$  es infinito se tiene  $\lim_{n \in N_2} [f(x_n) - f(a)]/(x_n - a) = 0$ , luego  $f'(a) = 0$ . Así, inclusive en este caso, se tiene  $\lim_{n \in N_2} [g(f(x_n)) - g(f(a))]/(x_n - a) = 0 = g'(f(a)) \cdot f'(a)$ . De  $\mathbb{N} = N_1 \cup N_2$ , resulta que, en cualquier caso,

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = g'(f(a)) \cdot f'(a),$$

lo que prueba el teorema.  $\square$

**Corolario 1.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una biyección entre los conjuntos  $X, Y \subset \mathbb{R}$ , con inversa  $g = f^{-1} : Y \rightarrow X$ . Si  $f$  es derivable en el punto  $a \in X \cap X'$  y  $g$  es continua en el punto  $b = f(a)$  entonces  $g$  es derivable en el punto  $b$  si, y sólo si,  $f'(a) \neq 0$ . En caso afirmativo se tiene  $g'(b) = 1/f'(a)$ .

En efecto, si  $x_n \in X - \{a\}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $\lim x_n = a$  entonces, como  $f$  es inyectiva y continua en el punto  $a$ , se tiene  $y_n = f(x_n) \in Y - \{b\}$  y  $\lim y_n = b$ . Por lo tanto  $b \in Y \cap Y'$ . Si  $g$  es derivable en el punto  $b$ , la igualdad  $g(f(x)) = x$ , válida para todo  $x \in X$ , junto con la Regla de la Cadena implican que  $g'(b) \cdot f'(a) = 1$ . En particular,  $f'(a) \neq 0$ . Recíprocamente, si  $f'(a) \neq 0$  entonces, para cualquier sucesión de puntos  $y_n = f(x_n) \in Y - \{b\}$  tal que  $\lim y_n = b$ , la continuidad de  $g$  en el punto  $b$ , nos da  $\lim x_n = a$ , por tanto:

$$\begin{aligned} \lim \frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} &= \lim \left[ \frac{y_n - b}{g(y_n) - g(b)} \right]^{-1} \\ &= \lim \left[ \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right]^{-1} = 1/f'(a). \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.** Dada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable, consideremos las funciones  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por  $g(x) = f(x^2)$  y  $h(x) = f(x)^2$ . Se tiene  $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2)$  y  $h'(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Ejemplo 6.** Para  $n \in \mathbb{N}$  fijo, la función  $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ , dada por  $g(x) = \sqrt[n]{x}$ , es derivable en el intervalo  $(0, +\infty)$  con  $g'(x) = 1/n \sqrt[n]{x^{n-1}}$ . En efecto,  $g$  es la inversa de la biyección  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ , dada por  $f(x) = x^n$ . Por el corolario anterior, escribiendo  $y = x^n$ , tenemos  $g'(y) = 1/f'(x)$  si  $f'(x) = nx^{n-1} \neq 0$ ,

esto es, si  $x \neq 0$ . Así  $g'(y) = 1/nx^{n-1} = 1/n\sqrt[n]{y^{n-1}}$  y, cambiando la notación,  $g'(x) = 1/n\sqrt[n]{x^{n-1}}$ . En el punto  $x = 0$  la función  $g(x) = \sqrt[n]{x}$  no es derivable (excepto si  $n = 1$ ). Por ejemplo, la función  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\varphi(x) = x^3$ , es un homeomorfismo, cuya inversa  $y \rightarrow \sqrt[3]{y}$  no tiene derivada en el punto 0.

### 3. Derivada y crecimiento local

Las proposiciones que siguen, que hacen referencia a derivadas laterales y desigualdades, tienen versiones análogas con  $f'_-$  en vez de  $f'_+$  con  $>$  substituido por  $<$ , etc. Para evitar repeticiones tediosas trataremos solamente un caso, aunque utilizaremos con total libertad sus análogos.

**Teorema 4.** *Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable por la derecha en el punto  $a \in X \cap X'_+$ , con  $f'_+(a) > 0$  entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$ ,  $a < x < a + \delta$ , implican  $f(a) < f(x)$ .*

**Demostración:** Tenemos  $\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x) - f(a)]/(x - a) = f'_+(a) > 0$ . De la definición de límite por la derecha, tomando  $\varepsilon = f'_+(a)$ , obtenemos  $\delta > 0$  tal que

$$x \in X, a < x < a + \delta \Rightarrow [f(x) - f(a)]/(x - a) > 0 \Rightarrow f(a) < f(x).$$

□

**Corolario 1.** *Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es monótona creciente entonces sus derivadas laterales, donde existan, son  $\geq 0$ .*

En efecto, si alguna derivada lateral, digamos  $f'_+(a)$ , fuese negativa entonces el (análogo del) Teorema 4 nos daría  $x \in X$  con  $a < x$  y  $f(x) < f(a)$ , lo que es absurdo.

□

**Corolario 2.** *Sea  $a \in X$  un punto de acumulación bilateral. Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable en el punto  $a$ , con  $f'(a) > 0$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $x, y \in X$ ,  $a - \delta < x < a < y < a + \delta$ , implican  $f(x) < f(a) < f(y)$ .*

Se dice que una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un *máximo local* en el punto  $a \in X$  cuando existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$ ,  $|x - a| < \delta$  implican  $f(x) \leq f(a)$ . Cuando  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  implican  $f(x) < f(a)$  se dice que  $f$  tiene un *máximo local estricto* en el punto  $a$ . Las definiciones de *mínimo local* y *mínimo local estricto* son análogas. Cuando  $x \in X$  es tal que  $f(a) \leq f(x)$  para todo  $x \in X$ , se dice que  $a$  es un punto de *mínimo absoluto* de la función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Si se tiene  $f(a) \geq f(x)$  para todo  $x \in X$ , se dice que  $a$  es un punto de *máximo absoluto*.

**Corolario 3.** Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable por la derecha en el punto  $a \in X \cap X'_+$  y tiene en dicho punto un máximo local entonces  $f'_+(a) \leq 0$ .

En efecto, si tuviéramos  $f'_+(a) > 0$ , entonces, por el Teorema 4, obtendríamos  $f(a) < f(x)$  para todo  $x \in X$  a la derecha y suficientemente próximo a  $a$ , luego  $f$  no tendría un máximo local en el punto  $a$ .

□

**Corolario 4.** Sea  $a \in X$  un punto de acumulación bilateral. Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tiene en  $a$  un punto de máximo o mínimo local y es derivable en dicho punto, entonces  $f'(a) = 0$ .

En efecto, por el Corolario 3 tenemos  $f'_+(a) \leq 0$  y  $f'_-(a) \geq 0$ . Como  $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$ , se sigue que  $f'(a) = 0$ .

□

**Ejemplo 7.** Del Teorema 4 y de su Corolario 2 no se puede concluir que una función con derivada positiva en un punto  $a$  sea estrictamente creciente en un entorno de  $a$  (excepto si  $f'$  es continua en el punto  $a$ ). Lo máximo que se puede afirmar es que  $f(x) < f(a)$  si  $x < a$ ,  $x$  próximo a  $a$ , y  $f(x) > f(a)$  si  $x$  está próximo a  $a$  con  $x > a$ . Por ejemplo, sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2 \sin(1/x) + \frac{x}{2}$  si  $x \neq 0$  y  $f(0) = 0$ . La función  $f$  es derivable, con  $f'(0) = 1/2$  y  $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) + 1/2$  si  $x \neq 0$ . Si tomamos  $x \neq 0$  pequeño con  $\sin(1/x) = 0$  y  $\cos(1/x) = 1$  tendremos  $f'(x) < 0$ . Luego existen puntos  $x$  arbitrariamente próximos a 0 con  $f'(x) < 0$  y con  $f'(x) > 0$ . Del Corolario 1 se deduce que  $f$  no es monótona en ningún entorno de 0.



**Ejemplo 8.** En el Corolario 1, incluso si  $f$  es monótona estrictamente creciente y derivable, no se puede garantizar que su derivada sea positiva en todos los puntos. Por ejemplo,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^3$ , es estrictamente creciente, pero su derivada  $f'(x) = 3x^2$  se anula en  $x = 0$ .

**Ejemplo 9.** Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tiene, por ejemplo, un mínimo local en el punto  $a \in X$ , no se puede concluir de aquí que  $f'(a) = 0$ . En primer lugar,  $f'(a)$  tal vez no exista. Este es el caso de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$ , que posee un mínimo local en  $x = 0$ , donde se tiene  $f'_+(0) = 1$  y  $f'_-(0) = -1$ , lo que está de acuerdo con el Corolario 4. En segundo lugar inclusive si  $f$  es derivable en el punto  $a$ , es posible que dicho punto no sea un punto de acumulación bilateral, y entonces puede suceder que  $f'(a) \neq 0$ . Este es el caso de la función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$ . Tenemos  $f'(0) = f'(1) = 1$ ; sin embargo  $f$  tiene un mínimo en el punto  $x = 0$  y un máximo en el punto  $x = 1$ .

Un punto  $c \in X$  se llama *punto crítico* de la función derivable  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  cuando  $f'(c) = 0$ . Si  $c \in X \cap X'_+ \cap X'_-$  es un punto de mínimo o de máximo local entonces  $c$  es crítico, pero el recíproco es falso: la biyección estrictamente creciente  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = x^3$ , no puede tener máximos ni mínimos locales pero tiene un punto crítico en  $x = 0$ .

#### 4. Funciones derivables en un intervalo

Como se verá a continuación la derivada goza de la propiedad del valor intermedio, incluso cuando es discontinua.

**Teorema 5. (Darboux)** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivable. Si  $f'(a) < d < f'(b)$  entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = d$ .

**Demostración:** Supongamos inicialmente que  $d = 0$ . Por el Teorema de Weierstrass, la función continua  $f$  alcanza su valor mínimo en algún punto  $c$  del conjunto compacto  $[a, b]$ . Como  $f'(a) < 0$ , el Teorema 4 nos asegura que existen puntos  $x \in (a, b)$  tales que  $f(x) < f(a)$ , luego tal mínimo no se alcanza en el punto  $a$ , esto es,  $a < c$ . Por los mismos motivos se tiene  $c < b$ . Así el Corolario 4 nos da  $f'(c) = 0$ . El caso general se reduce a éste considerando la función auxiliar  $g(x) = f(x) - dx$ . Entonces  $g'(x) = f'(x) - d$ , de donde  $g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = d$ , y  $g'(a) < 0 < g'(b) \Leftrightarrow f'(a) < d < f'(b)$ .  $\square$

**Ejemplo 10.** Sea  $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $g(x) = -1$  si  $-1 \leq x < 0$  y  $g(x) = 1$  si  $0 \leq x \leq 1$ . La función  $g$  no goza de la propiedad del valor intermedio ya que, en el intervalo  $[-1, 1]$ , sólo toma los valores  $-1$  y  $1$ . Luego no existe  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  derivable tal que  $f' = g$ . Por otra parte, la función  $h : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $h(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$  si  $x \neq 0$  y  $h(0) = 0$ , que presenta una discontinuidad bastante complicada en el punto  $x = 0$ , es la derivada de la función  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 \sin(1/x)$  si  $x \neq 0$  y  $f(0) = 0$ . En el Capítulo 10 veremos que toda función continua  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es la derivada de alguna función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , y en el Ejercicio 4.1 de este capítulo se invita al lector a demostrar que si  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es discontinua en un punto  $c \in (a, b)$ , donde existen los límites laterales  $\lim_{x \rightarrow c^-} g(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow c^+} g(x)$ , entonces no es posible que  $g$  sea la derivada de una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Teorema 6. (Rolle)** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $f(a) = f(b)$ . Si  $f$  es derivable en  $(a, b)$  entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

**Demostración:** Por el Teorema de Weierstrass,  $f$  alcanza su valor mínimo  $m$  y su valor máximo  $M$  en puntos de  $[a, b]$ . Si dichos puntos fuesen  $a$  y  $b$  entonces  $m = M$  y  $f$  sería constante, luego  $f'(x) = 0$  para cualquier  $x \in (a, b)$ . Si uno de estos puntos, llamémosle  $c$ , estuviera en  $(a, b)$ , entonces  $f'(c) = 0$ .  $\square$

**Teorema 7. (Teorema del Valor Medio, de Lagrange)** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Si  $f$  es derivable en  $(a, b)$ , existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$ .

**Demostración:** Consideremos la función auxiliar  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $g(x) = f(x) - dx$ , donde  $d$  es escogido de forma que  $g(a) = g(b)$ , o sea,  $d = [f(b) - f(a)]/(b - a)$ . Por el Teorema de Rolle, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = 0$ , esto es,  $f'(c) = d = [f(b) - f(a)]/(b - a)$ .  $\square$

Un enunciado equivalente: Sea  $f : [a, a + h] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y derivable en  $(a, a + h)$ . Entonces existe un número  $\theta$ ,  $0 < \theta < 1$ , tal que  $f(a + h) = f(a) + f'(a + \theta h) \cdot h$ .

**Corolario 1.** Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , continua en el intervalo  $I$ , con derivada  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in \text{int } I$ , es constante.

En efecto, dados cualesquiera  $x, y \in I$ , existe  $c$  comprendido entre  $x$  e  $y$  tal que  $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0 \cdot (y - x)$ , luego  $f(x) = f(y)$ .

**Corolario 2.** Si  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas, derivables en  $\int I$  con  $f'(x) = g'(x)$  para todo  $x \in \text{int } I$ , entonces existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $g - f(x) = f(x) + c$  para todo  $x \in I$ .

En efecto, basta aplicar el Corolario 1 a la diferencia  $g - f$ .

**Corolario 3.** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en el intervalo  $I$ . Si existe  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $|f'(x)| \leq k$  para todo  $x \in I$  entonces  $x, y \in I \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$ .

En efecto, dados  $x, y \in I$ ,  $f$  es continua en el intervalo cerrado de extremos  $x$  e  $y$ , y derivable en su interior. Luego existe  $z$  entre  $x$  e  $y$  tal que  $f(y) - f(x) = f'(z)(y - x)$ , de donde  $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$ .

**Corolario 4.** Para que una función derivable  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sea monótona creciente en el intervalo  $I$  es necesario y suficiente que  $f'(x) \geq 0$  para todo  $x \in I$ . Si  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in I$  entonces  $f$  es una biyección estrictamente creciente de  $I$  en un intervalo  $J$  y su inversa  $g = f^{-1} : J \rightarrow I$  es derivable, con  $g'(y) = 1/f'(x)$  para todo  $y = f(x) \in J$ .

En efecto, ya sabemos, por el Corolario 1 del Teorema 4, que si  $f$  es monótona creciente entonces  $f'(x) \geq 0$  para todo  $x \in I$ . Recíprocamente, si se cumple esta condición entonces, para cualesquiera  $x, y \in I$ , tenemos  $f(y) - f(x) = f'(z)(y - x)$ , donde  $z \in I$  está entre  $x$  e  $y$ . Como  $f'(z) \geq 0$ , vemos que  $f(y) - f(x) \geq 0$ , esto es,  $x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ . De igual forma se ve que, suponiendo  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in I$ ,  $f$  es estrictamente creciente. Las demás afirmaciones son consecuencia del Teorema 5, Capítulo 7, y del corolario de la Regla de la Cadena (Teorema 3).

**Ejemplo 11.** El Corolario 3 es el recurso más natural para ver si una función es Lipschitziana. Por ejemplo, si  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un polinomio entonces, para cada subconjunto acotado  $X \subset \mathbb{R}$ , la restricción  $p|_X$  es lipschitziana porque la derivada  $p'$ , al ser continua, está acotada en el compacto  $\overline{X}$ . Como toda función lipschitziana es uniformemente continua, se sigue del Teorema 12, Capítulo 7, que si la derivada de  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  está acotada entonces existen los

límites laterales  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ . La derivada de la función  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \sin(1/x)$ , no puede estar acotada en ningún intervalo de la forma  $(0, \delta)$  pues no existe  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

## 5. Ejercicios

### Sección 1: La noción de derivada

1. Demuestre que para que  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  sea derivable en el punto  $a \in X \cap X'$  es necesario y suficiente que exista una función  $\eta : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua en el punto  $a$  tal que  $f(x) = f(a) + \eta(x)(x - a)$  para todo  $x \in X$ .
2. Sean  $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  para todo  $x \in X$ . Si  $f$  y  $h$  son derivables en el punto  $a \in X \cap X'$ , con  $f(a) = h(a)$  y  $f'(a) = h'(a)$ , demuestre que  $g$  es derivable en dicho punto y que  $g'(a) = f'(a)$ .
3. Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en el punto  $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ . Si  $x_n < a < y_n$  para todo  $n$  y  $\lim x_n = \lim y_n = a$ , pruebe que  $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(y_n) - f(x_n)]/(y_n - x_n) = f'(a)$ . Interprete geoméricamente esta propiedad.
4. Dé un ejemplo de una función derivable  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y de sucesiones de puntos  $0 < x_n < y_n$ , con  $\lim x_n = \lim y_n = 0$ , tales que no exista el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(y_n) - f(x_n)]/(y_n - x_n)$ .
5. Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en el punto  $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ . Pruebe que  $\lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h) - f(a-h)]/2h = f'(a)$ . Dé un ejemplo en que dicho límite exista y sin embargo  $f$  no sea derivable en el punto  $a$ .

### Sección 2: Reglas de derivación

1. Admitiendo que  $(e^x)' = e^x$  y que  $\lim_{y \rightarrow +\infty} e^y/y = +\infty$ , pruebe que la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = e^{-1/x^2}$  cuando  $x \neq 0$  y  $f(0) = 0$ , tiene derivada igual a cero en el punto  $x = 0$ , y que lo mismo ocurre con  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f''$ , ... y así sucesivamente.

2. Sea  $I$  un intervalo abierto. Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se dice *de clase  $C^2$*  cuando es derivable y su derivada  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$ . Pruebe que si  $f(I) \subset J$  y  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^2$  entonces la función compuesta  $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^2$ .
3. Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  con  $f(I) = J$  y  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ . Calcule la derivada segunda de  $f_J^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y demuestre que  $f^{-1}$  es de clase  $C^2$ .
4. Sea  $I$  un intervalo centrado en 0. Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se llama *par* cuando  $f(x) = f(-x)$  e *impar* cuando  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in I$ . Si  $f$  es par, sus derivadas de orden par (si existen) son funciones pares y sus derivadas de orden impar son funciones impares. En particular estas últimas se anulan en el punto 0. Enuncie un resultado análogo para  $f$  impar.
5. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable, tal que  $f(tx) = tf(x)$  para cualesquiera  $t, x \in \mathbb{R}$ . Pruebe que existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = c \cdot x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . En general, si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es  $k$  veces derivable y  $f(tx) = t^k \cdot f(x)$  para cualesquiera  $t, x \in \mathbb{R}$ , pruebe que existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = c \cdot x^k$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

### Sección 3: Derivada y crecimiento local.

1. Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$ , demuestre que el conjunto de sus puntos críticos es cerrado. Dé un ejemplo de una función derivable  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que 0 sea el límite de una sucesión de puntos críticos de  $f$  y sin embargo  $f'(0) > 0$ .
2. Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en el intervalo abierto  $I$ . Un punto crítico  $c \in I$  se llama *no degenerado* cuando  $f''(c)$  es diferente de cero. Pruebe que todo punto crítico no degenerado es un punto de máximo local o de mínimo local.
3. Si  $c \in I$  es un punto crítico no degenerado de una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , derivable en el intervalo abierto  $I$ , pruebe que existe  $\delta > 0$  tal que  $c$  es el único punto crítico de  $f$  en el intervalo  $(c - \delta, c + \delta)$ . Concluya que en un conjunto compacto  $K \subset I$ , donde todos los puntos críticos de  $f$  son no degenerados, existen como máximo un número finito de éstos.

4. Pruebe directamente (sin usar el ejercicio anterior) que si un punto crítico  $c$  de una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es el límite de una sucesión de puntos críticos  $c_n \neq c$  entonces  $f''(c) = 0$ .
5. Pruebe que el conjunto de los puntos de máximo o mínimo local estricto de cualquier función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es numerable.

#### Sección 4: Funciones derivables en un intervalo

1. Sea  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua en el intervalo abierto  $I$ , excepto en el punto  $c \in I$ . Pruebe que si existen los límites laterales  $\lim_{x \rightarrow c^-} g(x) = A$  y  $\lim_{x \rightarrow c^+} g(x) = B$ , con  $A \neq B$ , entonces no existe ninguna función derivable  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f' = g$ .
2. Sea  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante  $f(x) = \log x/x$ . Admitiendo que  $(\log')(x) = 1/x$ , indique los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f$ , sus puntos críticos y los límites de  $f$  cuando  $x \rightarrow 0$  y cuando  $x \rightarrow +\infty$ .
3. Realice un estudio similar al del ejercicio anterior con la función  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = e^x/x$ ; para esto admita que  $(e^x)' = e^x$ .
4. Suponiendo conocidas las reglas de derivación de las funciones seno y coseno, pruebe que  $\sin : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow (-1, 1)$ ,  $\cos : (0, \pi) \rightarrow (-1, 1)$  y  $\tan = \sin / \cos : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$  son biyecciones con derivadas  $\neq 0$  en todo punto; calcule las derivadas de las funciones inversas  $\arcsin : (-1, 1) \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ ,  $\arccos : (-1, 1) \rightarrow (0, \pi)$  y  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ .
5. Dada  $f$  derivable en el intervalo  $I$ , sean  $X = \{f'(x) : x \in I\}$  e  $Y = \{[f(y) - f(x)]/(y - x) : x \neq y, x, y \in I\}$ . El Teorema del Valor Medio nos asegura que  $Y \subset X$ . Dé un ejemplo en el que  $Y \neq X$ . Pruebe que  $\overline{Y} = \overline{X}$ , concluya que  $\sup X = \sup Y$  e  $\inf X = \inf Y$ .
6. Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y derivable. Si no existe  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  o  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ , pruebe que, para todo  $c \in \mathbb{R}$ , existe  $x \in (a, b)$  tal que  $f'(x) = c$ .

7. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y derivable en el intervalo abierto  $(a, b)$ , tal que  $f'(x) \geq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ . Si  $f'(x) = 0$  solamente en un conjunto finito, pruebe que  $f$  es estrictamente creciente.
8. Use el principio de los intervalos encajados para probar directamente (sin usar el Teorema del Valor Medio) que si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable, con  $f'(x) = 0$  en todo punto  $x$  del intervalo  $I$ , entonces  $f$  es constante.
9. Usando la técnica del ejercicio anterior, pruebe que una función derivable  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $|f'(x)| \leq k$  para todo  $x$  en el intervalo  $I$ , cumple la condición de Lipschitz  $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$  para todo  $x, y \in I$ .
10. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función con derivada acotada en  $(a, b)$  que cumple la propiedad del valor intermedio (cfr. Ejercicio 2.3, Capítulo 7). Pruebe que  $f$  es continua.
11. Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  cumple  $|f(y) - f(x)| \leq c|y - x|^\alpha$  para todo  $x, y \in I$ , con  $\alpha > 1$  y  $c \in \mathbb{R}$ , pruebe que  $f$  es constante.
12. Pruebe que si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable y  $f' : X \cap X' \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en el punto  $a$ , entonces, para cualquier par de sucesiones  $x_n \neq y_n \in X$  con  $\lim x_n = \lim y_n = a$ , se tiene  $\lim [f(y_n) - f(x_n)] / (y_n - x_n) = f'(a)$ .





# Fórmula de Taylor y aplicaciones de la derivada

Las aplicaciones más elementales de la derivada, relacionadas con problemas de máximos y mínimos, y la regla de L'Hôpital, se encuentran ampliamente divulgadas en los libros de cálculo. Aquí exponemos dos aplicaciones, a saber, el estudio de las funciones convexas y el método de Newton.

## 1. Fórmula de Taylor

La  $n$ -ésima derivada (o derivada de orden  $n$ ) de una función  $f$  en el punto  $a$  se indicará con la notación  $f^{(n)}(a)$ . Para  $n = 1, 2$  y  $3$  se escribe  $f'(a)$ ,  $f''(a)$  y  $f'''(a)$ , respectivamente. Por definición  $f''(a) = (f')'(a)$ , y así sucesivamente:  $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$ . Para que  $f^{(n)}(a)$  tenga sentido es necesario que  $f^{(n-1)}(x)$  esté definida en un conjunto del que  $a$  sea punto de acumulación y que sea derivable en el punto  $x = a$ . En todos los casos que consideraremos tal conjunto será un intervalo. Cuando existe  $f^{(n)}(x)$  para todo  $x \in I$ , se dice que la función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es *derivable  $n$  veces en el intervalo  $I$* . Cuando  $f$  es derivable  $(n-1)$  veces en un entorno de  $a$  y existe  $f^{(n)}(a)$  decimos que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es *derivable  $n$  veces en el punto  $a \in I$* .

Decimos que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de *clase  $C^n$* , y escribimos  $f \in C^n$ , cuando  $f$  es derivable  $n$  veces y, además, la función  $f^{(n)} : I \rightarrow \mathbb{R}$  es continua. Cuando  $f \in C^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , decimos que  $f$  es de *clase  $C^\infty$* , y escribimos  $f \in C^\infty$ . Es conveniente considerar  $f$  como su propia “derivada de orden cero” y escribir  $f^{(0)} = f$ .

Así  $f \in C^0$  quiere decir que  $f$  es una función continua.

**Ejemplo 1.** Para  $n = 0, 1, 2, \dots$  sea  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante  $f_n(x) = x^n|x|$ . Entonces,  $f_n(x) = x^{n+1}$  si  $x \geq 0$  y  $f_n(x) = -x^{n+1}$  si  $x < 0$ . Cada función  $f_n$  es de clase  $C^n$  pues su  $n$ -ésima derivada es igual a  $(n+1)!|x|$ . Sin embargo  $f_n$  no es derivable  $(n+1)$  veces en el punto 0, luego no es de clase  $C^{n+1}$ . Las funciones de uso más frecuente, tales como polinomios, funciones racionales, funciones trigonométricas, exponenciales y logaritmo son de clase  $C^\infty$ .

Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida en el intervalo  $I$  y derivable  $n$  veces en el punto  $a \in I$ . El *polinomio de Taylor de orden  $n$*  de la función  $f$  en el punto  $a$  es el polinomio  $p(h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n$  (de grado  $\leq n$ ) cuyas derivadas de orden  $\leq n$  en el punto  $h = 0$  coinciden con las derivadas del mismo orden de  $f$  en el punto  $a$ , esto es,  $p^{(i)}(0) = f^{(i)}(a)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Ahora bien, las derivadas  $p^{(0)}(0), p^{(1)}(0), \dots, p^{(n)}(0)$  determinan unívocamente el polinomio  $p(h)$ , pues  $p^{(i)}(0) = i!a_i$ . Por tanto, el polinomio de Taylor de orden  $n$  de la función  $f$  en el punto  $a$  es:

$$p(h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n.$$

Si  $p(h)$  es el polinomio de Taylor de orden  $n$  de la función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es el punto  $a \in I$  entonces la función  $r(h) = f(a+h) - p(h)$ , definida en el intervalo  $J = \{h \in \mathbb{R} : a+h \in I\}$ , es derivable  $n$  veces en el punto  $0 \in J$ ; además  $r(0) = r'(0) = \dots = r^{(n)}(0) = 0$ .

**Lema 1.** Sea  $r : J \rightarrow \mathbb{R}$  derivable  $n$  veces en el punto  $0 \in J$ . Para que  $r^{(i)} = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , es necesario y suficiente que  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^n = 0$ .

**Demostración:** En primer lugar supongamos que las derivadas de  $r$  de orden menor o igual a  $n$ , se anulan en el punto 0. Para  $n = 1$ , esto quiere decir  $r(0) = r'(0) = 0$ . Entonces  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = \lim_{h \rightarrow 0} [r(h) - r(0)]/h = r'(0) = 0$ . Para  $n = 2$  tenemos  $r(0) = r'(0) = r''(0) = 0$ . Por lo que acabamos de ver esto implica  $\lim_{x \rightarrow 0} r'(x)/x = 0$ . El Teorema del Valor Medio nos asegura que, para todo  $h \neq 0$ , existe  $x$  en el intervalo de extremos 0 y  $h$  tal que  $r(h)/h^2 = [r(h) - r(0)]/h^2 = r'(x)h/h^2 = r'(x)/h$ . Por consiguiente,  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^2 =$

$\lim_{h \rightarrow 0} r'(x)/h = \lim_{h \rightarrow 0} [r'(x)/x][x/h] = 0$ , pues  $h \rightarrow 0$  implica  $x \rightarrow 0$  y, además,  $|x/h| \leq 1$ . El mismo argumento nos permite pasar de  $n = 2$  a  $n = 3$  y así sucesivamente. Recíprocamente, supongamos que  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^n = 0$ . De aquí resulta que, para  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^i = \lim_{h \rightarrow 0} (r(h)/h^n)h^{n-i} = 0$ . Por tanto  $r(0) = \lim_{h \rightarrow 0} r(h) = \lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^0 = 0$ . Además,  $r'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = 0$ . Respecto a  $r''(0)$  consideremos la función auxiliar  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $\varphi(h) = r(h) - r''(0)h^2/2$ . Evidentemente,  $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ . De la parte del lema ya demostrada se deduce que  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h)/h^2 = 0$ . Como  $\varphi(h)/h^2 = r(h)/h^2 - r''(0)/2$  y sabemos que  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^2 = 0$ , resulta que  $r''(0) = 0$ . El mismo argumento nos permite pasar de  $n = 2$  a  $n = 3$ , y así sucesivamente.  $\square$

**Teorema 1. (Fórmula de Taylor infinitesimal)** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $n$  veces derivable en el punto  $a \in I$ . La función  $r : J \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en el intervalo  $J = \{h \in \mathbb{R} : a + h \in I\}$  mediante la igualdad

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n + r(h),$$

cumple  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^n = 0$ . Recíprocamente, si  $p(h)$  es un polinomio de grado  $\leq n$  tal que  $r(h) = f(a+h) - p(h)$  cumple  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^n = 0$ , entonces  $p(h)$  es el polinomio de Taylor de orden  $n$  de  $f$  en el punto  $a$ , esto es,

$$p(h) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot h^i.$$

**Demostración:** La función  $r$ , definida a partir de la fórmula de Taylor, es  $n$  veces derivable en el punto 0 y sus derivadas, hasta la de orden  $n$ , son nulas en dicho punto. Luego, por el Lema, se tiene  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^n = 0$ . Recíprocamente, si  $r(h) = f(a+h) - p(h)$  es tal que  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^n = 0$  entonces, de nuevo por el Lema, las derivadas, hasta la de orden  $n$ , de  $r$  en el punto 0 son nulas, luego  $p^{(i)}(0) = f^{(i)}(a)$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ , o sea,  $p(h)$  es el polinomio de Taylor de orden  $n$  de la función  $f$  en el punto  $a$ .  $\square$

**Ejemplo 2.** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $n$  veces derivable en el punto  $a \in \text{int } I$  y tal que  $f^{(i)}(a) = 0$  para  $1 \leq i < n$  y  $f^{(n)}(a) \neq 0$ . Si  $n$  es par,

entonces  $f$  posee un mínimo local estricto en el punto  $a$  siempre que  $f^{(n)}(a) > 0$ , un máximo local estricto siempre que  $f^{(n)}(a) < 0$ . Si  $n$  es impar entonces  $a$  no es punto ni de mínimo ni de máximo local. En efecto, en este caso podemos escribir la fórmula de Taylor como

$$f(a+h) - f(a) = h^n \left[ \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{r(h)}{h^n} \right].$$

Por la definición de límite existe  $\delta > 0$  tal que para  $a+h \in I$ ,  $0 < |h| < \delta$ , la suma de los términos dentro de los corchetes tiene el mismo signo que  $f^{(n)}(a)$ . Como  $a \in \text{int } I$ , podemos tomar  $\delta$  de modo que  $|h| < \delta \rightarrow a+h \in I$ . Entonces, cuando  $n$  es par y  $f^{(n)}(a) > 0$ , la diferencia  $f(a+h) - f(a)$  es positiva siempre que  $0 < |h| < \delta$ , luego  $f$  posee un mínimo local estricto en el punto  $a$ . Análogamente, si  $n$  es par y  $f^{(n)}(a) < 0$ , la diferencia  $f(a+h) - f(a)$  es negativa cuando  $0 < |h| < \delta$ , luego  $f$  tiene un máximo local en el punto  $a$ . Finalmente, si  $n$  es impar, el factor  $h^n$  tiene el mismo signo que  $h$ , luego la diferencia  $f(a+h) - f(a)$  cambia de signo cuando  $h$  así lo hace, luego  $f$  no tiene ni un máximo ni un mínimo local en el punto  $a$ .

**Ejemplo 3. (De nuevo la Regla de L'Hôpital)** Sean  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$   $n$  veces derivables en el punto  $a \in I$ , con derivadas nulas en dicho punto hasta la de orden  $n-1$ . Si  $g^{(n)}(a) \neq 0$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

En efecto, por la fórmula de Taylor, tenemos

$$f(a+h) = h^n \left[ \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{r(h)}{h^n} \right]$$

y

$$g(a+h) = h^n \left[ \frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \frac{s(h)}{h^n} \right],$$

donde  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(h)}{h^n} = 0$ . Por tanto

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{r(h)}{h^n}}{\frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \frac{s(h)}{h^n}} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

La fórmula de Taylor infinitesimal se denomina así porque sólo afirma algo cuando  $h \rightarrow 0$ . A continuación daremos otra versión de esta fórmula donde se calcula de forma aproximada el valor de  $f(a+h)$  para  $h$  fijo. Ésta es una generalización del Teorema del Valor Medio de Lagrange. Igual que en aquel teorema, se trata de un resultado de carácter global, donde se supone que  $f$  es  $n$  veces derivable en todos los puntos del intervalo  $(a, a+h)$ .

