Домашняя работа

Котов Артем, МОиАД2020

13 октября 2020 г.

Содержание

Замечание. *Жирные буквы обозначают вектора, нежирные — скаляры, например, длина вектора* $|\boldsymbol{x}| = x$. *А скалярное произведение обозначает* $\cdot$ *между векторами.*

Task 1

Условие: Найдите ортогональную проекцию вектора $c = (0, 2, 1)$ на плоскость, определяемую векторами $a = (1, 1, 1)$ и $b = (2, 1, 2)$, и вычислите угол между вектором c и его проекцией.

Решение.

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{c}_0 \Longrightarrow \boldsymbol{h} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}_0 = \boldsymbol{c} - \alpha \boldsymbol{a} - \beta \boldsymbol{b}$$

При этом $\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{c}_0 = 0$. От сюда получаем, что

$$\begin{cases} (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}_0) \cdot \boldsymbol{a} = 0 \\ (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}_0) \cdot \boldsymbol{b} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -3\alpha - 5\beta + 3 = 0 \\ -3\alpha - 7\beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \frac{21}{6}, \beta = -\frac{3}{2} \Longrightarrow \boldsymbol{c}_0 = \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$$

Угол между вектором $\boldsymbol{c}$ и плоскостью $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$:

$$\cos(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}_0) = \frac{\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c}_0}{c c_0} = \sqrt{0.9}$$

■

Task 3.6.1

Условие: Найдите расстояние и угол между вектором $\boldsymbol{x}$ и подпространством $U = \langle h, u \rangle$, пространства $\mathbb{R}^4$, если: $x = (6, 1, 4, 1)$, $u = (2, 4, 1, 1)$, $v = (1, 1, 0, 0)$

Решение.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{x}_0 = \alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v} \in U,\ \boldsymbol{h} \perp U$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \\ \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}_0 \cdot \boldsymbol{u} = 0 \\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}_0 \cdot \boldsymbol{v} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 13 - 22\alpha - 6\beta = 0 \\ 5 - 6\alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = -\frac{1}{2},\ \beta = 4$$

$$\boldsymbol{x}_0 = \left(3, 2,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow \cos(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = \frac{\pi}{3}$$

Теперь расстояние $h = |\boldsymbol{h}|$:

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 = \left(3,\ -3, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right) \Longrightarrow h = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

■

Task 3.6.2

Условие: В пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением примените ортогонализацию Грамма-Шмидта к базису $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$ (в ответ запишите полученный базис): $\boldsymbol{f}_1 = (1, 0, 4)$, $\boldsymbol{f}_2 = (2, 1, 1)$, $\boldsymbol{f}_3 = (1, 1, 2)$.

Решение.

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{f}_1$$
$$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{f}_2 - \frac{\boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{e_1}}{e_1^2}\boldsymbol{e_1}$$
$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{f}_3 - \frac{\boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1}{e_1^2}\boldsymbol{e}_1 - \frac{\boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2}{e_2^2}\boldsymbol{e}_2$$

Насчитаем последовательно необходимые скалярные произведения:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = -2 \\ \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 17 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boldsymbol{e}_2 = \left(\frac{36}{17}, 1, -\frac{9}{17}\right)$$
$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 7 \\ &\boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 = -\tfrac{37}{17} \\ &\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \tfrac{98}{17} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boldsymbol{e}_3 = \left(-\frac{30}{49}, \frac{135}{98}, \frac{15}{98}\right)$$

Получили набор:

$$\boldsymbol{e}_1 = (1{,}0{,}4),\ \boldsymbol{e}_2 = \left(\frac{36}{17}, 1, -\frac{9}{17}\right),\ \boldsymbol{e}_3 = \left(-\frac{30}{49}, \frac{135}{98}, \frac{15}{98}\right)$$

Проверим, что он ортогональный:

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \frac{36}{17} - \frac{36}{17} = 0$$
$$\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = -\frac{36}{17}\frac{30}{49} + \frac{135}{98} - \frac{9 * 15}{17 * 98} = 0$$
$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = -\frac{30}{49} + \frac{4 * 15}{98} = 0$$

Нормируем эти вектора:

$$e_1 = \sqrt{17},\ e_2 = \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{17}},\ e_3 = \frac{15}{7\sqrt{2}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(1{,}0{,}4),\ \boldsymbol{e}_2 = \frac{\sqrt{17}}{7\sqrt{2}}\left(\frac{36}{17}, 1, -\frac{9}{17}\right),\ \boldsymbol{e}_3 = \frac{7\sqrt{2}}{15}\left(-\frac{30}{49}, \frac{135}{98}, \frac{15}{98}\right)$$

■