Домашняя работа

Котов Артем, МОиАД2020

29 сентября 2020 г.

Содержание

Task 1

Условие: Докажите, что любую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга единица, но нельзя представить в виде суммы менее чем r таких матриц.

Решение.

Рассмотрим набор строчек исходной матрицы A: выберем в нем некоторый базис (по условию rk$A = r$, следовательно размер этого базиса будет также r), остальные же строчки разложим по этому базису, обозначим коэффициент разложение k-ой строки по i-ой как c_k^i. Пусть ищем разложение следующего вида $A = \sum\limits_{i=1}^{r} A_i$, в качестве A_i будем выбирать следующую структуру: поместим на i-ую строку соответствующую строку исходной матрицы, которая является одной из базисной (обозначим ее за a_i), а на $k-$ позицию строку $c_k^i a_i$, то есть эти строки будут иметь вид исходной базисной строки, умноженных на соответствующий коэффициент разложения этих же исходных строк с участием данной базисной строки. Так мы получим какой-то набор одноранговых (так как в них лишь одна строка линейно-независимы) матриц, сумма которых равна исходной матрицы A.

Теперь поймем, почему меньше, чем r штук одноранговых матриц нельзя. Воспользуемся теоремой rk$(\sum A_i) \leq \sum$rkA_i, то есть ранг суммы матрицы не превосходит суммы рангов матриц, тогда, если бы справа в этом неравенстве было бы меньше, чем r слагаемых, то слева было бы уже точно не больше, поэтому меньше, чем r штук нельзя ■

Task 2

Условие: Вычислите определитель порядка $2n$

$$\begin{Vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{Vmatrix}$$

Решение.

Рассмотрим разложение по первой строке:

$$\mathcal{D}_{2n} = \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{Vmatrix} = a^2(-1)^{2n-2} \underbrace{\begin{Vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{Vmatrix}}_{2(n-1)} - b^2(-1)^{2n-2} \underbrace{\begin{Vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{Vmatrix}}_{2(n-1)}$$

Замечание. $(-1)^{2n-2}$ *вылезают от соответствующих алгебраических дополнений, то есть от матриц, где в последней строке все элементы равны 0, кроме последнего для* a *и первого для* b*, то есть от определителей вида*

$$\begin{Vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & & \dots & & 0 & a \end{Vmatrix},$$

разложенных по последней строке (аналогично для b*).*

Заметим, что размер матрицы справа при a^2 и b^2 на 2 меньше, чем размер исходной, а вид у нее такой же, то есть можно написать рекуррентную формулу $\mathcal{D}_{2n} = (a^2 - b^2)\mathcal{D}_{2n-2}$, стандартно с помощью характеристического уравнения находим решение для рекуррента в явном виде при начальном условии $\mathcal{D}_2 = a^2 - b^2$: $\mathcal{D}_{2n} = (a^2 - b^2)^n$ ■

Замечание. *Можно решить намного короче, если прибавить первые* n *столбцов к последним (то есть к* n*-ому прибавить первый, к* $n-1$*-ому прибавить* 2*-ой и т.д.), а затем вычесть из первых* n *строк последние по такой же схеме. Тогда получится нижнетреугольная матрица, в которой на диагонали стоят* n *штук* $(a-b)$ *и* n *штук* $(a+b)$*. Определитель такой матрицы* $\mathcal{D} = (a-b)^n(a+b)^n = (a^2-b^2)^n$

Task 3

Условие: Вычислите определитель матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ & & \vdots & & \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{Vmatrix}$$

Решение.

Прибавим к первой строке последнюю:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ & & \vdots & & \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ & & \vdots & & \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{Vmatrix} =$$

Разложим по первой строке:

$$= (-1)^{n-1} n \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ & & \vdots & & \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -(n-1) \end{Vmatrix} =$$

Переставим последнюю строку на самый верх и умножим ее на (-1):

$$= \underbrace{(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}(-1)}_{=1} n \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 \\ & & \vdots & & \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{Vmatrix}$$

Замети, что мы получили такую же матрицу, что и исходная, но размером на 1 меньше: составим рекуррент $\mathcal{D}_n = n\mathcal{D}_{n-1}$. Это рекуррент с непостоянным коэффицентом, попробуем решить его

$$\mathcal{D}_n - n\mathcal{D}_{n-1} = 0 \quad / \cdot \frac{1}{n!}$$

$$\frac{\mathcal{D}_n}{n!} - \frac{n\mathcal{D}_{n-1}}{n!} = \frac{\mathcal{D}_n}{n!} - \frac{\mathcal{D}_{n-1}}{(n-1)!} = 0$$

$$\text{Пусть } \mathcal{A}_n = \frac{\mathcal{D}_n}{n!} \mathcal{A}_n - \mathcal{A}_{n-1} = 0 \Longrightarrow \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n-1} \Longrightarrow \mathcal{A}_n = \text{Const}$$

$$\text{Так как } \mathcal{A}_2 = \frac{\mathcal{D}_2}{2} = \frac{2}{2} = 2 \Longrightarrow \mathcal{A}_n = 1 \Longrightarrow \frac{\mathcal{D}_n}{n!} = 1 \Longrightarrow \mathcal{D}_n = n!$$

■

Task 4

Условие: Покажите, что определитель трехдиагональной матрицы с 1 по главной диагонали и непосредственно над ней и -1 непосредственно под ней является числом Фибоначчи.

Решение.

$$\mathcal{D}_n \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix} = 1 \cdot \mathcal{D}_{n-1} - (-1) \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \end{Vmatrix} =$$

разложим по первой строке, получим исходную матрицу, но уже размера на 2 меньше. Окончательно получим $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_{n-1} + \mathcal{D}_{n-2}$, что есть по определению числа Фибоначчи.

■