Задания с контрольной

1

1) $r_k = \alpha^{\sqrt{k}+2k+1}$

Тест отношений:

$$\frac{r_{k+1}}{r_k} = \frac{\alpha^{\sqrt{k+1}+2(k+1)+1}}{\alpha^{\sqrt{k}+2k+1}} = \alpha^{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}+2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha^2$$

- $|\alpha| > 1$
- $\alpha \in \{0, 1\}$ последовательности тривиальны
- $0 < |\alpha| < 1$ линейная сходимость

2) $r_k = \alpha^{3^k}$

Тест отношений:

$$\frac{r_{k+1}}{r_k} = \frac{\alpha^{3^{k+1}}}{\alpha^{3^k}} = \alpha^{2\cdot 3^k} \quad (*)$$

Если $|\alpha| > 1$, то сходимости нет

$\alpha \in \{0, 1\}$ — тривиальная последовательность

$0 < |\alpha| < 1$: $(*) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ сверхлинейная сх-ть

Проверим на квадратичную сх-ть:

$\exists M ?: r_{k+1} < M r_k^2$

$\alpha^{3^{k+1}} < M \alpha^{2 \cdot 3^k} \Rightarrow \alpha^{3^k} < M$ при этом $0 < \alpha < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ найдется M, т.к. $\alpha^{3^k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \Rightarrow$ квадратичная сх-ть есть

3) $r_k = \dfrac{1}{k^{k!}}$

Тест отношений:

$$\frac{\frac{1}{(k+1)^{(k+1)!}}}{\frac{1}{k^{k!}}} = \frac{k^{k!}}{(k+1)^{(k+1)k!}} \sim \frac{k^{k!}}{k^{(k+1)k!}} = k^{k! - k!(k+1)} =$$

$$= k^{-kk!} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \Rightarrow \text{сверхлинейная сх-ть}$$

Проверим на квадратичную:

$\exists M ? : r_{k+1} < M r_k^2$

$$\frac{1}{(k+1)^{(k+1)!}} < M \frac{1}{k^{2(k!)}} \Rightarrow \frac{k^{2(k!)}}{(k+1)^{(k+1)k!}} < M$$

$$\frac{k^{2(k!)}}{(k+1)^{(k+1)k!}} \sim \frac{k^{2(k!)}}{k^{(k+1)k!}} = k^{2\cdot k! - k\cdot k! + k!} = k^{3k! - kk!} =$$

$$= k^{-(k-3)k!} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow \exists M \Rightarrow$$ квадратичная сх-ть имеет место.

4) $r_k = k^{p^p}$, $p \geq 0$

Тест отношений:

$$\frac{r_{k+1}}{r_k} = \frac{(k+1)^{p^p}}{k^{p^p}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$$, но это обман трудящихся

Если $p \geq 1$, то сх-ти нет.

Хм, так при $p \geq 0$ сх-ти в принципе нет, т.к.

r_k имеет вид ф-ии x^a, а при $a > 0$ эта ф-ия монотонно $\nearrow$

5) $r_k = \dfrac{1}{2^k + k!}$

Тест отношений:

$$\frac{2^k + k!}{2^{k+1} + (k+1)!} = \underbrace{\frac{2^k}{2^{k+1} + (k+1)!}}_{< \frac{2^k}{(k+1)!}} + \underbrace{\frac{k!}{2^{k+1} + (k+1)!}}_{\to 0} \xrightarrow[k \to 0]{} 0$$

$< \dfrac{2^k}{(k+1)!}$, $(k+1)! \sim k^k \gg 2^k \Rightarrow$ тоже $\to 0$

стирлинг

$\to 0$ т.к. в знам. есть $(k+1)k!$, что уже обеспечит убывание к 0 быстрее

$\exists M?: r_{k+1} < M r_k^2$

$$\frac{1}{2^{k+1} + (k+1)!} < M \frac{1}{(2^k + k!)^2}$$

$$\frac{2^{2k} + 2^{k+1} k! + (k!)^2}{2^{k+1} + (k+1)!} < M$$

числитель сильно больше знаменателя и растет $\Rightarrow$ такого M не существует. $\Rightarrow$ квад. сх-ти нет.