**Teorema 2. (Fórmula de Taylor, con resto de Lagrange.)**

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivable  $n$  veces en el intervalo abierto  $(a, b)$  y  $f^{(n-1)}$  continua en  $[a, b]$ . Entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n.$$

Escribiendo  $b = a + h$ , esto quiere decir que existe  $\theta$ ,  $0 < \theta < 1$ , tal que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n.$$

**Demostración:** Sea  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{K}{n!}(b-x)^n,$$

donde la constante  $K$  se escoge de forma que  $\varphi(a) = 0$ . Entonces  $\varphi$  es continua en  $[a, b]$ , diferenciable en  $(a, b)$  y  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ . Se ve fácilmente que

$$\varphi'(x) = \frac{K - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}.$$

Por el Teorema de Rolle, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $\varphi'(c) = 0$ . Esto significa que  $K = f^{(n)}(c)$ . Ahora el Teorema 2 se obtiene haciendo  $x = a$  en la definición de  $\varphi$  y recordando que  $\varphi(a) = 0$ .  $\square$

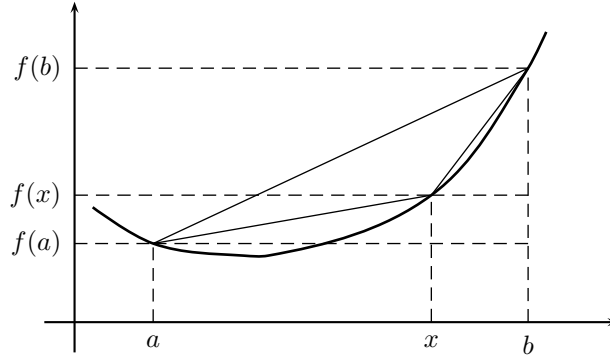
## 2. Funciones cóncavas y convexas

Si  $a \neq b$ , la recta que une los puntos  $(a, A)$  y  $(b, B)$  en el plano  $\mathbb{R}^2$  es el conjunto de los puntos  $(x, y)$  tales que

$$y = A + \frac{B-A}{b-a}(x-a),$$

o equivalentemente

$$y = B + \frac{B - A}{b - a}(x - b).$$



Cuando se tiene una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en un conjunto  $X \subset \mathbb{R}$ , dados  $a, b \in X$ , la recta que une los puntos  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$  del gráfico de  $f$  se llama *secante*  $ab$ .

Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo. Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se llama *convexa* cuando su gráfico está situado debajo de cualquier secante. De forma más precisa, la convexidad de  $f$  se expresa como sigue:

$$a < x < b \text{ en } I \Rightarrow f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

o sea

$$a < x < b \text{ en } I \Rightarrow f(x) \leq f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b).$$

Por tanto,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa en el intervalo  $I$  si, y sólo si, se cumplen las desigualdades fundamentales:

$$(*) \quad a < x < b \text{ en } I \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Una cualquiera de las dos desigualdades anteriores implica la otra. Significa que, si  $a < x < b$ , la secante  $ax$  tiene menor pendiente que la secante  $ab$  y ésta, a su vez, tiene menor pendiente que la secante  $xb$ .

**Teorema 3.** Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa en el intervalo  $I$  entonces existen las derivadas laterales  $f'_+(c)$  y  $f'_-(c)$  en todo punto  $c \in \text{int}I$ .

**Demostración:** En virtud de las observaciones que acabamos de hacer la función  $\varphi_c(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$  es monótona creciente en el intervalo  $J = I \cap (c, +\infty)$ . Además, como  $c \in \text{int } I$ , existe  $a \in I$ , tal que  $a < c$ . Por tanto,  $\varphi_c(x) \geq [f(a) - f(c)]/(a - c)$  para todo  $x \in J$ . Así, la función  $\varphi_c : J \rightarrow \mathbb{R}$  está acotada inferiormente. Luego existe el límite por la derecha  $f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \varphi_c(x)$ . Para la derivada por la izquierda usamos un razonamiento semejante.  $\square$

**Corolario 5.** Una función convexa  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en todo punto del interior del intervalo  $I$ .

Obsérvese que  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(0) = 1$  y  $f(x) = 0$  si  $0 < x \leq 1$ , es convexa y sin embargo discontinua en el punto 0.

**Teorema 4.** Las siguientes afirmaciones sobre la función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , derivable en el intervalo  $I$ , son equivalentes:

- (1)  $f$  es convexa.
- (2) La derivada  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$  es monótona creciente.
- (3) Para cualesquiera  $a, x \in I$  se tiene  $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ , o sea, el gráfico de  $f$  está situado encima de sus tangentes.

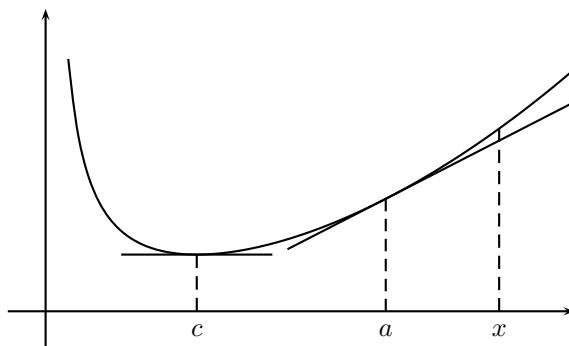
**Demostración:** Probaremos las implicaciones  $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ .  
 $(1) \Rightarrow (2)$ . Sean  $a < x < b$  en  $I$ . Haciendo primero  $x \rightarrow a^+$ , y después  $x \rightarrow b^-$ , en las desigualdades fundamentales (\*), se tiene  $f'_+(a) \leq [f(b) - f(a)]/(b - a) \leq f'_-(b)$ . Luego  $a < b \Rightarrow f'_+(a) \leq f'_-(b)$ .

$(2) \Rightarrow (3)$ . Consideremos  $a < x$  en  $I$ . Por el Teorema del Valor Medio existe  $z \in (a, x)$  tal que  $f(x) = f(a) + f'(z)(x - a)$ . Como  $f'$  es monótona creciente, tenemos  $f'(z) \geq f'(a)$ . Luego  $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ . En el caso  $x < a$  se usa un razonamiento análogo.

$(3) \Rightarrow (1)$ . Sean  $a < c < b$  en  $I$ . Escribimos  $\alpha(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$  y llamamos  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \alpha(x)\}$  al semiplano superior limitado por la recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(c, f(c))$ ,  $y = \alpha(x)$ . Evidentemente,  $H$  es un subconjunto convexo del plano, esto es, el segmento que une dos puntos cualesquiera de  $H$  está contenido en  $H$ . La hipótesis (3) nos asegura que los puntos  $(a, f(a))$

y  $(b, f(b))$  pertenecen a  $H$ . En particular, el punto de dicho segmento que tiene abscisa  $c$  pertenece a  $H$ , esto es, tiene ordenada  $\geq \alpha(c) = f(c)$ . Esto significa que  $f(c) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$ . Como  $a < c < b$  son puntos cualesquiera de  $I$ , la función  $f$  es convexa.  $\square$

**Corolario 1.** Todo punto crítico de una función convexa es un punto de mínimo absoluto.



**Fig. 6** - La función  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{1}{x}$ , es convexa. Su punto crítico  $c = 2$  es un mínimo absoluto. Su gráfico está situado encima de sus tangentes.

En efecto, decir que  $a \in I$  es un punto crítico de la función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  equivale a afirmar que  $f$  tiene derivada nula en dicho punto. Si  $f$  es convexa y  $a \in I$  es un punto crítico de  $f$  entonces la condición (3) de arriba nos asegura que  $f(x) \geq f(a)$  para todo  $x \in I$ , luego  $a$  es un punto mínimo absoluto de  $f$ .

**Corolario 2.** Una función dos veces derivable en el intervalo  $I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , es convexa si, y sólo si,  $f''(x) \geq 0$  para todo  $x \in I$ .

En efecto,  $f''(x) \geq 0$  para todo  $x \in I$  equivale a afirmar que  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$  es monótona creciente.

Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se dice cóncava cuando  $-f$  es convexa, esto es, cuando el gráfico de  $f$  está encima de sus secantes. Las desigualdades que caracterizan a una función cóncava son análogas a las de (\*) de arriba, con  $\geq$  en vez de  $\leq$ . En cada punto interior  $a$  de su dominio existen las derivadas laterales de una función cóncava,



luego la función es continua en dichos puntos. Una función derivable es cóncava si, y sólo si, su derivada es monótona decreciente. Una función dos veces derivable es cóncava si, y sólo si, su derivada segunda es  $\leq 0$ . Una función derivable es cóncava si, y sólo si, su derivada segunda es  $\leq 0$ . Una función derivable es cóncava si, y sólo si, su gráfico está situado debajo de sus tangentes. Todo punto crítico de una función cóncava es un punto de máximo absoluto.

Existen también las nociones de función *estrictamente convexa* y *estrictamente cóncava*, donde se exige que

$$a < x < b \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

en el caso convexo, y con  $>$  en vez de  $<$  en el caso cóncavo. Esta condición impide que el gráfico de  $f$  posea partes rectilíneas. La convexidad estricta implica que  $f'$  es estrictamente creciente, pero no implica  $f''(x) > 0$  para todo  $x \in I$ . No obstante,  $f''(x) > 0$  para todo  $x \in I \Rightarrow f'$  estrictamente creciente  $\Rightarrow f$  estrictamente convexa.

**Ejemplo 4.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$  la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{2n}$  es estrictamente convexa, pero  $f''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2}$  se anula en el punto  $x = 0$ . La función exponencial  $f(x) = e^x$  es (estrictamente) convexa, mientras que  $\log x$  (si  $x > 0$ ) es cóncava. La función  $g : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 1/x$ , es cóncava si  $x < 0$  y convexa si  $x > 0$ .

Los puntos  $x$  del intervalo  $[a, b]$  se escriben de forma única, como  $x = (1-t)a + tb$ , con  $0 \leq t \leq 1$ . En efecto, esta igualdad es equivalente a  $t = (x-a)/(b-a)$ . El segmento de recta que une los puntos  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$  en el plano, el punto de abscisa  $x = (1-t)a + tb$  tiene como ordenada  $(1-t)f(a) + tf(b)$ . Por tanto, una función es convexa si, y sólo si,

$$a, b \in I, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \Rightarrow \quad f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Equivalentemente,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa si, y sólo si, para cualesquiera  $a_1, a_2 \in I$  y  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  tales que  $t_1 + t_2 = 1$ , se tiene

$$f(t_1 a_1 + t_2 a_2) \leq t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2).$$

Ahora consideremos  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  convexa,  $a_1, a_2, a_3 \in I$  y  $t_1, t_2, t_3 \in [0, 1]$ , con  $t_1 + t_2 + t_3 = 1$ . Afirmamos que

$$f(t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3) \leq t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2) + t_3 f(a_3).$$

En efecto, esta desigualdad es obvia si  $t_1 = t_2 = 0$  y  $t_3 = 1$ . No obstante, si  $t_1 + t_2 \neq 0$ , podemos escribir

$$t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3 = (t_1 + t_2) \left[ \frac{t_1}{t_1 + t_2} a_1 + \frac{t_2}{t_1 + t_2} a_2 \right] + t_3 a_3 .$$

Como

$$(t_1 + t_2) + t_3 = 1 \quad \text{y} \quad \frac{t_1}{t_1 + t_2} + \frac{t_2}{t_1 + t_2} = 1 ,$$

aplicando dos veces el caso ya conocido, en el que se tiene dos sumandos, resulta la desigualdad que queremos obtener.

Análogamente, si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa, entonces, dados  $a_1, \dots, a_n \in I$  y  $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$  tales que  $t_1 + \dots + t_n = 1$ , se tiene

$$f(t_1 a_1 + \dots + t_n a_n) \leq t_1 f(a_1) + \dots + t_n f(a_n) .$$

Este resultado aplicado a la función convexa  $f(x) = \exp(x)$ , con  $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 1/n$ ,  $a_1 = \log x_1, \dots, a_n = \log x_n$ , nos da, para cualesquiera  $n$  números reales positivos  $x_1, \dots, x_n$ , la desigualdad

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} &= \sqrt[n]{e^{a_1} e^{a_2} \dots e^{a_n}} \\ &= \exp \left( \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right) \\ &= f(t_1 a_1 + \dots + t_n a_n) \\ &\leq t_1 f(a_1) + \dots + t_n f(a_n) \\ &= \frac{e^{a_1} + \dots + e^{a_n}}{n} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} , \end{aligned}$$

o sea:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} .$$

Ésta es la desigualdad clásica entre las medias aritméticas y geométrica.

En general, el mismo método sirve para demostrar la desigualdad:

$$x_1^{t_1} \cdot x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n} \leq t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n$$

válidas para números mayores o iguales a  $x_1, \dots, x_n$  y  $t_1, \dots, t_n$  tales que  $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$ . La desigualdad anterior entre las medias aritméticas y geométrica corresponde al caso particular  $t_1 = \dots = t_n = 1/n$ .

### 3. Aproximaciones sucesivas y el método de Newton

Se dice que una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una *contracción* cuando existe una constante  $k \in [0, 1)$  tal que  $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$  para cualesquiera  $x, y \in X$ . Los ejemplos más comunes de contracciones son las funciones  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , derivables en el intervalo  $I$ , tales que  $|f'(x)| \leq k < 1$  para todo  $x \in I$ . Evidentemente, toda contracción es una función uniformemente continua.

**Teorema 5. (Punto fijo de las contracciones)** *Si  $X \subset \mathbb{R}$  es cerrado entonces toda contracción  $f : X \rightarrow X$  posee un único punto fijo. De forma más precisa, dado cualquier  $x_0 \in X$ , la sucesión de las aproximaciones sucesivas*

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$$

*converge para el único punto  $a \in X$  tal que  $f(a) = a$ .*

**Demostración:** Sea  $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$  para cualesquiera  $x, y \in X$ , donde  $0 \leq k < 1$ . Entonces  $|x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}|$ , luego, por el Criterio de d'Álembert, la serie  $s = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$  es absolutamente convergente. Ahora bien, la suma de los  $n$  primeros términos de esta serie es  $s_n = x_n - x_0$ . De  $\lim s_n = s$  se sigue  $\lim x_n = s + x_0 = a$ . Como el conjunto  $X$  es cerrado se tiene  $a \in X$ . Haciendo  $n \rightarrow \infty$  en la igualdad  $x_{n+1} = f(x_n)$ , como  $f$  es continua, se obtiene  $a = f(a)$ . Finalmente, si  $a = f(a)$  y  $b = f(b)$  entonces  $|b - a| = |f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$ , o sea,  $(1 - k)|b - a| \leq 0$ . Como  $1 - k > 0$ , concluimos que  $a = b$ , luego el punto fijo  $a \in X$  es único.  $\square$

**Ejemplo 5.** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ , no tiene ningún punto fijo, pues  $f(x) > x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Su derivada  $f'(x) = x/\sqrt{x^2 + 1}$  cumple  $|f'(x)| < 1$ , luego se tiene  $|f(y) - f(x)| < |y - x|$  para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}$ . Este ejemplo demuestra que solamente la condición  $|f(y) - f(x)| < |y - x|$  no es suficiente para obtener un punto fijo.

**Ejemplo 6.** La función  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = x/2$ , es una contracción; sin embargo, no tiene ningún punto fijo  $a \in [1, +\infty)$ . Esto demuestra que en el método de las aproximaciones sucesivas es esencial verificar que la condición  $f(X) \subset X$  se cumple. En este ejemplo, no se tiene  $f([1, +\infty)) \subset [1, +\infty)$ .

**Ejemplo 7.**  $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ , dada por  $f(x) = x/2$ , tiene derivada  $f'(x) = 1/2$ ; sin embargo no posee ningún punto fijo, pues  $(0, 1)$  no es cerrado.

Una aplicación importante del método de las aproximaciones sucesivas es el llamado *método de Newton* para la obtención de aproximaciones de una raíz de la ecuación  $f(x) = 0$ . En este método se tiene una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  en el intervalo  $I$ , tal que  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ , se toma un valor inicial  $x_0$  y se escribe

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Cuando la sucesión  $(x_n)$  converge, su límite  $a$  es una raíz de la ecuación  $f(x) = 0$  pues, haciendo  $n \rightarrow \infty$  en la igualdad

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

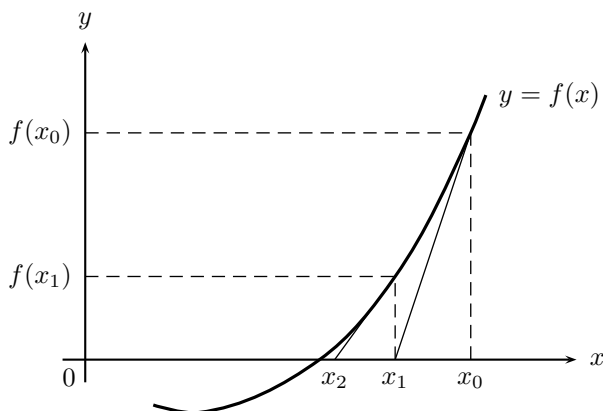
resulta  $a = a - f(a)/f'(a)$ , de donde  $f(a) = 0$ .

El método de Newton resulta al observar que las raíces de la ecuación  $f(x) = 0$  son los puntos fijos de la función  $N = N_f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

El número  $N(x) = x - f(x)/f'(x)$  es la abscisa del punto en que la tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(x, f(x))$  intersecta al eje horizontal. La idea que motiva el método de Newton es que, si la tangente es una aproximación de la curva, entonces su intersección con el eje  $x$  es una aproximación del punto de intersección de la curva con dicho eje, esto es, el punto  $x$  tal que  $f(x) = 0$ .

Es fácil dar ejemplos en los que la sucesión  $(x_n)$  de las aproximaciones del método de Newton no converge: es suficiente tomar una función, como por ejemplo  $f(x) = e^x$ , que no alcance el valor 0.



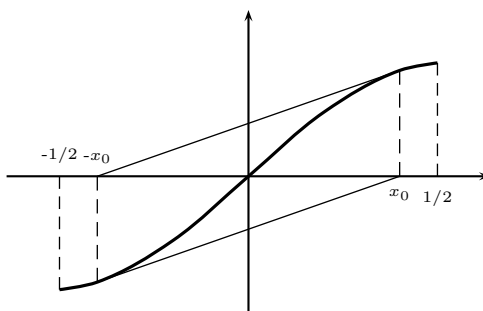
**Fig. 7** - Como la pendiente de la tangente es  $f'(x) = f(x_0)/(x_0 - x_1)$ , se sigue que  $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$

Incluso en el caso en que la ecuación  $f(x) = 0$  tenga una raíz real la sucesión  $(x_n)$  puede ser divergente, por ejemplo si  $x_0$  se toma lejos de la raíz.

Existen, evidentemente, infinitas funciones cuyos puntos fijos son las raíces de la ecuación  $f(x) = 0$ . La importancia de la función  $N(x)$  reside en la rapidez con que las aproximaciones sucesivas convergen a la raíz  $a$  de la ecuación  $f(x) = 0$  (cuando convergen): cada  $x_{n+1} = N(x_n)$  es una aproximación de  $a$  cerca del doble de los dígitos decimales exactos de  $x_n$ . (Vea el Ejemplo 9).

A continuación demostraremos que si la derivada segunda de  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es continua  $f'' : I \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ , entonces cada punto  $a \in I$  tal que  $f(a) = 0$  tiene un entorno  $J = [a - \delta, a + \delta]$  tal que, comenzando con cualquier valor inicial  $x_0 \in J$ , la sucesión de puntos  $(x_{n+1}) = N(x_n)$  converge a  $a$ .

En efecto, la derivada  $N'(x) = f(x)f''(x)/f'(x)^2$  se anula en el punto  $x = a$ . Como  $N'(x)$  es continua, si fijamos cualquier  $k \in (0, 1)$  obtendremos  $\delta > 0$  tal que  $J = [a - \delta, a + \delta] \subset I$  y  $|N'(x)| \leq k < 1$  para todo  $x \in J$ . Afirmamos que  $x \in J \Rightarrow N(x) \in J$ . De hecho,  $x \in J \Rightarrow |N(x) - N(a)| \leq k|x - a| < |x - a| \leq \delta \Rightarrow N(x) \in J$ . Por tanto,  $N : J \rightarrow I$  es una contracción. Luego la sucesión  $x_1 = N(x_0), \dots, x_{n+1} = N(x_n)$  converge al único punto fijo  $a \in J$  de la contracción  $N$ .



**Fig. 8** - La función  $f : [-1/2, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = x - x^3$ , se anula si  $x = 0$ . Los valores aproximados de esta raíz por el método de Newton, cuando el valor inicial es  $x_0 = \sqrt{5}/5$ , son sucesivamente  $x_0, -x_0, x_0, -x_0$ , etc. Así, el método no converge.

**Ejemplo 8. (Cálculo aproximado de  $\sqrt[n]{c}$ ).** Dado  $c > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos el intervalo  $I = [\sqrt[n]{c}, +\infty)$  y la función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = x^n - c$ . Como  $f'(x) = nx^{n-1}$ , la función de Newton  $N : I \rightarrow \mathbb{R}$  es de la forma  $N(x) = \frac{1}{n}[(n-1)x + c/x^{n-1}]$ . Así, para todo  $x > 0$ ,  $N(x)$  es la media aritmética de los  $n$  números  $x, x, \dots, x, c/x^{n-1}$ . Como la media geométrica de estos  $n$  números es  $\sqrt[n]{c}$ , concluimos que  $N(x) \geq \sqrt[n]{c}$  para todo  $x > 0$ . En particular,  $x \in I \Rightarrow N(x) \in I$ . Además  $N'(x) = \frac{n-1}{n}(1 - c/x^n)$ , luego  $0 \leq N'(x) \leq (n-1)/n$  para todo  $x \in I$ . Esto demuestra que  $N : I \rightarrow I$  es una contracción. Por tanto, tomando cualquier  $x_0 > 0$ , tenemos  $N(x_0) = x_1 \in I$  y las aproximaciones sucesivas  $x_{n+1} = N(x_n)$  convergen (rápidamente) a  $\sqrt[n]{c}$ .

**Ejemplo 9. (El método de Newton converge cuadráticamente.)** Consideremos  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  en el intervalo  $I$ , tal que  $|f''(x)| \leq A$  y  $|f'(x)| \geq B$  para todo  $x \in I$ , donde  $A$  y  $B$  son constantes positivas. Acabamos de ver que, si tomamos la aproximación inicial  $x_0$  suficientemente cerca de un punto  $a$  tal que  $f(a) = 0$ , la sucesión de las aproximaciones de Newton  $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$  converge a  $a$ . A continuación usaremos el Teorema 2 para obtener una comparación entre los errores  $|x_{n+1} - a|$  y  $|x_n - a|$ . Existe un número  $c$  comprendido entre  $a$  y  $x_n$  tal que:

$$0 = f(a) = f(x_n) + f'(x_n)(a - x_n) + \frac{f''(c)}{2}(a - x_n)^2.$$

Entonces

$$f'(x_n)x_n - f(x_n) - f'(x_n)a = \frac{f''(c)}{2}(x_n - a)^2.$$

Dividiendo por  $f'(x_n)$  obtenemos:

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - a = \frac{f''(c)}{2f'(x_n)}(x_n - a)^2,$$

esto es,

$$x_{n+1} - a = \frac{f''(c)}{2f'(x_n)}(x_n - a)^2.$$

De donde, inmediatamente, se tiene  $|x_{n+1} - a| \leq \frac{A}{2B}|x_n - a|^2$ . Cuando  $|x_n - a| < 1$ , el cuadrado  $|x_n - a|^2$  es mucho menor, lo que muestra la rapidez de la convergencia en el método de Newton. Por ejemplo, si  $f(x) = x^n - c$  tenemos  $f''/2f' = (n-a)/2x$ . Por tanto, si queremos calcular valores aproximados de  $\sqrt[n]{c}$ , donde  $c > 1$ , podemos empezar con  $x_0 > 1$  y siempre tendremos  $|x_{k+1} - \sqrt[n]{c}| \leq \frac{n-1}{2}|x_k - \sqrt[n]{c}|^2$ . Si  $n \leq 3$  se tiene  $|x_{k+1} - \sqrt[n]{c}| \leq |x_k - \sqrt[n]{c}|^2$ . Luego si  $x_k$  tiene  $p$  dígitos decimales exactos entonces  $x_{k+1}$  tiene  $2p$ .

## 5. Ejercicios

### Sección 1: Fórmula de Taylor

1. Use la igualdad

$$\frac{1}{(1-x)} = 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{(1-x)}$$

y la fórmula de Taylor infinitesimal para calcular las derivadas sucesivas en el punto  $x = 0$ , de la función  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = 1/(1-x)$ .

2. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^5/(1+x^6)$ . Calcule las derivadas de orden 2001 y 2003 de  $f$  en el punto  $x = 0$ .
3. Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^\infty$  en el intervalo  $I$ . Supongamos que existe  $k > 0$  tal que  $|f^{(n)}(x)| \leq k$  para todo  $x \in I$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Pruebe que para cualesquiera  $x_0, x \in I$  se tiene  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ .

4. Usando la fórmula de Taylor con resto de Lagrange demuestre que  $f'' \geq 0 \Rightarrow f$  convexa.
5. Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  en el intervalo  $I$ . Dado  $a \in I$  defina la función  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\varphi(x) = [f(x) - f(a)]/(x - a)$  si  $x \neq a$  y  $\varphi(a) = f'(a)$ . Pruebe que  $\varphi$  es de clase  $C^1$ . Demuestre que  $f \in C^3 \Rightarrow \varphi \in C^2$ .
6. Sea  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un polinomio de grado  $n$ . Pruebe que para cualesquiera  $a, x \in \mathbb{R}$  se tiene:

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x - a) + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

7. Sean  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  dos veces derivables en el punto  $a \in \text{int } I$ . Si  $f(a) = g(a)$ ,  $f'(a) = g'(a)$  y  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x \in I$ , demuestre que  $f''(a) \geq g''(a)$ .

### Sección 2: Funciones cóncavas y convexas

1. Sean  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  funciones convexas tales que  $f(I) \subset J$  y  $g$  monótona creciente. Pruebe que  $g \circ f$  es convexa. Dé otra demostración suponiendo que  $f$  y  $g$  son dos veces derivables. Demuestre mediante un ejemplo que si  $g$  no es monótona creciente el resultado no es necesariamente verdadero.
2. Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  posee un punto crítico no degenerado  $c \in \text{int } I$  en el que  $f''$  es continua, demuestre que existe  $\delta > 0$  tal que  $f$  es convexa o cóncava en el intervalo  $(c - \delta, c + \delta)$ .
3. Analice la convexidad de la suma y el producto de dos funciones convexas.
4. Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en el intervalo  $I$ , se llama *quasi-convexa* (respectivamente, *quasi-cóncava*) cuando, para todo  $c \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in I : f(x) \leq c\}$  (respectivamente,  $\{x \in I : f(x) \geq c\}$ ) es vacío o es un intervalo. Pruebe que toda función convexa (respectivamente, cóncava) es *quasi-convexa* (respectivamente, *quasi-cóncava*) y que toda función monótona es, simultáneamente, *quasi-convexa* y *quasi-cóncava*.



5. Pruebe que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es quasi-convexa si, y sólo si, para todo  $x, y \in I$  y  $t \in [0, 1]$ , se tiene  $f((1-t)x + ty) \leq \max\{f(x), f(y)\}$ . Enuncie el resultado análogo para  $f$  quasi-cóncava.
6. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua quasi-convexa, cuyo valor mínimo se alcanza en el punto  $c \in [a, b]$ . Pruebe que si  $c = a$  entonces  $f$  es monótona creciente, si  $c = b$ ,  $f$  es monótona decreciente, y, finalmente, si  $a < c < b$ ,  $f$  es monótona decreciente en  $[a, c]$  y monótona creciente en  $[c, b]$ . Enuncie un resultado análogo para  $f$  quasi-cóncava. Concluya que una función continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es quasi-convexa si, y sólo si, existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f$  es monótona decreciente en el intervalo  $[a, c]$  y monótona creciente en el intervalo  $[c, b]$ .
7. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa. Suponga que la sucesión de números  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge para todo  $x \in I$ . Pruebe que la función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  es convexa. Pruebe resultados análogos para funciones quasi-convexas, concavas y quasi-cóncavas.
8. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y convexa tal que  $f(a) < 0 < f(b)$ . Pruebe que existe un único punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

### Sección 3: Aproximaciones sucesivas. Método de Newton

1. Sean  $I = [a - \delta, a + \delta]$  y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ , donde  $0 \leq k < 1$ . Pruebe que si  $|f(a) - a| \leq (1 - k)^\delta$  entonces existe un único  $x \in I$  tal que  $f(x) = x$ .
2. Defina  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  mediante  $f(x) = 2^{-x/2}$ . Demuestre que  $f$  es una contracción y que si  $a$  es su único punto fijo entonces  $-a$  es la raíz negativa de la ecuación  $x^2 = 2^x$ . Use el método de las aproximaciones sucesivas y una calculadora para obtener el valor de  $a$  con 8 dígitos decimales exactos.
3. Sea  $I = [a - \delta, a + \delta]$ . Si la función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^2$ , con  $f'(x) \neq 0$  y  $|f(x)f''(x)/f'(x)^2| \leq k < 1$  para todo  $x \in I$ , y  $|f(a)/f'(a)| < (1 - k)\delta$ , pruebe que entonces, para cualquier valor inicial  $x_0 \in I$ , el método de Newton converge hacia la única raíz  $x \in I$  de la ecuación  $f(x) = 0$ .

4. Dado  $a > 1$ , considere la función  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = 1/(a+x)$ . Pruebe que, dado cualquier  $x_0 > 0$ , la sucesión definida inductivamente como  $x_1 = f(x_0), \dots, x_{n+1} = f(x_n)$ , converge a la raíz positiva  $c$  de la ecuación  $x^2 + ax - 1 = 0$ . (Cfr. Ejercicio 3.6, Capítulo 3).
5. Pruebe que 1,0754 es un valor aproximado, con 4 dígitos decimales exactos, de la raíz positiva de la ecuación  $x^6 + 6x - 8 = 0$ .
6. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  convexa y dos veces derivable. Si  $f(a) < 0 < f(b)$ , pruebe que comenzando con un punto  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0) > 0$ , el método de Newton siempre converge a la única raíz  $x \in [a, b]$  de la ecuación  $f(x) = 0$ .

# La integral de Riemann

Las nociones de derivada e integral constituyen los dos conceptos más importantes del Análisis Matemático. Mientras que la derivada corresponde a la noción geométrica de tangente y a la idea física de velocidad, la integral está asociada a la noción geométrica de área y a la idea física de trabajo. Es un hecho notable de suma importancia que estas dos nociones, aparentemente tan distintas, estén íntimamente relacionadas.

## 1. Revisión de sup e ínf

Demostraremos, para su uso inmediato, algunos resultados elementales sobre supremos e ínfimos de conjuntos de números reales.

Dada una función acotada  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , recordemos que  $\sup f = \sup f(X) = \sup\{f(x) : x \in X\}$  e  $\inf f = \inf f(X) = \inf\{f(x) : x \in X\}$ . Todos los conjuntos que consideraremos a continuación serán no vacíos.

**Lema 1.** *Sean  $A, B \subset \mathbb{R}$  tales que, para todo  $x \in A$  e  $y \in B$ , se tiene  $x \leq y$ . Entonces  $\sup A \leq \sup B$ . Para que  $\sup A = \inf B$  es necesario y suficiente que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existan  $x \in A$  e  $y \in B$  tales que  $y - x < \varepsilon$ .*

**Demostración:** Cada  $y \in B$  es una cota superior de  $A$ , luego  $\sup A \leq y$ . Lo que demuestra que  $\sup A$  es una cota inferior de  $B$  y por tanto  $\sup A \leq \inf B$ . Si tuviesemos la desigualdad estricta

$\sup A < \inf B$ ; entonces  $\varepsilon = \inf B - \sup A > 0$  e  $y - x \geq \varepsilon$  para cualesquiera  $x \in A$  e  $y \in B$ . Recíprocamente, si  $\sup A = \inf B$  entonces, dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\sup A - \varepsilon/2$  no es una cota superior de  $A$  e  $\inf B + \varepsilon/2$  no es una cota inferior de  $B$ , luego existen  $x \in A$  e  $y \in B$  tales que  $\sup A - \varepsilon/2 < x \leq \sup A = \inf B \leq y < \inf B + \varepsilon/2$ . Por lo tanto  $y - x < \varepsilon$ .  $\square$

**Lema 2.** Sean  $A$  y  $B$  conjuntos acotados y  $c \in \mathbb{R}$ . Entonces los conjuntos  $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$  y  $c \cdot A = \{c \cdot x : x \in A\}$  también son acotados. Además, se tiene  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ ,  $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ ,  $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$  y  $\inf(c \cdot A) = c \cdot \inf A$ , cuando  $c \geq 0$ . Si  $c < 0$  entonces,  $\sup(c \cdot A) = c \cdot \inf A$  e  $\inf(c \cdot A) = c \cdot \sup A$ .

**Demostración:** Escribiendo  $a = \sup A$  y  $b = \sup B$ , para todo  $x \in A$  e  $y \in B$  se tiene  $x \leq a$  e  $y \leq b$ , luego  $x + y \leq a + b$ . Por tanto,  $a + b$  es una cota superior de  $A + B$ . Además, dado  $\varepsilon > 0$ , existen  $x \in A$  e  $y \in B$  tales que  $a - \varepsilon/2 < x$  y  $b - \varepsilon/2 < y$ , de donde  $a + b - \varepsilon < x + y$ . Lo que demuestra que  $a + b$  es la menor cota superior de  $A + B$ , o sea,  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ . La igualdad  $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$  es obvia si  $c = 0$ . Si  $c > 0$ , dado cualquier número  $d$  menor que  $c \cdot a$  tenemos  $d/c < a$ , luego existe  $x \in A$  tal que  $d/c < x$ . De donde  $d < c \cdot x$ . Lo que demuestra que  $c \cdot a$  es la menor cota superior de  $c \cdot A$ , o sea,  $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$ . Los demás casos enunciados en el lema se prueban de forma análoga.  $\square$

**Corolario 3.** Sean  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones acotadas. Entonces las funciones  $f + g, cf : X \rightarrow \mathbb{R}$  también están acotadas para todo  $c \in \mathbb{R}$ . Además  $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$ ,  $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$ ,  $\sup(cf) = c \cdot \sup f$  e  $\inf(cf) = c \cdot \inf f$  cuando  $c \geq 0$ . Si  $c < 0$ , se tiene  $\sup(cf) = c \cdot \inf f$  e  $\inf(cf) = c \cdot \sup f$ .

