

간섭계와 VLBI

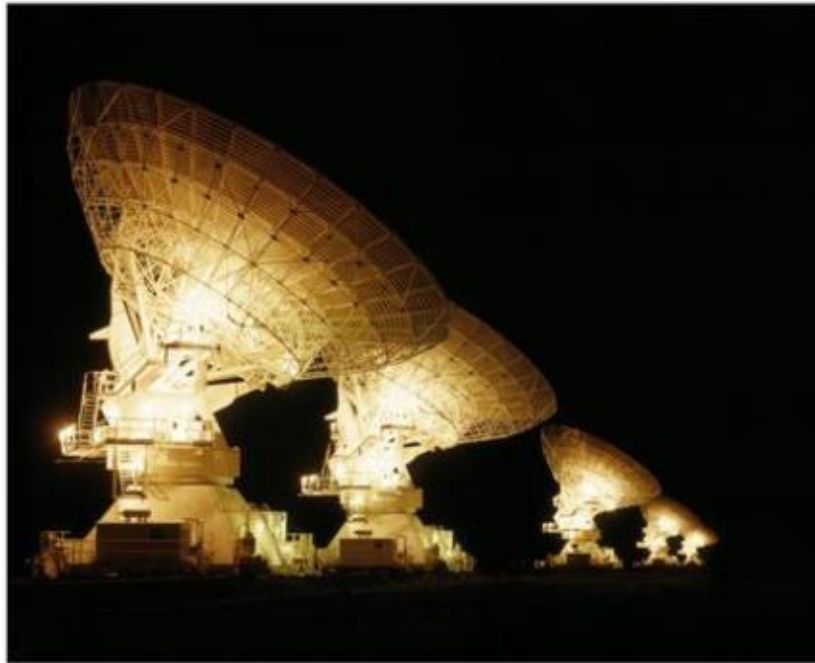
WSRT (Westerbork Synthesis Radio Telescope)

- 네덜란드
- 25m 14개
- 동-서 방향으로 배열, 기선길이는 2.7km



ATCA (Australia Telescope Compact Array)

- 22m, 6 대
- 동서방향, 기선길이 31m~6km



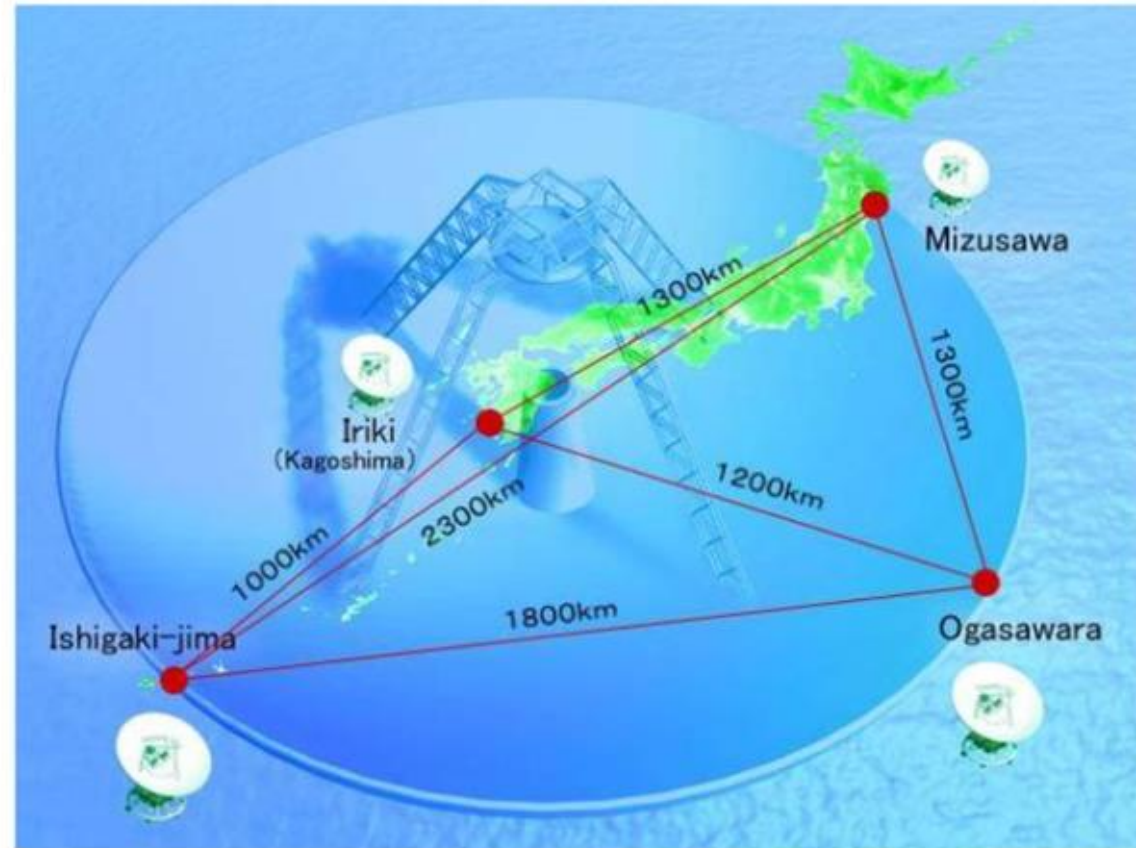
PdBI (Plateau de Bure Interferometer)