4

$$f(x,y) = \lambda(y-x)^2 + (y+x)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2\lambda(y-x) + 2(y+x) = -2\lambda y + 2\lambda x + 2y + 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\lambda y - 2\lambda x + 2y + 2x$$

$$Df = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\lambda y + \lambda x + y + x = 0 \\ \lambda y - \lambda x + y + x = 0 \end{cases} \Bigg| \quad \text{I} - \text{II} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda y + \lambda x - \lambda y + \lambda x = 0 \quad / : 2\lambda$$

$$x = y \Rightarrow \text{I}: \cancel{-\lambda x} + \cancel{\lambda x} + x + x = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 0,\ y = 0$ — потенциальный экстремум.

$$D^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\lambda + 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\lambda + 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 - 2\lambda$$

Т.о. $\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2+2\lambda & 2-2\lambda \\ 2-2\lambda & 2+2\lambda \end{pmatrix}$

По критерию Сильвестр для положительной определенности матрицы необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры были положительны, т.е.

$$\begin{cases} 2+2\lambda > 0 \Rightarrow 1+\lambda > 0 \\ (2+2\lambda)^2 - (2-2\lambda)^2 > 0 \Rightarrow (1+\lambda)^2 - (1-\lambda)^2 > 0 \end{cases}$$

$\ast\ (1+\lambda)^2 - (1-\lambda)^2 = 1 + 2\lambda + \lambda^2 - 1 + 2\lambda - \lambda^2 = 4\lambda$

Т.о. $\begin{cases} 1+\lambda > 0 \Rightarrow \lambda > -1 \\ 4\lambda > 0 \Rightarrow \lambda > 0 \end{cases}$

2-ое условие нужно, чтобы был экстремум, а вот 1-ое, чтобы это был именно минимум, т.е. в целом при $\lambda > 0$ у нас есть минимум в точке $(0,0)$

Если $\lambda < 0$, то седловая точка (экстремума нет)

Если $\lambda = 0$, то $f(x,y) = (x+y)^2$ и $\nabla f = 0 \Rightarrow x = -y$

т.к. $f(x,y) \geq 0\ \forall x,y$, то $\{y = -x\}$ дает нестрогий min f

Д/З ①

1) $r_k = \alpha^k$

$\frac{\alpha^{k+1}}{\alpha^k} = \alpha$ при $0<\alpha<1$ линейная сх-ть

при $\alpha \in \{0,1\}$ тривиальная посл-ть

при $\alpha > 1$ нет сх-ти.

2) $r_k = \alpha^{k^2}$

$\frac{\alpha^{(k+1)^2}}{\alpha^{k^2}} = \alpha^{2k+1}$ (*)

при $0<\alpha<1$ $(*) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ сверхлинейная сх-ть

при $\alpha \in \{0,1\}$ тривиальная посл-ть

при $\alpha > 1$ нет сходимости

Проверим на кв. сх-ть при $0<\alpha<1$:

$\alpha^{(k+1)^2} < M \alpha^{2k^2}$

$\alpha^{k^2+2k+1-2k^2} < M$

$\alpha^{-k^2+2k+1} < M$

т.к. $0<\alpha<1$, то $\frac{\alpha^{2k+1}}{\alpha^{k^2}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty \Rightarrow$ кв. сх-ти нет.

3) $r_k = \alpha^{2^k}$

$$\frac{\alpha^{2^{k+1}}}{\alpha^{2^k}} = \alpha^{2^{k+1}-2^k} = \alpha^{2^k}$$

$0 < \alpha < 1$: сверхлин. сх-ть

$\alpha \in \{0, 1\}$: трив. послед.

$\alpha > 1$: сх-ти нет

Квадратичная: $\alpha^{2^{k+1}} < M \alpha^{2^k \cdot 2}$ => можно взять $M > 1$ нас устроит => квад. сх-ть есть.

4) $r_k = \frac{1}{k}$

$\frac{k}{k+1} \xrightarrow[k \to \infty]{} 1$ => сублинейная сх-ть

5) $r_k = k^p$

$\frac{(k+1)^p}{k^p} \xrightarrow[k \to \infty]{} 1$ сублинейная, если $p<0$

при $p > 0$ сх-ти нет

если $p=0$, то посл-ть тривиальна

6) $r_k = \frac{1}{k!}$

$\frac{k!}{(k+1)!} \sim \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ сверхлинейная сх-ть

Квадратичная?:

$$\frac{1}{(k+1)!} < M \frac{1}{(k!)^2}$$

$$\underbrace{\frac{(k!)^2}{(k+1)!}}_{\to\infty} < M$$

$\to\infty$ $\Rightarrow$ нет такого M $\Rightarrow$ квадратичной нет.