En efecto, sean  $A = f(X)$ ,  $B = g(X)$ ,  $C = (f + g)(X) = \{f(x) + g(x) : x \in X\}$ . Evidentemente,  $C \subset A + B$ , luego  $\sup(f + g) = \sup(C) \leq \sup(A + B) = \sup A + \sup B = \sup f + \sup g$ . Además,  $\sup(cf) = \sup\{c \cdot f(x) : x \in X\} = \sup(cA) = c \cdot \sup A = c \cdot \sup f$ , cuando  $c \geq 0$ . Los demás casos enunciados en el Corolario se prueban de forma análoga.

**Observación:** De hecho se puede tener  $\sup(f + g) < \sup f + \sup g$  e  $\inf(f + g) > \inf f + \inf g$ . Basta considerar  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$  y  $g(x) = -x$ .

**Lema 3.** Dada  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  acotada, sean  $m = \inf f$ ,  $M = \sup f$  y  $\omega = M - m$ . Entonces  $\omega = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in X\}$ .

**Demostración:** Dados cualesquiera  $x, y \in X$ , que para fijar ideas supondremos tales que  $f(x) \geq f(y)$ , se tiene  $m \leq f(y) \leq f(x) \leq M$ , de donde  $|f(x) - f(y)| \leq M - m = \omega$ . Por otra parte, dado cualquier  $\varepsilon > 0$  podemos encontrar  $x, y \in X$  tales que  $f(x) > M - \varepsilon/2$  y  $f(y) < m + \varepsilon/2$ . Entonces  $|f(x) - f(y)| \geq f(x) - f(y) > M - m - \varepsilon = \omega - \varepsilon$ . Así,  $\omega$  es la menor de las cotas superiores del conjunto  $\{|f(x) - f(y)| : x, y \in X\}$ , lo que prueba el lema.  $\square$

**Lema 4.** Sean  $A' \subset A$  y  $B' \subset B$  conjuntos acotados de números reales. Si para cada  $a \in A$  y  $b \in B$  existen  $a' \in A'$  y  $b' \in B'$  tales que  $a \leq a'$  y  $b' \leq b$ , entonces  $\sup A' = \sup A$  e  $\inf B' = \inf B$ .

**Demostración:** Evidentemente,  $\sup A$  es una cota superior de  $A'$ . Además, si  $c < \sup A$  existe  $a \in A$  tal que  $c < a$ , luego existe  $a' \in A'$  tal que  $c < a \leq a'$ , por tanto  $c$  no es una cota superior de  $A'$ . Así,  $\sup A$  es la menor cota superior de  $A'$ , esto es,  $\sup A = \sup A'$ . Un razonamiento análogo demuestra el resultado para  $\inf B = \inf B'$ .  $\square$

## 2. Integral de Riemann

Una *partición* del intervalo  $[a, b]$  es un subconjunto finito de puntos  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \subset [a, b]$  tal que  $a \in P$  y  $b \in P$ . Siempre usaremos esta notación de forma que  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ . El intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ , de *longitud*  $t_i - t_{i-1}$ , se llamará *i-ésimo* intervalo de la partición  $P$ . Evidentemente,  $\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = b - a$ .

Sean  $P$  y  $Q$  particiones del intervalo  $[a, b]$ . Se dice que  $Q$  *refina*  $P$  cuando  $P \subset Q$ . La manera más sencilla de refinar una partición consiste en añadirle un nuevo punto.

Dada una función acotada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , usaremos la notación  $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$  y  $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ . En particular, tenemos  $m \leq f(x) \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ . Si  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  es una partición de  $[a, b]$ , la notación  $m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ ,  $M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$  y  $\omega_i = M_i - m_i$ , indica el ínfimo, el supremo y la *oscilación* de  $f(x)$

en el  $i$ -ésimo intervalo de  $P$ . Cuando  $f$  es continua los valores  $m_i$  y  $M_i$  son alcanzados por  $f$  en  $[t_{i-1}, t_i]$ . En particular, en este caso existen  $x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i]$  tales que  $\omega_i = |f(y_i) - f(x_i)|$ .

La *suma inferior* de  $f$  relativa a la partición  $P$  es el número

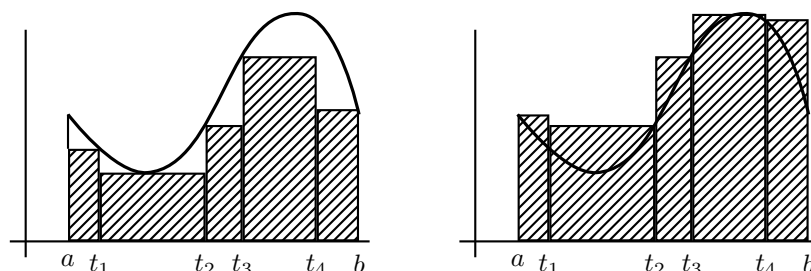
$$s(f; P) = m_1(t_1 - t_0) + \cdots + m_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}).$$

La *suma superior* de  $f$  relativa a la partición  $P$  es, por definición,

$$S(f; P) = M_1(t_1 - t_0) + \cdots + M_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Evidentemente,  $m(b-a) \leq s(f; P) \leq S(f; P) \leq M(b-a)$ , sea cual fuere la partición  $P$ . Además  $S(f; P) - s(f; P) = \sum_{i=1}^n \omega_i(t_i - t_{i-1})$ .

Cuando en el contexto esté claro quién es  $f$ , se puede escribir simplemente  $s(P)$  y  $S(P)$  en vez de  $s(f; P)$  y  $S(f; P)$ , respectivamente.



**Fig. 9** - La suma inferior y la suma superior

En el caso en que  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ , los números  $s(f; P)$  y  $S(f; P)$  son valores aproximados, por defecto y por exceso respectivamente, del área de la región limitada por el gráfico de  $f$ , el intervalo  $[a, b]$  en el eje de abscisas y las perpendiculares a dicho eje en los puntos  $a$  y  $b$ . Cuando  $f(x) \leq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ , esas sumas son aproximadamente de dicha área con el signo invertido.

La *integral superior* y la *integral inferior* de una función acotada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se definen, respectivamente, como

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P s(f; P), \quad \underline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P S(f; P),$$

donde el sup y el ínf se toman en el conjunto de todas las particiones  $P$  del intervalo  $[a, b]$ .

**Teorema 1.** *Cuando se refina una partición, la suma inferior no disminuye y la suma superior no aumenta. O sea:  $P \subset Q \Rightarrow s(f; P) \leq s(f; Q)$  y  $S(f; Q) \leq S(f; P)$ .*

**Demostración:** Supongamos inicialmente que la partición  $Q = P \cup \{r\}$  resulte al añadir a  $P$  un único punto  $r$  y que, por ejemplo,  $t_{j-1} < r < t_j$ . Sean  $m'$  y  $m''$  los ínfimos de  $f$  en los intervalos  $[t_{j-1}, r]$  y  $[r, t_j]$ , respectivamente. Evidentemente,  $m_j \leq m'$ ,  $m_j \leq m''$  y  $t_j - t_{j-1} = (t_j - r) + (r - t_{j-1})$ . Por tanto

$$\begin{aligned} s(f; P) - S(f; P) &= m''(t_j - r) + m'(r - t_{j-1}) - m_j(t_j - t_{j-1}) \\ &= (m'' - m_j)(t_j - r) + (m' - m_j)(r - t_{j-1}) \geq 0. \end{aligned}$$

Para obtener el resultado en el caso general, donde  $Q$  se obtiene al añadir a  $P$   $k$  puntos, se usa  $k$  veces lo que acabamos de probar. Análogamente, se tiene  $P \subset Q \Rightarrow S(f; Q) \leq S(f; P)$ .  $\square$

**Corolario 1.** Para cualesquiera particiones  $P, Q$  del intervalo  $[a, b]$  y cualquier función acotada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se tiene  $s(f; P) \leq S(f; Q)$ .

En efecto, la partición  $P \cup Q$  refina simultáneamente  $P$  y  $Q$ , luego  $s(f; P) \leq s(f; P \cup Q) \leq S(f; P \cup Q) \leq S(f; Q)$ .

**Corolario 2.** Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , si  $m \leq f(x) \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ , entonces:

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq M(b-a).$$

En efecto, las desigualdades de los extremos son obvias, la central resulta del Corolario y del Lema 1.

**Corolario 3.** Sea  $P_0$  una partición de  $[a, b]$ . Si consideremos las sumas  $s(f; P)$  y  $S(f; P)$  relativas exclusivamente a las particiones  $P$  que refinan  $P_0$ , obtendremos los mismos valores de  $\int_a^b f(x)dx$  y de  $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ .

En efecto, es suficiente combinar el Teorema 1 y el Lema 4.

Una función acotada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice *integrable* cuando su integral inferior y su integral superior son iguales. Este valor común se llama *integral* (de Riemann) de  $f$ , y se denota  $\int_a^b f(x)dx$ .

En el símbolo  $\int_a^b f(x)dx$ ,  $x$  es lo que se denomina “variable muda”, esto es,  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt$ , etc.

A veces se prefiere usar la notación más simple  $\int_a^b f$ . La razón para usar la notación más complicada se verá en el Teorema 2, Capítulo 11.

Cuando  $f$  es integrable, su integral  $\int_a^b f(x)dx$  es el número real cuyas aproximaciones por defecto son las sumas inferiores  $s(f; P)$  y cuyas aproximaciones por exceso son las sumas superiores  $S(f; P)$ . El Teorema 1 afirma que estas aproximaciones mejoran cuando se refina la partición  $P$ . Geométricamente, cuando  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ , la existencia de  $\int_a^b f(x)dx$  significa que la región limitada por el gráfico de  $f$ , el segmento  $[a, b]$  en eje de abscisas y las perpendiculares a dicho eje en los puntos  $a$  y  $b$  es medible (esto es, posee área), y el valor de la integral es, por definición, el área de esta región. En el caso general, se tienen el área externa  $\overline{\int_a^b} f(x)dx$  y el área interna  $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ , que pueden ser diferentes, como veremos a continuación.

**Ejemplo 1.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante  $f(x) = 0$  si  $x$  es racional y  $f(x) = 1$  si  $x$  es irracional. Dada una partición cualquiera  $P$ , como cada intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  contiene números racionales e irracionales, tenemos  $m_i = 0$  y  $M_i = 1$ , luego  $s(f; P) = 0$  y  $S(f; P) = b - a$ . Así,  $f$  no es integrable, pues  $\int_a^b f(x)dx = 0$  y  $\overline{\int_a^b} f(x)dx = b - a$ .

**Ejemplo 2.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  constante,  $f(x) = c$  para todo  $x \in [a, b]$ . Entonces, sea cual fuere la partición  $P$ , tenemos  $m_i = M_i = c$



en todos los intervalos de la partición, luego  $s(f; P) = S(f; P) = c(b - a)$ . Así,  $f$  es integrable y  $\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x) = \overline{\int_a^b} f(x)dx = c(b - a)$ .

**Teorema 2. (Condición inmediata de integrabilidad)** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $f$  es integrable.
- (2) Para todo  $\varepsilon > 0$ , existen particiones  $P, Q$  de  $[a, b]$  tales que  $S(f, Q) - s(f, P) < \varepsilon$ .
- (3) Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe una partición  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$  de  $[a, b]$  tal que  $S(f; P) - s(f; P) = \sum_{i=1}^n \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$ .

**Demostración:** Sean  $A$  el conjunto de las sumas inferiores y  $B$  el conjunto de las sumas superiores de  $f$ . Por el Corolario 1 del Teorema 1, se tiene  $s \leq S$  para toda  $s \in A$  y toda  $S \in B$ . Suponiendo (1), entonces  $\sup A = \inf B$ . Luego, por el Lema 1, (1)  $\Rightarrow$  (2). Para probar que (2)  $\Rightarrow$  (3) basta observar que si  $S(f; Q) - s(f; P) < \varepsilon$  entonces, como la partición  $P_0 = P \cup Q$  refina ambas, del Teorema 1 se sigue que  $s(f; P) \leq s(f; P_0) \leq S(f; P_0) \leq S(f, Q)$ , de donde se sigue que  $S(f; P_0) - s(f; P_0) < \varepsilon$ . Finalmente, (3)  $\Rightarrow$  (1) por el Lema 1.  $\square$

**Ejemplo 3.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $f(x) = c$  cuando  $a < x \leq b$  y  $f(a) = A$ . Afirmamos que  $f$  es integrable y que  $\int_a^b f(x)dx = c(b - a)$ . Para fijar ideas, supongamos que  $c < A$ . Entonces, dada cualquier partición  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  tenemos  $m_1 = c$ ,  $M_1 = A$  y  $m_i = M_i = c$  para  $1 < i \leq n$ . Por tanto,  $S(f; P) - s(f; P) = (A - c)(t_1 - t_0)$ . Dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , tomamos una partición  $P$  tal que  $t_1 - t_0 < \varepsilon / (A - c)$ , y obtenemos  $S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon$ . Luego  $f$  es integrable. Además, como  $s(f; P) = c(b - a)$  para toda partición  $P$ , tenemos  $\underline{\int_a^b} f(x)dx = c(b - a)$ . Finalmente, como  $f$  es integrable, resulta  $\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = c(b - a)$ . Evidentemente, se tiene un resultado análogo cuando  $f(x) = c$  para  $x \in [a, b)$ .

### 3. Propiedades de la integral

**Teorema 3.** Sean  $a < c < b$ . Una función acotada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable si, y sólo si, sus restricciones  $f|_{[a, c]}$  y  $f|_{[c, b]}$  son

integrables. En caso afirmativo, se tiene  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ .

**Demostración:** Sean  $A$  y  $B$ , respectivamente, los conjuntos de las sumas inferiores de  $f|_{[a,c]}$  y  $f|_{[c,b]}$ . Es fácil ver que  $A + B$  es el conjunto de las sumas inferiores de  $f$  relativas a las particiones de  $[a, b]$  que contienen al punto  $c$ . Por el Corolario 3 del Teorema 1, para calcular la integral inferior de  $f$  basta considerar las particiones de este tipo, pues estas son las que refinan  $P_0 = \{a, c, b\}$ . Por el Lema 2,  $\int_a^b f(x)dx = \sup(A + B) = \sup A + \sup B = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ . Análogamente se demuestra que  $\int_a^b f(x)dx = \sup(A + B) = \sup A + \sup B = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ . Luego

$$\overline{\int_a^b f} - \underline{\int_a^b f} = \left( \overline{\int_a^c f} - \underline{\int_a^c f} \right) + \left( \overline{\int_c^b f} - \underline{\int_c^b f} \right).$$

Como las dos restas dentro de los paréntesis son  $\geq 0$ , su suma es cero si, y sólo si, ambas son nulas. Así,  $f$  es integrable si, y sólo si, sus restricciones  $f|_{[a,c]}$  y  $f|_{[c,b]}$  lo son. En el caso afirmativo, se tiene la igualdad  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ .  $\square$

**Ejemplo 4.** Se dice que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una *función escalonada* cuando existe una partición  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  de  $[a, b]$  y números reales  $c_1, \dots, c_n$  tales que  $f(x) = c_i$  cuando  $t_{i-1} < x < t_i$ . (Observe que no se exige nada a los valores  $f(t_i)$ ). Del Teorema 3 y del Ejemplo 3 se sigue que toda función escalonada es integrable y que  $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i(t_i - t_{i-1})$ .

**Convenio:** La igualdad  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$  tiene sentido exclusivamente cuando  $a < c < b$ . Para que sea válida, se cuales fueren  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , de aquí en adelante adoptaremos dos convenios: Primero  $\int_a^a f(x)dx = 0$ . Segundo  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ . Aceptado esto, es válida para toda función integrable la igualdad anterior. Para verificar esto hay seis casos a considerar:  $a \leq b \leq c$ ,  $a \leq c \leq b$ ,  $b \leq a \leq c$ ,  $b \leq c \leq a$ ,  $c \leq a \leq b$  y  $c \leq b \leq a$ . Basta en cada caso admitir la integrabilidad de  $f$  en el mayor de los intervalos.

**Teorema 4.** Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrables. Entonces:

(1) La suma  $f + g$  es integrable y

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx .$$

(2) El producto  $f \cdot g$  es integrable. Si  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$ .

(3) Si  $0 < k \leq |g(x)|$  para todo  $x \in [a, b]$ , entonces el cociente  $f/g$  es integrable.

(4) Si  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$  entonces  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ .

(5)  $|f|$  es integrable y  $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ .

**Demostración:** Dada cualquier partición  $P$  de  $[a, b]$ , denotamos por  $m'_i, m''_i$  y  $m_i$  los ínfimos de  $f, g$  y  $f + g$  en el  $i$ -ésimo intervalo de  $P$ , respectivamente. Del Corolario del Lema 2 se deduce que,  $m'_i + m''_i \leq m_i$ , luego  $s(f; P) + s(g; P) \leq s(f + g; P) \leq \int_a^b (f + g)$  para toda partición  $P$ . Si tomamos dos particiones  $P$  y  $Q$  también tendremos:

$$s(f; P) + s(g; Q) \leq s(f; P \cup Q) + s(g; P \cup Q) \leq \int_a^b f + g ,$$

por consiguiente,

$$\begin{aligned} \int_a^b f + \int_a^b g &= \sup_P s(f; P) + \sup_Q s(g; Q) \\ &= \sup_{P, Q} [s(f; P) + s(g; Q)] \leq \int_a^b (f + g) . \end{aligned}$$

Esto prueba la primera de las desigualdades que vienen a continuación; la tercera se demuestra de forma análoga y la segunda es obvia:

$$\int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b (f + g) \leq \overline{\int_a^b (f + g)} \leq \overline{\int_a^b f} + \overline{\int_a^b g} .$$

Cuando  $f$  y  $g$  son integrales las tres desigualdades se convierten en igualdades, lo que prueba (1).

(2) Sea  $K$  tal que  $|f(x)| \leq K$  y  $|g(x)| \leq K$  para todo  $x \in [a, b]$ . Dada una partición  $P$  sean, respectivamente,  $\omega'_i, \omega''_i$  y  $\omega_i$  las oscilaciones de  $f, g$  y  $f \cdot g$  en el  $i$ -ésimo intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} |f(y) \cdot g(y) - f(x) \cdot g(x)| &= |(f(y) - f(x))g(y) + f(x)(g(y) - g(x))| \\ &\leq |f(y) - f(x)||g(y)| + |f(x)||g(y) - g(x)| \\ &\leq K|\omega'_i + \omega''_i|. \end{aligned}$$

De donde  $\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) \leq K[\sum \omega'_i(t_i - t_{i-1}) + \sum \omega''_i(t_i - t_{i-1})]$ . Por el Teorema 2, la integrabilidad de  $f \cdot g$  es consecuencia de la integrabilidad de  $f$  y  $g$ . Con respecto a  $c \cdot f$ , su integrabilidad resulta de lo que acabamos de probar. Además, si  $c \geq 0$ , tenemos  $s(cf; P) = c \cdot s(f; P)$  para cualquier partición  $P$ , de donde, por el Lema 2,

$$\int_a^b cf = \int_a^b c \cdot f = c \cdot \int_a^b f = c \int_a^b f.$$

Cuando  $c < 0$ , tenemos  $s(cf; P) = cS(f; P)$ , luego  $\int_a^b cf = \int_a^b c \cdot f = c \int_a^b f = c \int_a^b f$ .

(3) Como  $f/g = f \cdot (1/g)$ , basta probar que si  $g$  es integrable y  $0 < k \leq |g(x)|$  para todo  $x \in [a, b]$  entonces  $1/g$  también es integrable. Indicamos mediante  $\omega_i$  y  $\omega'_i$ , respectivamente, las oscilaciones de  $g$  y  $1/g$  en el  $i$ -ésimo intervalo de la partición  $P$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , podemos tomar  $P$  de forma que  $\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon \cdot K^2$ . Para cualesquiera  $x, y$  en el  $i$ -ésimo intervalo de  $P$  se tiene:

$$\left| \frac{1}{g(y)} - \frac{1}{g(x)} \right| = \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(y)g(x)|} \leq \frac{\omega_i}{K^2},$$

por tanto  $\omega'_i < \omega_i/K^2$ . Así  $\sum \omega'_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$ , luego  $1/g$  es integrable.

(4) Si  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$  entonces  $s(f; P) \leq s(g; P)$  y  $S(f; P) \leq S(g; P)$  para toda partición  $P$ , de donde  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ .

(5) La desigualdad evidente  $||f(y)| - |f(x)|| \leq |f(y) - f(x)|$  demuestra que la oscilación de  $|f|$  en cualquier conjunto no supera la de  $f$ . Luego,  $f$  integrable  $\Rightarrow |f|$  integrable. Además, como  $-|f(x)| \leq$

$f(x) \leq |f(x)|$  para todo  $x \in [a, b]$ , de (4) resulta que  $-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$ , o sea,  $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ .  $\square$

**Corolario 1.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable y  $|f(x)| \leq K$  para todo  $x \in [a, b]$  entonces  $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq K(b-a)$ .

**Observación:** Si una función integrable  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es tal que  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$  entonces  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ . Esto es consecuencia del apartado (4) del teorema anterior. Sin embargo, es posible que  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$  y  $\int_a^b f(x)dx = 0$  sin que  $f$  se idénticamente nula. Basta tomar  $f(x) = 1$  en un conjunto finito de puntos de  $[a, b]$  y  $f(x) = 0$  en los demás puntos de  $[a, b]$ . Por el Ejemplo 4,  $f$  es integrable y su integral es nula. No obstante, si  $f$  es continua y  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$  entonces  $\int_a^b f(x)dx = 0$  implica que  $f$  es idénticamente nula. En efecto, si hubiese algún punto  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0) = c > 0$  entonces existiría un intervalo  $[\alpha, \beta]$ , donde  $x_0 \in [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ , tal que  $f(x) > c/2$  para todo  $x \in [\alpha, \beta]$ . Entonces, como  $f(x) \geq 0$ , tendríamos  $\int_a^b f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta f(x)dx > \frac{c}{2}(\beta - \alpha) > 0$ , lo que es absurdo.

#### 4. Condiciones suficientes para la integrabilidad

**Teorema 5.** Toda función continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable.

**Demostración:** Dado  $\varepsilon > 0$ , por la continuidad uniforme de  $f$  en el compacto  $[a, b]$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x, y \in [a, b]$ ,  $|y - x| < \delta$  implican  $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/(b-a)$ . Sea  $P$  una partición de  $[a, b]$  tal que todos sus intervalos tienen longitud  $< \delta$ . En cada intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  de  $P$  existen  $x_i, y_i$  tales que  $m_i = f(x_i)$  y  $M_i = f(y_i)$ , de donde  $\omega_i = f(y_i) - f(x_i) < \varepsilon/(b-a)$ . Así,  $\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$ . Por el Teorema 2,  $f$  es integrable.  $\square$

**Teorema 6.** Toda función monótona  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable.

**Demostración:** Para fijar ideas, sea  $f$  creciente. Dado  $\varepsilon > 0$ , sea  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  una partición de  $[a, b]$  tal que todos sus intervalos tienen longitud  $< \varepsilon/(f(b) - f(a))$ . Para cada  $i = 1, \dots, n$

tenemos  $\omega_i = f(t_i) - f(t_{i-1})$ , por tanto  $\sum \omega_i = f(b) - f(a)$  y

$$\begin{aligned} \sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot \sum \omega_i \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum [f(t_i) - f(t_{i-1})] = \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego  $f$  es integrable.  $\square$

Las consideraciones que siguen son una preparación para el Teorema 7, que engloba a los Teoremas 5 y 6 como casos particulares.

Si  $a < b$ , denotaremos mediante  $|J| = b - a$  la *longitud* del intervalo (abierto, cerrado o semiabierto)  $I$  cuyos extremos son  $a$  y  $b$ . Se dice que el conjunto  $X$  tiene *medida nula* cuando, dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe un recubrimiento numerable (finito o infinito) de  $X$ ,  $X \subset \bigcup I_k$ , cuyos elementos son intervalos abiertos  $I_k$  tales que la suma de sus longitudes es  $\sum |J_k| < \varepsilon$ .

**Ejemplo 5.** Todo conjunto numerable  $X = \{x_1, \dots, x_k, \dots\}$  tiene medida nula. En efecto, dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , sea  $J_k$  el intervalo abierto centrado en  $x_k$  de longitud  $\varepsilon/2^{k+1}$ . Entonces  $X \subset \bigcup I_k$  y  $\sum |I_k| = \varepsilon/2 < \varepsilon$ . En particular, el conjunto  $\mathbb{Q}$  de los números racionales tiene medida nula.

**Teorema 7.** Si el conjunto  $D$  de los puntos de discontinuidad de una función acotada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tiene medida nula entonces  $f$  es integrable.

**Demostración:** Dado  $\varepsilon > 0$ , existen intervalos  $I_1, \dots, I_k, \dots$  tales que  $D \subset \bigcup I_k$  y  $\sum |J_k| < \varepsilon/2K$ , donde  $K = M - m$  es la oscilación de  $f$  en  $[a, b]$ . Para cada  $x \in [a, b] - D$ , sea  $J_x$  un intervalo abierto centrado en  $x$  donde la oscilación de  $f$  es menor que  $\varepsilon/2(b - a)$ . Por el Teorema de Borel-Lebesgue, el recubrimiento abierto  $[a, b] \subset (\bigcup_k I_k) \cup (\bigcup_x J_x)$  posee un subcubrimiento finito  $[a, b] \subset I_1 \cup \dots \cup I_m \cup J_{x_1} \cup \dots \cup J_{x_n}$ . Sea  $P$  la partición de  $[a, b]$  formada por los puntos  $a, b$  y los extremos de estos  $m + n$  intervalos que pertenecen a  $[a, b]$ . Indicaremos mediante  $[t_{\alpha-1}, t_\alpha]$  los intervalos de  $P$  que están contenidos en algún  $\overline{I_k}$  y mediante  $[t_{\beta-1}, t_\beta]$  los demás intervalos de  $P$ . Entonces  $\sum (t_\alpha - t_{\alpha-1}) < \varepsilon/2K$  y la oscilación de  $f$  en cada

intervalo  $[t_{\beta-1}, t_\beta]$  es  $\omega_\beta < \varepsilon/2(b-a)$ . Luego

$$\begin{aligned} S(f; P) - s(f; P) &= \sum \omega_\alpha(t_\alpha - t_{\alpha-1}) + \sum \omega_\beta(t_\beta - t_{\beta-1}) \\ &< \sum K(t_\alpha - t_{\alpha-1}) + \sum \frac{\varepsilon(t_\beta - t_{\beta-1})}{2(b-a)} \\ &< K \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego  $f$  es integrable.  $\square$

**Observación:** Se puede demostrar que el recíproco del Teorema 7 es verdadero, o sea, que el conjunto de puntos de discontinuidad de una función integrable tiene medida nula (cfr. “Curso de Análisis Matemático, vol 1”.)

**Ejemplo 6.** El conjunto de Cantor  $K$  (sección 5 del Capítulo 5), tiene medida nula, aunque no es numerable. En efecto, si paramos en la  $n$ -ésima etapa de su construcción, vemos que el conjunto de Cantor está contenido en la unión de  $2^n$  intervalos, cada uno de longitud  $1/3^n$ . Dado  $\varepsilon > 0$  podemos tomar  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $(2/3)^n < \varepsilon$ , así concluimos que la medida de  $K$  es cero. Podemos considerar la función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante  $f(x) = 0$  si  $x \in K$  y  $f(x) = 1$  si  $x \notin K$ . Como  $[0, 1] - K$  es abierto, la función  $f$  es localmente constante, por tanto continua en los puntos  $x \notin K$ . Como  $K$  no posee puntos interiores,  $f$  es discontinua en todos los puntos de  $K$ . Por el Teorema 7,  $f$  es integrable. Dada cualquier partición  $P$  de  $[0, 1]$ , todos los intervalos de  $P$  contienen puntos que no pertenecen a  $K$ , pues  $\text{int } K = \emptyset$ . Así,  $M_i = 1$  y  $S(f; P) = 1$  para toda partición  $P$ . De donde  $\int_0^1 f(x) dx = \overline{\int_0^1} f(x) dx = 1$ .

**Ejemplo 7.** Si  $a < b$  el intervalo  $[a, b]$  no tiene medida nula. Para probar esto recordemos que la *función característica* de un conjunto  $X \subset [c, d]$  es la función  $\xi_X(x) = 1$  si  $x \in X$  y  $\xi_X(x) = 0$  si  $x \notin X$ . Es fácil ver que si  $X \subset X_1 \cup \dots \cup X_k \subset [c, d]$ , entonces  $\xi_X \leq \sum_{i=1}^k \xi_{X_i}$ . Supongamos que  $[a, b] \subset I_1 \cup \dots \cup I_k \subset [c, d]$ , donde  $c$  es el menor y  $d$  el mayor extremo de los intervalos  $I_j$ . Para simplificar escribamos  $\xi = \xi_{[a,b]}$  y  $\xi_j = \xi_{I_j}$ . Entonces  $\xi \leq \sum_{j=1}^k \xi_j : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , luego  $b-a = \int_c^d \xi(x) dx \leq \sum_{j=1}^k \int_c^d \xi_j(x) dx = \sum_{j=1}^k |I_j|$ . Así, la suma de las longitudes de cualquier colección finita de intervalos abiertos cuya unión contiene  $[a, b]$  es, como mínimo,  $b-a$ . De donde resulta que

$[a, b]$  no tiene medida nula. En efecto, por el Teorema de Borel-Lebesgue, si  $[a, b] \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$  entonces  $[a, b] \subset J_1 \cup \cdots \cup J_k$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ .

## 5. Ejercicios

### Sección 1: Integral de Riemann

1. Defina  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  como  $f(0) = 0$  y  $f(x) = 1/2^n$  si  $1/2^{n+1} < x \leq 1/2^n$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Pruebe que  $f$  es integrable y calcule  $\int_0^1 f(x)dx$ .
2. Sea  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable. Si  $f$  es una función impar, pruebe que  $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ . Si, por el contrario,  $f$  es par pruebe entonces que  $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$ .
3. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x) = 0$  si  $x$  es irracional y  $f(x) = 1/q$  si  $x = p/q$  es una fracción irreducible con  $q > 0$ . (Haga  $f(0) = 1$  si  $0 \in [a, b]$ ). Pruebe que  $f$  es continua exclusivamente en los puntos irracionales de  $[a, b]$ , que  $f$  es integrable y que  $\int_a^b f(x)dx = 0$ .
4. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable, tal que  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Pruebe que si  $f$  es continua en el punto  $c \in [a, b]$  y  $f(c) > 0$ , entonces  $\int_a^b f(x)dx > 0$ .
5. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x) = x$  cuando  $x$  es racional y  $f(x) = x + 1$  cuando  $x$  es irracional. Calcule las integrales superior e inferior de  $f$ . Use una función integrable  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  en vez de  $x$ , y defina  $\varphi(x) = g(x)$  si  $x$  es racional y  $\varphi(x) = g(x) + 1$  si  $x$  es irracional. Calcule las integrales (inferior y superior) de  $\varphi$  en función de la integral de  $g$ .

### Sección 2: Propiedades de la integral

1. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable. Pruebe que la función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , es lipschitziana.
2. Pruebe que si  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son integrables entonces también lo son las funciones  $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas como



$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  y  $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ . Deduzca que las funciones  $f_+, f_- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f_+(x) = 0$  si  $f(x) \leq 0$ ,  $f_+(x) = f(x)$  si  $f(x) \geq 0$ ;  $f_-(x) = 0$  si  $f(x) \geq 0$ ,  $f_-(x) = f(x)$  si  $f(x) \leq 0$ , son integrables (suponiendo que  $f$  lo sea).

3. Pruebe que si  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas entonces:

$$\left[ \int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx ,$$

(Desigualdad de Schwarz.)

### Sección 3: Condiciones suficientes de integrabilidad

1. Pruebe que la función  $f$  del Ejercicio 1.3 es integrable.
2. Pruebe que el conjunto de los puntos de discontinuidad de una función monótona es numerable. Concluya que el Teorema 6 es consecuencia del Teorema 7.
3. Sea  $D$  el conjunto de los puntos de discontinuidad de una función acotada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $D'$  (el conjunto de los puntos de acumulación de  $D$ ) es numerable pruebe entonces que  $f$  es integrable.
4. Una función acotada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , que se anula fuera de un conjunto de medida nula, puede no ser integrable. En estas condiciones, y suponiendo que  $f$  es integrable, pruebe que su integral es igual a cero.
5. Se dice que un conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  tiene contenido nulo cuando, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un recubrimiento finito  $X, X \subset I_1 \cup \dots \cup I_k$ , formado por intervalos abiertos tal que  $\sum_{j=1}^k |I_j| < \varepsilon$ . Pruebe que:
  - (a) Si  $X$  tiene contenido nulo lo mismo sucede con su cierre  $\overline{X}$ .
  - (b) Existen conjuntos de medida nula que no tienen contenido nulo.
  - (c) Un conjunto compacto tiene medida nula si, y sólo si, tiene contenido nulo.

- (d) Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada que coincide con una función integrable  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  excepto en un conjunto de contenido nulo. Pruebe que  $g$  es integrable y que su integral es igual a la de  $f$ .
6. Si un conjunto  $X \subset [a, b]$  no tiene medida nula pruebe entonces que existe  $\varepsilon > 0$  tal que, para toda partición  $P$  de  $[a, b]$ , la suma de los intervalos de  $P$  que contienen puntos de  $X$  en su interior es mayor que  $\varepsilon$ .
7. Sea  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función positiva (esto es,  $\varphi(x) > 0$  para todo  $x \in [a, b]$ ). Entonces existe  $\alpha > 0$  tal que el conjunto  $X = \{x \in [a, b] : \varphi(x) \geq \alpha\}$  no tiene medida nula.
8. Si la función  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es positiva e integrable, entonces  $\int_a^b \varphi(x)dx > 0$ . Concluya que si  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son integrables y  $f(x) < g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ , entonces  $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$ .
9. Sea  $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable, tal que  $p(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Pruebe que si  $\int_a^b p(x)dx = 0$ , entonces el conjunto formado por los puntos  $x \in [a, b]$  tales que  $p(x) = 0$  es denso en  $[a, b]$ . Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable cualquiera que se anula en un conjunto denso en  $[a, b]$ , pruebe que  $\int_a^b f(x)dx = 0$ .