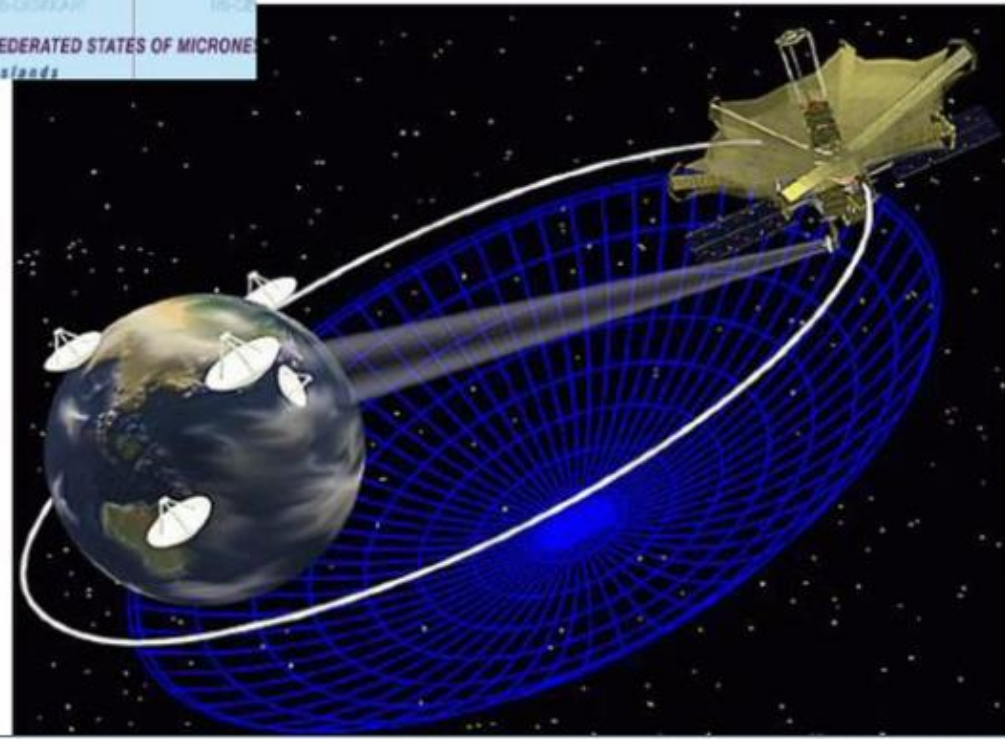
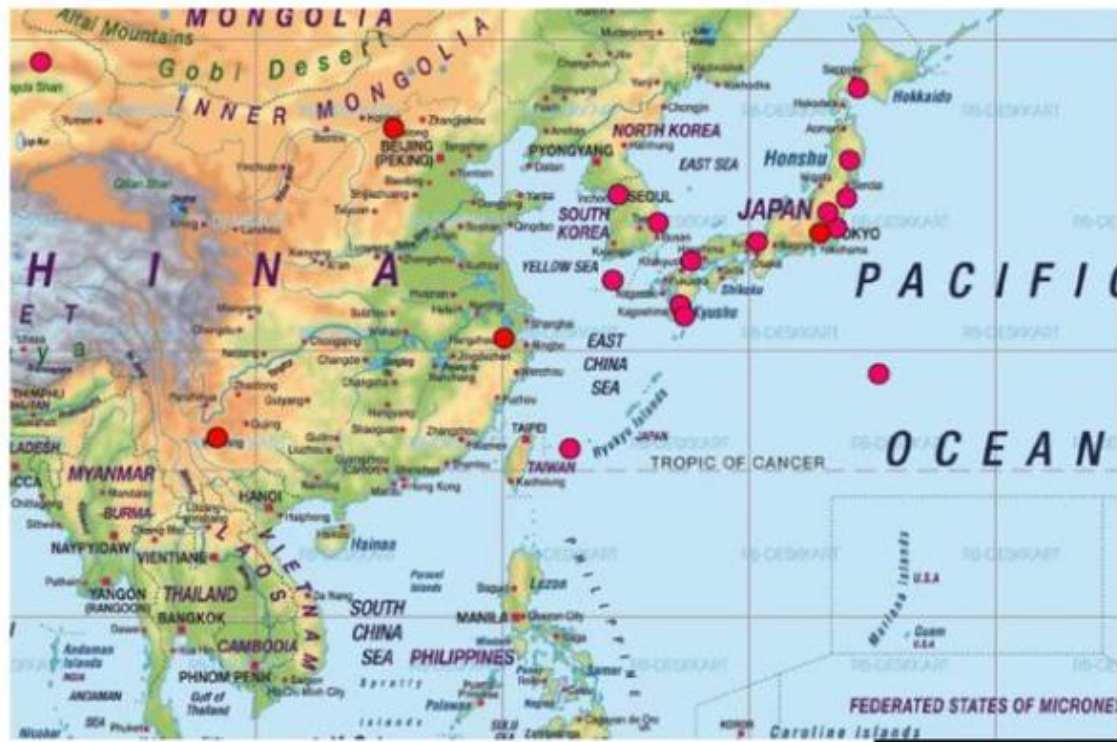
- 15m, 6 대
- 십자 배열, 기선길이 408m & 232m











차이점

- 간섭계 : 전기적으로 연결되어 있다.
- VLBI : 전기적으로 분리되어 있다. 고성능 시계를 서로 맞춘 후 이에 따라 기록한다.
- VLBI의 경우 fringe fitting이 필요하다.

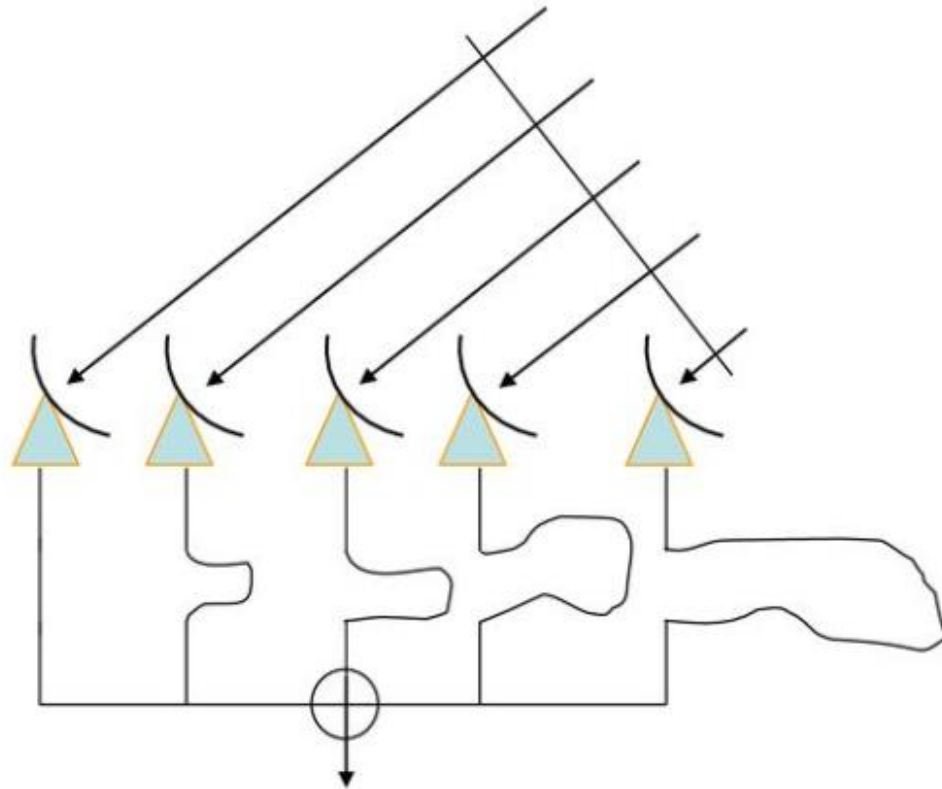
간섭계의 필요성 : 분해능

$$\theta \sim \frac{\lambda}{D}$$

- 파장을 줄이기 : 파장에 따라 모습이 다를 수 있으므로 해결책이 아니다.
- 크기를 늘인다. → 경제적으로, 기술적으로 한계가 있다.
 - 이를테면 주경의 변형; 추적의 어려움

해결방법

- 안테나를 여러 개 만들고 delay를 조절해서 신호를 합친다.



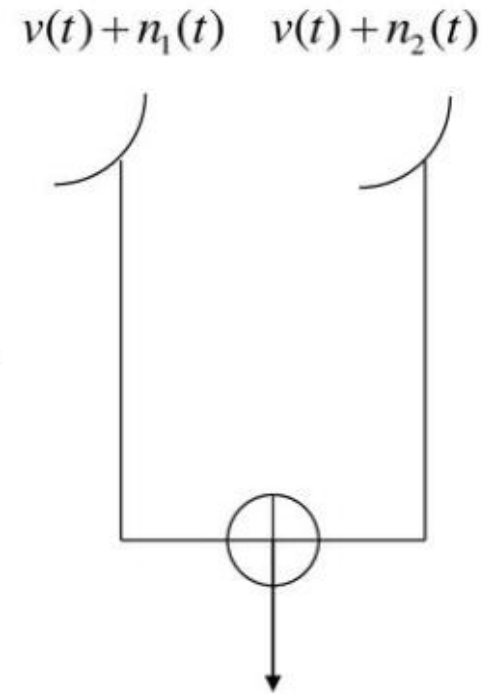
- 일반 간섭계, VLBI는 이렇게 하지 않는다!
 - 각 pair에 대해 곱한다.
 - 장점 : low noise, imaging
 - 단점 : 고비용
- 앞의 형식으로 하기도 하는데,
 - phased array라고 한다.
 - VLA를 VLBI의 한 station으로 쓰는 경우; IPS 관측 시스템; 무기 시스템
 - 장점 : 간단
 - 단점 : noise 더 크다?
- 곱하는 경우나 더하는 경우나, 추적은 delay로 한다! 개개 안테나의 추적정밀도가 전체 시스템의 추적 정밀도를 결정하지 않는다.