7) $r_k = \frac{1}{k^k}$

$\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = \frac{k^k}{(k+1)(k+1)^k} \sim \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ сверхлин. сх-ть

Квадратичная?:

$$\frac{1}{(k+1)^{k+1}} < M \frac{1}{k^{2k}}$$

$\frac{k^{2k}}{(k+1)^{k+1}} < M \Rightarrow \frac{k^{2k}}{\underbrace{(k+1)(k+1)^k}_{\sim k^{k+1} \ll k^{2k}}} \to\infty$ $\Rightarrow$ такого M нет.

$\Downarrow$

кв. сх-ти нет.

②

1) $r_k = \frac{C}{k^\gamma}$, $\gamma > 0$, $C > 0$

$\frac{k^\gamma}{(k+1)^\gamma} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 \Rightarrow$ сублинейная сх-ть

$\frac{C}{k^\gamma} \le \varepsilon C \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \le k^\gamma \Rightarrow k \ge \varepsilon^{-\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow$

$\Rightarrow T(\varepsilon) = \lceil \varepsilon^{-\frac{1}{\gamma}} \rceil$

Как себя ведёт?:

$T(n\varepsilon) = (n\varepsilon)^{-\frac{1}{\gamma}} = n^{-\frac{1}{\gamma}} T(\varepsilon)$, т.е. $T(n\varepsilon) = n^{-\frac{1}{\gamma}} T(\varepsilon)$

увелич. в $n^{-\frac{1}{\gamma}}$ раз

Если $\gamma \nearrow$ в n раз, то $T(\varepsilon) \to (T(\varepsilon))^{\frac{1}{n}}$

1			
ε \ γ	1	2	0.5
10^{-1}	10	4	10^2
10^{-3}	10^3	32	10^6
10^{-5}	10^5	317	10^{10}
10^{-7}	10^7	3163	$10^{14}+1$
10^{-12}	10^{12}	10^6	$\sim 10^{24}$

2) $r_k = Cq^k$, $0<q<1$, $C>0$

$\frac{q^{k+1}}{q^k} = q$ т.к. $0<q<1$, то есть линейная сх-ть

$q^k \le \varepsilon \Rightarrow k \underbrace{\ln q}_{<0} \le \ln\varepsilon \Rightarrow k \ge \left\lceil \frac{\ln\varepsilon}{\ln q} \right\rceil$

$T(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln\varepsilon}{\ln q} \right\rceil$

Поведение: $\varepsilon \nearrow$ в n раз: $T(\varepsilon) = \frac{\ln n\varepsilon}{\ln q} = \frac{\ln n + \ln\varepsilon}{\ln q} =$

$= \frac{\ln n}{\ln q} + \frac{\ln\varepsilon}{\ln q} = T(\varepsilon) + \frac{\ln n}{\ln q}$

Теперь $q \nearrow$ в n раз:

$T(\varepsilon) = \frac{\ln\varepsilon}{\ln n + \ln q}$

2			
ε \ q	0.9	0.999	0.99999
10^{-1}	22	2302	230258
10^{-3}	66	6905	690733
10^{-5}	110	11508	1151287
10^{-7}	132	13809	1381545
10^{-12}	263	27618	2763089

3) $r_k = C(C^{-1}R)^{2^k}$, $R>0$, $0<C^{-1}R<1$, $C>0$

$$\frac{(C^{-1}R)^{2^{k+1}}}{(C^{-1}R)^{2^k}} = (\underbrace{C^{-1}R}_{0\ldots 1})^{2^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$ сверхлинейная сходимость.

$$C\cancel{(C^{-1}R)^{2^{k+1}}} < M\, C^2 \cancel{(C^{-1}R)^{2^{k+1}}}$$

$$C < MC^2$$

$$1 < MC \Rightarrow M > \frac{1}{C}$$ т.к. $C>0$, то такое M найдется $\Rightarrow$ квадр. сх-ть есть.