# Cálculo con integrales

Este capítulo es continuación del anterior. En aquél se definió la integral y se establecieron condiciones generales que aseguraban la integrabilidad de una función. En éste se probarán las reglas para el uso eficaz de las integrales, entre éstas el llamado Teorema Fundamental del Cálculo, un movido camino de ida y vuelta que relaciona derivadas e integrales. También usaremos la integral para dar las definiciones precisas de logaritmo y exponencial. El capítulo termina con una breve discusión sobre integrales impropias.

## 1. Teoremas clásicos del Cálculo Integral

Para comenzar estableceremos la conexión entre derivada e integral.

**Teorema 1. (Teorema Fundamental del Cálculo).** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua en el intervalo  $I$ . Las siguientes afirmaciones sobre la función  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  son equivalentes:

- (1)  $F$  es una integral indefinida de  $f$ , esto es, existe  $a \in I$  tal que  $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$  para todo  $x \in I$ .
- (2)  $F$  es una primitiva de  $f$ , esto es,  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x \in I$ .

**Demostración:** (1)  $\Rightarrow$  (2) Si  $x_0, x_0 + h \in I$  entonces  $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$  y  $h \cdot f(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt$ , por tanto:

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt.$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , por la continuidad de  $f$  en el punto  $x_0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $t \in I$ ,  $|t - x_0| < \delta$  implican  $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ . Entonces,  $0 < |h| < \delta$ ,  $x_0 + h \in I$  implican:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &\leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \\ &< \frac{1}{|h|} |h| \cdot \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Lo que demuestra que  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1) Sea  $F' = f$ . Como acabamos de ver, si fijamos  $a \in I$  y definimos  $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$ , tendremos  $\varphi' = f$ . Las dos funciones  $F, \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  tienen la misma derivada, luego difieren en una constante. Como  $\varphi(a) = 0$ , esta constante es  $F(a)$ . Por tanto  $F(x) = F(a) + \varphi(x)$ , esto es,  $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt$  para todo  $x \in I$ .  $\square$

**Comentarios.** (1) Acabamos de probar que toda función continua posee una primitiva. De forma más precisa: si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable, entonces  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ , es derivable en todo punto  $x_0$  donde  $f$  es continua, y se tiene  $F'(x_0) = f(x_0)$ . En dicho punto también es derivable la función  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $G(x) = \int_x^b f(t) dt$ , y se tiene  $G'(x_0) = -f(x_0)$ . En efecto,  $F(x) + G(x) = \int_a^b f(t) dt = \text{constante}$ , luego  $F'(x_0) + G'(x_0) = 0$ .

(2) También hemos probado que si  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$  (esto es, tiene derivada continua) entonces  $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt$ . En particular,  $F(b) = F(a) + \int_a^b F'(t) dt$ . Esto reduce el cálculo de la integral  $\int_a^b f(x) dx$  a encontrar una primitiva de  $f$ . Si  $F' = f$ , entonces  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .

**Teorema 2. (Cambio de variables)** Sean  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  con derivada integrable y  $g([c, d]) \subset [a, b]$ . Entonces

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x) dx = \int_c^d f(g(t)) g'(t) dt.$$

**Demostración:** Por el Teorema 1,  $f$  posee una primitiva  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y se tiene  $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x) dx = F(g(d)) - F(g(c))$ . Por otra parte, la regla de la cadena nos da  $(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) g'(t) =$

$f(g(t))g'(t)$  para todo  $t \in [a, b]$ . Luego  $F \circ g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  es una primitiva de la función integrable  $t \rightarrow f(g(t))g'(t)$ . Por tanto  $\int_c^d f(g(t))g'(t)dt = F(g(d)) - F(g(c))$ , lo que prueba el teorema.  $\square$

**Observación:** El Teorema 2 nos da una buena justificación para usar la notación  $\int_a^b f(x)dx$  en vez de  $\int_a^b f$ . Para cambiar de variables en  $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx$ , se toma  $x = g(t)$ . La diferencial de  $x$  será  $dx = g'(x)dx$ . Estas substitutiones nos dan

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(x))g'(x)dx.$$

El cambio de los límites de integración es natural; cuando  $t$  varía entre  $c$  y  $d$ ,  $x = g(t)$  lo hace entre  $g(c)$  y  $g(d)$ .

Es tradicional en el cálculo la notación  $F|_a^b = F(b) - F(a)$ .

**Teorema 3. (Integración por partes)** Si  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tienen derivadas integrables entonces:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = f \cdot g|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

**Demostración:** Es suficiente observar que  $f \cdot g$  es una primitiva de  $f \cdot g' + f' \cdot g$  e integrar la suma usando el Teorema Fundamental del Cálculo.  $\square$

**Teorema 4. (Fórmula del Valor Medio para integrales).**

Sean  $f, p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continua y  $p$  integrable con  $p(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Entonces existe un número  $c \in (a, b)$  tal que  $\int_a^b f(x)p(x)dx = f(c) \cdot \int_a^b p(x)dx$ .

**Demostración:** Para todo  $x \in [a, b]$ , tenemos  $m \leq f(x) \leq M$ , donde  $m$  es el ínfimo y  $M$  el supremo de  $f$  en  $[a, b]$ . Como  $p(x) \geq 0$  se tiene  $m \cdot p(x) \leq f(x) \cdot p(x) \leq M \cdot p(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ . Sea  $A = \int_a^b p(x)dx$ . De las desigualdades anteriores resulta  $m \cdot A \leq \int_a^b f(x)p(x)dx \leq M \cdot A$ . Luego existe  $d \in [m, M]$  tal que  $\int_a^b f(x)p(x)dx = d \cdot A$ . Como  $f$  es continua, tenemos  $d = f(c)$  para algún  $c \in (a, b)$ , lo que prueba el teorema.  $\square$

**Corolario 1.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a)$ .

**Lema 5.** Si  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tiene derivada de orden  $n$  integrable, entonces:

$$\varphi(1) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n)}(t) dt.$$

**Demostración:** Si  $n = 1$ , esta fórmula se reduce a  $\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t) dt$ , válida por el Teorema Fundamental del Cálculo. Para  $n = 2$ , la integración por partes nos da

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-t) \varphi''(t) dt &= (1-t) \varphi'(t) \Big|_0^1 + \int_0^1 \varphi'(t) dt \\ &= -\varphi'(0) + \varphi(1) - \varphi(0), \end{aligned}$$

luego

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t) \varphi''(t) dt.$$

Para  $n = 3$ , de nuevo la integración por partes nos da

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2!} \varphi'''(t) dt &= \frac{(1-t)^2}{2!} \cdot \varphi''(t) \Big|_0^1 + \int_0^1 (1-t) \varphi''(t) dt \\ &= -\frac{\varphi''(0)}{2} + \varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(0), \end{aligned}$$

luego

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} \varphi'''(t) dt.$$

El proceso inductivo está claro, así el lema es válido para todo  $n$ .  $\square$

**Teorema 5. (Fórmula de Taylor con resto integral).** Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tiene derivada  $n$ -ésima integrable en el intervalo de extremos  $a, a+h$  entonces

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a) \cdot h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} h^{n-1} \\ &\quad + \left[ \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+th) dt \right] \cdot h^n. \end{aligned}$$

**Demostración:** Definiendo  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\varphi(t) = f(a + th)$ , se tiene  $\varphi^{(i)}(0) = f^{(i)}(a)h^i$ . Ahora el Teorema 5 resultado del lema anterior.  $\square$

**Corolario 1. (Fórmula de Taylor con resto de Lagrange).** Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^n$  en el intervalo de extremos  $a, a + h \in I$  entonces existe  $\theta \in (0, 1)$  tal que

$$f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a + \theta h)}{n!} h^n.$$

En efecto, si llamamos  $A$  a la integral que aparece en el enunciado del Teorema 5, por el Teorema 4 existe  $\theta \in (0, 1)$  tal que

$$A = f^{(n)}(a + \theta h) \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \frac{f^{(n)}(a + \theta h)}{n!}.$$

**Observación:** Esta demostración es más natural que la que se dió en el Teorema 2, Capítulo 9; sin embargo, se exige más a la función  $f$ .

## 2. La integral como límite de sumas de Riemann

La *norma* de una partición  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \subset [a, b]$  es el número  $|P| = \max_i (t_i - t_{i-1})$  de los intervalos de  $P$ .

**Teorema 6.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|P| < \delta \Rightarrow S(f; P) \leq \int_a^b f(x) dx + \varepsilon$ .

**Demostración:** Supongamos inicialmente que  $f(x) \geq 0$  en  $[a, b]$ . Dado  $\varepsilon > 0$  existe una partición  $P_0 = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  de  $[a, b]$  tal que  $S(f; P_0) < \int_a^b f(x) dx + \varepsilon/2$ . Sea  $M = \sup f$ . Tomemos  $\delta$  tal que  $0 < \delta < \varepsilon/2Mn$ . Si  $P$  es una partición cualquiera de  $[a, b]$  tal que  $|P| < \delta$ , indicaremos mediante  $[r_{\alpha-1}, r_\alpha]$  los intervalos de  $P$  que estén contenidos en algún  $[t_{i-1}, t_i]$  de  $P_0$ , y mediante  $[r_{\beta-1}, r_\beta]$  los restantes intervalos de  $P$ . Cada uno de estos contiene, al menos, un punto  $t_i$  en su interior, luego hay como máximo  $n$  intervalos del tipo  $[r_{\beta-1}, r_\beta]$ . Escribiremos  $\alpha \subset i$  si  $[r_{\alpha-1}, r_\alpha] \subset [t_{i-1}, t_i]$ . Cuando  $\alpha \subset i$  se tiene  $M_\alpha \leq M_i$  y  $\sum_{\alpha \subset i} (r_\alpha - r_{\alpha-1}) \leq t_i - t_{i-1}$ . Estos

número son todos  $\geq 0$ , luego  $\sum_{\alpha \in I} M_\alpha(r_\alpha - r_{\alpha-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1})$  y  $M_\beta(r_\beta - r_{\beta-1}) \leq M\delta$ . Por tanto:

$$\begin{aligned} S(f; P) &= \sum_{\alpha} M_\alpha(r_\alpha - r_{\alpha-1}) + \sum_{\beta} M_\beta(r_\beta - r_{\beta-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}) + M \cdot n \cdot \delta \\ &< S(f; P) + \varepsilon/2 \\ &< \int_a^b f(x) dx + \varepsilon. \end{aligned}$$

En el caso general, como  $f$  está acotada, existe una constante  $c$  tal que  $f(x) + c \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Tomando  $g(x) = f(x) + c$ , tenemos  $S(g; P) = S(f; P) + c(b - a)$  y

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + c(b - a),$$

luego estamos en el caso anterior.  $\square$

Afirmar que  $S(f; P) < \int_a^b f(x) dx + \varepsilon$  es equivalente a  $|\int_a^b f(x) dx - S(f; P)| < \varepsilon$ . Luego el Teorema 6 significa que  $\lim_{|P| \rightarrow 0} S(f; P) = \int_a^b f(x) dx$ .

De forma totalmente análoga se prueba que  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} s(f; P)$ .

Una *partición puntuada* del intervalo  $[a, b]$  es un par  $P^* = (P, \xi)$  donde  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$  es una partición de  $[a, b]$  y  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  es una colección de  $n$  números escogidos de forma que  $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$ .

Dada una función acotada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y una partición puntuada  $P^*$  de  $[a, b]$ , se define la *suma de Riemann*:

$$\sum(f; P^*) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Evidentemente, sea cual fuere la forma en que se puntúe la partición  $P$ , se tiene

$$s(f; P) \leq \sum(f; P^*) \leq S(f; P).$$



Se dice que el número real  $I$  es el *límite* de  $\sum(f; P^*)$  cuando  $|P| \rightarrow 0$ , y se escribe  $I = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum(f; P^*)$ , cuando, para todo  $\varepsilon > 0$ , se puede escoger  $\delta$  tal que  $|\sum(f; P^*) - I| < \varepsilon$  sea cual fuere la partición puntuada  $P^*$  tal que  $|P| < \delta$ .

**Teorema 7.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable entonces  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum(f; P^*)$ .

**Demostración:** Del Teorema 6 se sigue que si  $f$  es integrable, entonces

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} s(f; P) = \lim_{|P| \rightarrow 0} S(f; P) = \int_a^b f(x)dx .$$

Como se tiene  $s(f; P) \leq \sum(f; P^*) \leq S(f; P)$ , es inmediato que  $\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum(f; P^*) = \int_a^b f(x)dx$ .  $\square$

**Observación:** El recíproco del Teorema 7 es verdadero, pero es menos interesante. (Vea “Curso de Análisis Matemático”, vol. 1).

### 3. Logaritmos y exponenciales

Sea  $a$  un número real mayor que 1. Se suele definir el logaritmo de un número real  $x$  en base  $a$  como el exponente  $y$ ,  $y = \log_a x$ , tal que  $a^y = x$ .

O sea, la función  $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  se suele definir como la inversa de la función exponencial  $y \rightarrow a^y$ . Para esto se requiere el trabajo previo de establecer el significado y las propiedades de las potencias  $a^y$ , donde  $y$  es un número real cualquiera, lo que se puede hacer rigurosamente. Sin embargo, nos parece más sencillo definir en primer lugar el logaritmo y, a partir de éste, la exponencial, tal como haremos a continuación.

Definiremos la función  $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , como

$$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t} ,$$

para cada  $x \in \mathbb{R}^+$ .

El número  $\log x$  se llama *logaritmo* de  $x$ . Si recordamos que  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ , vemos que  $\log x < 0$  si  $0 < x < 1$ ,  $\log 1 = 0$  y  $\log x > 0$  cuando  $x > 1$ .

La función logaritmo es monótona, estrictamente creciente y derivable; además  $(\log x)' = 1/x$ ,  $(\log x)''(x) = -1/x^2$ , etc. Por tanto,  $\log$  es derivable infinitas veces, esto es,  $\log \in C^\infty$ . También se puede ver que  $\log$  es una función cóncava.

**Teorema 8.** Para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}^+$  se tiene  $\log(xy) = \log x + \log y$ .

**Demostración:**  $\log(xy) = \int_1^{xy} dt/t = \int_1^x dt/t + \int_x^{xy} dt/t = \log x + \int_x^{xy} dt/t$ . Cuando  $s$  varía entre 1 e  $y$ , el producto  $xs$  varía entre  $x$  y  $xy$ , luego el cambio de variable  $t = xs$  nos da  $dt = xds$  y  $\int_x^{xy} dt/t = \int_1^y xds/xs = \int_1^y ds/s = \log y$ , lo que prueba el teorema.  $\square$

**Corolario 1.** Para todo número racional  $r$  se tiene  $\log(x^r) = r \log x$ .

En efecto, del Teorema 8 se deduce  $\log(x^n) = n \log x$  cuando  $n \in \mathbb{N}$ . De  $x^n \cdot x^{-n} = 1$  resulta  $0 = \log(x^n \cdot x^{-n}) = \log(x^n) + \log(x^{-n}) = n \log x + \log(x^{-n})$ , de donde  $\log(x^{-n}) = -n \log x$ . Esto demuestra el corolario cuando  $r \in \mathbb{Z}$ . En el caso general,  $r = p/q$  donde  $p, q \in \mathbb{Z}$ , por definición  $(x^{p/q})^q = x^p$ , de aquí, por lo que acabamos de probar,  $q \log(x^{p/q}) = p \log x$ , de donde  $\log(x^{p/q}) = (p/q) \log x$ .

**Corolario 2.**  $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  es sobreyectiva.

Como  $\log$  es continua, su imagen es un intervalo, por tanto basta demostrar que  $\log$  no está acotada, ni superior ni inferiormente, lo que es consecuencia de las igualdades  $\log(2^n) = n \log 2$  y  $\log(2^{-n}) = -n \log 2$ .

Como  $\log$  es una función estrictamente creciente, entonces es una biyección de  $\mathbb{R}^+$  en  $\mathbb{R}$ . Su inversa,  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , se llama función exponencial. Por definición,  $\exp(x) = y \Leftrightarrow \log y = x$ , o sea  $\log(\exp(x)) = x$  y  $\exp(\log y) = y$ .

Existe un único número real cuyo logaritmo es igual a 1. Este se denota con el símbolo  $e$ . En breve demostraremos que  $e$  coincide con el número introducido en los Ejemplos 12 y 13 del Capítulo 3. De momento, su definición es  $e = \exp(1)$ .

**Teorema 9.** *La función exponencial  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  es una biyección creciente de clase  $C^\infty$ , tal que  $(\exp x)' = \exp(x)$  y  $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$  para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}$ . Además, para todo  $r \in \mathbb{Q}$  se tiene  $\exp(r) = e^r$ .*

**Demostración:** Por la regla de derivación de la función inversa, para cada  $x \in \mathbb{R}$ , tal que  $\exp(x) = y$ , se tiene  $(\exp x)' = 1/(\log y)' = y = \exp(x)$ . Así  $\exp' = \exp$ , de donde  $\exp \in C^\infty$ . Dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , sean  $x' = \exp x$  e  $y' = \exp y$ , luego  $x = \log x'$  e  $y = \log y'$ . Entonces  $\exp(x+y) = \exp(\log x' + \log y') = \exp[\log(x'y')] = \exp(x) \cdot \exp(y)$ . Si  $r$  es racional, el Corolario 1 del Teorema 8 nos da  $\log(\exp(r)) = r = r \cdot 1 = r \log(e) = \log(e^r)$ ; así, por la inyectividad de  $\log$ ,  $\exp(r) = e^r$ .  $\square$

La igualdad  $\exp(r) = e^r$ , si  $r \in \mathbb{Q}$ , junto con la relación  $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$  nos indican que  $\exp(x)$  se comparta como una potencia con base  $e$  y exponente  $x$ . Escribiremos entonces, por definición,  $e^x = \exp(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Gracias a esto, pasa a tener significado la potencia  $e^x$  para cualquier  $x$  real.

Con esta notación tenemos

$$\begin{aligned} e^{x+y} &= e^x \cdot e^y, & e^0 &= 1, & e^{-x} &= 1/e^x, \\ x < y &\Leftrightarrow e^x < e^y \\ \log(e^x) &= x = e^{\log x}. \end{aligned}$$

También tenemos  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , como se puede ver fácilmente.

Por el Teorema del Valor Medio, para todo  $x > 1$ , existe  $c$  tal que  $1 < c < x$  y  $\log x = \log x - \log 1 = (\log c)'(x-1) = (x-1)/c$ . Así se tiene  $\log x < x$  para todo  $x \geq 1$ . Como  $\log x = 2 \log \sqrt{x}$ , tenemos  $0 < \log x < 2\sqrt{x}$ , de donde  $0 < \log x/x < 2/\sqrt{x}$  para todo  $x \geq 1$ . Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2/\sqrt{x}) = 0$ , se tiene que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x/x = 0$ , lo que ya había sido probado en el final del Capítulo 3 suponiendo que  $x = n \in \mathbb{N}$ .

Por otra parte, dado cualquier polinomio  $p(x)$ , se tiene  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x)/e^x = 0$ . Para probar esto es suficiente considerar el caso  $p(x) = x^k$ . Entonces escribimos  $e^{x/k} = y$ , de donde  $x = k \cdot \log y$ . Evidentemente,  $x \rightarrow +\infty$  si, y sólo si,  $y \rightarrow +\infty$ .

Por tanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{e^{x/k}} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( k \frac{\log y}{y} \right) = 0,$$

y así

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{e^{x/k}} \right)^k = 0.$$

Si  $c$  y  $k$  son constantes reales, la función  $f(x) = c \cdot e^{kx}$  tiene derivada  $k \cdot c \cdot e^{kx} = kf(x)$ . Esta propiedad de ser la derivada de la función  $f$  proporcional a sí misma es la causa de gran parte de las aplicaciones de la función exponencial. Demostraremos que esta propiedad es exclusiva de las funciones de este tipo.

**Teorema 10.** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en el intervalo  $I$ , con  $f'(x) = k \cdot f(x)$ . Si para algún  $x_0 \in I$  se tiene  $f(x_0) = c$ , entonces  $f(x) = c \cdot e^{k(x-x_0)}$  para todo  $x \in I$ .

**Demostración:** Sea  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $\varphi(x) = f(x) \cdot e^{-k(x-x_0)}$ . Entonces  $\varphi'(x) = f'(x)e^{-k(x-x_0)} - kf(x)e^{-k(x-x_0)} = 0$ . Luego  $\varphi$  es constante. Como  $\varphi(x_0) = c$ , se tiene  $\varphi(x) = c$  para todo  $x \in I$ , o sea,  $f(x) = c \cdot e^{k(x-x_0)}$ .  $\square$

Como la derivada de la función  $f(x) = e^x$  también es  $f'(x) = e^x$ , tenemos  $f'(0) = 1$ . Por tanto, de la definición de derivada se deduce que  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$ .

Dados  $a > 0$  y  $x \in \mathbb{R}$ , definiremos la potencia  $a^x$  de forma que sea válida la fórmula  $\log(a^x) = x \log a$ . Para esto, tomaremos dicha igualdad como definición, o sea, diremos que  $a^x$  es el (único) número real cuyo logaritmo es igual a  $x \cdot \log a$ .

En otras palabras,  $a^x = e^{x \log a}$ .

La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $f(x) = a^x$ , tiene las propiedades esperadas.

La primera es que si  $x = p/q \in \mathbb{Q}$  (donde  $q > 0$ ),  $f(x) = \sqrt[q]{a^p}$ . En efecto,  $f(x) = \exp((p/q) \log a) = \exp(\log \sqrt[q]{a^p}) = \sqrt[q]{a^p}$ .

Se tiene  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ ,  $a^0 = 1$ ,  $a^{-x} = 1/a^x$  y  $(a^x)^y = a^{xy}$ .

La función  $f(x) = a^x$  tiene derivada  $f'(x) = a^x \cdot \log a$ , por tanto es de clase  $C^\infty$ . La derivada  $f'$  es positiva si  $a > 1$  y negativa si  $0 < a < 1$ .

Luego en el primer caso  $f$  es creciente, y decreciente en el segundo. Cuando  $a > 1$ , se tiene  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ . Si

$0 < a < 1$ , los valores de estos límites se intercambian. En cualquier caso,  $f(x) = a^x$  es una biyección de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^+$  cuya inversa se denota mediante  $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $\log_a x$  se llama *logaritmo de  $x$  en base  $a$* .

Así,  $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$ , volviendo a la definición clásica. Cuando  $a = e$ , se tiene  $\log_e x = \log x$ . Por tanto, el logaritmo que definimos al principio de esta sección tiene base  $e$ . Es el llamada *logaritmo natural o logaritmo neperiano*. Para todo  $x > 0$  tenemos

$$e^{\log x} = x = a \log_a x = e^{\log_a x \cdot \log a},$$

por tanto,  $\log x = \log_a x \cdot \log a$ , o sea,  $\log_a x = \log x / \log a$ . Como consecuencia de esta última fórmula tenemos las propiedades de  $\log_a x$  análogas a las de  $\log x$ , como  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$  o  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$ .

Para finalizar esta sección demostraremos que  $e$  coincide con el número definido en los Ejemplos 12 y 13 del Capítulo 3.

La derivada de la función  $\log x$  es igual a  $1/x$ . En el punto  $x = 1$  esta derivada vale 1. Esto significa que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1,$$

o sea,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log(1+x)^x = 1.$$

Como  $(1+x)^{1/x} = \exp\{\log[(1+x)^{1/x}]\}$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \exp(1) = e$ . Si hacemos  $y = 1/x$  concluimos que  $\lim_{y \rightarrow \infty} (1+1/y)^y = e$ .

En particular,  $\lim_{n \in \mathbb{N}} (1+1/n)^n = e$ .

#### 4. Integrales impropias

Las hay de dos clases: integrales de funciones que no están acotadas (definidas en un intervalo acotado pero no cerrado) e integrales de funciones definidas en un intervalo que no está acotado.

El siguiente teorema descarta el caso trivial.

**Teorema 11.** Sea  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada, tal que la restricción  $f|_{[c, d]}$  es integrable para todo  $c \in (a, b]$ . Entonces, sea cual fuere el valor que se le asigne a  $f(a)$ , se obtiene una función integrable tal que  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x)dx$ .

**Demostración:** Sea  $K$  tal que  $a \leq x \leq b \Rightarrow |f(x)| \leq K$ . Dado  $\varepsilon > 0$  tomemos  $c \in (a, b]$  con  $K \cdot (c - a) < \varepsilon/4$ . Como  $f|_{[c, b]}$  es integrable, existe una partición  $P$  de  $[c, b]$  tal que  $S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon/2$ . Entonces  $Q = P \cup \{a\}$  es una partición de  $[a, b]$  tal que

$$S(f; P) - S(f; Q) \leq 2K(c - a) + S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon,$$

luego  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable. La integral indefinida  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , cumple la condición de Lipschitz  $|F(y) - F(x)| \leq K|y - x|$ , luego es (uniformemente) continua, de donde  $F(a) = \lim_{c \rightarrow a^+} F(c) = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x)dx$ .  $\square$

Un resultado análogo es válido para  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Por tanto, es suficiente considerar  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que no están acotadas. Supondremos también que  $f$  es continua. La *integral impropia*  $\int_a^b f(x)dx$  se define como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

En cada intervalo cerrado  $[a + \varepsilon, b]$ ,  $f$  es continua, luego es integrable. El problema reside en saber si existe o no el límite anterior. Si el límite existe la integral es *convergente*, si éste no existe la integral es *divergente*.

Evidentemente, el caso de una función continua  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  que no está acotada se trata de forma semejante, haciendo  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ . Finalmente, el caso  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  continua se reduce a los dos anteriores tomando  $c \in (a, b)$  y escribiendo  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ .

**Ejemplo 1.** Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 1/x^\alpha$ . Suponiendo  $\alpha \neq 1$ , tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1 - \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Cuando  $\alpha = 1$ , tenemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \log x \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (-\log \varepsilon) = +\infty.$$

Por tanto  $\int_0^1 dx/x^{\alpha}$  diverge cuando  $\alpha \geq 1$  y converge a  $(1-\alpha)^{-1}$  si  $\alpha < 1$ . En particular,  $\alpha = 1/2$  nos da  $\int_0^1 dx/\sqrt{x} = 2$ .

**Ejemplo 2.** Sea  $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx/\sqrt{1-x^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} dx/\sqrt{1-x^2} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \arcsen x \Big|_0^{1-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \arcsen(1-\varepsilon) \\ &= \arcsen 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Cuando  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  cumple  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in (a, b]$ , la integral  $\int_a^b f(x)dx$  converge si, y sólo si, existe  $k > 0$  tal que  $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \leq k$  para todo  $\varepsilon \in (b-a)$ , pues la función  $\varphi(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$  es creciente. Si existe una función  $g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\int_a^b g(x)dx$  es convergente y  $0 \leq f(x) \leq k \cdot g(x)$  para todo  $x \in (a, b]$ , entonces  $\int_a^b f(x)dx$  es convergente pues, en este caso,  $\varphi(\varepsilon) \leq k \cdot \int_{a+\varepsilon}^b g(x)dx$  para todo  $\varepsilon \in (0, b-a)$ .

**Ejemplo 3.** La integral  $I = \int_0^1 dx/\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$  converge siempre que  $k \in \mathbb{R}$  cumpla  $k^2 < 1$ . En efecto, como  $0 \leq x \leq 1$ , tenemos  $1-k^2 \leq 1-k^2x^2$ . Haciendo  $K = 1/\sqrt{1-k^2}$  se tiene que  $1/\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \leq K/\sqrt{1-x^2}$ , por tanto  $I \leq \int_0^1 k/\sqrt{1-x^2} = k\pi/2$ .

Se dice que la integral impropia  $\int_a^b f(x)dx$  es *absolutamente convergente* cuando  $\int_a^b |f(x)|dx$  es convergente. Como en el caso de las series, la convergencia de  $\int_a^b |f(x)|dx$  implica la de  $\int_a^b f(x)dx$ .

En efecto, dada  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, definimos, para  $a < x < b$ , su *parte positiva* y su *parte negativa*,  $f_+, f_- : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , como:

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{y} \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Entonces  $f_+(x) = \frac{1}{2}[|f(x)| + f(x)]$  y  $f_-(x) = \frac{1}{2}[|f(x)| - f(x)]$ , así  $f_+$  y  $f_-$  son continuas. Además, tenemos que  $f_+(x) \geq 0$ ,  $f_-(x) \geq 0$ ,  $f = f_+ - f_-$  y  $|f| = f_+ + f_-$ , de donde  $f_+ \leq |f|$  y  $f_- \leq |f|$ . De estas desigualdades se deduce que si  $\int_a^b f(x)dx$  es absolutamente convergente entonces  $\int_a^b f_+(x)dx$  y  $\int_a^b f_-(x)dx$  convergen. Luego  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_+(x)dx - \int_a^b f_-(x)dx$  es convergente.

Por tanto sirve el *criterio de comparación*: si  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas y  $\int_a^b g(x)dx$  converge entonces la condición  $|f(x)| \leq k \cdot g(x)$  para todo  $x \in [a, b)$  implica que  $\int_a^b f(x)dx$  es (absolutamente) convergente. Por ejemplo, si  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y existen constantes  $k > 0$  y  $\alpha < 1$  tales que  $|f(x)| \leq k/(b-x)^\alpha$  para todo  $x \in [a, b)$ , entonces la integral  $\int_a^b f(x)dx$  es (absolutamente) convergente.

A continuación trataremos de integrales definidas en intervalos que no están acotados.

Dada  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continua, se define la integral impropia de  $f$  como:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx.$$

Si el límite anterior existe, se dice que la integral es *convergente*. En caso contrario se dice que es *divergente*. Una definición análoga sirve para  $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces  $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^b f(x)dx$ . Finalmente, para  $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  se toma un punto cualquiera  $a \in \mathbb{R}$  (en general  $a = 0$ ) y se escribe

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

**Ejemplo 4.** Sea  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1/x^\alpha$ . Si  $\alpha \neq 1$  se tiene

$$\int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{A^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha},$$

luego

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

converge si  $\alpha > 1$ . Por otra parte, si  $\alpha \leq 1$ ,  $\int_1^{+\infty} dx/x^\alpha$  diverge. Esto contrasta con el comportamiento de la integral de la misma función en el intervalo  $(0, 1]$ .



**Ejemplo 5.**  $\int_0^{+\infty} dx/(1+x^2) = \pi/2$ . En efecto,  $\arctan x$  es una primitiva de  $1/(1+x^2)$ . Por consiguiente

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\arctan A - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Se dice que una integral  $\int_a^{+\infty}$  es *absolutamente convergente* cuando  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  converge. Como cuando teníamos intervalos acotados, se prueba que en tal caso,  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  converge.

Por tanto sirve el *criterio de comparación*: si  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas,  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  converge y existe  $k > 0$  tal que  $|f(x)| \leq k \cdot |g(x)|$  para todo  $x \in [a, +\infty)$ , entonces  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  es (absolutamente) convergente. En particular, si  $|f(x)| \leq k/x^\alpha$ , con  $\alpha > 1$ , entonces  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  es (absolutamente) convergente.

**Ejemplo 6.** Sea  $a > 0$ . La integral  $\int_a^{+\infty} dx/x^2$  es convergente, como se puede ver fácilmente, su valor es  $1/a$ . Incluso si no supiésemos que la derivada de  $\arctan x$  es  $1/(1+x^2)$ , concluiríamos, por comparación, que  $\int_a^{+\infty} dx/(1+x^2)$  converge, pues  $1/(1+x^2) \leq 1/x^2$ .

**Ejemplo 7.** (*La función Gamma*) Se trata de la función  $\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida para todo  $t > 0$  como la integral  $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$ . Para demostrar que dicha integral converge la descompondremos en la suma  $\int_0^1 + \int_1^{+\infty}$ . La integral  $\int_0^1 e^{-x} x^{t-1} dx$  converge porque  $e^{-x} x^{t-1} \leq 1/x^{1-t}$ . El segundo sumando,  $\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$ , converge porque  $e^{-x} x^{t-1} \leq 1/x^2$  para todo  $x$  suficientemente grande. En efecto, esta desigualdad es equivalente a  $x^{t+1}/e^x \leq 1$ . Ahora bien, sabemos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{t+1}/e^x = 0$ , luego existe  $a > 0$  tal que  $x > a \Rightarrow x^{t+1}/e^x \leq 1$ . La función gamma extiende la noción de factorial pues  $\Gamma(n) = (n-1)!$  para todo  $n$ , como se puede ver integrando por partes.

**Ejemplo 8.** La integral de Dirichlet  $I = \int_0^\infty (\sin x/x) dx$  converge, pero no absolutamente. En efecto, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x/x| dx$ . Entonces  $I = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$ . Es claro que  $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$  y que  $\lim a_n = 0$ . Luego, por el Teorema de Leibniz, la serie  $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n a_n$  (y en consecuencia la integral) converge. Por otra parte,  $\int_0^{+\infty} |\sin x/x| dx$  es la suma de la serie  $\sum_{n=0}^\infty a_n$ , cuyo término  $a_n$  es el área de una región que contiene un

triángulo de base  $\pi$  y altura  $2/(2n+1)\pi$ . El área de dicho triángulo es igual  $1/(2n+1)$ . Como la serie armónica es divergente, se tiene que  $\sum a_n = +\infty$ . (Se puede probar que  $\int_0^\infty \sin x/x dx = \pi/2$ ).