- For adding interferometer,

$$\begin{aligned}
 P_{out} &= \langle (v(t) + n_1(t) + v(t) + n_2(t))^2 \rangle \\
 &= 4 \langle v^2(t) \rangle + \langle n_1^2(t) \rangle + \langle n_2^2(t) \rangle \\
 &\propto 4(T_A^* + T_{sys1}/4 + T_{sys2}/4)
 \end{aligned}$$

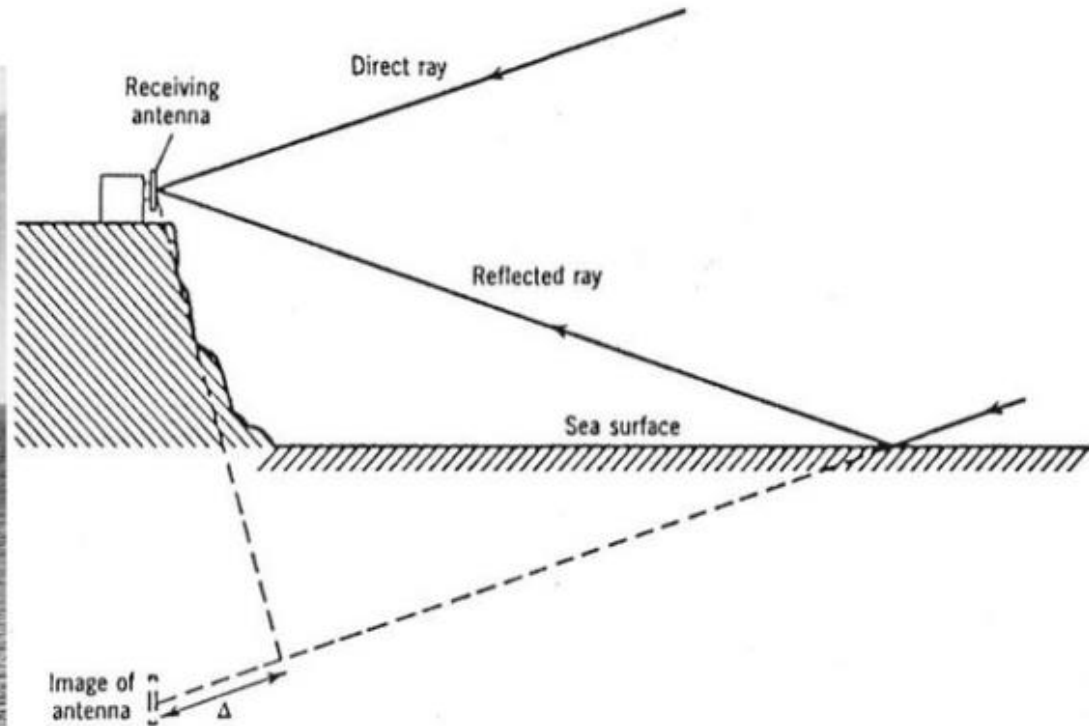
- For multiplying interferometer,

$$\begin{aligned}
 P_{out} &= \langle (v(t) + n_1(t)) \cdot (v(t) + n_2(t)) \rangle \\
 &= \langle v^2(t) \rangle \\
 &\propto T_A^*
 \end{aligned}$$

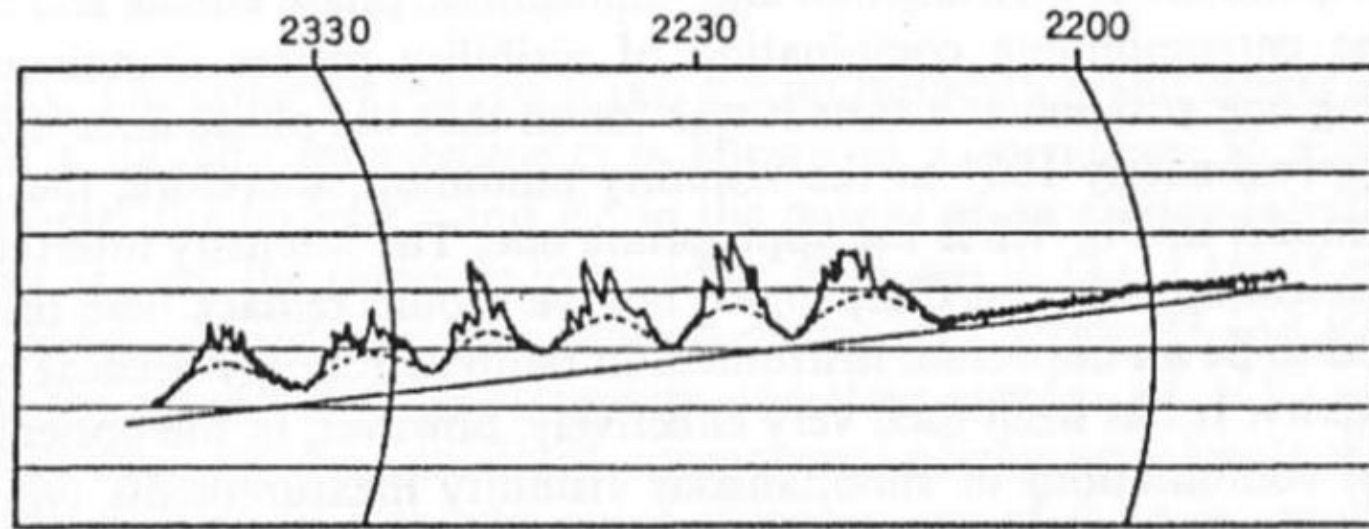


Sea Cliff Interferometer

The first radio interferometric observations of any celestial body (1947년)

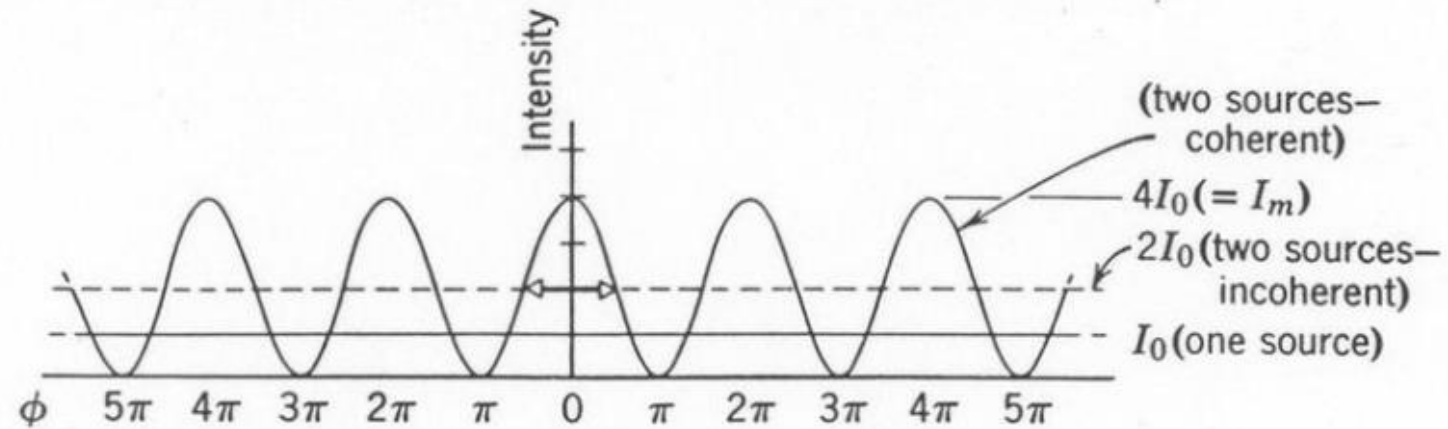


Sea Cliff Interferometer



- Cygnus A, $\nu=100\text{MHz}$, $\text{EL}=22^\circ$
- Fringe width= 1° , Unresolved.
- Fluctuating component (Ionospheric origin)