$$(C^{-1}R)^{2^k} \le \varepsilon \Rightarrow 2^k \underbrace{\ln(C^{-1}R)}_{<0} \le \ln\varepsilon$$

$$2^k \ge \frac{\ln\varepsilon}{\ln C^{-1}R} \Rightarrow k \ge \log\left(\frac{\ln\varepsilon}{\ln C^{-1}R}\right) = \log\left(\frac{\ln\varepsilon}{\ln R - \ln C}\right)$$

$$T(\varepsilon) = \left\lceil \log\left(\frac{\ln\varepsilon}{\ln R - \ln C}\right)\right\rceil$$

• $\varepsilon \nearrow$ в n раз:

$$T(n\varepsilon) = \log\left(\frac{\ln n + \ln\varepsilon}{\ln R - \ln C}\right)$$

• R ↑ в n раз:

$$T(\varepsilon) = \log\left(\frac{\ln \varepsilon}{\ln n + \ln R - \ln C}\right)$$

3			
ε \ R	$0.9\,C$	$0.999\,C$	$0.99999\,C$
10^{-1}	5	12	18
10^{-3}	7	13	20
10^{-5}	7	14	21
10^{-7}	8	14	21
10^{-12}	9	15	22

3

1) $\det\left(AXB(C^{-T}X^TC)^{-T}\right) = \quad A, B, C, X \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$|\cdot| := \det(\cdot)$

$\det C \neq 0$

$\det(C^{-T}X^TC) \neq 0$

$$= \frac{|AXB|}{|C^{-T}X^TC|} = \frac{|A|\cdot\cancel{|X|}\cdot|B|\cdot\cancel{\det}}{\cancel{|X|}\cdot\cancel{\det}} = |A|\cdot|B|$$

2) $\|uv^T - A\|_F^2 - \|A\|_F^2 = \quad u \in \mathbb{R}^m$

$v \in \mathbb{R}^n$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Tip! $\|A\|_F^2 = \mathrm{Tr}\, AA^T$

$$= \mathrm{Tr}\left((uv^T - A)(uv^T - A)^T\right) - \mathrm{Tr}(AA^T) =$$

$$= \mathrm{Tr}\left((uv^T - A)(uv^T - A)^T - AA^T\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\left((uv^T - A)(vu^T - A^T) - AA^T\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(uv^T(uv^T)^T + \cancel{AA^T} - uv^TA^T - Avu^T - \cancel{AA^T}\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(uv^T(uv^T)^T - \underbrace{uv^TA^T}_{} - Avu^T\right) =$$

$$= \|uv^T\|_F^2 - 2\,\mathrm{Tr}(Avu^T) \qquad \xrightarrow{T} \Rightarrow 2\,\mathrm{Tr}(Avu^T)$$

3) $\mathrm{Tr}\left((2I_n + aa^T)^{-1}(uv^T + vu^T)\right) = \quad a, u, v \in \mathbb{R}^n$

Шерман – Моррисон:

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1 + v^TA^{-1}u}$$

$$(2I_n + aa^T)^{-1} = \frac{1}{2}I_n - \frac{\frac{1}{4} I_n aa^T I_n}{1 + a^T I_n a \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}I_n - \frac{aa^T}{4 + 2a^Ta}$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\left(\frac{1}{2}I_n - \frac{1}{2}\frac{aa^T}{2 + a^Ta}\right)(uv^T + vu^T)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\left(I_n - \frac{aa^T}{2 + a^Ta}\right)(uv^T + vu^T)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[uv^T - \frac{aa^Tuv^T}{2 + a^Ta} + vu^T - \frac{aa^Tvu^T}{2 + a^Ta}\right] =$$

$$= \mathrm{Tr}(uv^T) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2 + a^Ta}\left[\mathrm{Tr}(aa^Tuv^T) + \mathrm{Tr}(aa^Tvu^T)\right] =$$

$$= \mathrm{Tr}(uv^T) - \frac{1}{2 + a^Ta}\mathrm{Tr}(aa^Tuv^T)$$

4

1) $f(x) = \frac{1}{2}\|xx^T - A\|_F^2 \ominus \quad A > 0, \; x \in \mathbb{R}^n$

$$\ominus \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left((xx^T - A)^T (xx^T - A)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left((xx^T - A)(xx^T - A)\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left((xx^T - A)^2\right)$$