Una aplicación bastante conocida de las integrales impropias es el criterio de convergencia de series de números, recogido en el siguiente teorema, cuya demostración se puede encontrar en cualquier libro de cálculo.

**Teorema 12.** *Sea  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , continua y monótona creciente. Para cada número natural  $n \geq a$ , sea  $a_n = f(n)$ . Entonces la serie  $\sum a_n$  converge si, y sólo si, la integral  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  converge.*

## 5. Ejercicios

### Sección 1: Teorema clásicos del Cálculo Integral

1. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable y continua por la derecha en el punto  $x_0 \in [a, b)$ . Pruebe que  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , mediante  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ , es derivable por la derecha en punto  $x_0$  y que  $F'_+(x_0) = f(x_0)$ . Enuncie un resultado similar con “izquierda” en vez de derecha. Dé ejemplos de funciones  $f$  integrables y discontinuas en el punto  $x_0$  tales que:
  - (a) Existe  $F'(x_0)$ .
  - (b) No existe  $F'(x_0)$ .
2. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivable tal que  $f'$  es integrable. Pruebe que para cualesquiera  $x, c \in [a, b]$  se tiene  $f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t) dt$ . Concluya que el Teorema 5 es válido con “integrable” en vez de continua.
3. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivable, tal que  $f'$  es integrable y  $f'(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Si  $\{x \in [a, b] : f'(x) = 0\}$  tiene contenido nulo, pruebe que  $f$  es estrictamente creciente.
4. Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  con derivada continua, pruebe el Teorema del Valor Medio (Teorema 7 del Capítulo 8) como consecuencia de la fórmula del mismo nombre para integrales (Corolario al Teorema 11 en este capítulo).

5. Sean  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y  $\alpha, \beta : I \rightarrow [a, b]$  derivables. Defina  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  escribiendo  $\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$  para todo  $x \in I$ . Pruebe que  $\varphi$  es derivable y que  $\varphi'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$ .
6. Sean  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la función del Ejercicio 1.3 y  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $g(0) = 0$  y  $g(x) = 1$  si  $x > 0$ . Demuestre que  $f$  y  $g$  son integrables pero que  $g \circ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  no lo es.
7. Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  con derivada integrable, sea  $m = (a + b)/2$ . Pruebe que  $f(a) + f(b) = [2/(b - a)] \int_a^b [f(x) - f(x - m)]f'(x)dx$ .
8. Sean  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continua y  $p$  integrable tal que  $p(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Pruebe que si  $\int_a^b f(x)p(x)dx = f(a) \int_a^b p(x)dx$  entonces existe  $x \in (a, b)$  tal que  $f(a) = f(x)$  (existe un resultado análogo con  $f(b)$  en vez de  $f(a)$ ). Concluya que en el Teorema 4 se puede tomar  $c \in (a, b)$  y que en el corolario de Teorema 6 se puede exigir que  $\theta \in (0, 1)$ .

## Sección 2: La integral como límite de sumas de Riemann

1. Con la ayuda de las sumas de Riemann pruebe la validez de las siguientes igualdades:
  - (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{i=1}^n i^p = \frac{1}{p+1},$
  - (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{i\pi}{n}\right) = \frac{2}{\pi}.$
2. Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , acotada o no, tiene sentido considerar para cualquier partición puntuada  $P^*$  la suma de Riemann  $\sum(f; P^*)$ . Pruebe que si existe  $\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum(f; P^*)$ , entonces  $f$  es una función acotada.
3. Pruebe el recíproco del Teorema 7: si existe  $\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum(f; P^*) = L$ , entonces la función acotada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable y  $\int_a^b f(x)dx = L$ .

4. Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrables. Para cada partición  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$  de  $[a, b]$  sean  $P^* = (P, \xi)$  y  $P^\# = (P, \eta)$  dos particiones puntuadas de  $P$ . Pruebe que  $\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum (f(\xi)g(\eta_i))(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ .
5. Dadas  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , para cada partición puntuada  $P^*$  de  $[a, b]$  se define la *suma de Riemann-Stieltjes*  $\sum(f, g; P^*) = \sum f(x_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})]$ . Pruebe que si  $f$  es integrable y  $g$  posee derivada integrable, entonces

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum(f, g; P) = \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

6. Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea

$$M(f; n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a + ih), \quad h = \frac{(b-a)}{n},$$

la media aritmética de los valores  $f(a+h), f(a+2h), \dots, f(a+nh) = f(b)$ . Pruebe que si la función  $f$  es integrable, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(f; n) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx.$$

Por esto, el segundo miembro de esta igualdad se llama *valor de la función  $f$  en el intervalo  $[a, b]$* .

7. Pruebe que si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa entonces  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx$ .
8. Demuestre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!e^n}{n^n} = +\infty$ . (Calcule  $\int_1^n \log x dx$  y considere la suma superior de  $\log x$  relativa a la partición  $\{1, 2, \dots, n\}$  de  $[1, n]$ ).

### Sección 3: Logaritmos y exponenciales

1. Sean  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas, no idénticamente nulas, tales que  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$  y  $g(uv) =$

$g(u) + g(v)$  para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $u, v \in \mathbb{R}^+$ . Pruebe que existen  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $f(x) = e^{ax}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y  $g(x) = b \log x$  para todo  $x \in \mathbb{R}^+$ .

2. Pruebe que la sucesión cuyo  $n$ -ésimo término es  $x_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \log n$  es decreciente y acotada, luego convergente. (Su límite es conocido como la *constante  $\gamma$  de Euler-Mascheroni*, que vale aproximadamente  $\gamma \simeq 0,5772$ .)
3. Pruebe que  $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$ .
4. Pruebe que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ .

#### Sección 4: Integrales impropias

1. Estudie la convergencia o divergencia de las integrales

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 - \cos x}, \quad \int_{-3}^3 \frac{dx}{x^3}, \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

2. Estudie la convergencia o divergencia de las integrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{x dx}{1-e^x}.$$

3. Demuestre que  $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$  converge, pero no absolutamente.
4. Demuestre que, aunque la función  $f(x) = x \sin(x^4)$  no está acotada, la integral  $\int_0^{+\infty} x \sin(x^4) dx$  es convergente.
5. Sea  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continuas, positiva y monótona creciente. Pruebe que si  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  es convergente, entonces  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot f(x) = 0$ .
6. Sea  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  integrable en cada intervalo acotado  $[a, x]$ . Pruebe que su integral impropia

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(x) dx$$

existe si, y sólo si, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $A > 0$  tal que  $A < x < y$  implica  $|\int_x^y f(t) dt| < \varepsilon$ . (“Criterio de Cauchy”).

7. Pruebe el Teorema 12.



# Sucesiones y series de funciones

En muchos problemas de Matemáticas y de sus aplicaciones se busca una función que cumpla determinadas condiciones. Es frecuente en estos casos obtener una sucesión de funciones  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ , cada una de las cuales cumple las condiciones exigidas, pero sólo de forma aproximada; sin embargo estas aproximaciones son cada vez mejores. Entonces se espera que la función límite de esta sucesión también cumpla tales condiciones. Esto nos lleva a estudiar límites de sucesiones de funciones.

Muchas veces cada función de la sucesión se obtiene a partir de lo anterior sumando una función  $g_n$ . En este caso se tiene una serie de funciones  $\sum g_n$ . En este capítulo se estudiarán sucesiones y series de funciones.

Mientras que para las sucesiones y series de números existe solamente una noción de límite, para las funciones existen varias. Aquí examinaremos las dos nociones más comunes, que definiremos a continuación.

## 1. Convergencia puntual y convergencia uniforme

Se dice que una sucesión de funciones  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) *converge puntualmente* a una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  cuando para todo  $x \in X$ , la sucesión de números  $f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$  converge a  $f(x)$ .

Así,  $f_n \rightarrow f$  puntualmente en  $X$  cuando, dados  $\varepsilon > 0$  y  $x \in X$  existe  $n_0$  (que depende de  $\varepsilon$  y de  $x$ ) tal que  $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

Gráficamente, en cada recta vertical que pasa por un punto  $x \in X$  queda determinada una sucesión de puntos  $(x, f_1(x)), \dots, (x, f_n(x)), \dots$  las intersecciones de dicha recta con los gráficos de  $f_1, \dots, f_n$ . Estos puntos convergen a  $(x, f(x))$ , la intersección de la recta vertical con el gráfico de  $f$ .

**Ejemplo 1.** La sucesión de funciones  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $f_n(x) = x/n$  converge puntualmente a la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  idénticamente nula. En efecto, para cada  $x$ , se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x/n) = 0$ .

Un tipo de convergencia de funciones, más fuerte que la convergencia puntual, es la convergencia uniforme, que definimos a continuación.

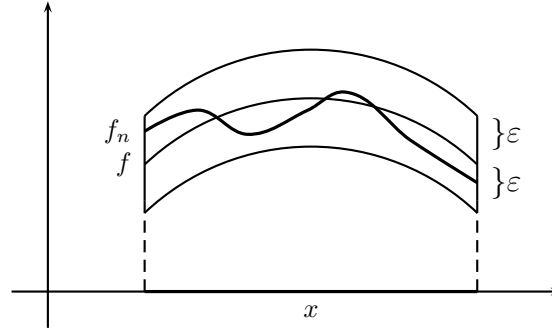
Una sucesión de funciones  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  converge uniformemente a una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  cuando, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  (que depende exclusivamente de  $\varepsilon$ ) tal que  $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  se cual fuere  $x \in X$ .

En el plano  $\mathbb{R}^2$ , dado  $\varepsilon > 0$ , la *banda de radio  $\varepsilon$*  alrededor del gráfico de  $f$  es el conjunto

$$F(f; \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in X, f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\}.$$

Decir que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $X$  significa que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que el gráfico de  $f_n$  está contenido en la banda de radio  $\varepsilon$  alrededor de  $f$  para todo  $n > n_0$ .

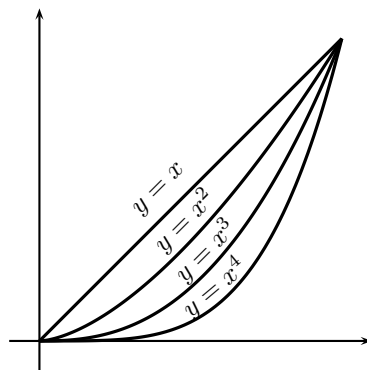




**Fig. 10** - El gráfico de  $f_n$  está contenido en la banda  $F(f; \varepsilon)$ .

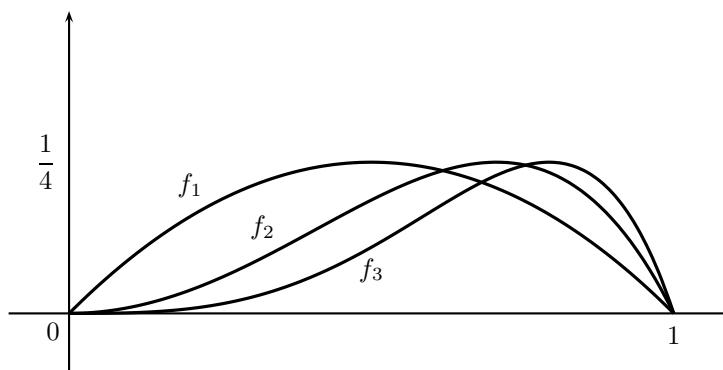
**Ejemplo 2.** Ninguna banda de radio  $\varepsilon$  alrededor del eje de abscisas (gráfico de la función idénticamente nula) contiene al gráfico de cualquier función  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n = x/n$ . Luego la sucesión  $(f_n)$  del Ejemplo 1 no converge uniformemente a la función idénticamente nula. Por otra parte, si  $X \subset \mathbb{R}$  es un conjunto acotado, supongamos que  $|x| \leq c$  para todo  $x \in X$ , entonces  $f_n \rightarrow 0$  uniformemente en  $X$ . En efecto, dado  $\varepsilon > 0$ , basta tomar  $n_0 > c/\varepsilon$ . Entonces  $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x)| = |x|/n < c/n_0 < \varepsilon$ .

**Ejemplo 3.** La sucesión de funciones continuas  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^n$ , converge puntualmente a la función discontinua  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 0$  si  $0 \leq x < 1$ ,  $f(1) = 1$ . La convergencia es uniforme en cada intervalo de la forma  $[0, 1 - \delta]$ ,  $0 < \delta < 1$ , pero no es uniforme en  $[0, 1]$ . Estas dos afirmaciones son consecuencia de propiedades generales (a saber, los Teoremas 1 y 2 de abajo), pero se pueden probar fácilmente a partir de la definición. En efecto, si escribimos  $a = 1 - \delta$ , tenemos  $0 < a < 1$ , luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow a^n < \varepsilon$ . Entonces  $n > n_0 \Rightarrow 0 < f_n(x) < a^n < \varepsilon$  para todo  $x \in [0, a]$ . Por tanto  $f_n \rightarrow 0$  uniformemente en el intervalo  $[0, 1 - \delta]$ . Por otra parte, si tomamos  $\varepsilon = 1/2$  afirmamos que, sea cual fuere  $n_0 \in \mathbb{N}$ , existen puntos  $x \in [0, 1]$  tales que  $|f_{n_0}(x) - f(x)| \geq 1/2$ , o sea,  $x^{n_0} \geq 1/2$ . Basta observar que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^n = 1$ . Luego existe  $\delta > 0$  tal que  $1 - \delta < x < 1 \Rightarrow x^{n_0} > 1/2$ . Esto demuestra que  $f_n$  no converge uniformemente a  $f$  en el intervalo  $[0, 1]$ .



**Fig. 11** - Las funciones  $f_n(x) = x^n$  convergen puntualmente en el intervalo  $[0, 1]$  a una función discontinua.

**Ejemplo 4.** La sucesión de funciones continuas  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$ , converge puntualmente a la función idénticamente nula. Esta convergencia no es uniforme. En efecto, para todo  $n \in \mathbb{N}$  tenemos  $f_n(\sqrt[n]{1/2}) = 1/4$ . Luego, si  $\varepsilon = 1/4$ , ninguna función  $f_n$  tiene su gráfico contenido en la banda de radio  $\varepsilon$  alrededor de la función 0. Por otra parte, si  $0 < \delta < 1$ , tenemos  $f_n \rightarrow 0$  uniformemente en el intervalo  $[0, 1 - \delta]$ , pues  $x^n \rightarrow 0$  uniformemente en dicho intervalo y  $0 \leq x^n(1 - x^n) \leq x^n$ .



**Fig. 12**

Las consideraciones hechas en esta sección incluyen a la suma  $f = \sum f_n$  de una serie de funciones  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ . En este importante caso particular se tiene  $f = \lim s_n$ ,  $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$  para

todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in X$ . Así, decir que la serie  $\sum f_n$  converge uniformemente significa que la sucesión  $(s_n)$  converge uniformemente, y es equivalente a afirmar que la sucesión de funciones  $r_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  (“restos” de la serie), definidas mediante  $r_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots$  converge uniformemente a 0. En efecto basta observar que  $r_n = f - s_n$ .

## 2. Propiedades de la convergencia uniforme

**Teorema 1.** *Si una sucesión de funciones  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  converge uniformemente a  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  y cada  $f_n$  es continua en el punto  $a \in X$  entonces  $f$  es continua en el punto  $a$ .*

**Demostración:** Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$  para todo  $x \in X$ . Fijemos un número natural  $n > n_0$ . Como  $f_n$  es continua en el punto  $a$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$ ,  $|x - a| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon/3$ , de donde

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Lo que prueba el teorema.  $\square$

**Ejemplo 5.** La sucesión de funciones continuas  $f_n(x) = x^n$  no puede converger uniformemente en  $[0, 1]$ , pues converge puntualmente a la función discontinua  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 0$  si  $0 \leq x < 1$ ,  $f(1) = 1$ . Por otra parte, la sucesión de funciones continuas  $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$  converge puntualmente a la función 0 en el intervalo  $[0, 1]$ , que es continua, sin que esto implique la convergencia uniforme. La misma observación se puede hacer a propósito de la sucesión de funciones continuas  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x/n$ . De esto trata el próximo teorema. Antes de demostrarlo, daremos una definición.

Se dice que una sucesión de funciones  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ , converge *monótonamente* a  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  cuando, para todo  $x \in X$ , la sucesión de funciones  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  es monótona y converge a  $f(x)$ . Por ejemplo, las funciones de los Ejemplos 1 y 3 convergen monótonamente.

Es claro que si  $f_n \rightarrow f$  monótonamente en  $X$ , entonces  $|f_{n+1}(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)|$  para todo  $x \in X$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 2. (Dini).** *Si la sucesión de funciones continuas  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  converge monótonamente a la función continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  en un conjunto compacto  $X$  entonces la convergencia es uniforme.*

**Demostración:** Dado  $\varepsilon > 0$ , escribimos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ . Como  $f_n$  y  $f$  son continuas, cada  $X_n$  es compacto. A su vez, la monotonía de la convergencia implica  $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \dots$ . Finalmente, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ , vemos que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$ . Del Teorema 9, Capítulo 5, se deduce que algún  $X_{n_0}$  (y por tanto todo  $X_n$  tal que  $n > n_0$ ) es vacío. Esto significa que  $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ , sea cual fuere  $x \in X$ .  $\square$

**Ejemplo 6.** La sucesión de funciones continuas  $f_n : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^n$ , converge monótonamente a la función (continua) idénticamente nula en el conjunto  $[0, 1)$ , que no es compacto; sin embargo, la convergencia no es uniforme. En efecto, dado  $0 < \varepsilon < 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  existen puntos  $x \in [0, 1)$  tales que  $x^n > \varepsilon$ , ya que  $\lim_{x \rightarrow -1} x^n = 1 > \varepsilon$ .

**Teorema 3. (Paso al límite bajo el signo integral).** *Si la sucesión de funciones integrables  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  converge uniformemente a  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  entonces  $f$  es integrable y*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx .$$

En otras palabras: si la convergencia es uniforme,  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$ .

**Demostración:** Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/4(b-a)$  para todo  $x \in [a, b]$ . Fijemos  $m > n_0$ , como  $f_m$  es integrable existe una partición  $P$  tal que, si indicamos mediante  $\omega_i, \omega'_i$  las oscilaciones de  $f$  y  $f_m$ , respectivamente, en el intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  de  $P$ , se tiene  $\sum \omega'_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon/2$ . Por otra parte, para cualesquiera  $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$  se tiene:

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f_m(y)| + |f_m(y) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &< \omega'_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} . \end{aligned}$$

Por tanto,  $\omega_i < \omega'_i + \varepsilon/2(b-a)$ . De donde

$$\begin{aligned} \sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) &\leq \sum \omega'_i(t_i - t_{i-1}) + [\varepsilon/2(b-a)] \sum (t_i - t_{i-1}) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra que  $f$  es integrable. Además,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| &= \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)]dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \\ &\leq \frac{(b-a)\varepsilon}{4(b-a)} < \varepsilon \end{aligned}$$

si  $n > n_0$ . En consecuencia,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ .  $\square$

**Observación.** Si cada  $f_n$  es continua la demostración se simplifica considerablemente pues entonces  $f$  también es continua, y por tanto integrable.

**Ejemplo 7.** Si una sucesión de funciones integrables  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  converge puntualmente a  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , puede suceder que  $f$  no sea integrable. Por ejemplo, si  $\{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$  es una enumeración de los números racionales en  $[a, b]$  y definimos  $f_n$  como la función que vale 1 en los puntos  $r_1, r_2, \dots, r_n$  y cero en los demás puntos de  $[a, b]$ , entonces  $f_n$  converge puntualmente a la función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = 1$  si  $x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$  y  $f(x) = 0$  si  $x$  es racional. Evidentemente, cada  $f_n$  es integrable, y sin embargo  $f$  no lo es.

**Ejemplo 8.** Incluso cuando una sucesión de funciones integrables  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  converge puntualmente a una función integrable

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , puede suceder que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx$ .

Por ejemplo, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f_n(x) = nx^n(1-x^n)$ . Entonces  $f_n(1) = 0$  y  $0 \leq f_n(x) < nx^n$  si  $0 \leq x < 1$ . Ahora bien,  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0$  si  $0 \leq x < 1$ . Por tanto  $f_n$  converge puntualmente en  $[0, 1]$  a la función idénticamente nula. Además

$$\int_0^1 f_n(x)dx = n^2/(n+1)(2n+1); \text{ por tanto } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1/2$$

y sin embargo  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ .

Para que se verifique que la derivada del límite sea igual al límite de las derivadas, en vez de suponer que  $f_n$  converge uniformemente, se tiene que postular que la sucesión de las derivadas converja uniformemente.

**Teorema 4. (Derivación término a término).** Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones de clase  $C^1$  en el intervalo  $[a, b]$ . Si la sucesión formada por los números  $(f_n(c))$  converge para algún  $c \in [a, b]$  y las derivadas  $f'_n$  convergen uniformemente a una función  $g$  en  $[a, b]$ , entonces  $(f_n)$  converge uniformemente a una función  $f$ , de clase  $C^1$ , tal que  $f' = g$  en  $[a, b]$ . En resumen:  $(\lim f_n)' = \lim f'_n$  siempre que las derivadas  $f'_n$  converjan uniformemente.

**Demostración:** Por el Teorema Fundamental del Cálculo, para cada  $n \in \mathbb{N}$  y todo  $x \in [a, b]$ , tenemos  $f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f'_n(t)dt$ . Si hacemos  $n \rightarrow \infty$ , vemos por el Teorema 3, que existe  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  y que  $f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)dt$ . Además, por el Teorema 1,  $g$  es continua, luego (de nuevo por el Teorema Fundamental del Cálculo)  $f$  es derivable y  $f'(x) = g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ . En particular,  $f'$  es continua, esto es,  $f$  es de clase  $C^1$ . Sólo nos falta probar que la convergencia  $f_n \rightarrow f$  es uniforme. Ahora bien,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(c) - f(c)| + \int_c^x |f'_n(t) - g(t)|dt.$$

Como  $f'_n \rightarrow g$  uniformemente, resulta que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente.  $\square$

**Ejemplo 9.** La sucesión de funciones  $f_n(x) = \sin(nx)/n$  converge uniformemente cero en toda la recta. Sin embargo la sucesión  $f'_n(x) = \cos(nx)$  no converge, ni tal siquiera puntualmente, en ningún intervalo. (Todo intervalo contiene algún número de la forma  $x = m\pi/p$ , con  $m, p$  enteros, luego  $\cos(nx)$  alcanza infinitas veces los valores 1 y  $-1$ ).

En el caso de una serie  $\sum f_n$  los teoremas anteriores se formulan como sigue:

1. Si  $\sum f_n$  converge uniformemente a  $f$  y cada  $f_n$  es continua en el punto  $a$  entonces  $f$  es continua en el punto  $a$ .

2. Si cada término  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua tal que  $f_n(x) \geq 0$  para todo  $x \in X$ , y la serie  $\sum f_n$  converge a una función continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  en el compacto  $X$ , entonces la convergencia es uniforme.
3. Si cada  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable y  $\sum f_n$  converge uniformemente a  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $f$  es integrable y  $\int_a^b \sum f_n(x) dx = \sum \int_a^b f_n(x) dx$ .
4. Si cada  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$ ,  $\sum f'_n$  converge uniformemente en  $[a, b]$  y  $\sum f_n(c)$  converge para algún  $c \in [a, b]$ , entonces  $\sum f_n$  converge uniformemente a una función de clase  $C^1$  y  $(\sum f_n)' = \sum f'_n$ .

**Ejemplo 10.** La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} x^2/(1+x^2)^n$ , cuyos términos son funciones continuas definidas en toda la recta, converge a la suma  $1+x^2$  para todo  $x \neq 0$ . En el punto  $x = 0$  todos los términos de la serie son nulos, luego la suma es cero. De donde la serie dada converge puntualmente en toda la recta; sin embargo, la convergencia no es uniforme, pues la suma es una función discontinua.

El teorema básico sobre convergencia de series de funciones, enunciado a continuación, no tiene análogo para sucesiones.

**Teorema 5. (Criterio de Weierstrass).** *Dada la sucesión de funciones,  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ , sea  $\sum a_n$  una serie convergente de números reales  $a_n \geq 0$  tales que  $|f_n(x)| \leq a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in X$ . En estas condiciones las series  $\sum |f_n|$  y  $\sum f_n$  son uniformemente convergentes.*

**Demostración:** Por el criterio de comparación, para todo  $x \in X$  la serie  $\sum |f_n|$  (y por tanto la serie  $\sum f_n$ ) es convergente. Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{n>n_0} a_n < \varepsilon$ . Escribiendo

$$R_n(x) = \sum_{k>n} |f_k(x)| \quad \text{y} \quad r_n(x) = \sum_{k>n} f_k(x),$$

se tiene inmediatamente que  $|r_n(x)| \leq R_n(x) \leq \sum_{k>n} a_k < \varepsilon$  para todo  $n > n_0$  luego  $\sum |f_n|$  y  $\sum f_n$  son uniformemente convergentes.  $\square$

### 3. Series de potencias

Las funciones más importantes del Análisis se pueden escribir como sumas de series de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots .$$

Estas series, que son la generalización natural de los polinomios, se llaman *series de potencias*.

Para simplificar la notación, preferimos tratar el caso en que  $x_0 = 0$ , esto es, series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots .$$

El caso general se reduce a éste haciendo el cambio de variables  $y = x - x_0$ . Así, los resultados que obtengamos para las series  $\sum a_n x^n$  se pueden adaptar fácilmente al caso  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ .

La primera propiedad destacable sobre la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  es que el conjunto de valores de  $x$  para los que ésta converge es un intervalo centrado en  $x_0$ . Dicho intervalo puede ser acotado (abierto, cerrado o semiabierto), igual a  $\mathbb{R}$ , o simplemente reducirse a un único punto. Demostraremos esto en breve; antes veamos un ejemplo que ilustra todas estas posibilidades.

**Ejemplo 11.** Por el criterio de d'Alembert, la serie  $\sum x^n/n!$  converge para cualquier valor de  $x$ . La serie  $\sum [(-1)^n/(2n+1)]x^{2n}$  converge si, y sólo si,  $x \in [-1, 1]$ . La serie  $\sum [(-1)^n/n]x^n$  converge si  $x \in (-1, 1]$  y diverge fuera de dicho intervalo. El conjunto de puntos  $x \in \mathbb{R}$  para los que la serie geométrica  $\sum x^n$  converge es el intervalo abierto  $(-1, 1)$ . Finalmente, la serie  $\sum n^n x^n$  converge exclusivamente en el punto  $x = 0$ .

Dada una serie de potencias  $\sum a_n x^n$ , la localización de los puntos  $x$  donde ésta converge se hace mediante el criterio de Cauchy (Teorema 6, Capítulo 4), que pone de manifiesto el comportamiento de la sucesión  $(\sqrt[n]{|a_n|})$ .



Si la sucesión  $(\sqrt[n]{|a_n|})$  no está acotada entonces la serie  $\sum a_n x^n$  converge solamente cuando  $x = 0$ . En efecto, para todo  $x \neq 0$  la sucesión de números  $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|}$  no está acotada, así que ocurre lo mismo con  $|a_n x^n|$ , luego el término general de la serie  $\sum a_n x^n$  no tiende a cero.

Por otro parte, si la sucesión  $(\sqrt[n]{|a_n|})$  está acotada entonces el conjunto:

$$R = \{\rho > 0 : \sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ suficientemente grande}\}$$

no es vacío. En realidad, es fácil ver que si  $\rho \in R$  y  $0 < x < \rho$  entonces  $x \in R$ . Luego  $R$  es un intervalo del tipo  $(0, r)$ ,  $(0, r]$  o  $(0, +\infty)$ , donde  $r = \sup R$ . El número  $r$  se llama *radio de convergencia* de la serie  $\sum a_n x^n$ . (Si  $R$  no está acotada convendremos en escribir  $r = +\infty$ ).

El radio de convergencia  $r$  de la serie de potencias  $\sum a_n x^n$  verifica las siguientes propiedades;

1. Para todo  $x \in (-r, r)$  la serie  $\sum a_n x^n$  converge absolutamente. En efecto, tomando  $\rho$  tal que  $|x| < \rho < r$  tenemos  $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho$ , por consiguiente  $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < |x|/\rho < 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Luego, por el criterio de Cauchy,  $\sum a_n x^n$  converge absolutamente.
2. Si  $|x| > r$  la serie  $\sum a_n x^n$  diverge. En efecto, en este caso  $x \notin R$ , luego no se tiene  $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/|x|$  para todo  $n$  suficientemente grande. Esto significa que  $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1/|x|$ , y por tanto  $|a_n x^n| \geq 1$ , para infinitos valores de  $n$ . Luego el término general de la serie  $\sum a_n x^n$  no tiende a cero y por tanto la serie diverge.
3. Si  $x = \pm r$ , en general, no puede afirmarse nada: la serie  $\sum a_n x^n$  puede ser divergente o convergente, según los diferentes casos.
4. Si existe  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  entonces  $r = 1/L$ . (Se sobreentiende que si  $L = 0$  entonces  $r = +\infty$ ). En efecto, para todo  $\rho \in R$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho$ . Haciendo  $n \rightarrow \infty$  obtenemos  $L \leq 1/\rho$ , de donde  $\rho \leq 1/L$ . Se deduce que  $r = \sup R \leq 1/L$ . Ahora supongamos, por reducción al absurdo, que  $r < 1/L$ , entonces tomaríamos  $c$  tal que  $r < c < 1/L$ , de donde

$L < 1/c$ . Por la definición de límite tendríamos  $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/c$  para todo  $n$  suficientemente grande, de donde  $c \in R$  y así  $c \leq r$ , que es una contradicción. Luego  $r = 1/L$ .

El análisis que acabamos de hacer se puede resumir como sigue:

**Teorema 6.** *Una serie de potencias  $\sum a_n x^n$ , ó converge exclusivamente cuando  $x = 0$ , ó existe  $r$ ,  $0 < r \leq +\infty$ , tal que la serie converge absolutamente en el intervalo abierto  $(-r, r)$  y diverge fuera del intervalo cerrado  $[-r, r]$ . En los extremos  $-r$  y  $r$  la serie puede converger o diverger. Si existe  $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$  entonces  $r = 1/L$ . El número  $r$  se llama radio de convergencia de la serie. Además, se tiene  $0 < \rho < r \Leftrightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande.*

**Observación:** Del Teorema 7, Capítulo 4, se deduce que si los coeficientes  $a_n$  son diferentes de cero y existe  $\lim |a_{n+1}|/|a_n| = L$ , entonces el radio de convergencia de la serie  $\sum a_n x^n$  es  $r = 1/L$ .

**Teorema 7.** *Una serie de potencias  $\sum a_n x^n$  converge uniformemente en todo intervalo compacto de la forma  $[-\rho, \rho]$ , donde  $0 < \rho < \text{radio de convergencia}$ .*

**Demostración:** La serie  $\sum a_n \rho^n$  es absolutamente convergente y, para todo  $x \in [-\rho, \rho]$ , se tiene  $|a_n x^n| \leq |a_n| \rho^n$ . Del criterio de Weierstrass (Teorema 5) se sigue que la serie  $\sum a_n x^n$  converge uniformemente en el intervalo  $[-\rho, \rho]$ .  $\square$

**Corolario 1.** Si  $r > 0$  es el radio de convergencia de la serie  $\sum a_n x^n$ , entonces la función  $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante  $f(x) = \sum a_n x^n$ , es continua.

**Ejemplo 12.** La serie  $\sum a_n x^n$  no es necesariamente uniformemente convergente en todo el intervalo  $(-r, r)$ , donde  $r$  es el radio de convergencia. Esto está claro en el caso de la serie  $\sum x^n/n!$ , que tiene radio de convergencia infinito, para la cual  $r_n(x) = \sum_{k>n} x^k/k! > x^{n+1}/(n+1)!$  si  $x$  es positivo. Dado  $\varepsilon > 0$ , independiente del  $n$  escogido, es imposible que  $r_n(x) < \varepsilon$  para todo  $x$  positivo.

**Teorema 8. (Integración término a término).** *Sea  $r$  el radio de convergencia de la serie  $\sum a_n x^n$ . Si  $[\alpha, \beta] \subset (-r, r)$  entonces:*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left( \sum a_n x^n \right) dx = \sum \frac{a_n}{n+1} (\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}).$$

**Demostración:** La convergencia de  $\sum a_n x^n$  es uniforme en el intervalo  $[\alpha, \beta]$ , pues si escribimos  $\rho = \max\{|\alpha|, |\beta|\} < r$  tendremos  $[\alpha, \beta] \subset [-\rho, \rho]$ . Luego, por el Teorema 3, podemos integrar término a término.  $\square$

**Teorema 9. (Derivación a término a término).** Sea  $r$  el radio de convergencia de la serie de potencias  $\sum a_n x^n$ . La función  $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $f(x) = \sum a_n x^n$ , es derivable y  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ; además la serie de potencias  $f'(x)$  también tiene radio de convergencia  $r$ .

**Demostración:** Sea  $r'$  el radio de convergencia de la serie  $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ , que converge si, y sólo si,  $x \sum n a_n x^{n-1} = \sum n a_n x^n$  converge. Luego  $r'$  también es el radio de convergencia de esta última serie. Abreviamos la expresión “para todo  $n$  suficientemente grande” escribiendo “ $n \gg 1$ ”. Si  $0 < \rho < r$  entonces, tomando  $c$  con  $0 < \rho < c < r$ , tenemos  $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/c$ ,  $n \gg 1$ . Por otra parte, como  $\lim \sqrt[n]{n} = 1$  entonces  $\sqrt[n]{n} < c/\rho$ ,  $n \gg 1$ . Multiplicando las dos últimas desigualdades se tiene  $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho$ ,  $n \gg 1$ . Por tanto,  $0 < \rho < r \Rightarrow 0 < \rho < r'$ . Como es obvio que  $0 < \rho < r' \Rightarrow 0 < \rho < r$ , concluimos que  $r = r'$ . Así, las serie de potencias  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  y  $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$  tienen el mismo radio de convergencia. Dado cualquier  $x \in (-r, r)$  tomamos  $\rho$  tal que  $|x| < \rho < r$ . Ambas series son uniformemente convergentes en  $[-\rho, \rho]$  luego, por el Teorema 4, tenemos  $f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ .  $\square$

**Corolario 1.** Sea  $r$  el radio de convergencia de la serie de potencias  $\sum a_n x^n$ . La función  $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante  $f(x) = \sum a_n x^n$ , es de clase  $C^\infty$ . Además para cualesquiera  $x \in (-r, r)$  y  $k \in \mathbb{N}$  se tiene

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

En particular,  $a_k = f^{(k)}(0)/k!$ .

