Домашняя работа

Котов Артем, МОиАД2020

23 сентября 2020 г.

Содержание

Task 1

$$\xi, \eta = N(0{,}1)$$

a) $\zeta = \xi^2 + \eta^2$ Рассмотрим сначала плотности распределения квадрата с.в.

$$\rho_{\xi^2}(x) = \rho_\xi(\pm\sqrt{x}) \left|\left(\sqrt{x}\right)'\right| = \frac{1}{2\pi} e^{-x/2} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} e^{-x/2}$$

Для η аналогично. При этом, так как $\xi^2 \geq 0$, то плотность при $x < 0$ равна 0. Теперь свернем эти две плотности, чтобы получить плотность ζ

$$\rho_{\xi^2+\eta^2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{x-y}} e^{-(x-y)/2-y/2} dy = \frac{1}{4\pi} e^{-x/2} \int\limits_0^x \frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{x-y}} =$$

$$= \left[\frac{y}{x} = \cos^2 t\right] = \ldots = \frac{e^{-x/2}}{4\pi} \int\limits_0^{\pi/2} dt = \frac{e^{-x/2}}{2}$$

b) Рассмотрим $\zeta = \xi/\eta$ как компоненты случайного вектора, пусть вторая компоненты $\zeta' = \eta$. Лучше переименуем, а то запутаемся, изначально $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$

$$\rho_{\boldsymbol{xi}} = \frac{1}{2\pi} e^{-x_1^2/2 - x_2^2/2}$$

пусть $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$, где $\eta_1 = \xi_1/\xi_2$, а $\eta_2 = \xi_2$, найдем обратную замену

$$\xi_1 = \eta_1\eta_2 \quad \xi_2 = \eta_2$$

$$\rho_{\boldsymbol{eta}}(x_1, x_2) = \rho_{\boldsymbol{\xi}}(x_1x_2{,}x_2) = \frac{|x_2|}{2\pi} e^{-\frac{(x_1x_2)^2}{2} - \frac{x_2^2}{2}}$$

Замечание. $|x_2|$ — *Якобиан перехода.*

Теперь осталось найти плотность распределения первой компоненты случайного вектора, для этого проинтегрируем по второй компоненте:

$$\rho_{\eta_1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x_2|}{2\pi} e^{-\frac{(x_1x_2)^2}{2} - \frac{x_2^2}{2}} dx_2 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} x_2 e^{-\frac{x_2^2(1+x_1^2)}{2}} dx_2 =$$

$$= [\text{загоним экспоненту под дифференциал}] = \frac{1}{\pi} \int\limits_1^0 d\left(e^{-\frac{x_2^2(1+x_1^2)}{2}}\right) \frac{(-1)}{1+x_1^2} = \frac{1}{\pi(1+x_1^2)}$$

Task 2

Рассмотрим

$$E\xi^4 = 4, \quad (E\xi^2)^2 = 4 \Longrightarrow D\xi^2 = 0 \Longrightarrow \xi^2 = C$$

Найдем мат ожидание от последнего равенства: $C = 2 = \xi^2 \Longrightarrow \xi^2 = 2$.
Рассмотрим

$$D(\xi^2 - 2\xi) = E(\xi^2 - 2\xi - E(\xi^2 - 2\xi))^2 = E(\xi^4 - 4\xi^3 + 4\xi 2) = 4 - 12 + 8 = 0 \Longrightarrow D(\xi^2 - 2\xi) = 0 \Longrightarrow$$

$$\xi^2 - 2\xi = C$$

Рассмотрим матожидание от последнего равенства: $C = 0 \Longrightarrow \xi = 1 \Longrightarrow \xi^2 = 1$, но до этого было $\xi^2 = 2$, следовательно, с.в. с такими моментами не существует.