Young 의 실험 – paired antenna의 빔 패턴



Fringe

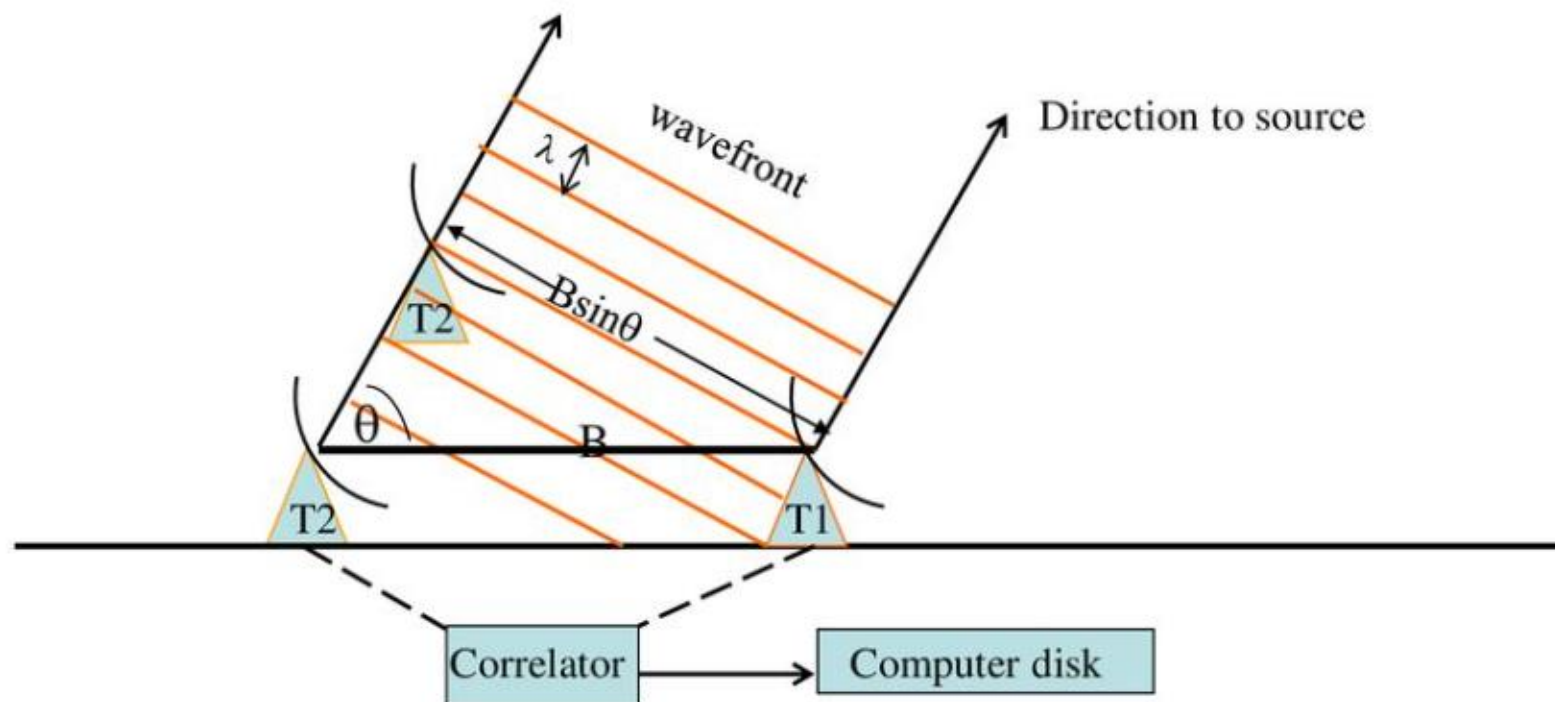


- 더하는 경우,

$$\begin{aligned}
 I &= \langle (\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \phi))^2 \rangle, \quad \phi = \frac{2\pi L \sin \theta}{\lambda} \\
 &= \langle \cos^2(\omega t) + \cos^2(\omega t + \phi) + 2\cos(\omega t)\cos(\omega t + \phi) \rangle \\
 &= \langle \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} + \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\phi)}{2} + \cos(2\omega t + \phi) + \cos \phi \rangle \\
 &= 1 + \cos \phi \\
 &\cong 1 + \cos\left(\frac{2\pi L \theta}{\lambda}\right)
 \end{aligned}$$

- 곱하는 경우에는,...

- 구멍 두개를 두개의 전파망원경으로 바꾸면 전파 간섭계가 된다.
- 들어오는 신호를 더할 수도(영의 실험) 곱할 수도(전파간섭계) 있다.
- Delay를 조절해서 두 망원경이 천체방향(라기보다는 phase tracking center)에 수직하게 놓여 있는 것처럼 한다.



Paired antenna의 빔패턴

- 빔크기는 ?
- Side lobe는?
- 분해능이 향상되었는가?
- 기선벡터의 크기와 방향을 다르게 해서 측정하면 천체의 모습을 추정할 수 있다.
- 이것을 수학적으로 해보면,...

Visibility 와 천체의 구조

- Beam pattern of a paired antenna = cosine form multiplied by single dish beam pattern
- Brightness distribution, multiplied by primary beam pattern, and visibility are Fourier pair.
- Visibility의 허수부는 어떻게 구성하나?

$$\text{Re}(V) = \int I \cdot A \cdot \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda} \theta\right) d\theta$$