Por tanto,  $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$  es el polinomio de Taylor de orden  $n$  de la función  $f(x) = \sum a_n x^n$  en un entorno del punto  $x = 0$ .

**Corolario 2. (Unicidad de la representación en serie de potencias).** Sean  $\sum a_n x^n$  y  $\sum b_n x^n$  series de potencias convergentes en el intervalo  $(-r, r)$  y  $X \subset (-r, r)$  un conjunto que tiene al 0

como punto de acumulación. Si  $\sum a_n x^n = \sum b_n x^n$  para todo  $x \in X$  entonces  $a_n = b_n$  para todo  $n \geq 0$ .

En efecto, las hipótesis nos aseguran que las funciones  $f, g : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas como  $f(x) = \sum a_n x^n$  y  $g(x) = \sum b_n x^n$ , tienen las mismas derivadas,  $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Luego  $a_n = f^{(n)}(0)/n! = g^{(n)}(0)/n! = b_n$ .

#### 4. Series trigonométricas

Demostraremos ahora, sucintamente, cómo se pueden definir de forma precisa las funciones trigonométricas sin apelar a la intuición geométrica.

Las series de potencias:

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{y} \quad s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

tienen radio de convergencia infinita, luego definen funciones  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ambas de clase  $C^\infty$ .

Es inmediato que  $c(0) = 1$ ,  $s(0) = 0$ ,  $c(-x) = c(x)$  y  $s(-x) = -s(x)$ . Derivando término a término, se tiene  $s'(x) = c(x)$  y  $c'(x) = -s(x)$ .

La derivada de la función  $f(x) = c(x)^2 + s(x)^2$  es

$$2cc' + 2ss' = -2cs + 2cs = 0,$$

luego es constante. Como  $f(0) = 1$ , concluimos que  $c(x)^2 + s(x)^2 = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

De forma análoga se prueban las fórmulas de la suma:

$$s(x+y) = s(x)c(y) + s(y)c(x),$$

y

$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y).$$

Para esto basta fijar  $y \in \mathbb{R}$  y definir las funciones  $f(x) = s(x+y) - s(x)c(y) - c(x)s(y)$  y  $g(x) = c(x+y) - c(x)c(y) + s(x)s(y)$ .

Se tiene  $f' = g$  y  $g' = -f$ , de donde  $f^2 + g^2$  tiene derivada idénticamente nula, luego es constante. Como  $f(0) = g(0) = 0$ , se deduce que  $f(x)^2 + g(x)^2 = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Por tanto  $f(x) = g(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y así las fórmulas están probadas.

Afirmamos ahora que, necesariamente, existe algún  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $c(x) = 0$ .

En caso contrario, como  $c(0) = 1$ , tendríamos  $c(x) > 0$  para todo  $x > 0$  y, como  $c$  es la derivada de  $s$ , la función  $s$  sería creciente en la semirecta  $\mathbb{R}^+$ . Entonces, para cualquier  $x > 1$ , se tendría  $c(x) = c(1) - \int_1^x s(t)dt > 0$ , de donde  $c(1) > \int_1^x s(t)dt > s(1)(x-1)$ ; la última desigualdad se debe a que  $s$  es creciente. Pero la desigualdad  $c(1) > s(1)(x-1)$  para todo  $x > 1$  es absurdo. Luego existe algún  $x$  tal que  $c(x) = 0$ .

El conjunto de los números  $x \geq 0$  tales que  $c(x) = 0$  es cerrado porque  $c$  es continua. Luego posee un menor elemento, que no es cero pues  $c(0) = 1$ . Llamaremos  $\pi/2$  al menor número positivo para el que se tiene  $c(x) = 0$ .

Veremos ahora que las funciones  $c(x)$  y  $s(x)$  son periódicas, con período  $2\pi$ . En efecto, la segunda fórmula de la suma nos da:  $c(2x) = c(x)^2 - s(x)^2 = 2c(x)^2 - 1$ , luego  $c(\pi) = -1$  y  $c(2\pi) = 1$ , de donde  $s(\pi) = s(2\pi) = 0$ . De nuevo las fórmulas de la suma demuestran que  $s(x + 2\pi) = s(x)$  y  $c(x + 2\pi) = c(x)$ , lo que prueba la afirmación.

Las notaciones usuales para estas funciones son  $c(x) = \cos x$  y  $s(x) = \sin x$ .

Este pequeño resumen justifica el uso de las funciones  $\sin x$  y  $\cos x$  en el Análisis Matemático. A partir de aquí se definen las demás funciones trigonométricas de la forma habitual:  $\tan x = \sin x / \cos x$ ,  $\sec x = 1 / \cos x$ , etc.

En particular,  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x = 1$  porque, como  $\sin(0) = 0$ , este límite es la derivada de  $\sin x$  en el punto  $x = 0$ , que es igual a  $\cos 0$ , o sea, a 1.

## 5. Series de Taylor

Cuando la serie de potencias  $\sum a_n(x - x_0)^n$  tiene radio de convergencia  $r > 0$ , se dice que es la *serie de Taylor*, alrededor del punto  $x_0$ , de la función  $f : (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante  $f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$ . Esta denominación se debe a que la suma de los  $n + 1$  primeros términos de esta serie es el polinomio de Taylor de orden  $n$  de  $f$  en el punto  $x_0$ . Veremos ahora las serie de Taylor de algunas funciones conocidas.

A veces la serie de Taylor de una función en el punto  $x_0 = 0$  se llama “serie de Maclaurin”; sin embargo, no adoptaremos esta terminología.

### 1. Funciones seno y coseno

Sus series de Taylor en un entorno del punto  $x = 0$  son:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad \text{y} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

en virtud de la propia definición de dichas funciones.

### 2. Función $1/(1 - x)$

La serie de potencias  $1 + x + x^2 + \cdots$  es una serie geométrica, que converge a la suma  $1/(1 - x)$  cuando  $|x| < 1$ , y diverge cuando  $|x| \geq 1$ . Luego es la serie de Taylor de la función  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $f(x) = 1/(1 - x)$ .

Se deduce que  $1 - x + x^2 - \cdots = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$  es la serie de Taylor de la función  $1/(1 + x)$ , que converge si  $|x| < 1$  y diverge  $|x| \geq 1$ .

De aquí también resulta que  $1 - x^2 + x^4 - \cdots = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{2n}$  es la serie de Taylor de la función  $g(x) = 1/(1 + x^2)$  alrededor del punto  $x = 0$ . En este caso la función  $g$  está definida para todo  $x \in \mathbb{R}$ ; sin embargo su serie de Taylor converge solamente en el intervalo  $(-1, 1)$ . (Este fenómeno está relacionada con el hecho de que la función de variable compleja  $g(z) = 1/(1 + z^2)$  no está definida en los puntos  $z = \pm\sqrt{-1}$ , ambos con valor absoluto igual a 1).

Si queremos obtener desarrollos finitos podemos escribir, respectivamente,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}, \quad x \neq 1, \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}, \quad x \neq -1, \\ \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

En cada una de estas expresiones el último sumando es el resto de la fórmula de Taylor. En efecto, si llamamos, respectivamente,  $r, s$  y  $t$  a estos restos vemos fácilmente que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{s(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t(x)}{x^n} = 0.$$

### 3. Función exponencial

La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$  converge para todo  $x \in \mathbb{R}$ , luego la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ , es de clase  $C^\infty$ . Derivando término a término vemos que  $f'(x) = f(x)$ . Como  $f(0) = 1$ , del Teorema 17, Capítulo 9, se concluye que  $f(x) = e^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Por tanto:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

es la serie de Taylor de la función exponencial en el punto  $x = 0$ .

### 4. Función logaritmo

Como la función logaritmo no tiene sentido cuando  $x = 0$ , consideraremos la función  $\log(1+x)$ , definida para todo  $x > -1$ . Por definición,  $\log(1+x) = \int_0^x dt/(1+t)$ . Integrando término a término la serie de Taylor de  $1/(1+x)$ , que acabamos de ver, obtenemos:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},$$

la serie de Taylor de  $\log(1+x)$ , que es convergente en el intervalo abierto  $(-1, 1)$ , pues su radio de convergencia es 1. Por el Teorema de Leibniz (Teorema 3, Capítulo 4) se tiene que esta serie

converge también para  $x = 1$  (sin embargo diverge para  $x = -1$ ). Sería interesante saber si la función  $f : (-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $f(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} x^n / n$ , que coincide con  $\log(1+x)$  cuando  $|x| < 1$ , también coincide con  $\log(1+x)$  en el punto  $x = 1$ . Esto es verdad, como veremos a continuación. En efecto, si integramos término a término el desarrollo finito de  $1/(1+x)$  visto anteriormente, obtenemos (llegando hasta el orden  $n$  en vez de  $n+1$ ):

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + r_n(x),$$

donde

$$r_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt.$$

Para  $x = 1$ , tenemos  $|r_n(x)| \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$ .

Por tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(1) = 0$ . De donde

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n} + \cdots.$$

Esta es una expresión interesante de  $\log 2$  como suma de una serie alternada que demuestra que la serie de Taylor  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n / n$  representa  $\log(1+x)$  en el intervalo  $(-1, 1]$ .

## 5. Función $\arctan x$

De los cursos de Cálculo es conocido que la función  $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  es una biyección de clase  $C^\infty$  con derivada positiva, y que su inversa  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$  tiene derivada igual a  $1/(1+x^2)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . El desarrollo de  $\tan x$  en serie de Taylor es complicado, mientras que el de  $\arctan x$  es bastante simple; por eso pasamos a exponerlo. Tenemos que  $\arctan x = \int_0^x dt/(1+t^2)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Cuando  $|x| < 1$ , podemos integrar término a término el desarrollo de Taylor de  $1/(1+x^2)$  visto anteriormente, obteniendo:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Este argumento (integración término a término) nos garantiza la validez de esta igualdad cuando  $-1 < x < 1$ . Sucede que la serie en



cuestión también converge en los puntos  $x = 1$  y  $x = -1$ . Por tanto, es natural esperar que el desarrollo de  $\arctan x$  en serie de Taylor valga en todo el intervalo cerrado  $[-1, 1]$ . Para ver esto integramos el desarrollo finito de  $1/(1+x^2)$ , obteniendo:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + r_n(x),$$

donde  $r_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$ .

Para todo  $x \in [-1, 1]$  tenemos

$$|r_n(x)| \leq \int_0^{|x|} t^{2n} dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1},$$

luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ , por tanto vale la igualdad:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

para todo  $x \in [-1, 1]$ . En particular, para  $x = 1$ , obtenemos la fórmula de Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

## 5. Ejercicios

Sección 1: Convergencia puntual y Convergencia uniforme

1. Demuestre que la sucesión de funciones  $f_n : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por  $f_n(x) = x^n/(1+x^n)$  converge puntualmente. Determine la función límite y demuestre que la convergencia no es uniforme.
2. Pruebe que la sucesión del ejercicio anterior converge uniformemente en todos los intervalos de la forma  $[0, 1-\delta]$  y  $[1+\delta, \infty)$ ;  $0 < \delta < 1$ .
3. Pruebe que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)$  converge cuando  $x$  pertenece al intervalo  $(-1, 1]$ . Además la convergencia es uniforme en todos los intervalos de la forma  $[-1+\delta, 1-\delta]$ , donde  $0 < \delta < 1/2$ .

4. Pruebe que para que una sucesión de funciones  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  sea uniformemente convergente es necesario y suficiente que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$  para cualquier  $x \in X$ . (Criterio de Cauchy).
5. Si la sucesión de funciones  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  converge uniformemente a  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , pruebe que  $f$  está acotada si, y sólo si, existen  $K > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que  $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x)| \leq K$  para todo  $x \in X$ .
6. Si la sucesión de funciones  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  es tal que  $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_n \geq \dots$  y  $f_n \rightarrow 0$  uniformemente en  $X$ , pruebe que la serie  $\sum (-1)^n f_n$  converge uniformemente en  $X$ .
7. Si  $\sum |f_n(x)|$  es uniformemente convergente en  $X$ , pruebe que  $\sum f_n(x)$  también lo es.

### Sección 2: Propiedades de la convergencia uniforme

1. Si  $f_n \rightarrow f$  y  $g_n \rightarrow g$  uniformemente en el conjunto  $X$ , pruebe que  $f_n + g_n \rightarrow f + g$  uniformemente en  $X$ . Pruebe también que si  $f$  y  $g$  están acotadas entonces  $f_n \cdot g_n \rightarrow f \cdot g$  uniformemente en  $X$ . Finalmente, si existe  $c > 0$  tal que  $|g(x)| \geq c$  para todo  $x \in X$ , pruebe que  $1/g_n \rightarrow 1/g$  uniformemente en  $X$ .
2. Sea  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un polinomio de grado  $\geq 1$ . Demuestre que la sucesión de funciones  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por  $f_n(x) = p(x) + 1/n$ , converge uniformemente a  $p$  en  $\mathbb{R}$ ; sin embargo  $(f_n^2)$  no converge uniformemente a  $p^2$ .
3. Considere la sucesión de funciones  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $f_n(x) = \sin(nx)/\sqrt{n}$ . Pruebe que  $(f_n)$  converge uniformemente a 0, pero que la sucesión de las derivadas  $f'_n$  no converge en ningún punto del intervalo  $[0, 1]$ .
4. Demuestre que la sucesión de funciones  $g_n(x) = x + x^n/n$  converge uniformemente en el intervalo  $[0, 1]$  a una función derivable  $g$  y que la sucesión de derivadas  $g'_n$  converge puntualmente en  $[0, 1]$ : sin embargo,  $g'$  no es igual a  $\lim g'_n$ .
5. Sea  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente continua. Si la sucesión de funciones  $f_N : X \rightarrow \mathbb{R}$  converge uniformemente a  $f$ , con

$f(X) \subset Y$  y  $f_n(X) \subset Y$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pruebe que  $g \circ f_n \rightarrow g \circ f$  uniformemente en  $X$ . Analice también el caso más sencillo  $f_n \circ g \rightarrow f \circ g$ .

6. Sean  $X$  compacto,  $U$  abierto y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $f(X) \subset U$ . Pruebe que si una sucesión de funciones  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  converge uniformemente a  $f$ , entonces existe  $n_0$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow f_n(X) \subset U$ .
7. Si una sucesión de funciones continuas  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  es uniformemente convergente en un conjunto denso  $D \subset X$ , pruebe que  $(f_n)$  converge uniformemente en  $X$ .
8. La sucesión de funciones  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = nx(1-x)^n$ , converge, pero no uniformemente. Demuestre que, no obstante, se tiene:

$$\int_0^1 \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n.$$

9. Dada una sucesión de funciones  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ , suponga que existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\sqrt[n]{|f_n(x)|} \leq c < 1$  para todo  $x \in X$  y  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Pruebe que  $\sum |f_n|$  y  $\sum f_n$  convergen uniformemente en  $X$ .
10. En el ejercicio anterior suponga que  $f_n(x) \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in X$  y, en vez de  $\sqrt[n]{|f_n(x)|} \leq c < 1$ , suponga que  $|f_{n+1}(x)/f_n(x)| \leq c < 1$  para todo  $x \in X$  y  $n$  suficientemente grande. Obtenga la misma conclusión.

### Sección 3: Series de potencias

1. Sea  $r$  el radio de convergencia de la serie de potencias  $\sum a_n(x-x_0)^n$ . Pruebe que si  $r \in \mathbb{R}^+$  entonces  $r = 1/L$ , donde  $L$  es el mayor valor de adherencia de la sucesión acotada  $(\sqrt[n]{|a_n|})$ . Por tanto,  $r = 1/(\limsup \sqrt[n]{|a_n|})$ .
2. Pruebe que si  $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$  entonces la series de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$$

tiene radio de convergencia igual a  $1/\sqrt{L}$ .

3. Determine el radio de convergencia de las siguientes series:

$$\sum a^{n^2} x^n, \quad \sum a^{\sqrt{n}} x^n \quad \text{y} \quad \sum n^{\frac{\log n}{n}} x^n.$$

4. Pruebe que la función  $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , donde  $r$  es el radio de convergencia de la serie, es una función par (respectivamente, impar) si, y sólo si,  $a_n = 0$  para todo  $n$  impar (respectivamente, par). (Ver Ejercicio 2.4, Cap. 8).
5. Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  una serie de potencias cuyos coeficientes están determinados por las igualdades  $a_0 = a_1 = 1$  y  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ . Demuestre que el radio de convergencia de dicha serie es igual a  $(-1 + \sqrt{5})/2$ .
6. Pruebe que la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

está bien definida para todo  $x \in \mathbb{R}$  y que  $f'' + \frac{f'}{x} + f = 0$  para todo  $x \neq 0$ .

## Soluciones de los ejercicios

Cada una de las doce secciones de este capítulo tiene el título de uno de los doce capítulos anteriores y contiene las soluciones de los ejercicios propuestos en dicho capítulo. La notación  $p.q$  quiere decir  $q$ -ésimo ejercicio de la sección  $p$  del capítulo correspondiente.

### 1. Conjuntos finitos e infinitos

1.2 El conjunto  $A$  de los múltiplos de  $m$  mayores que  $n$  no es vacío pues  $(n+1)m \in A$ . Sea  $(q+1)m$  el menor elemento de  $A$ . Si  $n$  no es múltiplo de  $m$ ,  $qm < n < (q+1)m$ , luego  $n = qm + r$ , con  $r < m$ . Recíprocamente, si  $n = qm + r$  con  $r < m$  entonces  $(q+1)m$  es el menor elemento de  $A$ , luego  $q$  está unívocamente determinado junto a  $r = n - mq$ .

1.3 Sea  $k$  el menor elemento de  $X$ . Si  $n \in X$  entonces  $n \geq k$ . Así, ó  $n$  es múltiplo de  $k$  ó  $n = qk + r$ , con  $r < k$ . Ahora bien,  $n$  y  $qk$  pertenecen a  $X$ , luego  $r \in X$ , lo que es absurdo pues  $k$  es el menor elemento de  $X$ . Por lo tanto, todo  $n \in X$  es múltiplo de  $k$ .

1.4  $n < x < n+1 \Rightarrow x = n+p$ ,  $p \in \mathbb{N} \Rightarrow n+p < n+1 \Rightarrow p < 1$ , lo que es absurdo.

1.5 Sea  $X \subset \mathbb{N}$  tal que  $1 \in X$  y  $n \in X \Rightarrow n+1 \in X$ . Si  $X = \mathbb{N}$  tome  $k =$ menor elemento de  $\mathbb{N} - X$ . Se tiene  $1 \in X$ , luego  $k = p+1$

con  $p < k$ , así  $p \in X$ , luego  $p + 1 = k \notin X$ , obtenemos una contradicción.

- 2.2 Si  $Y = X \cup \{a\}$ , donde  $a \in Y$ , entonces  $\mathcal{P}(Y)$  está formado por las partes de  $Y$  que no contienen a  $a$  unidos a las que contienen a  $a$ . Las primeras constituyen  $\mathcal{P}(X)$ , el número de las segundas es igual al de las primeras, luego  $\mathcal{P}(Y) = 2\mathcal{P}(X)$ . Ahora es suficiente aplicar el método de inducción sobre el número de elementos de  $X$ .
- 2.3 Si  $X = X' \cup \{a\}$ ,  $a \notin X'$ , entonces cada función  $f' : X' \rightarrow Y$  se puede extender de  $n$  maneras diferentes a una función  $f : X \rightarrow Y$ , que corresponden a las  $n$  imágenes posibles de  $a$ ,  $f(a) \in Y$ . Luego  $\text{card } F(X; Y) = \text{card } F(X'; Y) \times n$ . Ahora es suficiente aplicar el método de inducción sobre el número de elementos  $m$  de  $X$ .
- 3.3 Use la idea de Euclides: suponga que  $P$  es finito, considere el producto de todos los números primos y sume 1 a este producto, así se obtiene un número  $n$  que no puede ser primo, por lo tanto tiene un divisor propio. Llegue a una contradicción.
- 3.4 Tome  $X_n = \mathbb{N} - I_n =$  conjunto de los números naturales mayores que  $n$ . Entonces  $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$  significa que  $a$  es mayor que cualquier otro número natural.
- 4.1 Para ver que  $f$  es inyectiva use la unicidad de la descomposición en factores primos. Para ver que es sobreyectiva, dado  $k \in \mathbb{N}$  sea  $m$  el mayor número natural tal que  $k$  es divisible por  $2^m$ . Entonces  $k = 2^m \cdot \ell$ , donde  $\ell$  es impar, luego  $\ell = 2n - 1$ .
- 4.2 Tome  $g = \pi \circ \varphi$ , donde  $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  es sobreyectiva y  $\pi(m, n) = n$ .
- 4.3 Use el ejercicio anterior.
- 4.4 La función  $f : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$  definida como  $f(X) = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  si  $\{m_1 < m_2 < \cdots < m_n\}$  es inyectiva, por lo tanto  $\mathcal{P}_n$  es numerable, luego  $\mathcal{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$  también lo es.

4.5 Interprete cada subconjunto  $X \subset \mathbb{N}$  como una sucesión de ceros y unos, donde el  $n$ -ésimo término es 1 si  $n \in X$  y 0 si  $n \notin X$ .

4.6  $X = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y)$ .

## 2. Números reales

2.2  $x = x - y + y \Rightarrow |x| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$ .  
Análogamente,  $|y| - |x| \leq |x - y|$  luego  $||x| - |y|| \leq \max\{|x| - |y|, |y| - |x|\} \leq |x - y|$ .

2.3 No use el método de inducción. Escriba  $(1 + x)^{2n} = (1 + 2x + x^2)^n$  y use la desigualdad de Bernoulli.

2.6 Se deduce de 2.2.

2.7 Observe que  $f(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ , donde  $a = \sum y_i^2$ ,  $b = 2 \sum x_i y_i$ ,  $c = \sum x_i^2$ .

3.3 Sea  $A = \sup f$ . Se tiene  $f(x) \leq A$ , de donde  $f(x)^2 \leq A^2$  para todo  $x \in X$ , luego  $\sup(f^2) \leq A^2$ . Por otra parte, si  $c < A^2$  entonces  $\sqrt{c} < A$ , luego existe  $x \in X$  con  $\sqrt{c} < f(x) < A$ , y así  $c < f(x)^2 < A^2$ . Por lo tanto,  $\sup(f^2) = A^2$ .

3.4 De  $x < (2 - a^2)/(2a + 1)$  se tiene  $a^2 + 2ax + x < 2$ . Como  $x < 1$ , se tiene  $x^2 < x$ , luego  $(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 < a^2 + 2ax + x < 2$ . Por otra parte, como  $y < (b^2 - 2)/2b$  entonces  $b^2 - 2by > 2$ , de donde  $(b - y) > (b - 2y) > 0$ . Estas desigualdades nos dicen que si  $X = \{a > 0 : a^2 < 2\}$ , entonces  $c = \sup X$  no pertenece ni a  $X$  ni al conjunto  $Y = \{b > 0 : b^2 > 2\}$ . Luego  $c^2 = 2$ .

3.5 La correspondencia que asocia al polinomio  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  la  $(n + 1)$ -upla  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  es una biyección entre el conjunto  $P_n$  de los polinomios con coeficientes enteros de grado  $\leq n$  y el producto cartesiano  $\mathbb{Z}^{n+1} = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ , luego  $P_n$  es numerable. Así el conjunto  $P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$  de los polinomios con coeficientes enteros es numerable. Para cada número algebraico  $\alpha$  fije, de una vez por todas, un polinomio  $P_\alpha$  con coeficientes enteros que tenga  $\alpha$  como raíz. La correspondencia  $\alpha \rightarrow P_\alpha$  define una función del conjunto  $A$  de los

números algebraicos reales en el conjunto numerable  $P$ , tal que la imagen inversa de cada elemento de  $P$  es finito. Luego  $A$  es numerable.

- 3.6 Sean  $\alpha = \inf I$  y  $\beta = \sup I$ , escribiremos  $\alpha = -\infty$  (resp.  $\beta = +\infty$ ) si  $I$  no está acotado inferiormente (resp. superiormente). Basta probar que  $(\alpha, \beta) \subset I$ . Ahora bien,  $x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow \alpha < x < \beta \Rightarrow$  (por la definición de ínfimo y supremo) existen  $a, b \in I$  tales que  $a < x < b$ , luego, por hipótesis,  $x \in I$ .

### 3. Sucesiones de números reales

- 1.2 Dado  $\varepsilon > 0$ , existen  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tales que  $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$  y  $n > n_2 \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon$ . Tome  $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2 - 1\}$ . Si  $m = 2k$ , entonces  $n > n_0 \Rightarrow 2k > 2n_1 \Rightarrow k > n_1 \Rightarrow |z_n - a| = |x_k - a| < \varepsilon$ . Si  $n = 2k - 1$ , entonces  $n > n_0 \Rightarrow 2k - 1 > 2n_2 - 1 \Rightarrow k > n_2 \Rightarrow |z_n - a| = |y_k - a| < \varepsilon$ . Por tanto,  $\lim z_n = a$ .
- 1.3 Basta observar que  $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$ .
- 1.5 Para el conjunto  $B$ , tome una descomposición  $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \dots$  donde  $\mathbb{N}_k$  son infinitos y disjuntos 2 a 2, escriba  $x_n = k$  si  $n \in \mathbb{N}_k$ . Para el conjunto  $C$ , tome una numeración  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  de los números racionales en el intervalo  $[0, 1]$ .
- 1.6 Para ver que es condición suficiente tome sucesivamente  $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3$ , y obtenga  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  tales que  $|x_{n_k} - a| < 1/k$ .
- 2.3 Existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $|x_n - a| \geq \varepsilon$  para un conjunto infinito  $\mathbb{N}'$  de valores de  $n$ . Por el Teorema de Bolzano Weierstrass, la sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$  tiene una subsucesión convergente:  $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}'$  y  $\lim_{n \in \mathbb{N}''} x_n = b$ . Se tiene  $|b - a| \geq \varepsilon$ , luego  $b \neq a$ .
- 2.4 Sea  $a$  el único valor de adherencia de  $(x_n)$ . Por el ejercicio anterior se tiene  $\lim x_n = a$ .
- 2.5 La sucesión dada tiene 0 como único valor de adherencia, sin embargo, no converge pues no está acotada.



- 2.6 Sea  $a < b$ . Como la media aritmética es mayor que la media geométrica, se tiene  $a < x_1 < x_2 < \cdots < y_2 < y_1 < b$ . Luego existen  $x = \lim x_n$  e  $y = \lim y_n$ . Haciendo  $n \rightarrow \infty$  en  $y_{n+1} = (x_n + y_n)/2$  se tiene  $y = (x + y)/2$ , de donde  $x = y$ .
- 2.7 (a) Tomando  $\varepsilon = 1$  se ve que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_m - a| < 1$  para todo  $m > n_0$ , donde  $a = x_{n_0+1}$ . Entonces los términos de la sucesión pertenecen al conjunto  $\{x_1, \dots, x_{n_0}\} \cup [a-1, a+1]$ , que está acotado.
- (b) Si  $\lim_{n \in \mathbb{N}'} x_n = a$  y  $\lim_{n \in \mathbb{N}''} x_n = b$  con  $|a - b| < 3\varepsilon$ , entonces, existen índices arbitrariamente grandes tales que  $|x_m - a| < \varepsilon$  y  $|x_n - b| < \varepsilon$ . Como  $3\varepsilon = |a - b| \leq |a - x_m| + |x_m - x_n| + |x_n - b| \leq 2\varepsilon + |x_m - x_n|$ , de donde  $|x_m - x_n| > \varepsilon$ , concluyéndose que  $(x_n)$  no es de Cauchy.
- (c) Se deduce de los apartados anteriores y del ejercicio 2.4.
- 3.1 Observe que  $1 < \sqrt[n+p]{n} < \sqrt[n]{n}$ .
- 3.3 La sucesión es estrictamente creciente, pues  $x_1 < x_2$ , y suponiendo que  $x_{n-1} < x_n$ , se tiene  $x_n^2 = a + x_{n-1} < a + x_n = x_{n+1}^2$ , de donde  $x_n < x_{n+1}$ . Además, si  $c$  es la raíz positiva de la ecuación  $x^2 - x - a = 0$ , o sea  $c^2 = a + c$ , se tiene  $x_n < c$  para todo  $n$ . Esto es verdad si  $n = 1$ , como  $x_1 < c$ , resulta  $x_{n+1}^2 = a + x_n < a + c = c^2$ , luego  $x_{n+1} < c$ . Por lo tanto, existe  $\lim x_n$ . Haciendo  $n \rightarrow \infty$  en la igualdad  $x_{n+1}^2 = a + x_n$  se tiene que  $\lim x_n = c$ .
- 3.5 Observe que  $x_2 = 1/(a+x_1)$  y  $x_3 = 1/(a+x_2) = (a+x_1)/(a^2+ax_1+1)$ . Se tiene  $x_1 < c = 1/(a+c) < 1/(a+x_1) = x_2$ . Luego,  $x_1 < x_2 = 1/(a+x_1) \Rightarrow x_1(a+x_1) < 1 \Rightarrow$  (multiplicando por  $a$  y sumando  $x_1$ )  $x_1(a^2+ax_1+x_1) < a+x_1 \Rightarrow x_1 < (a+x_1)/(a^2+ax_1+x_1)$ , así  $x_1 < x_3 < c < x_2$ . Análogamente, se ve que  $x_1 < x_3 < c < x_4 < x_2$ , y así sucesivamente. Por lo tanto, existen  $\lim x_{2n-1} = \xi$  y  $\lim x_{2n} = \eta$ . En la relación  $x_{n+2} = (a+x_n)/(a^2+ax_n+1)$ , si tomamos el límite, tenemos  $\xi = (a+\xi)/(a^2+a\xi+1)$  y  $\eta = (a+\eta)/(a^2+a\eta+1)$ , luego  $\xi^2+a\xi-1=0$  y  $\eta^2+a\eta-1=0$ . Como  $\xi$  y  $\eta$  son positivos se tiene  $\xi = \eta = c$ .
- 3.6 Observe que  $y_{n+1} = a + x_n$ .

- 3.7 Basta observar que  $x_{n+1} = 1/(1 + x_n)$ .
- 4.1 Por el Ejemplo 9, dado cualquier  $A > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow n! > A^n \Rightarrow \sqrt[n]{n!} > A$ , luego  $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$ .
- 4.2 Recuerde que  $\sqrt{A} - \sqrt{B} = (A - B)/(\sqrt{A} + \sqrt{B})$ .
- 4.3 Para todo  $n$  suficientemente grande,  $n!/(n^k \cdot a^n) > n!/(a^n \cdot a^n) = n!/(a^2)^n$ , luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} n!/(n^k a^n) = +\infty$ . Escribiendo  $x_n = (a^n \cdot n!)/n^n$ , obtenemos  $x_{n+1}/x_n = a \cdot (n/(n+1))^n$ , por lo tanto  $\lim(x_{n+1}/x_n) = a/e$ . Del Ejemplo 8 se deduce que  $\lim x_n = +\infty$  si  $a > e$ ,  $\lim x_n = 0$ , evidentemente  $\lim y_n = +\infty$  si  $a \geq e$ . Cuando  $a < e$ , el cociente  $y_{n+1}/y_n = [(n+1)/n]^k \cdot (x_{n+1}/x_n)$  tiene límite  $a/e < 1$ , luego  $\lim y_n = 0$ .
- 4.4 Observe que  $[\log(n+1)/\log n] - 1 = \log(1+1/n)/\log n$  tiende a cero cuando  $n$  lo hace para  $+\infty$ .
- 4.5 Sean  $X_n = x_{n+1} - x_n$  e  $Y_n = y_{n+1} - y_n$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , los números  $X_p/Y_p, \dots, X_{p+k}/Y_{p+k}$  pertenecen al intervalo  $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ . Del Ejercicio 2.8, Capítulo 2, se deduce que  $(X_p + \dots + X_{p+k})/(Y_p + \dots + Y_{p+k}) \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ , o sea,  $x_{p+k+1} - x_p/(y_{p+k+1} - y_p) \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$  para dicho  $p$  y todo  $k \in \mathbb{N}$ . Divida el numerador y el denominador por  $y_{p+k+1}$ , haga  $k \rightarrow \infty$  y concluya que  $\lim(x_n/y_n) = a$ .
1. Es una consecuencia inmediata del ejercicio anterior.

#### 4. Series de números

- 1.1 Observe que  $b_n = \log \frac{n+1}{n} = \log(n+1) - \log n$ .
- 1.4 Agrupe los términos de uno en uno, de dos en dos, de cuatro en cuatro, de ocho en ocho, etc, y compare con la serie armónica.
- 1.5 Use el método del Ejemplo 5.
- 1.6 Para  $n$  suficientemente grande,  $\log n < \sqrt{n}$ .
- 1.7 Observe que  $na_{2n} \leq a_{n+1} + \dots + a_{2n} \leq a_{n+1} \dots = s - s_n$ , luego  $na_{2n} \rightarrow 0$ , de donde  $(2n)a_{2n} \rightarrow 0$ . También,  $na_{2n-1} \leq a_n + \dots + a_{2n-1} \leq a_n + \dots = s - s_{n-1} \rightarrow 0$ , luego  $na_{2n-1} \rightarrow 0$ ,

de donde  $(2n)a_{2n-1} \rightarrow 0$  y  $(2n-1)a_{2n-1} \rightarrow 0$ . Así, sea  $n$  par o impar, se tiene  $\lim na_n = 0$ .