$$df = \frac{1}{2}\, d\,\mathrm{Tr}\left((xx^T - A)^2\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(d(xx^T - A)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(2(xx^T - A)\, d(xx^T - A)\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\left((xx^T - A)\, d(xx^T)\right) = \mathrm{Tr}\left((xx^T - A)(dx \cdot x^T + x(dx)^T)\right)$$

$$= \mathrm{Tr}\left((xx^T - A)\, dx \cdot x^T\right) + \mathrm{Tr}\left((xx^T - A)\, x\, dx^T\right) =$$

$$= 2\mathrm{Tr}\left((xx^T - A)\, dx \cdot x^T\right) = 2\mathrm{Tr}\left(dx \cdot x^T (xx^T - A)\right) =$$

$$= 2\mathrm{Tr}\left(dx \cdot ((xx^T - A)x)^T\right)$$

$$df = 2((xx^T - A)x)^T dx$$

$$\nabla f = 2(xx^T - A)x$$

Гессиан

$$d^2f = d\left(2(xx^T - A)x\right)^T dx_1 =$$

$$= 2\left(d\left((xx^T - A)x\right)\right)^T dx_1 =$$

$$= 2\left(d\left(xx^Tx - Ax\right)\right)^T dx_1 =$$

$$= 2\left(d(xx^Tx) - Adx_2\right)^T dx_1 =$$

$$= 2\left(dx_2 \cdot x^Tx + xd(x^Tx) - Adx_2\right)^T dx_1 =$$

$$= 2(dx_2 \cdot x^Tx + x\,dx_2^Tx + xx^Tdx_2 - Adx_2)^T dx_1 =$$

$$= (2dx_2 \cdot \underbrace{x^Tx}_{\text{число}} + 2x\,dx_2^Tx + 2x\,x^Tdx_2 - 2Adx_2)^T dx_1 =$$

$$\langle dx_2, x\rangle = \langle x, dx_2\rangle$$

$$= (2dx_2\, x^Tx + 4xx^Tdx_2 - 2Adx_2)^T dx_1 =$$

$$= \left(\underbrace{(2x^Tx + 4xx^T - 2A)}_{\nabla^2 f} dx_2\right)^T dx_1$$

Т.о. $\nabla^2 f = 2x^TxI_n + 4xx^T - 2A$

2) $f(x) = \frac{(Ax, x)}{|x|^2} = \frac{x^T A x}{|x|^2}$

$$df = \frac{d(x^T A x)|x|^2 - x^T A x \; d|x|^2}{|x|^4} =$$

$$= \frac{2(Ax)^T |x|^2 dx - x^T A x \, d(x^T x)}{|x|^4} =$$

$$= \frac{2(Ax)^T |x|^2 dx - x^T A x \, 2x^T dx}{|x|^4} =$$

$$= \frac{2}{|x|^4}\left(Ax|x|^2 - x(Ax)^T x\right)^T dx$$

$$\nabla f = \frac{2}{|x|^4}\left(Ax|x|^2 - (x^T A x x^T)^T\right) =$$

$$= \frac{2}{|x|^4}\left(Ax|x|^2 - x(Ax)^T x\right) =$$

$$= \frac{2Ax}{|x|^2} - \frac{2x(Ax)^T x}{|x|^4} = \frac{2}{|x|^2}\left(A - \frac{x(Ax)^T}{|x|^2}\right)x$$

$$d^2 f = d\left(\frac{2}{|x|^4}\left(Ax|x|^2 - x(Ax)^T x\right)^T dx_1\right) =$$

$$= 2\left(d\left(\frac{Ax}{|x|^2} - \frac{x(Ax)^T x}{|x|^4}\right)\right)^T dx_1 =$$

$$= 2\left(d\frac{Ax}{|x|^2} - d\,\frac{x(Ax)^T x}{|x|^4}\right)^T dx_1 =$$

$$= 2\left(\frac{Adx_2|x|^2 - Axd|x|^2}{|x|^4} - \frac{d\left(x(Ax)^T x\right)|x|^4 - x(Ax)^T x\, d|x|^4}{|x|^8}\right)^T dx_1 =$$