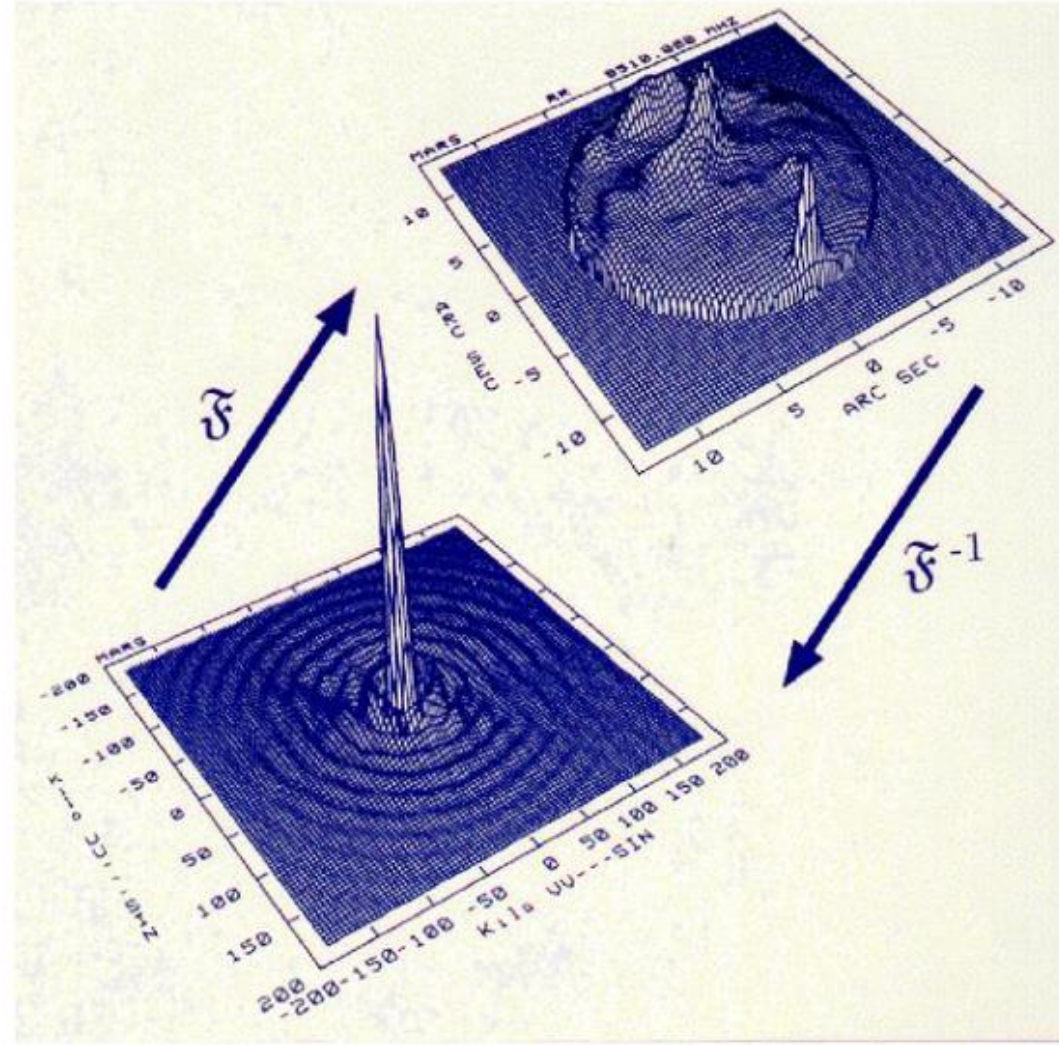
수학적 기술

- 가시함수(visibility function)

$$V_v(u, v) = \iint I_v(l, m) e^{-2\pi i(ul+vm)} dl dm$$

$$I_v(l, m) = \iint V_v(u, v) e^{2\pi i(ul+vm)} du dv$$

- 가시함수 자체는 밝기분포와 1:1 대응하지 않는다. 푸리에 변환하는 순간 이미지가 만들어 진다.

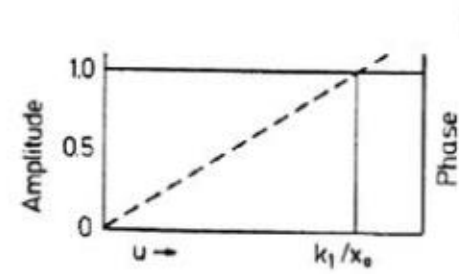


연습 : visibility와 밝기분포

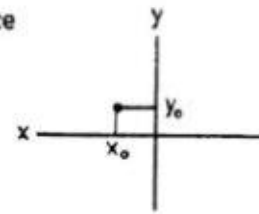
- 다음의 각 경우에 가시함수의 (실수부, 허수부) 또는 (진폭, 위상)을 구해보자
 - phase tracking center에 있는 점전파원
 - Phase tracking center에서 조금 어긋나 있는 점전파원
 - phase tracking center에 있는 퍼진 전파원
 - Phase tracking center에서 조금 어긋나 있는 퍼진 전파원

(a) Visibility function

Brightness distribution

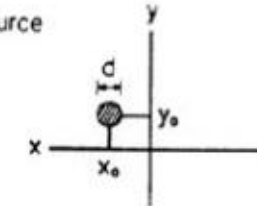
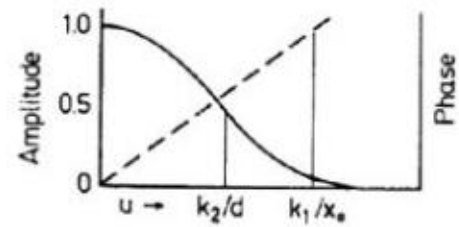


Point source



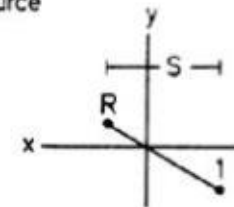
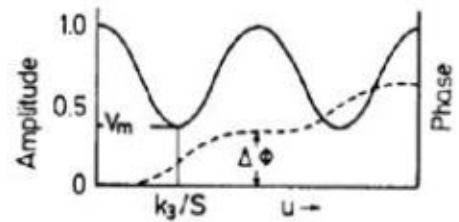
(b)

Extended source



(c)

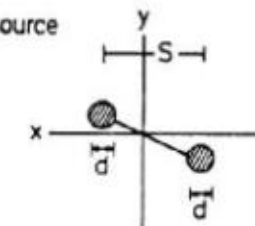
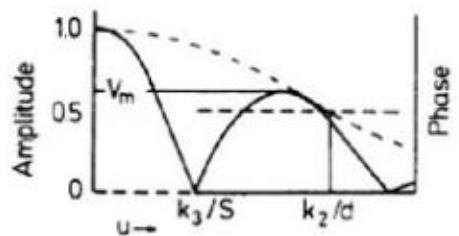
Point double source



$$V_m = \frac{R - 1}{R + 1}, \quad \Delta\phi = \frac{1}{1 + R}$$

(d)

Extended double source



- Phase tracking center에 있는 점전파원은 가시함수의 위상과 진폭이 일정하다.
- 퍼진 천체는 기선이 길어지면서 가시함수의 진폭이 점점 감소한다.

부가적인 이야기

- Sampling function; dirty image, dirty beam – 가시함수를 모든 UV 평면에서 얻지 못하면 이미지는 어떻게 달라질까?
- UV 평면, UV coverage
- Geometric delay; instrumental delay
- Instrumental delay를 IF단에 삽입하면?
- Monochromatic 하지 않고 대역폭이 있으면 빔패턴은 어떻게 될까?
- Total power mode and spectrum mode – 스펙트럼관측은 어떻게?
- 간섭계의 시야는 어떻게 결정되나?

Spatial sampling, dirty image,...

$$I(l, m) = \int V(u, v) e^{+i(lu+vm)} du dv$$

$$I^D(l, m) = \int S(u, v) V(u, v) e^{+i(lu+vm)} du dv$$

where $S(u, v) = 1$ for sampled (u, v) and 0 otherwise.

