Отчёт по задаче на тему "Строгое полиномиальное отделение двух множеств"

Данил Кизеев
группа 423

7 октября 2020 г.

Постановка задачи

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы два множества

$$A = \{a_i\}_{i=1}^m, B = \{b_j\}_{j=1}^k$$

Рассмотрим обобщённый полином

$$P(x,t) = \sum_{s=1}^{r} x[s] u_s(t), t \in \mathbb{R}^n,$$

где $u_s(t)$ — непрерывные функции от n переменных. Будем говорить, что множества A и B *строго полиномиально отделимы*, если найдётся вектор коэффициентов $x_0 \in \mathbb{R}^r$, такой, что

$$P(x_0, a_i) \geq 1 \text{ при всех } i \in 1:m,$$
$$P(x_0, b_j) \leq -1 \text{ при всех } j \in 1:k$$

При этом гиперповерхность определяется уравнением

$$P(x_0, t) = 0.$$

Построение отделяющего полинома $P(x_0, t) = 0$ сводится к решению задачи линейного программирования:

$$w \to \min$$
$$P(x, a_i) + w \geq 1, i \in 1:m;$$
$$-P(x, b_j) + w \geq 1, j \in 1:k;$$
$$w \geq 0$$

При этом если (x_*, w_*) — решение этой задачи, то при $w_* = 0$ полином $P(x_*, t)$ строго отделяет множества A и B. При $w_* = 1$ строгое полиномиальное отделение множеств A и B невозможно.

Реализация на Python

Программа была реализована на языке Python 3.7 с помощью функции **linprog** из библиотеки **scipy.optimize**. Датасеты были реализованы с помощью функций **make_circles**, **make_moons**, **make_blobs** из библиотеки **sklearn.datasets**. Также ещё один датасет был реализован в виде таблицы значений функции **«xor»**.
Строчка, обращающаяся к функции и находящая решение:
solution = linprog(c, A_ub = A_ub, b_ub = b_ub, bounds = (None, None)).
Здесь **c** - вектор цен, равный $[0, 0, ..., 0, 1]$;
A_ub - матрица, содержащая значение полинома $P(x_i, t)$ в точках множеств A, B;
b_ub - вектор свободных переменных, равный $[-1, -1, ..., -1, 0]$;
bounds = (None, None) - условие на неограниченность базисных переменных(по умолчанию они неотрицательны, что не даёт верного решения).
Итоговый полином ищется в виде

$$\begin{aligned}P(x,t) = &\text{solution}[0] + \text{solution}[1]x + \text{solution}[2]y +\\ &\text{solution}[3]x^2 + \text{solution}[4]y^2 + \text{solution}[5]xy + \text{solution}[6]x^2y +\\ &\text{solution}[7]xy^2 + \text{solution}[8]x^2y^2 + \text{solution}[9]x^3y + \text{solution}[10]xy^3 +\\ &\text{solution}[11]x^3 + \text{solution}[12]y^3 + \text{solution}[13]x^4 + \text{solution}[14]y^4\end{aligned}$$

Результаты

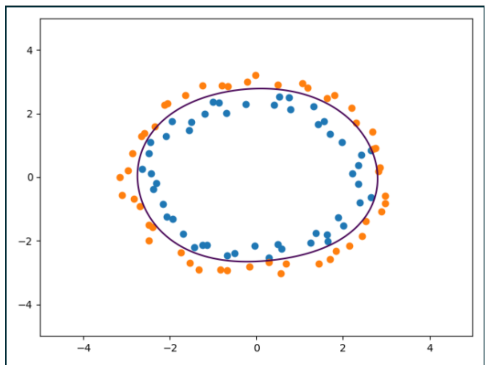

Рис. 1: Пример с эллипсом, средний шум

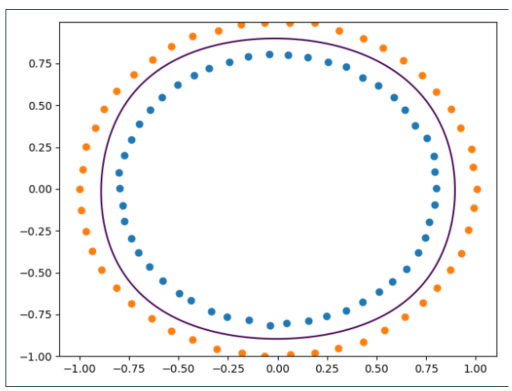

Рис. 2: Пример с эллипсом, шума почти нет

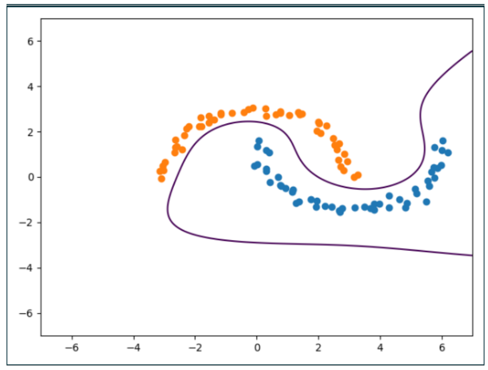

Рис. 3: Две полуокружности, без шума

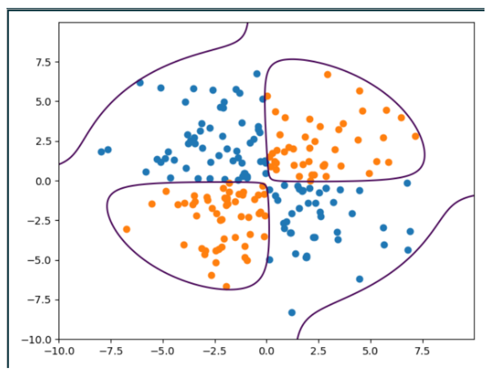

Рис. 4: Проблема XOR

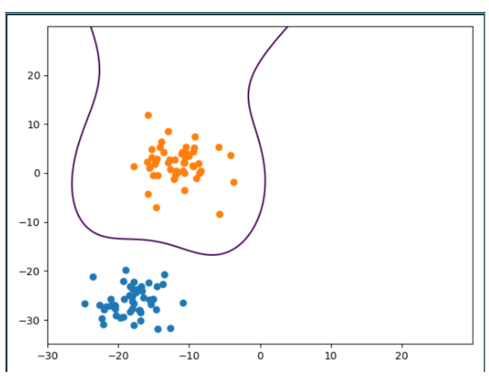

Рис. 5: Два круга