$$= 2\left(\frac{|x|^2 Adx_2 - Ax\,2x^T dx_2}{|x|^4} - \frac{dx_2\,(Ax)^T x + x \cdot 2(Ax)^T dx_2}{|x|^4}\right.$$

$$\left. + \frac{x(Ax)^T x \cdot 4x^T dx_2}{|x|^6}\right)^T dx_1 =$$

$$d|x|^4 = d\left((|x|^2)^2\right) = 2|x|^2 d|x|^2 = 4|x|^2 x^T dx$$

$$d|x|^2 = dx^T x = 2x^T dx$$

$$= \frac{2}{|x|^4}\Big(|x|^2 A - 2Ax\,x^T - (Ax)^T x\, I_n - 2x(Ax)^T +$$

$$+ \frac{4}{|x|^2}(Ax)^T x\; xx^T\Big)^T dx_2^T dx_1$$

$$\nabla^2 f = \frac{2}{|x|^4}\Big(|x|^2 A - 2Axx^T - (Ax)^T x\, I_n - 2x(Ax)^T$$
$$+ \frac{4}{|x|^2}(Ax)^T x\; xx^T\Big)$$

3) $f(x) = (x^T x)^{x^T x} = e^{x^T x \ln(x^T x)}$

$$df = e^{x^T x \ln(x^T x)}\, d\big(x^T x \ln(x^T x)\big) =$$

$$= e^{x^T x \ln(x^T x)}\Big(d(x^T x)\ln(x^T x) + x^T x\, d\ln(x^T x)\Big) =$$

$$= e^{x^T x \ln(x^T x)}\Big(2x^T dx \ln x^T x + \cancel{x^T x}\frac{2x^T dx}{\cancel{x^T x}}\Big) =$$

$$= 2e^{x^T x \ln(x^T x)}\big(x^T \cdot \ln x^T x + x^T\big)dx =$$

$$= 2e^{x^Tx \ln(x^Tx)}\left(\ln x^Tx + 1\right)x^T dx = df$$

$$\nabla f = 2e^{x^Tx \ln(x^Tx)}\left(\ln x^Tx + 1\right)x =$$

$$= 2(x^Tx)^{x^Tx}\left(\ln x^Tx + 1\right)x$$

$$d^2 f = d\, 2e^{x^Tx \ln(x^Tx)}\left(\ln x^Tx + 1\right)x^T dx_1 =$$

$$= 2\Big[de^{x^Tx \ln x^Tx} \cdot \left(\ln x^Tx + 1\right)x^T +$$

$$+ e^{x^Tx \ln x^Tx}\, d\ln x^Tx \;\, x^T + e^{x^Tx \ln x^Tx}\left(\ln x^Tx + 1\right)dx_2^T\Big]dx_1$$

$$= 2\Big[2e^{x^Tx \ln x^Tx}\left(\ln x^Tx + 1\right)^2 x^T dx_2\, x^T +$$

$$+ e^{x^Tx \ln x^Tx}\frac{2x^T dx_2\, x^T}{x^Tx} + e^{x^Tx \ln x^Tx}\left(\ln x^Tx + 1\right)dx_2^T\Big]dx_1 =$$

$$= 2e^{x^Tx \ln x^Tx}\Big[2\left(\ln x^Tx + 1\right)^2 x^T dx_2\, x^T + \frac{2}{x^Tx}\, x^T dx_2\, x^T +$$

$$+ \left(\ln x^Tx + 1\right)dx_2^T\Big]dx_1 =$$

$$= dx_2^T \cdot 2(x^Tx)^{x^Tx}\left[2(\ln x^Tx+1)^2 xx^T + \frac{2xx^T}{x^Tx} + \right.$$

$$\left. + (\ln(x^Tx)+1)\, I_n\right] \cdot dx_1$$

$$D^2 f = 2(x^Tx)^{x^Tx}\left[2\left((\ln x^Tx+1)^2 + \frac{1}{x^Tx}\right)xx^T + (\ln x^Tx+1) I_n\right]$$