$$I^D(l, m) = \int I(l-l', m-m') \hat{S}(l', m') dl' dm'$$

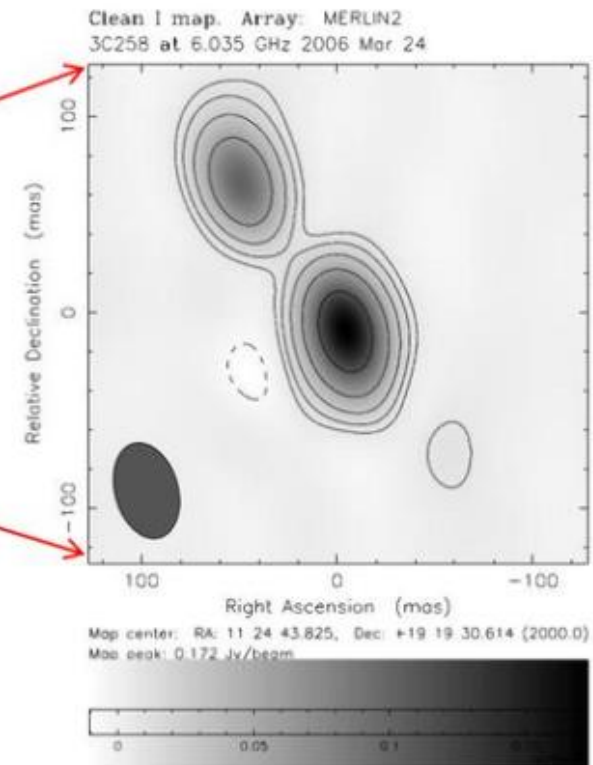
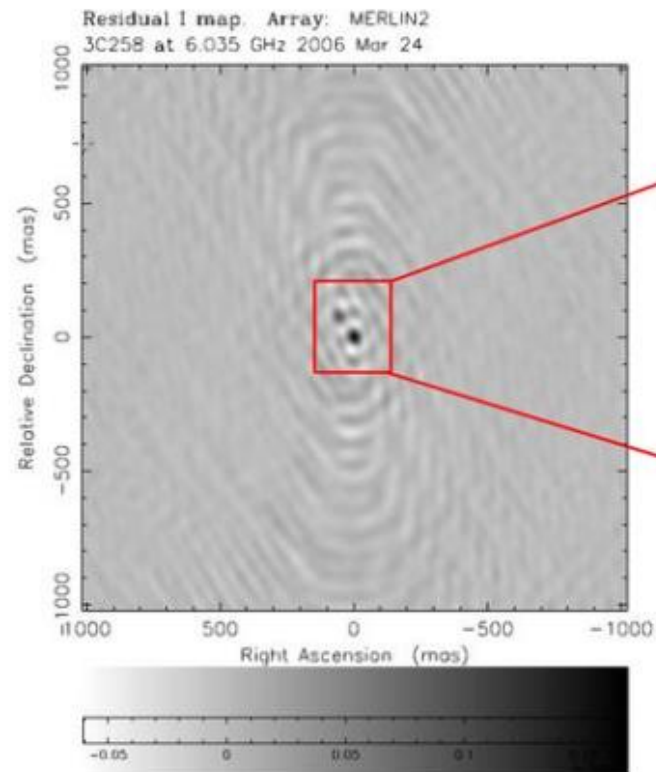
where $\hat{S}(l', m')$ and $S(u, v)$ are Fourier transform pair,

$$\hat{S}(l', m') = \int S(u, v) e^{+i(lu+vm)} du dv.$$

샘플링이 충분하지 않으면

- Point spread function or beam pattern이 나빠지고,
- 이미지가 지저분해진다. → "dirty image"

- CLEAN, MEM등으로 해결한다.

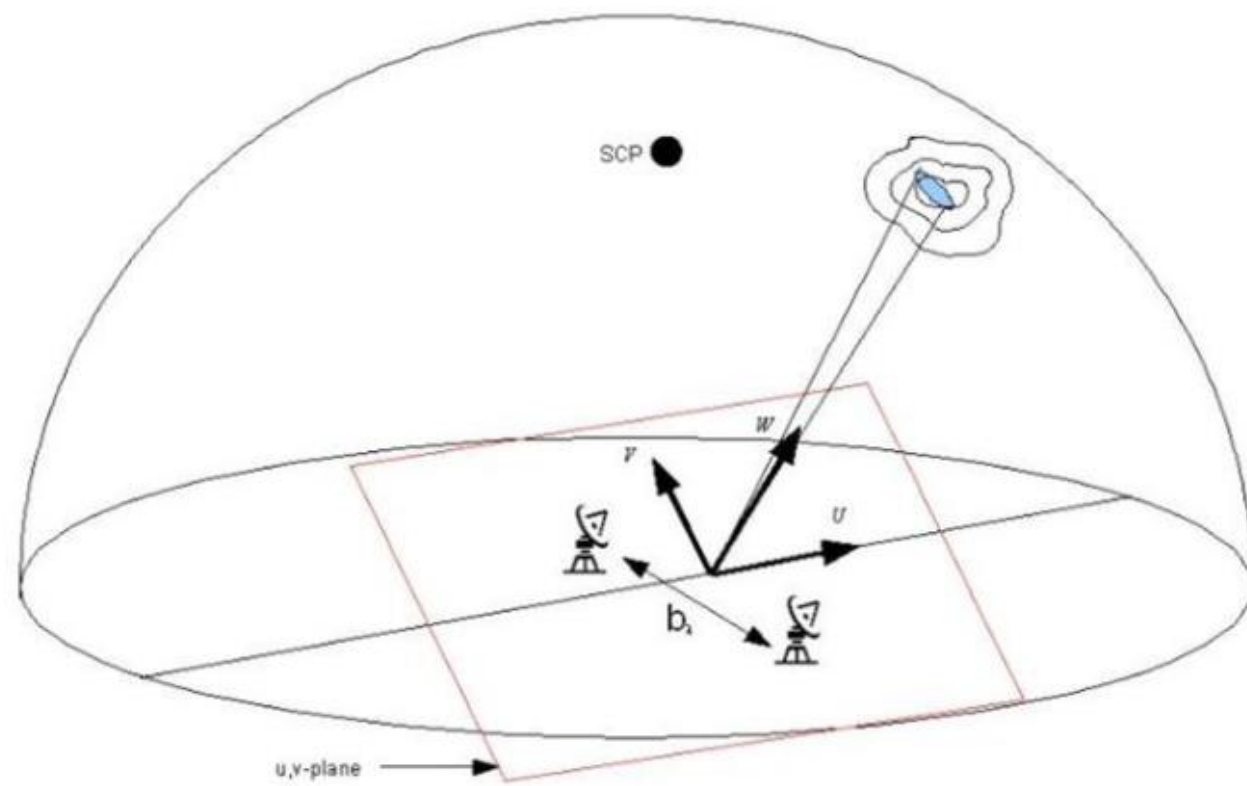


UV coverage

- 샘플링의 정도를 나타내는 그림
- Source (엄밀히는 phase tracking center) 에서 지구를 보는 방향에 수직인 면을 하나 만들고, 이 면에 투영된 기선벡터의 궤적들
- U축 : 동쪽, V : 북쪽
- 이렇게 정의하면 푸리에 변환된 이미지의 x 좌표(l)는 ΔRA , y 좌표(m)는 ΔDec 이 된다.
- 기선벡터를 x축($h=0, \delta=0$), y축($h=-6h, \delta=0$), z축($\delta=90^\circ$)으로 정의된 좌표계에서 L_x, L_y, L_z 라고 하면,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} \sin H_0 & \cos H_0 & 0 \\ -\sin \delta_0 \cos H_0 & \sin \delta_0 \sin H_0 & \cos \delta_0 \\ \cos \delta_0 \cos H_0 & -\cos \delta_0 \sin H_0 & \sin \delta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}$$

- 여기에서 H_0 는 phase tracking center의 시간각, δ_0 는 declination이다.



Down conversion for a point source

$$\cos(w_{RF}t - \phi_V) \quad \cos(w_{RF}(t - \tau_g))$$

$$\cos(w_{IF}t - \phi_V - \phi_{LO}) \quad \cos(w_{IF}(t - \tau_i) - w_{RF}\tau_g))$$

cross correlation assuming LSB/USB

$$\cos(w_{IF}\tau_i + w_{RF}\tau_g - \phi_V - \phi_{LO}) \rightarrow V \cos(\pm w_{IF}(\tau_i - \tau_g) + w_{LO}\tau_g - \phi_V - \phi_{LO})$$