2.4 Observe que  $s_{2p} < s_{4p} < s_{6p} < \dots < s_{5p} < s_{3p} < s_p$ , que  $2np \leq i \leq (2n+1)p \Rightarrow s_{2np} \leq s_i \leq s_{(2n+1)p}$ , y, finalmente, que  $s_{(2n+1)p} - s_{2np} < p \cdot \frac{1}{2np} = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$ .

2.5 Sean  $|b_n| \leq B$  para todo  $n \geq 0$  y  $\sum |a_n| = A$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow |b_n| < \varepsilon/2A$  y  $|a_n| + |a_{n+1}| + \dots < \varepsilon/2B$ . Entonces,  $n > 2n_0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} |c_n| &= |a_1 b_n + \dots + a_{n_0} b_{n-n_0} + a_{n_0+1} b_{n-n_0+1} + \dots + a_n b_1| \\ &\leq (|a_1| + \dots + |a_{n_0}|) \frac{\varepsilon}{2A} + (|a_{n_0+1}| + \dots + |a_n|) B \\ &< \frac{A\varepsilon}{2A} + \frac{\varepsilon}{2B} B = \varepsilon, \text{ por lo tanto } \lim c_n = 0. \end{aligned}$$

2.7 Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\left( \sum_{i=1}^n |a_i| |b_i| \right) \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

2.8 Si  $\sum a_n$  es absolutamente convergente entonces cualquier suma finita  $S$  de términos  $a_n$  es menor que  $p$  y mayor que  $-q$ , donde, con la notación del Teorema 4,  $p = \sum p_n$  y  $q = \sum q_n$ . Recíprocamente, si las sumas finitas de términos  $a_n$  forman un conjunto acotado entonces, en particular, las sumas parciales de las series  $\sum p_n$  y  $\sum q_n$  están acotadas, luego estas dos series son convergentes, y así  $\sum a_n$  converge absolutamente.

3.3 No hay dificultad en usar el criterio de Cauchy. El criterio de d'Alembert da  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\log(n+1)}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n$ . El primer factor tiene límite cero, el segundo  $1/e$ , luego basta probar que el tercer factor está acotado. Para  $n \geq 3$ , tenemos  $[(n+1)/n]^n < n$ , por lo tanto  $(n+1)^n < n^{n+1}$ , tomando logaritmos  $n \log(n+1) < (n+1) \log n$ , de donde  $\log(n+1)/\log(n) < (n+1)/n$ . Entonces  $(\log(n+1)/\log(n))^n < ((n+1)/n)^2 < e$ , luego  $\lim(a_{n+1}/a_n) = 0$ .

3.4 Escriba  $z_n = x_1 x_2 \cdots x_n$  y use el Teorema 7.

3.5  $-1 < x < 1$ ,  $x = 0$ ,  $-\infty < x < +\infty$ ,  $x = 0$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .

4.1 Sume los primeros términos positivos hasta que, por primera vez, la suma sea  $\geq 1$ , sume después un único término negativo. A continuación sume los términos positivos, en su orden, hasta que, por primera vez, la suma sea  $\geq 2$ , sume entonces un único término negativo. Continúe. Esta reordenación tiene suma  $+\infty$ . Análogamente para  $-\infty$ .

4.2 Siga la receta del Teorema 9.

4.3 (a) Dado  $\varepsilon > 0$ , sea  $J_1 \subset \mathbb{N}$  finito tal que  $J_1 \subset J \subset \mathbb{N}$ ,  $J$  finito, implique  $|s - \sum_{n \in J} a_n| < \varepsilon$ . Tome  $J_0 \subset \mathbb{N}$  y tal que  $\varphi(J_0) = J_1$ . Entonces  $J \supset J_0 \Rightarrow \varphi(J) \supset \varphi(J_0) = J_1$ . Por lo tanto  $J : 0 \subset J \subset \mathbb{N}$ ,  $J$  finito, implica

$$\left| s - \sum_{n \in J} b_n \right| = \left| s - \sum_{n \in J} a_{\varphi(n)} \right| = \left| s - \sum_{m \in \varphi(J)} a_m \right| < \varepsilon.$$

(b) Para simplificar, para cada  $J \subset \mathbb{N}$  finito, sea  $s_J = \sum_{n \in J} a_n$ . En vista del Ejercicio 2.8, basta probar que el conjunto de las sumas  $s_J$ ,  $J \subset \mathbb{N}$  finito, está acotado. Ahora bien, dado  $\varepsilon = 1$  existe  $J_0 \subset \mathbb{N}$  finito tal que  $J \supset J_0 \Rightarrow |s - s_J| < 1$ . Escribiendo  $\alpha = \sum_{n \in J_0} |a_n|$ , se ve que, para todo  $J \subset \mathbb{N}$  finito, vale  $|s - s_J| = |s - s_{J \cup J_0} - s_{J_0 - J}| < 1 + \alpha$ , luego  $s_J$  pertenece al intervalo de centro  $s$  y radio  $1 + \alpha$ .

(c) Sean  $s = \sum a_n = u - v$ ,  $u = \sum p_n$ ,  $v = \sum q_n$ , como en la demostración del Teorema 4. Para cada  $J \subset \mathbb{N}$  finito, sean  $s_J = \sum_{n \in J} a_n$ ,  $u_J = \sum_{n \in J} p_n$  y  $v_J = \sum_{n \in J} q_n$ , de donde  $s_J = u_J - v_J$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, escribiendo  $J_0 = \{1, \dots, n_0\}$ ,  $J \supset J_0 \Rightarrow |u - u_J| < \varepsilon/2$ ,  $|v - v_J| < \varepsilon/2$ , luego  $J \supset J_0 \Rightarrow |s - s_J| \leq |u - u_J| + |v - v_J| < \varepsilon$ .

## 5. Algunas nociones de topología

1.1 Para todo  $a \in \text{int}(X)$  existe, por definición,  $\varepsilon > 0$  tal que  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X$ . Basta probar que  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X$ . Si  $y \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , sea  $\delta$  el menor de los números positivos

$y - (a - \varepsilon), (a + \varepsilon) - y$ . Entonces,  $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X$ , luego  $y \in \text{int}(X)$ .

- 1.2 Si  $A$  no fuese abierto existiría un punto  $a \in A$  que no sería interior. Entonces para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se podría encontrar  $x_n \in (a - 1/n, a + 1/n)$ ,  $x_n \notin A$ . Así  $\lim x_n = a$ , lo que es una contradicción.
- 1.5  $\text{fr } X = \{0, 1\}$ ,  $\text{fr } Y = \{0, 1, 2\}$ ,  $\text{fr } Z = \mathbb{R}$ ,  $\text{fr } W = W$ .
- 1.6 Sean  $a_n < b_n$  los extremos de  $I_n$ . Entonces  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$ . Si  $\alpha = \sup a_n$  y  $\beta = \inf b_n$ , entonces  $\alpha = \beta \Rightarrow \cap J_n = \{\alpha\}$  pues la intersección es no vacía. Si  $\alpha < \beta$  entonces  $\alpha < x < \beta \Rightarrow a_n < x < b_n$  para todo  $n$ , luego  $(\alpha, \beta) \subset I$ . Por otra parte,  $c < \alpha \Rightarrow c < a_n$  para algún  $n \Rightarrow c \notin I_n \Rightarrow c \notin I$ . Análogamente  $c > \beta \Rightarrow c \notin I$ . Por lo tanto  $(\alpha, \beta) \subset I \subset [\alpha, \beta]$ . Esto nos garantiza que  $I$  es un intervalo cuyos extremos son  $\alpha$  y  $\beta$ . Como los  $I_n$  son distintos dos a dos, al menos una de las sucesiones  $(a_n)$  o  $(b_n)$ , por ejemplo la primera, tiene infinitos términos diferentes. Entonces, para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n < a_{n+p} \leq \alpha < \beta \leq b_n$ , luego  $\alpha \in (a_n, b_n) \subset I_n$ . Por lo tanto,  $\alpha \in I$  e  $I$  no es un intervalo abierto.
- 2.1 Del Teorema 2 se deduce que  $D \subset X$  es denso en  $X$  si, y sólo si, existen puntos de  $D$  en todo intervalo  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ ,  $x \in X$ . Si  $n$  es tal que  $k^n > 1/\varepsilon$ , los intervalos  $[m/k^n, (m+1)/k^n]$  tienen longitud  $1/k^n < \varepsilon$ , luego si  $m$  es el menor entero tal que  $x + \varepsilon < (m+1)/k^n$  entonces  $m/k^n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$
- 2.2 Si  $a \in \overline{X}$ , entonces ó  $a \in X$  ó todo entorno de  $a$  contiene puntos de  $X$  y de  $\mathbb{R} - X$  (a saber, el propio  $a$ ), luego  $a \in \text{fr } X$ .
- 2.3 Decir que  $a \notin \text{int } X$  es lo mismo que afirmar que todo entorno de  $a$  contiene puntos que no están en  $X$ , esto es, que  $a \in \overline{\mathbb{R} - X}$ .
- 2.4 Sean  $X$  abierto y  $a \in A$  cualquiera. Para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño,  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X$ . Si ninguno de estos intervalos estuviese contenido en  $A$ , cada uno contendría puntos de  $B$ , así  $a \in A \cap \overline{B}$ , lo que es absurdo. Luego existe  $\varepsilon > 0$

tal que  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A$  y  $A$  es abierto. Análogamente para  $B$ . Si  $X$  es cerrado y  $a \in \overline{A}$  entonces  $a \in X$ . No es posible que  $a \in B$ , pues en tal caso  $a \in \overline{A} \cap B \neq \emptyset$ . Luego  $a \in A$  y  $A$  es cerrado. Análogamente para  $B$ .

2.5 Si  $\text{fr } X$  es vacío entonces  $X \supset \text{fr } X$  y  $X \cap \text{fr } X = \emptyset$ , luego  $X$  es cerrado y abierto.

2.6 De  $X \subset X \cup Y$  e  $Y \subset X \cup Y$  se concluye que  $\overline{X} \subset \overline{X \cup Y}$  e  $\overline{Y} \subset \overline{X \cup Y}$ . Recíprocamente, si  $a \in \overline{X \cup Y}$  entonces  $a = \lim z_n$  con  $z_n \in X \cup Y$ . O infinitos términos de esta sucesión están en  $X$  (y entonces  $a \in \overline{X}$ ). Luego  $a \in \overline{X} \cup \overline{Y}$ . Por lo tanto,  $\overline{X \cup Y} \subset \overline{X} \cup \overline{Y}$ . Además, de  $X \cap Y \subset X$  y  $X \cap Y \subset Y$  se deduce  $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X}$  y  $\overline{X \cap Y} \subset \overline{Y}$ , de donde  $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$ . Si  $X = [0, 1]$  e  $Y = (1, 2]$  entonces  $X \cap Y = \emptyset$ , luego  $\emptyset = \overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\}$ .

2.7 Evidentemente,  $X \cup A \subset \overline{X}$ . Recíprocamente, si  $a \in \overline{X}$ , entonces ó  $a \in X$  ó, en caso contrario, todo entorno de  $a$  contiene algún  $x_n \neq a$ . Escriba  $n_1 =$  menor  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - a| < 1$ , y una vez definidos  $n_1 < \dots < n_k$  tales que  $|x_{n_i} - a| < 1/i$ , escriba  $n_{k+1} =$  menor  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - a| < 1/k + 1$  y  $< |x_{n_k} - a|$ . Entonces,  $\lim x_{n_k} = a \in A$ .

3.2 Escoja en cada intervalo  $I$  de la colección un número racional  $r_I$ . La correspondencia  $I \rightarrow r_I$  es inyectiva. Como  $\mathbb{Q}$  es numerable la colección también lo es.

3.3 Para cada  $x \in X$  existe  $\varepsilon_x$  tal que  $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \cap X = \{x\}$ . Sea  $I_x = (x - \varepsilon_x/2, x + \varepsilon_x/2)$ . Dados  $x \neq y \in X$ , sea, por ejemplo,  $\varepsilon_x \leq \varepsilon_y$ . Si  $z \in I_x \cap I_y$  entonces  $|x - z| < \varepsilon_x/2$  y  $|z - y| < \varepsilon_y/2$ , luego  $|x - y| \leq |x - z| + |z - y| < \varepsilon_x/2 + \varepsilon_y/2 \leq \varepsilon_y$ , de donde  $x \in I_y$ , lo cual es un absurdo.

3.4 Por los dos ejercicios anteriores, todo conjunto tal que todos sus puntos son aislados es numerable.

4.1 Si  $a \notin A$  entonces, por el Ejercicio 1.7 del Capítulo 3, existe  $\varepsilon > 0$  tal que ningún punto del intervalo  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  pertenece a  $A$ . Luego  $A$  es cerrado.

4.3  $F_n = [n, +\infty)$  y  $L_n = (0, 1/n)$ .

- 4.4 Sea  $\alpha = \inf\{|x - y| : x \in X \text{ y } y \in Y\}$ . Existen sucesiones de puntos  $x_n \in X$  e  $y_n \in Y$  tales que  $\lim(x_n - y_n) = \alpha$ . Considerando una subsucesión, si así fuese necesario, se puede suponer que  $\lim x_n = x_0 \in X$ . Como  $|y_n| \leq |y_n - x_n| + |x_n|$ , se deduce que  $(y_n)$  está acotada. Considerando nuevamente una subsucesión, se tiene  $\lim y_n = y_0 \in Y$ . Luego  $|x_0 - y_0| = \alpha$ .
- 4.5 Todo conjunto infinito acotado tiene un punto de acumulación  $a$ . Si  $X$  es compacto,  $a \in X$ . Los ejemplos son  $X = \mathbb{N}$  e  $Y = \{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$ .
- 4.6 Es fácil probar que los conjuntos dados están acotados. Para demostrar que  $S$  es cerrado, suponga que  $\lim(x_n + y_n) = z$ ,  $x_n, y_n \in X$ . Existe  $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$  infinito tal que  $\lim_{n \in \mathbb{N}'} x_n = x_0 \in X$ . Entonces, como  $y_n = (x_n + y_n) - x_n$ , existe  $\lim_{n \in \mathbb{N}'} y_n = y_0 \in X$ , así  $z = \lim_{n \rightarrow \mathbb{N}'} (x_n + y_n) = x_0 + y_0 \in S$ . La demostración para  $D, P$  y  $Q$  se hace de forma análoga.
- 5.1 Pertenecen al conjunto de Cantor los números  $1/3 = 0,1 = 0,0222\dots$ ,  $1/4 = 0,0202\dots$ ,  $1/9 = 0,01 = 0,00222\dots$  y  $1/10 = 0,00220022\dots$  (desarrollos en base 3).
- 5.2 Demuestre en primer lugar que dado un número de la forma  $a = m/3^n$  (que en base 3 tiene un desarrollo finito), existen  $x, y \in K$  tales que  $x - y = a$ . Observe después que, como  $K$  es compacto, el conjunto  $D$  de los números  $|x - y|, x, y \in K$ , es compacto. Como las fracciones  $m/3^n$  son densas en  $[0, 1]$ , se deduce que  $D = [0, 1]$ .
- 5.4 Los extremos de los intervalos retirados son los puntos de  $K$  que tienen desarrollo finito en base 3. Los puntos restantes son límites de estos. (Ejemplo:  $0,20202 = \lim x_n$ , donde  $x_1 = 0,2$ ,  $x_2 = 0,20$ ,  $x_3 = 0,202$ , etc.)

## 6. Límites de funciones

- 1.2 Basta probar que si  $x_n, y_n \in X - \{a\}$  y  $\lim x_n = \lim y_n = a$  entonces  $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$ . Para esto, defina  $(z_n)$  escribiendo  $z_{2n-1} = x_n$  y  $z_{2n} = y_n$ . Se tiene  $\lim z_n = a$ , luego  $(f(z_n))$  converge, así  $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$ , pues  $(f(x_n))$  y  $f((y_n))$  son subsucesiones de  $(f(z_n))$ .

- 1.5 Tome  $a \in \mathbb{R}$  con  $\sin a = c$  y haga  $x_n = 1/(a + 2\pi n)$ .
- 2.1 Basta observar que si  $\lim x_n = a$  y  $x_n > a$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $(x_n)$  posee una subsucesión decreciente (que, naturalmente, converge a  $a$ ).
- 2.2 Haga lo mismo que en el ejercicio anterior.
- 2.5 El intervalo  $[-1, 1]$ . En efecto, si  $-1 \leq c \leq 1$ , tome una sucesión de números  $x_n < 0$  tal que  $\lim x_n = 0$  y  $\sin 1/x_n = c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , (como en el Ejercicio 1.5). Entonces,  $f(x_n) = c/(1 + 2^{1/x_n})$  tiene límite  $c$ .
- 3.1 Escriba  $p(x) = x^n[(a_0/x^n) + (a_1/x^{n-1}) + \cdots + (a_{n-1}/x) + a_n]$ .
- 3.2 Cuando  $2\pi n - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi n + \frac{\pi}{2}$ , la función  $x \sin(x)$  alcanza todos los valores comprendidos entre  $\frac{\pi}{2} - 2\pi n$  y  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ . Dado  $c \in \mathbb{R}$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{\pi}{2} - 2\pi n \leq c \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$  para todo  $n \geq n_0$ . Luego, para todo  $n \geq n_0$ , existe  $x_n \in [2\pi n - \frac{\pi}{2}, 2\pi n + \frac{\pi}{2}]$  tal que  $x_n \sin x_n = c$ . Entonces  $\lim x_n = \infty$  y  $\lim f(x_n) = c$ .
- 3.3  $M_t$  y  $m_t$  son funciones monótonas de  $t$  (decreciente y creciente, respectivamente), ambas acotadas. Luego existen  $\lim_{t \rightarrow +\infty} M_t = L$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} m_t = \ell$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_t = L - \ell$ . Como  $m_t \leq f(t) \leq M_t$  para todo  $t \geq a$ , si  $\lim \omega_t = 0$  entonces existe  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L = \ell$ . Recíprocamente, si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$  entonces, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $t \geq a$  tal que  $A - \varepsilon \leq f(x) \leq A + \varepsilon$  para todo  $x > t$ , luego  $M_t - m_t < 2\varepsilon$ . Se sigue que  $\lim M_t = \lim m_t$  y  $\lim \omega_t = 0$ .

## 7. Funciones continuas

- 1.1 Observe que  $\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|]$  y  $\psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|]$ .
- 1.2  $A = A_1 \cap A_2$ , donde  $A_1 = \{x \in X : f(x) < g(x)\}$  y  $A_2 = \{x \in X : f(x) > g(x)\}$ , y  $F = F_1 \cap F_2$ , donde  $F_1 = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$  y  $F_2 = \{x \in X : f(x) \geq g(x)\}$ .



- 1.5 Si  $f$  es discontinua en el punto  $a \in \mathbb{R}$  existen  $\varepsilon > 0$  y una sucesión  $(x_n)$  tales que  $\lim x_n = a$  y  $|f(x_n) - f(a)| > \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces, tomando  $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ , se tiene  $a \in \overline{X}$  y  $f(a) \notin \overline{f(X)}$ , luego  $f(\overline{X}) \not\subseteq \overline{f(X)}$ . El recíproco es obvio.
- 1.7 Claramente, existen  $\varepsilon > 0$  y una sucesión de puntos  $x_n \in X$  tales que  $\lim x_n = a$  y  $|f(x_n) - f(a)| > \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Existe un conjunto infinito  $\{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$  de índices para los que la diferencia  $f(x_n) - f(a)$  tiene el mismo signo (supongamos que positivo.) Entonces, escribimos  $x_k = x_{n_k}$  y tenemos  $f(x_{n_k}) > f(a) + \varepsilon$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .
- 2.1 Fije  $a \in I$ . Haciendo  $A = \{x \in I : f(x) = f(a)\}$  y  $B = \{x \in I : f(x) \neq f(a)\}$  se tiene  $I = A \cup B$ . Como  $f$  es localmente constante, cada  $x \in A$  tiene un entorno disjunto de  $B$ , luego  $x \notin \overline{B}$ . Así,  $A \cap \overline{B} = \emptyset$ . Análogamente,  $\overline{A} \cap B = \emptyset$ , por lo tanto  $I = A \cup B$  es una escisión. Como  $a \in A$ , se sigue que  $A \neq \emptyset$ , de donde  $A = I$  y  $f$  es constante.
- 2.2 Suponga que  $f$  es creciente. Dado  $a \in \text{int} I$ , sean  $\ell = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  y  $L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ . Si  $f$  es discontinua en el punto  $a$  entonces  $\ell < L$ . Si tomamos  $x, y \in I$  tales que  $x < a < y$  y  $z$  tal que  $\ell < z < L$ , se tiene  $f(x) < z < f(y)$ , y, sin embargo,  $z \notin f(I)$ , luego  $f(I)$  no es un intervalo. (Razonamos de forma análoga si  $a$  es un extremo de  $I$ ).
- 2.4 Si  $f$  es discontinua en el punto  $a \in I$ , existen  $\varepsilon > 0$  y una sucesión de puntos  $x_n \in I$  tales que  $\lim x_n = a$  y (por ejemplo)  $f(x_n) > f(a) + \varepsilon$ . Si tomamos  $c \in (f(a), f(a) + \varepsilon)$ , la propiedad del valor medio nos asegura que para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $z_n$  comprendido entre  $a$  y  $x_n$  tal que  $f(x_n) = c$ . Evidentemente, el conjunto de los  $z_n$  así obtenidos es infinito, lo que es absurdo.
- 2.5 Defina  $\varphi : [a, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\varphi(x) = f(x + 1/2) - f(x)$ . Entonces  $\varphi(0) + \varphi(1/2) = 0$ , luego existe  $x \in [0, 1/2]$  tal que  $f(x) = f(x + 1/2)$ . En el otro caso tome  $\psi : [0, 2/3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi(x) = f(x + 1/3) - f(x)$  y observe que  $\psi(0) + \psi(1/3) + \psi(2/3) = 0$ , luego  $\psi$  cambia de signo y por lo tanto se anula en algún punto  $x \in [0, 2/3]$ .

- 3.1 Tome cualquier  $a \in \mathbb{R}$ . Existe  $A > 0$  tal que  $a \in [-A, A]$  y  $|x| > A \Rightarrow f(x) > f(a)$ . La restricción de  $f$  al conjunto compacto  $[-A, A]$  alcanza su valor mínimo en un punto  $x_0 \in [-A, A]$ . Como  $f(x_0) \leq f(a)$ , se deduce que  $f(x_0) \leq f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- 3.2 Basta observar que el conjunto de las raíces  $x$  de la ecuación  $f(x) = c$  es cerrado y (como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ) acotado.
- 3.3 Como el intervalo  $[a, b]$  sólo tiene dos puntos extremos, ó el valor mínimo ó el máximo de  $f$  (supongamos que este) se alcanzará en un punto interior de  $[a, b]$ , y en otro punto  $d \in [a, b]$ . Entonces existe  $\delta > 0$  tal que en los intervalos  $[c - \delta, c)$ ,  $(c, c + \delta]$  y (caso  $d$  no sea el extremo inferior del intervalo  $[a, b]$ )  $[d - \delta, d)$  la función toma valores menores que  $f(c) = f(d)$ . Sea  $A$  el mayor de los números  $f(c - \delta)$ ,  $f(c + \delta)$  y  $f(d - \delta)$ . Por el Teorema del Valor Medio existen  $x \in [c - \delta, c)$ , y  $(c, c + \delta)$  y  $z \in [d - \delta, d)$  tales que  $f(x) = f(y) = f(z) = A$ , lo que es absurdo.
- 3.4 Tome  $x_0, x_1 \in [0, p]$ , los puntos en que  $f|_{[0, p]}$  alcanza valores mínimo y máximo.
- 3.5 En caso contrario existiría  $\varepsilon > 0$  con la siguiente propiedad: para todo  $n \in \mathbb{N}$  hay puntos  $x_n, y_n \in X$  tales que  $|x_n - y_n| \geq \varepsilon$  y  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq n|x_n - y_n|$ . Considerando una subsucesión, se tendría  $\lim x_n = a \in X$  y  $\lim y_n = b \in X$  donde  $|b - a| \geq \varepsilon$  y
- $$+\infty = \lim [|f(x_n) - f(y_n)|] / |x_n - y_n| = |f(b) - f(a)| / |b - a|,$$
- lo que es absurdo.
- 4.1 Si  $Y$  no es cerrado, tome  $a \in \overline{X} - X$  y considere la función continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $f(x) = 1/(x - a)$ . Como no existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  $f$  no es uniformemente continua. Por otra parte,  $\mathbb{N}$  no es compacto, y sin embargo toda función  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  es uniformemente continua.
- 4.2 Tome  $x_n = \sqrt{(n + 1/2)\pi}$  e  $y_n = \sqrt{n\pi}$ . Entonces,  $\lim(x_n - y_n) = 0$  pero  $f(x_n) - f(y_n) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

4.3 Para todo  $x \in X$  se tiene  $f(x) = \varphi(x)$ , por la continuidad de  $f$ . Además, si  $\bar{x} \in \overline{X}$  y  $\bar{x} = \lim x_n$ ,  $x_n \in X$ ,  $\varphi(\bar{x}) = \lim f(x_n)$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x, y \in X$ ,  $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ . Si  $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{X}$  y  $|\bar{x} - \bar{y}| < \delta$ , se tiene  $\bar{x} = \lim x_n$ ,  $\bar{y} = \lim y_n$ , donde  $x_n, y_n \in X$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande se tiene  $|x_n - y_n| < \delta$ , luego  $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon/2$ , así  $|\varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{y})| = \lim |f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ . Por lo tanto,  $\varphi : \overline{X} \rightarrow \mathbb{R}$  es uniformemente continua.

4.4 Sea  $L = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $B > 0$  tal que  $x \geq B \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/4$ . Entonces  $x \geq B$ ,  $y \geq B \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - L| + |L - f(y)| < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2$ . Análogamente, existe  $A > 0$  tal que  $x \leq -A$ ,  $y \leq -A \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ . Por otra parte como  $[-A, B]$  es compacto, existe  $\delta > 0$  tal que  $x, y \in [-A, B]$ ,  $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ . Si  $x < -A$  e  $y \in [-A, B]$  con  $|x - y| < \delta$ , se tiene  $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(-A)| + |f(-A) - f(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2$ , pues  $|-A - y| < |x - y| < \delta$ . Análogamente,  $x > B$ ,  $y \in [-A, B]$  y  $|x - y| < \delta$  implican  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Luego  $f$  es uniformemente continua.

## 8. Derivadas

1.1 Escriba  $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + r(x)$ , como en el Teorema 1, y defina  $\eta; X \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\eta(x) = [f'(a) + r(x)/(x - a)] = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  si  $x \neq a$  y  $\eta(a) = f'(a)$ . La continuidad de  $\eta$  en el punto  $x = a$  es consecuencia del Teorema 1.

1.3 Observe que

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = t_n \cdot \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} + (1 - t_n) \cdot \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a},$$

donde  $0 < t_n < 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , basta tomar  $t_n = (y_n - a)/(x_n - y_n)$ . En la definición de derivada, las segmentos tienden a la tangente en el punto  $(a, f(a))$  y pasan todas por dicho punto. Aquí, ambos extremos varían.

1.4 Tome  $f(x) = x^2 \sin(1/x)$  si  $x \neq 0$  y  $f(0) = 0$ . Escriba  $x_n = 1/2\pi n$  e  $y_n = 1/(2n - 1)\pi$ .

- 1.5 Vuelva al Ejercicio 1.3. El Ejemplo pedido puede ser la función  $f(x) = x \sin(1/x)$  o cualquier función con  $(f(-x) = -f(x))$  que no tenga derivada en el punto  $x = 0$ .
- 2.1 Por la Regla de la Cadena las derivadas de orden superior de  $f$  en  $x \neq 0$  son el producto de  $e^{-1/x^2}$  por un polinomio en  $1/x$ . En el punto  $x = 0$  se tiene  $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = 0$ , como puede verse escribiendo  $1/h = y$ . Suponiendo  $f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$  se tiene  $f^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f^{(n)}(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(1/h)}{h} \cdot e^{-1/h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} Q(1/h) \cdot e^{1/h^2} = 0$ .
- 2.5 Derive  $k$  veces en relación a  $t$  la igualdad  $f(tx) = t^k \cdot f(x)$  y obtenga  $f^{(k)}(tx) \cdot x^k = k!f(x)$ . Haga  $t = 0$  y concluya que  $f(x) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ .
- 3.1 Tome  $f(x)$  como en el Ejemplo 7.
- 3.2 Para fijar ideas suponga que  $f''(c) > 0$ . Por el Corolario 2 del Teorema 4, existe  $\delta > 0$  tal que  $c - \delta < x < c < y < c + \delta \Rightarrow f'(x) < 0 < f'(y)$ . Entonces  $c - \delta < x < c \Rightarrow f(x) > f(c)$ , pues si tuviésemos  $f(x) \leq f(c)$ , como la derivada  $f'(x)$  es negativa, el mínimo de  $f$  en el intervalo  $[x, c]$  no se alcanzaría ni en  $x$  ni en  $c$ , sino en un punto  $z \in (x, c)$ , por lo tanto  $f'(z) = 0$ , lo que contradice la hipótesis  $z \in (c - \delta, c)$ . Análogamente se demuestra que  $c < y < c + \delta \Rightarrow f(y) > f(c)$ . Luego  $c$  es punto de mínimo local. En el caso en que  $f''(c) < 0$ ,  $c$  es un punto de máximo local.
- 3.3 Por el Corolario 2 del Teorema 4, existe  $\delta > 0$  tal que  $c - \delta < x < c < y < c + \delta \Rightarrow f'(x) < 0 < f'(y)$ , luego  $c$  es el único punto crítico de  $f$  en el intervalo  $(c - \delta, c + \delta)$ .
- 3.4  $f''(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(c_n) - f'(c)}{c_n - c} = 0$ , pues  $f'(c_n) = f'(c) = 0$  para todo  $n$ .
- 3.5 Sea  $M$  el conjunto de los puntos de máximo local estricto de  $f$ . Para cada  $c \in M$  tomamos números racionales  $r_c, s_c$  tales que  $r_c < c < s_c$  y  $x \in (r_c, s_c)$ ,  $x \neq c \Rightarrow f(x) < f(c)$ .

Si  $d \in M$  es diferente de  $c$  entonces los intervalos  $(r_c, s_c)$  y  $(r_d, s_d)$  son distintos porque  $d \notin (r_c, s_c)$  o  $c \notin (r_d, s_d)$ , en efecto,  $d \in (r_c, s_c) \Rightarrow f(d) < f(c)$  y  $c \in (r_d, s_d) \Rightarrow f(c) < f(d)$ . Como  $\mathbb{Q}$  es numerable, la correspondencia  $c \rightarrow (r_c, s_c)$  es una función inyectiva de  $M$  en un conjunto numerable. Luego  $M$  es numerable.

- 4.1 Suponga que  $A < B$ . Tome  $\varepsilon > 0$  tal que  $A + \varepsilon < B - \varepsilon$ . Existe  $\delta > 0$  tal que  $c - \delta \leq x < c < y \leq c + \delta \Rightarrow g(x) < A + \varepsilon < B - \varepsilon < g(y)$ , en particular,  $g(c - \delta) < A + \varepsilon$  y  $g(c + \delta) > B - \varepsilon$ . Si tomamos ahora  $d \neq g(c)$  en el intervalo  $(A + \varepsilon, B - \varepsilon)$  no existe  $x \in (c - \delta, c + \delta)$  tal que  $g(x) = d$ . Luego, por el Teorema de Darboux,  $g$  no es la derivada de ninguna función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .
- 4.5 Un ejemplo es  $f(x) = x^3$ . Como cada punto de  $X$  es límite de puntos de  $Y$  se tiene  $X \subset \overline{Y}$ , de donde  $\overline{X} \subset \overline{Y}$ . Por otra parte,  $Y \subset X$  por el Teorema del Valor Medio, luego  $\overline{Y} \subset \overline{X}$ .
- 4.6 Las hipótesis implican que  $f'(x)$  no está acotada ni superior ni inferiormente. En efecto, si tuviésemos  $f'(x) \geq A$  para todo  $x \in (a, b)$ , la función  $g(x) = f(x) - Ax$  tendría derivada  $\geq 0$ , luego sería monótona y acotada, por lo tanto existirían los límites de  $g$  (y en consecuencia los de  $f$ ) cuando  $x \rightarrow a$  y  $x \rightarrow b$ . Análogamente, no es posible que  $f'(x) \leq B$  para todo  $x \in (a, b)$ . Así, dado cualquier  $c \in \mathbb{R}$  existen  $x_1, x_2 \in (a, b)$  tales que  $f'(x_1) < c < f'(x_2)$ . Por el Teorema de Darboux, existe  $x \in (a, b)$  tal que  $f'(x) = c$ .
- 4.7 Sabemos que  $f$  es creciente. Si  $f$  no fuese estrictamente creciente, existirían  $x < y$  en  $[a, b]$  con  $f(x) = f(y)$ , entonces  $f$  sería constante y  $f'$  igual a cero en el intervalo  $[x, y]$ .
- 4.8 Supongamos, por reducción al absurdo, que existan  $a < b$  en  $I$  tales que  $|f(b) - f(a)| = \alpha > 0$ , entonces, en al menos una de las mitades del intervalo  $[a, b]$ , por ejemplo  $[a_1, b_1]$ , tenemos  $|f(b_1) - f(a_1)| \geq \alpha/2 > 0$ . Razonando análogamente se obtiene una sucesión de intervalos  $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$  tales  $b_n - a_n = (b - a)/2^n$  y  $|f(b_n) - f(a_n)| \geq \alpha/2^n$ . Si  $a_n \leq c \leq b_n$  para todo  $n$ , entonces  $|f'(c)| = \lim |f(b_n) - f(a_n)| / |b_n - a_n| \geq \alpha / (b - a) > 0$ .