5

1) $f(x) = \mathrm{Tr}(x^{-1})$

$$df(x) = \mathrm{Tr}(dx^{-1}) = \mathrm{Tr}(-x^{-1}dx\,x^{-1}) =$$

$$= \mathrm{Tr}(-x^{-2}dx) = (-x^{-2}, dx)$$

$$\nabla f = -x^{-2}$$

$$d^2f = d(df(x)) = \mathrm{Tr}(d(-x^{-2})dx_1) =$$

$$= \mathrm{Tr}(-d(x^{-1}x^{-1})dx_1) =$$

$$= \mathrm{Tr}(-(dx^{-1}\cdot x^{-1} + x^{-1}dx^{-1})dx_1) =$$

$$= \mathrm{Tr}(-(-x^{-1}dx_2x^{-1}x^{-1} - x^{-1}x^{-1}dx_2x^{-1})dx_1)$$

$$= \mathrm{Tr}((\underbrace{x^{-1}dx_2x^{-2} + x^{-2}dx_2x^{-1}}_{\{x^{-1}dx_2,\, x^{-2}\}})dx_1) =$$

$$X^{-1} dX_2 X^{-1} X^{-1} + X^{-1} X^{-1} dX_2 X^{-1} =$$

$$= X^{-1} \left(dX_2 X^{-1} \right) X^{-1} + X^{-1} \left(X^{-1} dX_2 \right) X^{-1} =$$

$$= X^{-1} \left(dX_2 X^{-1} + X^{-1} dX_2 \right) X^{-1}$$

$$\mathrm{Tr}\left(X^{-1} \left(dX_2 X^{-1} + X^{-1} dX_2 \right) X^{-1} dX_1 \right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\left(dX_2 X^{-1} + X^{-1} dX_2 \right) X^{-1} dX_1 X^{-1} \right)$$

$$D^2 f(X)[H, H] =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\left(H X^{-1} + X^{-1} H \right) X^{-1} H X^{-1} \right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(H X^{-1} X^{-1} H X^{-1} + X^{-1} H X^{-1} H X^{-1} \right) =$$

$$= 2\,\mathrm{Tr}\left(\underbrace{X^{-1}}_{\succeq 0} \underbrace{H X^{-1} H}_{\succeq 0} \underbrace{X^{-1}}_{\succeq 0} \right) \geq 0$$

по усл

по опр монотон н-то

по усл

$$2)\ f(X) = (X^{-1}v, v)$$

$$df(x) = (-X^{-1}dX X^{-1}v, v) =$$

$$\mathrm{Tr}(-v^T X^{-1} dx X^{-1} v) = \mathrm{Tr}(-X^{-1} v v^T X^{-1} dX)$$

$$d^2 f(x) = \mathrm{Tr}(-d(X^{-1} v v^T X^{-1}) dX_1) =$$

$$= \mathrm{Tr}(-(X^{-1} dX_2 X^{-1} v v^T X^{-1} - X^{-1} v v^T X^{-1} dX_2 X^{-1}) dX_1) =$$

$$D^2 f(x)[H, H] = 2\mathrm{Tr}(X^{-1} H X^{-1} v v^T X^{-1} H) =$$

$$= 2\mathrm{Tr}(v^T \underbrace{\underbrace{X^{-1}}_{>0} \underbrace{H X^{-1} H}_{>0} \underbrace{X^{-1}}_{>0}}_{\text{см. пред. пункт}} v)$$

3) $f = (\det X)^{1/n}$

$$df = \frac{1}{n}(\det X)^{\frac{1}{n}-1} d(\det X) = \frac{1}{n}(\det X)^{\frac{1}{n}-1} \det X \langle X^{-T}, dX\rangle$$

$$= \frac{1}{n}(\det X)^{\frac{1}{n}} Tr(X^{-1}dX)$$

$$d^2 f = d\left(\frac{1}{n}(\det X)^{1/n} Tr(X^{-1}dX)\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left[d(\det X)^{1/n} Tr(X^{-1}dX) + (\det X)^{\frac{1}{n}} \cdot d(Tr(X^{-1}dX))\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\det X^{\frac{1}{n}} Tr(X^{-1}dX_2) Tr(X^{-1}dX_1) - \right.$$

$$\left. - (\det X)^{\frac{1}{n}} Tr(X^{-1}dX_2 X^{-1}dX_1)\right]$$

$$D^2 f(X)[H,H] = \frac{1}{n}(\det X)^{1/n}\left(\frac{1}{n}(Tr(X^{-1}H))^2 - Tr(X^{-1}HX^{-1}H)\right)$$

$\frac{1}{n}(Tr Y)^2 \leq Tr Y^2$, где $Y = X^{-1}H$

$\uparrow$

от этого зависит знак $D^2 f(X)[H,H]$.