Band width effect

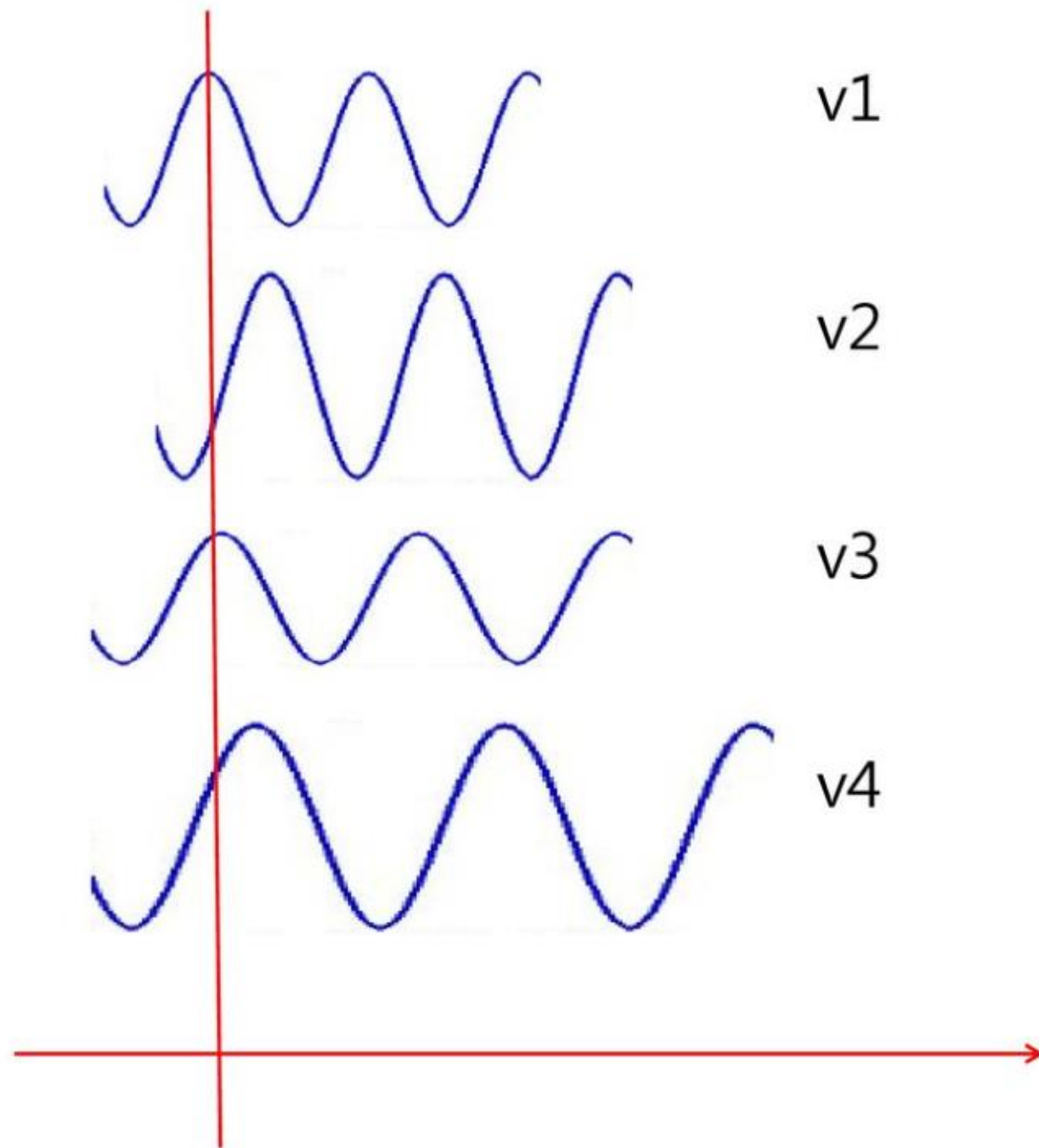
$$\int_{w_0 - \Delta w/2}^{w_0 + \Delta w/2} \cos(w\tau + \phi) dw \propto \frac{\sin(\frac{\Delta w}{2}\tau)}{\frac{\Delta w}{2}\tau} \cos(w_0\tau + \phi)$$

Both of them

$$\text{Re}(V) = V \frac{\sin(\frac{\Delta w}{2}(\tau_i - \tau_g))}{\frac{\Delta w}{2}(\tau_i - \tau_g)} \cos(\pm w_{IF_0}(\tau_i - \tau_g) + w_{LO}\tau_g - \phi_V - \phi_{LO})$$

Spectroscopy

- 주파수마다 visibility가 크게 다를 수 있다.
 - Core shift in AGN, Sio maser in Mira variables
- Visibility를 각 주파수마다 얻어야 한다.
 - 기계적으로 필터를 여러 개 만들어 신호를 통과시킨 후에 가시함수를 얻는다.
 - 또는 visibility를 여러 lag에 대해 얻은 후에 이것을 FT 한다.
- 주파수마다 가시함수가 다르면,



- 특정 기선 또는 (u, ν) 에서,

$$V(\nu) = V_0(\nu)e^{i\phi(\nu)};$$

$$\text{Re}(R(\nu, \tau)) = V_0(\nu)\cos(2\pi\nu\tau + \phi(\nu));$$

$$\text{Im}(R(\nu, \tau)) = V_0(\nu)\sin(2\pi\nu\tau + \phi(\nu));$$

$$R(\nu, \tau) = V_0(\nu)e^{i(2\pi\nu\tau + \phi(\nu))};$$

$$R(\tau) \equiv \sum_{\nu} R(\nu, \tau) = \sum_{\nu} V_0(\nu)e^{i(2\pi\nu\tau + \phi(\nu))} = \int \gamma(\nu)e^{i2\pi\nu\tau} d\nu;$$

$$V(\nu) = \int_{\tau} R(\tau)e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau$$

Field of view

- 시야를 결정하는 요소들
 - 단일 안테나의 빔 크기
 - Band width effect
 - Time averaging

Calibration

- Phase calibration
 - 기선벡터 정확히 구하기
- Amplitude calibration
 - 밝기를 정확히 구하기 or y축 스케일 맞추기
- Pass band calibration
 - 스펙트럼 모양 정확하게 구하기; 기기에 의한 대역통과특성 보정하기

Image manipulation

- Self-cal
 - 전통적인 VLBI 관측은 external calibrator를 사용하지 않는다. → absolute position 정보는 잃어버린다.
 - Source 내의 point source를 사용
- Clean method
 - "이미지를 점광원의 합으로 본다." → 점광원을 찾은 후에, -가 없는 가우시안 빔으로 문질러 이미지를 만든다.
- MEM method