- 4.10 Para todo  $x \neq c$  en  $(a, b)$  existe  $z$  comprendido entre  $x$  y  $c$  tal que  $[f(x) - f(c)]/(x - c) = f'(z)$ . Por lo tanto,  $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} [f(x) - f(c)]/(x - c) = \lim_{x \rightarrow c} f'(x) = L$ .
- 4.11 Como  $f'$  está acotada, existen  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ . Para que la propiedad del valor medio sea válida para  $f$  tales límites tienen que ser iguales a  $f(a)$  y  $f(b)$ , respectivamente (Cfr. solución de 4.1).
- 4.12  $|f(x) - f(a)|/(x - a) \leq c|x - a|^{\alpha-1}$ . Como  $\alpha - 1 > 0$ , se tiene que  $f'(a) = 0$  para todo  $a \in I$ . Luego  $f$  es constante.
- 4.13 Observe que  $[f(x_n) - f(y_n)]/(x_n - y_n) = f'(z_n)$ , donde  $z_n$  está comprendido entre  $x_n$  e  $y_n$ , luego  $z_n \rightarrow a$ . Por la continuidad de  $f'$  en el punto  $a$ , el cociente tiende a  $f'(a)$ .

## 9. Fórmula de Taylor y aplicaciones de la derivada

- 1.1 Sea  $f(x) = 1/(1 - x)$ ,  $-1 < x < 1$ . Escribiendo  $p(h) = 1 + h + \dots + h^n$  y  $r(h) = h^{n+1}/(1 - h)$  se tiene  $r(h) = f(h) - p(h)$ . Como  $p(h)$  es un polinomio de grado  $n$  y  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^n = 0$  se deduce que  $p(h)$  es el polinomio de Taylor de  $f$  en el punto 0, luego  $f^{(i)}(0) = i!$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ .
- 1.2 Como  $f(x) = x^5 - x^{11} + \dots + (-1)^n x^{6n+5} + (-1)^n x^{6n+11}/(1 + x^6)$ , se tiene que  $f^{(i)}(0) = 0$  si  $i$  no es de la forma  $6n + 5$ , mientras que  $f^{(i)}(0) = (-1)^n i!$  si  $i = 6n + 5$ . Luego  $f^{(2001)}(0) = 0$  y  $f^{(2003)}(0) = (-1)^{333} (2003)!$ .
- 1.3 Se tiene  $f(x) = p_n(x) + r_n(x)$  donde  $p_n(x)$  es el polinomio de Taylor de orden  $n$  en torno del punto  $x_0$ . Por la fórmula del resto de Lagrange existe  $z$  entre  $x$  y  $x_0$  tal que  $r_n(x) = f^{(n+1)}(z)/(n+1)!$ , luego  $|r_n(x)| \leq K/(n+1)!$ . Se deduce que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$  para todo  $x \in I$ , así el resultado está demostrado.
- 1.4 Vea “Curso de Análisis Matemático”, vol. 1, página 232.
- 1.5 Si  $f \in C^2$ , escriba  $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + r(x)$ , donde  $\lim_{x \rightarrow a} r(x)/(x - a)^2 = \lim_{x \rightarrow a} r'(x)/(x - a) = 0$ .

Entonces  $\varphi(x) = f'(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a) + r(x)/(x-a)$  y  $\varphi'(x) = f''(a)/2 + r'(x)/(x-a) - r(x)/(x-a)^2$ , luego  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi'(x) = f''(a)/2$ . Del Ejercicio 4.10 del Capítulo 8 se sigue que  $\varphi \in C^1$ . Para  $f \in C^3$  se procede de forma análoga.

- 1.6 Por la fórmula de Taylor infinitesimal, haciendo  $x = a + h$ , o sea,  $x - a = h$ , se puede escribir  $p(a+h) = \sum_{i=0}^n (p^{(i)}(a)/i!)h^i + r(h)$ , donde las  $n$  primeras derivadas de  $r(h)$  en el punto 0 son nulas. Como  $r(h)$  es un polinomio de grado  $\leq n$  (diferencia entre dos polinomios), se tiene que  $r(h)$  es idénticamente nulo.
- 1.7 Sea  $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ . Entonces  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  es dos veces diferenciable en el punto  $a$ ,  $\varphi(x) \geq 0$  para todo  $x \in I$  y  $\varphi(a) = \varphi'(a) = 0$ . Entonces,  $\varphi(x) = \varphi'(a)(x-a) + \frac{\varphi''(a)}{2}(x-a)^2 + r(x)$ , donde  $\lim_{x \rightarrow a} r(x)/(x-a)^2 = 0$ . Así,  $\varphi(x) = (x-a)^2 \left[ \frac{\varphi''(a)}{2} + \frac{r(x)}{(x-a)^2} \right]$ . Si, se tuviese  $\varphi''(a) < 0$ , entonces existiría  $\delta > 0$  tal que, para  $0 < |x-a| < \delta$ , la expresión de dentro de los corchetes, y en consecuencia  $\varphi(x)$ , sería  $< 0$ , lo que es absurdo. Luego, necesariamente,  $\varphi''(a) > 0$ , esto es,  $f''(a) > g''(a)$ .
- 2.2 Para fijar ideas, sea  $f''(c) > 0$ . Existe  $\delta > 0$  tal que  $c - \delta < x < c + \delta \Rightarrow f''(x) > 0$ . Entonces  $f$  es convexa en el intervalo  $(c - \delta, c + \delta)$ .
- 2.3 La suma de dos funciones convexas es convexa, sin embargo para el producto esto no es siempre verdad. Ejemplo:  $(x^2 - 1)x^2$ .
- 2.4 Si  $f$  es convexa, sea  $X = \{x \in I : f(x) \leq c\}$ . Dados  $x, y \in X$ , y  $x < z < y$ , se tiene  $z = (1-t)x + ty$ , donde  $0 \leq t \leq 1$ . Entonces,  $f(z) = f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \leq (1-t)c + tc = c$ , luego  $z \in X$ . Así,  $X$  es un intervalo y  $f$  es quasi-convexa.
- 2.5 Sean  $c = \max\{f(x), f(y)\}$  y  $z = (1-t)x + ty$ , donde  $0 \leq t \leq 1$ . Entonces  $f(x) \leq c$ ,  $f(y) \leq c$  y  $z$  pertenece al intervalo de extremos  $x$  e  $y$ . Luego,  $f(z) \leq c$ .
- 2.6 Si el mínimo de  $f$  se alcanza en el punto  $a$ , entonces dados  $x < y$  en  $[a, b]$ , se tiene  $x \in [a, y]$ , luego  $f(x) \leq \max\{f(a), f(y)\} =$

$f(y)$ , por lo tanto  $f$  es creciente. Análogamente, si el mínimo se alcanza en el punto  $b$ ,  $f$  es decreciente. De aquí se deduce que si  $f$  alcanza su mínimo en el punto  $c \in (a, b)$  entonces  $f$  es decreciente en  $[a, c]$  y creciente en  $[c, b]$ .

2.8 La existencia de  $c$  es consecuencia del Teorema del Valor Medio. Falta probar su unicidad. Si existiesen  $c_1, c_2$  tales que  $a < c_1 < c_2 < b$  y  $f(c_1) = f(c_2) = 0$ , se tendría  $c_1 = ta + (1-t)c_2$ , donde  $0 < t < 1$ . Entonces, por la convexidad de  $f$ ,  $0 = f(c_1) \leq tf(a) + (1-t)f(c_2)$ , de donde  $tf(a) \geq 0$ , lo que es absurdo.

3.1 Basta probar que  $x \in I \Rightarrow f(x) \in I$ . Ahora bien,  $x \in I \Rightarrow |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - a| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - a| \leq k|x - a| + (1-k)\delta \leq k\delta + (1-k)\delta = \delta \Rightarrow f(x) \in I$ .

3.2  $a = 0,76666469$ .

3.3 Use el Teorema 10 y el Ejercicio 3.1.

3.4 Observe que  $(f'(x)) \leq 1/a < 1$ .

## 10. La integral de Riemann

1.1 Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $1/2^n < \varepsilon/2$ . La restricción de  $f_1$  de  $f$  al intervalo  $[1/2^n, 1]$ , es una función escalonada, por lo tanto integrable. Existe entonces una partición  $P_1$  de este intervalo tal que  $S(f; P_1) - s(f; P_2) < \varepsilon/2$ . La partición  $P = \{0\} \cup P_1$  del intervalo  $[0, 1]$  cumple  $S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon$ .

1.2 Si  $f$  es impar, basta probar que  $\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$ . Ahora bien, a cada partición  $P$  de  $[0, a]$  le corresponde una partición  $\overline{P}$  de  $[-a, 0]$ , obtenida cambiando el signo de los puntos de división. Como  $f(-x) = -f(x)$ , si en el intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  de  $P$  el ínf y el sup de  $f$  son  $m_i$  y  $M_i$ , entonces, en el intervalo  $[-t_i, -t_{i-1}]$  el ínf y el sup son  $-M_i$  y  $-m_i$ , respectivamente. Por lo tanto  $S(f; \overline{P}) = -s(f; P)$  y  $s(f; \overline{P}) = -S(f; P)$ . Ahora la afirmación es inmediata. Análogamente para el caso  $f$  par.



1.3 Evidentemente,  $f$  es discontinua en los racionales. Sea  $c \in [a, b]$  irracional. Dado  $\varepsilon > 0$  el conjunto de los números naturales  $q \leq 1/\varepsilon$ , y por lo tanto el conjunto de los puntos  $x = p/q \in [a, b]$  tales que  $f(x) = 1/q \geq \varepsilon$ , es finito. Sea  $\delta$  la menor distancia entre  $c$  y uno de estos puntos. Entonces  $x \in (c - \delta, c + \delta) \Rightarrow f(x) < \varepsilon$ , y así  $f$  es continua en el punto  $c$ . Toda suma inferior  $s(f; P)$  es cero pues todo intervalo no degenerado contiene números irracionales, luego  $\int_a^b f(x)dx = 0$ . En cuanto a la integral superior, dado  $\varepsilon > 0$ , sea  $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  el conjunto de los puntos de  $[a, b]$  para los que se tiene  $f(x_i) \geq \varepsilon/2(b-a)$ . Con centro en cada  $x_i$  tome un intervalo de longitud  $< \varepsilon/2n$ , escogido de forma que estos  $n$  intervalos sean disjuntos dos a dos. Los puntos  $a, b$ , junto con los extremos de los  $n$  enteros que pertenezcan a  $[a, b]$ , forman una partición  $P$  tal que  $S(f; P) < \varepsilon$ . Luego  $\int_a^b f(x)dx = 0$ .

1.4 Sea  $m = f(c)/2$ . Existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > m$  para todo  $x \in [c - \delta, c + \delta]$ . Entonces, para toda partición que contenga a los puntos  $c - \delta$  y  $c + \delta$ , se tiene  $s(f; P) > 2m\delta$ . De donde  $\int_a^b f(x)dx \geq s(f; P) > 0$ .

1.5 Para toda partición  $P$  de  $[a, b]$  se tiene  $s(\varphi; P) = S(g; P)$  y  $S(\varphi; P) = S(g; P) + (b-a)$ . Luego  $\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b g(x)dx$  y  $\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b g(x)dx + (b-a)$ . En particular, para  $g(x) = x$ ,  $\int_a^b \varphi(x)dx = (b^2 - a^2)/2$  y  $\int_a^b f(x)dx = (b^2 - a^2)/2 + (b-a)$ .

2.1 Para  $x, y \in [a, b]$

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq M|x - y|,$$

donde  $M = \sup\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$ .

2.2  $\varphi = \frac{1}{2}[f + g + |f - g|]$ ,  $\psi = \frac{1}{2}[f + g - |f - g|]$ ,  $f_+ = \max\{f, 0\}$  y  $f_- = -\min\{f, 0\}$ .

2.3 La desigualdad de Schwarz para integrales resulta del hecho de que en el espacio vectorial de las funciones continuas en  $[a, b]$ ,  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$  define un producto interno. Lectores

que todavía no estén familiarizados con el Álgebra Líneal, pueden probar esta desigualdad con los argumentos usados en el Capítulo 2, Ejercicio (2.7), considerando el trinomio de grado 2  $p(x) = \int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2 dx$ .

- 3.1 El conjunto de los puntos de discontinuidad de  $f$  es  $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ , por lo tanto numerable, y en consecuencia de medida nula.
- 3.2 Dada una función monótona  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  basta probar que el conjunto  $D$  de los puntos de discontinuidad de  $f$  en  $(a, b)$  es numerable. Para cada  $x \in D$  sean  $a_x$  el menor y  $b_x$  el mayor de los tres números  $\lim_{y \rightarrow x^-} f(y)$ ,  $\lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$  y  $f(x)$ . Como  $f$  es discontinua en el punto  $x$  se tiene  $a_x < b_x$ . Además, como  $f$  es monótona, si  $x \neq y$  en  $D$  entonces los intervalos abiertos  $(a_x, b_x)$  y  $(a_y, b_y)$  son disjuntos. Para cada  $x \in D$  escoja un número racional  $r(x) \in (a_x, b_x)$ . La función  $x \rightarrow r(x)$ , de  $D$  en  $\mathbb{Q}$ , es inyectiva, luego  $D$  es numerable.
- 3.3 Todos los puntos del conjunto  $D - D'$  son aislados, luego, en virtud de Ejercicio 3.4, Capítulo 5, dicho conjunto es numerable. Se deduce que  $D$  es numerable, pues  $D \subset (D - D') \cup D'$ .
- 4.1 La función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  igual 1 en los racionales y 0 en los irracionales, se anula fuera de un conjunto de medida nula pero no es integrable. Por otra parte, si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable e igual a cero fuera de un conjunto de medida nula, en cualquier subintervalo de  $[a, b]$  el ínfimo de  $f$  es cero, luego  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , de donde  $\int_a^b f(x) dx = 0$ .
- 4.2 (a) Si  $X \subset I_1 \cup \dots \cup I_k$  entonces  $X \subset J_1 \cup \dots \cup J_k$ , donde  $J_i$  es un intervalo con el mismo centro y el doble de longitud que  $I_i$ . Luego  $\sum I_i < \varepsilon \Rightarrow \sum J_i < 2\varepsilon$ , y se concluye que  $\overline{X}$  tiene contenido nulo.  
 (b) Todo conjunto de contenido nulo está acotada, luego el conjunto  $\mathbb{Q}$ , que tiene medida nula, no tiene contenido nulo. Además,  $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ , aunque está acotada, tiene medida nula pero no tiene contenido nulo, en virtud del apartado (a), pues su cierre es  $[a, b]$ , cuyo contenido no es nulo.  
 (c) Use Borel-Lebesgue.  
 (d) La diferencia  $g - f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es igual a cero excepto

en un conjunto  $X$  de contenido nulo. Sea  $M = \sup_X(f - g)$ . Todas las sumas inferiores de  $g - f$  son nulas. En cuanto a las sumas superiores, dado  $\varepsilon > 0$  existen intervalo  $I_1, \dots, I_k$  tales que  $X \subset I_1 \cup \dots \cup I_k$  y  $|J_1| + \dots + |J_k| < \varepsilon/M$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los intervalos  $I_j$  están contenidos en  $[a, b]$ . Los extremos de estos intervalos junto a  $a$  y  $b$  forman una partición de  $[a, b]$ . Los intervalos de dicha partición que contienen puntos de  $X$  son los  $I_j$ . Como  $\sum |I_j| < \varepsilon/M$ , se sigue que  $S(f; P) < \varepsilon$ . En consecuencia,  $\overline{\int}_a^b |g - f| = 0$ . Así,  $g - f$  es integrable y su integral es cero. Finalmente,  $g = f + (g - f)$  es integrable y  $\int_a^b g = \int_a^b f$ .

## 11. Cálculo con integrales

1.2 Dada cualquier partición  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  del intervalo de extremos  $c$  y  $x$ , se tiene  $f(x) - f(c) = \sum [f(t_i) - f(t_{i-1})]$ . Aplique el Teorema del Valor Medio a cada  $f(t_i) - f(t_{i-1})$  y concluya que  $s(f; P) \leq f(x) - f(c) \leq S(f; P)$  para cualquier partición  $P$ .

1.3 Es sabido que  $f$  es creciente. Si  $f$  no fuese estrictamente creciente existirían  $x < y$  en  $[a, b]$  tales que  $f(x) = f(y)$ . Entonces  $f$  sería constante y  $f'$  nula en el intervalo  $[x, y]$ , que no tiene contenido nulo.

1.4  $f(b) - f(a) = \inf_a^b f'(x)dx = f'(c) \cdot (b - a)$ ,  $a < c < b$ .

1.5 Fijando  $c \in (a, b)$  se tiene  $\varphi(x) = \int_c^{\beta(x)} f(t)dt - \int_c^{\alpha(x)} f(t)dt$ . Entonces basta considerar  $\varphi(x) = \int_c^{\alpha(x)} f(t)dt$ . Ahora bien,  $\varphi = F \circ \alpha$ , donde  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es dada como  $\int_c^x f(t)dt$ . Use la Regla de la Cadena.

1.7 Integre por partes.

2.2 Basta probar que si  $f$  no está acotada entonces, para toda partición  $P$  y todo número  $A > 0$ , existe una partición puntuada  $P^* = (P, \xi)$  tal que  $|\sum(f; P)| > A$ . En efecto, dada  $P$   $f$  no está acotada en, al menos, uno de sus intervalos, supongamos que  $[t_{i-1}, t_i]$ . Una vez tomados los puntos  $\xi$ , en los

demás intervalos, se puede escoger  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$  de forma que  $|\sum(f; P^*)| > A$ .

2.3 Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  tal que  $|\sum(f; P^*) - L| < \varepsilon/4$  se cual fuere la forma de puntuar la partición  $P$ . Tome  $P$  y puntue de dos formas. Primero escoja en cada  $[t_{i-1}, t_i]$  un punto  $\xi_i$  tal que  $f(\xi_i) < m_i + \varepsilon/2n(t_{i-1} - t_i)$ , obteniendo  $P^*$  tal que  $\sum(f; P^*) < s(f; P) + \varepsilon/4$ . Análogamente, obtenga  $P^\#$  tal que  $S(f; P^\#) - \varepsilon/4 < \sum(f; P^\#)$ . De donde  $S(f; P) - s(f; P) < \sum(f; P^\#) - \sum(f; P^*) + \varepsilon/2$ . Pero, como  $|\sum(f; P^*) - L| < \varepsilon/4$  y  $|\sum(f; P^\#) - L| < \varepsilon/4$ , se tiene  $\sum(f; P^\#) - \sum(f; P^*) < \varepsilon/2$ . Luego  $S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon$  y  $f$  es integrable. Evidentemente, por el Teorema 7,  $\int_a^b f(x)dx = L$ .

2.4  $\sum f(\xi_i)g(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum f(\xi_i)g(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum f(\xi_i) \cdot [g(\eta_i) - g(\xi_i)](t_i - t_{i-1})$ . El segundo sumando del segundo miembro tiende a cero cuando  $|P| \rightarrow 0$ , ya que  $|f(\xi_i)| \leq M$ .

2.7 Por el Ejercicio 2.6,  $\int_a^b f(x)dx/(b-a) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(f; n)$ . Como  $f$  es convexa,  $M(f; n) \geq f\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a + ih)\right]$ , donde  $h = (b-a)/n$ . Ahora bien,  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a + ih) = \frac{n-1}{n} \frac{a+b}{2} \rightarrow (a+b)/2$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

2.8 Escriba  $x_n = n!e^n/n^n$ . Integrando por partes se tiene  $\int_a^n \log x dx = n \log x - n + 1 = A_n$ . Si  $B_n$  es la suma superior de la función  $\log x$  relativa a la partición  $\{1, 2, \dots, n\}$  del intervalo  $[1, n]$  se tiene  $A_n < B_n = \sum_{k=2}^n \log k = \log(n!)$ . Una aproximación por exceso de  $A_n$  se puede obtener considerando, para cada  $k = 2, \dots, n$ , el área del trapecio de base el intervalo  $[k-1, k]$  en el eje de las  $x$ , con dos lados verticales y cuyo lado inclinado es la tangente al gráfico  $y = \log x$  en el punto  $(k-1/2, \log(k-1/2))$ , tal área vale  $\log(k-1/2)$ . Sea  $c_n = \sum_{k=2}^n \log(k-1/2)$  la suma de las áreas de estos trapecios. Se tiene  $A_n < C_n < B_n$  y por el Teorema del Valor Medio,  $k-1/2 \leq \theta_k \leq k$ . Como la serie armónica es divergente, se deduce que  $\sum 1/\theta_k = +\infty$ , luego  $\lim(B_n - A_n) \geq \lim(B_n - C_n) = +\infty$ . Finalmente, como  $B_n - A_n = \log n! - n \log n + n - 1 = \log(n!e^{n-1} \cdot n^{-n})$ , se concluye que  $\lim x_n = +\infty$ .

- 3.1 Para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(x/2 + x/2) = (f(x/2))^2 \geq 0$ . Si existiese  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $f(c) = 0$  entonces  $f(x) = f(x - c)f(c) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Luego  $f(x) > 0$  para cualquier  $x$ . Además,  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0)$ , luego  $f(0) = 1$ . También  $f(-x) \cdot f(x) = f(-x + x) = f(0) = 1$ , por lo tanto  $f(-x) = f(x)^{-1}$ . De aquí,  $f(px) = f(x)^p$  para todo  $p \in \mathbb{Z}$ . También, para todo  $q \in \mathbb{N}$ ,  $f(x) = f(x/q + \cdots + x/q) = f(x/q)^q$ , de donde  $f(x/q) = f(x)^{1/q}$ . Entonces, para todo  $r = p/q \in \mathbb{Q}$ , tal que  $q \in \mathbb{N}$ , se tiene  $f(r) = f(p/q) = f(1)^{p/q} = f(1)^r$ . Sea  $f(1) = e^a$ . Se deduce que  $f(r) = e^{ar}$  para todo  $r \in \mathbb{Q}$ . Como  $f$  es continua, se tiene  $f(x) = e^{ax}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . La segunda parte se prueba de forma análoga (v. Corolario 1 del Teorema 15) o usando el hecho de que las funciones  $\exp$  y  $\log$  son una la inversa de la otra.
- 3.2 Como  $x_n - x_{n-1} = \log(1 + 1/n) - 1/(n + 1)$ , basta observar que el mínimo de la función  $1/x$  en el intervalo  $[1, 1 + 1/n]$  es  $n/(n + 1)$ , luego  $\log(1 + 1/n) = \int_1^{1+1/n} dx/x > \frac{1}{n} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$ .
- 3.3 Escribiendo  $x = 1/y$ , se tiene  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \log x = \lim_{y \rightarrow \infty} -\frac{\log y}{y} = 0$ .
- 3.4 Escribiendo  $x/n = ym$  se obtiene  $(1 + x/n)^n = (1 + y)^{x/y} = [(1 + y)^{1/y}]^x$ , luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n = \lim_{y \rightarrow 0} [(1 + y)^{1/y}]^x = e^x$ .
- 4.1 Divergente, divergente y convergente.
- 4.2 Las tres son convergentes.
- 4.3 La integral en cuestión vale  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ , donde  $a_n$  es el valor absoluto de

$$\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2) dx.$$

Como  $|\sin(x^2)| \leq 1$ , se tiene  $0 < a_n \leq \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}$ , luego  $\lim a_n = 0$ . En la integral cuyo valor absoluto es  $a_{n+1}$ , haga el cambio de variable  $x = \sqrt{u^2 + \pi}$ ,  $dx = udu/\sqrt{u^2 + \pi}$ , observe que  $\sqrt{(n+1)\pi} \leq x \leq \sqrt{(n+2)\pi} \Leftrightarrow \sqrt{n\pi} \leq u \leq \sqrt{(n+1)\pi}$  y deduzca que  $a_{n+1} < a_n$ . Por el Teorema de Leibniz la integral converge. La concavidad de la función  $|\sin(x^2)|$

en el intervalo  $[\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}]$  implica que  $a_n$  es mayor que el área del triángulo isósceles de base dicho intervalo y altura 1. Luego la serie  $\sum a_n$  diverge y la integral  $\int_0^{+\infty} |\operatorname{sen}(x^2)|$  también.

- 4.4 El método es el mismo que el del ejercicio anterior. Escribiendo  $a = \sqrt[4]{n\pi}$  y  $b = \sqrt[4]{(n+1)\pi}$  se tiene  $\int_a^b |x \operatorname{sen}(x^4)| dx <$  área del triángulo cuya base es el intervalo  $[a, b]$  y cuya altura es  $b$ . Como  $b^4 - a^4 = \pi = (b - a)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ , tal área vale  $b(b - a) = b\pi/(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ , luego tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . Haciendo  $c = (n+2)\pi$ , el cambio de variable  $x = \sqrt[4]{u^4 + \pi}$  nos da  $a_{n+1} = \int_b^c |x \operatorname{sen}(x^4)| dx = \int_a^b |u \operatorname{sen}(u^4)| \frac{u^2}{\sqrt[4]{(u^4 + \pi)^2}} du$ , luego  $a_{n+1} < a_n = \int_a^b |x \operatorname{sen}(x^4)| dx$ . Por el Teorema de Leibniz, la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  converge al valor de la integral en cuestión.
- 4.5 Sea  $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$ ,  $x \geq a$ . Por hipótesis existe  $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ . Luego dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $A > 0$  tal que  $x > A \Rightarrow L - \varepsilon < \varphi(x) < L$ . De donde  $x > 2A \Rightarrow L - \varepsilon < \varphi(x/2) < \varphi(x) < L$ , así  $\varepsilon > \varphi(x) - \varphi(x/2) = \int_{x/2}^x f(t) dt \geq (x/2)f(x)$ , pues  $f$  es creciente. Luego  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x/2)f(x) = 0$ , y se sigue el resultado.
- 4.6 Defina  $\varphi : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mediante  $\varphi(t) = \int_a^t f(x) dx$ . Si  $t \geq a$ , sean  $M_t = \sup\{\varphi(x); x \geq t\}$ ,  $m_t = \inf\{\varphi(x); x \geq t\}$  y  $\omega_t = M_t - m_t$ . Entonces  $\omega_t = \sup\{|\varphi(x) - \varphi(y)|; x, y \geq t\}$ , (Cfr. Lema 2, Sección 1). La condición del enunciado equivale a afirmar que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_t = 0$ . El resultado se deduce entonces del Ejercicio 3.3. del Capítulo 6.

## 12. Sucesiones y series de funciones

- 1.1 Se tiene  $\lim f_n = f$ , donde  $f(x) = 0$  si  $0 \leq x < 1$ ,  $f(1) = 1/2$  y  $f(x) = 1$  si  $x > 1$ .
- 1.2 La convergencia  $f_n \rightarrow f$  es monótona, tanto en  $[0, 1 - \delta]$  como en  $[1 + \delta, \infty)$ . Por el Teorema de Dini, la convergencia es uniforme en  $[0, 1 - \delta]$ , pues este intervalo es compacto. En el otro intervalo basta observar que cada  $f_n$  es estrictamente

creciente, luego  $f_n(1 + \delta) > 1 - \varepsilon \Rightarrow f_n(x) > 1 - \varepsilon$  para todo  $x \geq 1 + \delta$ .

- 1.3 Sea  $a = 1 - \delta$ . Entonces  $x \in [-1 + \delta, 1 - \delta]$  significa  $|x| \leq |a| < 1$ . Además,  $|x| \leq a < 1 \Rightarrow \sum_{i \geq n} |x^i(1 - x^i)| \leq \sum_{i \geq n} |x^i| \leq \sum_{i \geq n} |a^i| = a^n/(1 - a)$ . Luego, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow \sum_{i \geq n} |x^i(1 - x^i)| < \varepsilon$ , lo que nos asegura la convergencia uniforme. La afirmación inicial es obvia.
- 1.4 La necesidad de la condición es evidente. Respecto a la suficiencia, observe que, para todo  $x \in X$ , la sucesión de números reales  $f_n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , es de Cauchy, luego por el Ejercicio 2.7 del Capítulo 3, existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ . Esto define una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f_n \rightarrow f$  puntualmente. Para probar que la convergencia es uniforme, tome  $\varepsilon > 0$  y obtenga  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2$  para todo  $x \in X$ . Fije  $n > n_0$  y haga  $m \rightarrow \infty$  en esta desigualdad. Concluya que  $n > n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ .
- 1.5 Si  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $X$  entonces, dado  $\varepsilon = 1$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow ||f_n(x)| - |f(x)|| \leq |f_n(x) - f(x)| < 1$  para todo  $x \in X$ . Luego  $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x)| < |f(x)| + 1$  y  $|f(x)| < |f_n(x)| + 1$ . De aquí se deduce el resultado.
- 1.6 Adapte la demostración del Teorema de Leibniz (Teorema 3, Capítulo 4).
- 1.7 Para todo  $x \in X$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge, luego tiene sentido considerar  $r_n(x) = f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots$ , como  $|r_n(x)| \leq R_n(x) = |f_n(x)| + |f_{n+1}(x)| + \cdots$ , se deduce que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$  uniformemente en  $X$ , luego  $\sum f_n$  converge uniformemente.
- 2.1 Observe que  $|f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|$ , que  $|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leq |f_n(x)||g_n(x) - g(x)| + |g_n(x)||f_n(x) - f(x)|$ , y que  $|1/g_n(x) - 1/g(x)| \leq (1/|g(x)g_n(x)|)|g_n(x) - g(x)|$ .
- 2.3 Como  $f'_n(x) = \sqrt{n} \cos(nx)$ , sólo existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$  cuando  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(nx) = 0$ . Teniendo en cuenta que  $\cos(2nx) = \cos^2(nx) - \sin^2(nx)$ ,

haciendo  $n \rightarrow \infty$  se obtendría  $0 = -1$ . Luego no existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ , sea cual fuere  $x \in [0, 1]$ .

2.6 El conjunto  $f(X)$  es compacto, disjunto del conjunto cerrado  $R - U$ . Por el Ejercicio 4.4 del Capítulo 5, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $x \in X$  e  $y \in R - U \Rightarrow |x - y| \geq \varepsilon$ , luego  $x \in X$ ,  $|f(x) - z| < \varepsilon \Rightarrow z \in U$ . Tome  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|f_n(x) - f(x)|$  para todo  $n \geq n_0$  y todo  $x \in X$ . Entonces  $f_n(X) \subset U$  si  $n \geq n_0$ .

2.7 Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(d) - f_n(d)| < \varepsilon/2$  para todo  $d \in D$ , luego  $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$  para todo  $x \in X$ , pues  $x$  es el límite de una sucesión de puntos de  $D$ . Por el criterio de Cauchy, (Ejercicio 1.4),  $(f_n)$  converge uniformemente en  $X$ .

2.8 Integre  $f_n$  por partes y haga  $n \rightarrow \infty$ .

2.9 Adapte la demostración del criterio de d'Alembert, usando, si le parece, el Teorema 5.

2.10 Adapte la demostración del criterio de Cauchy, usando, si le parece, el Teorema 5.

3.1 Sean  $a, b$  tales que  $a < 1/r < b$ . Entonces  $r < 1/a$ , luego  $1/a \notin R$ , por lo tanto existen infinitos índices  $n$  tales que  $a \leq \sqrt[n]{|a_n|}$ . Además,  $1/b < r$ , luego existe  $\rho \in R$ . Así, para todo  $N$  suficientemente grande, se tiene  $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho < b$ . Con otras palabras, solamente hay un número finito de índices  $n$  tales que  $b \leq \sqrt[n]{|a_n|}$ . De donde  $1/r$  es un valor de adherencia de la sucesión  $\sqrt[n]{|a_n|}$  y ningún mayor que  $1/r$  tiene dicha propiedad.

3.2 Se tiene  $\sum a_n x^{2n} = \sum b_n x^n$ , donde  $b_{2n} = a_n$  y  $b_{2n-1} = 0$ . Así, los términos de orden impar de la sucesión  $\sqrt[n]{|b_n|}$  son iguales a cero y los de orden par forman la sucesión  $\sqrt{\sqrt[n]{|a_n|}}$ , cuyo límite es  $\sqrt{L}$ . Por lo tanto, la sucesión  $(\sqrt[n]{|b_n|})$  tiene dos valores de adherencia: 0 y  $\sqrt{L}$ . Por el ejercicio anterior, el radio de convergencia de  $\sum A - nx^{2n}$  es  $1/\sqrt{L}$ . Un razonamiento análogo vale para la otra serie.



- 3.3 El radio de convergencia de  $\sum a^{n^2} x^n$  es  $+\infty$  si  $|a| < 1$ , 0 si  $|a| > 1$  e igual a 1 si  $|a| = 1$ .
- 3.4 Use el Corolario 2 del Teorema 9 (Unicidad de la representación en series de potencias).
- 3.5 Vea el Ejercicio 3.7, Capítulo 3.



## Lecturas recomendadas

Para profundizar, y complemento de algunos tópicos abordados en este libro, la referencia natural es

1. E. L. Lima, Curso de Análisis Matemático, vol. 1. (8ª edición). Proyecto Euclides, IMPA, 1994.

Para una presentación del tema logaritmos, siguiendo las mismas ideas del texto, aunque de carácter bastante más elemental, con numerosos ejemplos y aplicaciones, vea:

2. E. L. Lima, Logaritmos, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1994.

Otros libros que pueden ser de gran utilidad para comprender mejor los temas aquí estudiados, tratándolos con enfoques diferentes y abordando puntos que aquí no fueron considerados, son

3. R. G. Bartle, Elementos de Análise Real, Editora Campus, Rio de Janeiro, 1983.
4. D. G. Figueiredo, Análise I. L.T.C. Rio de Janeiro, 1995 (2ª edición).
5. P.R. Halmos, Teoria Ingênua dos Conjuntos. Ed. USP, São Paulo, 1970.
6. A. Hefez, Álgebra, vol. 1, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 1997 (2ª edición).
7. L.H. Jacy Monteiro, Elementos de Álgebra, Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1969.
8. W. Rudin, Princípios de Análisis Matemática, Ed. UnB e Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1971.

9. M. Spivak, Cálculo Infinitesimal, 2 vols. Editorial Reverté, Barcelona, 1970.

También recomendamos:

10. R. Courant, Differential and Integral Calculus, vol. 1, Interscience, New York, 1947.
11. O. Forster, Analysis 1, Vieweg, Braunschweig, 1987 (en alemán).
12. S. Lang, Analysis 1, Addison-Wesley, Reading Massachusetts, 1969.