Домашняя работа

Котов Артем, МОиАД2020

6 октября 2020 г.

Содержание

Замечание. *Почти везде, вроде как, я буду использовать массив d для отслеживания некоторой характеристики состояний, по нему же будет строится динамика*

Task 1

Условие: Для различных начальных v_0 рассмотрим последовательность векторов

$$v_{n+1} = Av_n, \text{ где } A = \begin{pmatrix} -10 & -12 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$$

Найдите собственные числа и собственные векторы A. При каких v_0 в получающейся последовательности с некоторого момента первая координата положительна?

Решение.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{Vmatrix} -10 - \lambda & -12 \\ 9 & 11 - \lambda \end{Vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\downarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, собственные значения матрицы A: $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -1$.

Теперь найдем собственные вектора:

- $\lambda = \lambda_1 = 2$:

$$(A - 2I)\boldsymbol{v}_1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} -12x_1 - 12x_2 = 0 \\ 9x_1 + 9x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow x_1 = -x_2 \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = \lambda_2 = -1$:

$$(A + I)\boldsymbol{v}_2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} -9x_1 - 12x_2 = 0 \\ 9x_1 + 12x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow x_1 = -\frac{4}{3}x_2 \Longrightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\lambda_1 = 2 \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \Longrightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Теперь рассмотрим действие какой-то степени оператора A на некоторый вектор $\boldsymbol{v}_0$, разложенном в базисе собственных векторов оператора A ($\alpha = \text{const}, \beta = \text{const}$):

$$A^n \boldsymbol{v}_0 = A^n(\alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2) = \alpha 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta(-1)^n \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Нас интересует только первая компонента, которая равна $x_1 = \alpha 2^n + 4\beta(-1)^n$. На нее наложено условие, что, начиная с какого-то n, $x_1 > 0$. Не умаляя общности, засунем 4 в β, тогда $x_1 = \alpha 2^n + \beta(-1)^n > 0$ или, что то же самое $\alpha 2^n > \beta(-1)^{n+1} \implies \alpha > \beta \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}$. Теперь обработаем разные случаи:

1) $\forall \alpha > 0\ \forall \beta$ это условие будет выполнено, так как $\beta \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

2) Если $\alpha \leq 0$, то никакое β не удовлетвори данному условию, так как правая часть неравенства на ряду с отрицательными значениями принимает так же и положительные значения, которые явно больше, чем какое-то отрицательное число.

3) Если мы живем в поле с характеристикой 2, то таких векторов не существует в принципе, так как матрица A в таком поле имеет следующий диагональный вид: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то есть первая компонента всегда зануляется.

■

Task 2

Условие: Матрица оператора имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ -2 & -5 & 4 \\ -4 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Является ли оператор диагонализуемым? В случае положительного ответа найдите базис, в котором матрица оператора диагональна и матрицу оператора в этом базисе.

Решение.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{Vmatrix} -3-\lambda & -4 & 4 \\ -2 & -5-\lambda & 4 \\ -4 & -8 & 7-\lambda \end{Vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2 = 0$$

Таким образом, получили $\lambda_1 = 1$ — не вырожденный корень и $\lambda_2 = -1$ — двукратно вырожденный корень.

Посмотрим собственные вектора:

- $$\lambda = 1: \quad \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ -2 & -6 & 4 \\ -4 & -8 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $$\lambda = -1: \quad \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ -2 & -4 & 4 \\ -4 & -8 & 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{ФСР} = \left\{ a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Longrightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, в базисе $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

■

Task 3

Условие: $a : V \longrightarrow V$ оператор. Найдите базис циклического подпространства, порожденного вектором v и матрицу сужения a на это подпространство в найденном базисе.

$$V = M_2(\mathbb{R}), a(x) = x + x^T, v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

Пусть $\boldsymbol{v}_1 = v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, тогда будем строить циклическую группу:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = a\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_3 = a\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{v}_2$$

То есть на третьем элементе мы уже получили линейно-зависимый набор, тогда

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle \text{— циклическое подпространство, порожденное } \boldsymbol{v}_1.$$

Теперь рассмотрим матрицу a в базисе этого подпространства:

$$\left.\begin{aligned} a\boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{v}_2 \\ a\boldsymbol{v}_2 &= 2\boldsymbol{v}_2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_2 \\ 2\boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$