Sensitivity

- Baseline sensitivity
- Image sensitivity

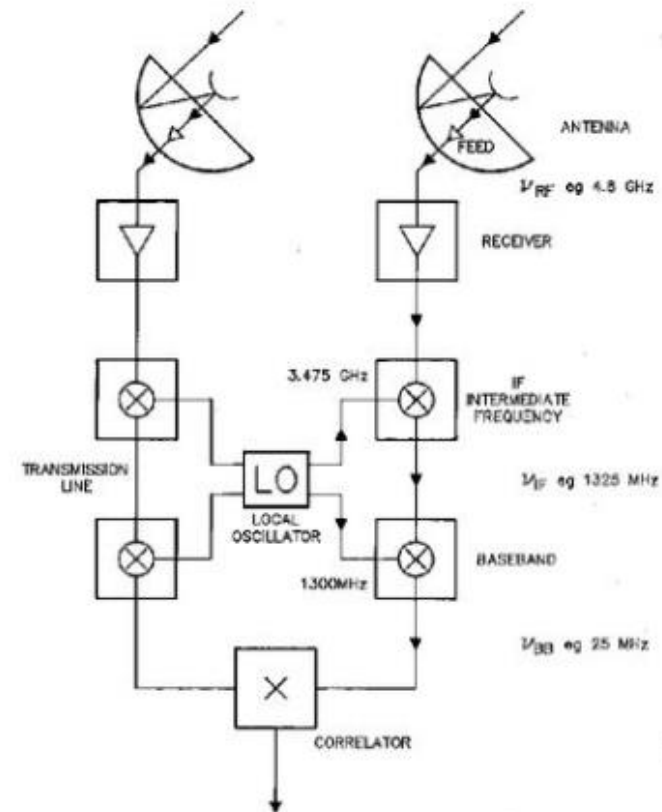
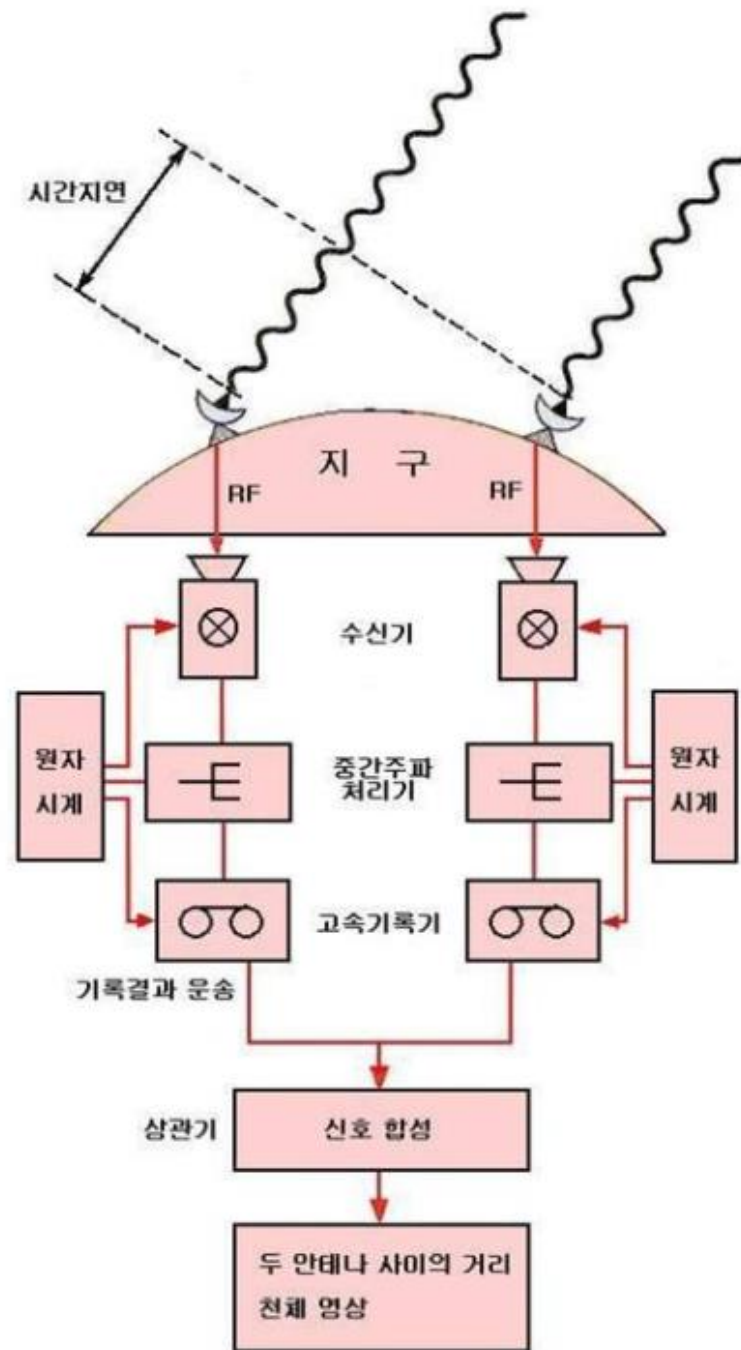
$$\Delta S = \frac{\sqrt{2}kT_{sys}}{A_{eff} \sqrt{\Delta \nu \tau}}$$

$$\Delta S = \frac{2kT_{sys}}{A_{eff} \sqrt{N(N-1)\Delta \nu \tau}}$$

$$\Delta T_b = \frac{\Delta S}{\Omega_A} \frac{\lambda^2}{2k}$$

VLBI

- 실시간으로 correlation 을 찾지 못하므로 파형을 일일이 기록해서 나중에 가시함수를 찾는다.
- 시간을 잘 맞춘다.
- 시각 정보는 LO에, 기록기에 들어간다.



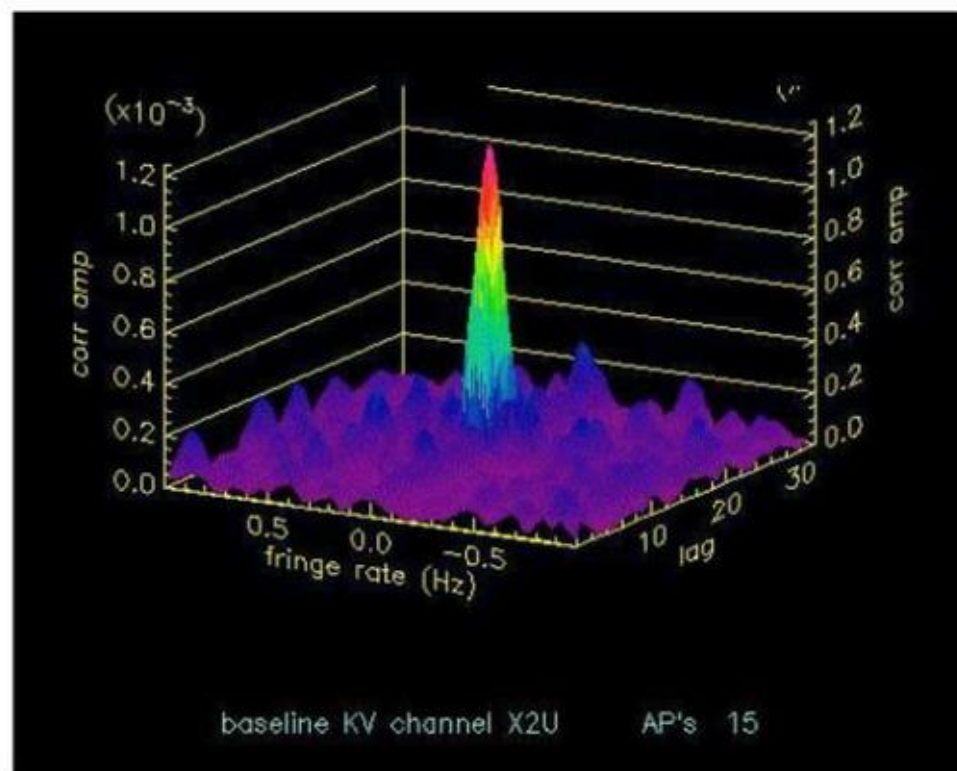
Fringe fitting

- 위상 ...
- 위상을 보는 다른 관점... '주파수는 위상의 시간 변화다.'

- 같은 천체 신호에 대해서 두 station에서 주파수가 다른 신호로 인식될 가능성이 있는데,
 - 기준시계가 틀린 경우
 - geometric delay가 빠르게 변하는 경우. VLBI의 경우, 안테나 사이의 거리가 멀면 이럴 수 있다. → Doppler shift가 서로 다른 것으로 해석할 수도 있다. 예를 들어, 파장 1cm, 기선길이 1000km의 경우, 위상의 변화량은,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{2\pi L}{\lambda} \theta \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{2\pi L}{\lambda} 2\pi \nu_{\oplus} t \right) = 4\pi^2 \nu_{\oplus} \frac{L}{\lambda} \\ &= 40 \cdot \frac{1}{243600} \cdot \frac{1000\text{km}}{1\text{cm}} = 4.6\text{KHz!!} \end{aligned}$$

- 이런 경우 노출을 오래 할 수 없다.
- Long integration을 위해서 fringe search를 한다, lag과 fringe rate에 대해서.
- 그리고서 fringe fitting을 한다.



Phase referencing

- 방법들
 - Fast switching between source and phase calibrator
 - Multi frequency cal. within a beam
 - Dual beam in a telescope
 - Dual beam using two telescope