6

1) $f(x,y) = 2x^2 + y^2(x^2-2)$

$$Df = \begin{pmatrix} 4x+2y^2x \\ 2x^2y-4y \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} /\cdot y \\ /\cdot x \end{matrix} \Bigg\} \quad \begin{matrix} x \neq 0 \\ y \neq 0. \end{matrix}$$

$4xy + 2y^3x$

$2x^3y - 4xy$

$$y^3x + x^3y = 0$$

$$xy(y^2+x^2) = 0 \Rightarrow x = iy \in \mathbb{C}$$

$$xy = 0$$

$\Rightarrow$ eg. p-e $x = y = 0$

$$D^2f = \begin{pmatrix} 4+2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2-4 \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 < 0}_{\text{разного знак}} \Rightarrow$ седло.

ну или через Сильвестра:

$\Delta_1 > 0$
$\Delta_2 < 0$ $\Rightarrow$ седло.

2) $f(x,y) = (1-x)^2 + \lambda(y-x^2)^2$

$$Df = \begin{pmatrix} -2+2x - 4\lambda yx + \lambda 4x^3 \\ 2\lambda y - 2\lambda x^2 \end{pmatrix}$$

$\lambda \neq 0$: $(1,1)$! т.к. во 2-м ур-е пересечение двух монот $\uparrow$ ф-ий, а оно !.

$$D^2 f = \begin{pmatrix} 2+12\lambda x^2 - 4\lambda y & -4\lambda x \\ -4\lambda x & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$D^2 f\Big|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2+8\lambda & -4\lambda \\ -4\lambda & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$2+8\lambda \geqq 0$

$4\lambda + 16\lambda^2 - 16\lambda^2 = 4\lambda \lesseqgtr 0$

1) $\lambda > 0 \Rightarrow \min$ т.к. $2+8\lambda > 0$, $4\lambda > 0$

2) $\lambda < 0$ $4\lambda < 0 \Rightarrow$ седло

$\max \nexists$

$\lambda = 0$ $f(x,y) = (1-x)^2 \geqslant 0$.

$x = 1$ $\forall y$ — min, т.е.

семейство точек $(1, y)$ образует

мн-во нестрогих min.

3) $f(x) = \dfrac{x^T A x}{|x|^2}$

$$\nabla f = \frac{2}{|x|^4}\left(Ax|x|^2 - x(Ax)^T x\right)$$

$x = \vec{0}$ не экстремум $\not\to 0$

$$Ax|x|^2 - x(Ax)^T x = 0.$$

$\{v_i\}$ — с. в. A

$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$

$$(Ax)^T x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i^T \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \alpha_j \underbrace{v_i^T v_j}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i$$

$$|x|^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i - x \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \lambda_j = 0.$$

$$|x|^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \lambda_j\right) = 0.$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(|x|^2 \alpha_i \lambda_i - \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \lambda_j\right)\right) v_i = 0. \;/ \cdot (v_k, \cdot)$$

$$|x|^2 \cancel{\alpha_k} \lambda_k - \cancel{\alpha_k}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \lambda_j\right) = 0. \qquad k = 1, \dots, n$$

$$|x|^2 \lambda_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \lambda_j$$

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \underbrace{v_i^T v_j}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \lambda_j \qquad k = 1, \dots, n$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \alpha_j^2 \lambda_j = 0 \Leftarrow k = 1, \dots, n$$

коэф. разл. x по v_j

с.ч.

$$\lambda_j > 0 \Rightarrow \{\alpha_j\} = 0.$$

$$\alpha_k \neq 0.$$

$$\boxed{x = \alpha_k v_k}$$ x — с.в. A с коэф α_k.

какой-то коэф

$$f(x) = \frac{(Ax, x)}{|x|^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \lambda_k}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\alpha_k^2}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2} =$$

$$x = \underbrace{\sum \alpha_k v_k}_{\forall x}$$

$$x_i = \alpha_i$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_k \leftarrow \forall x$$

выпукл. оболочка

$$\sum p_k = 1 \Rightarrow p_k \le 1$$
$$p_k \ge 0$$

$$\forall x \quad f(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_k$$

с. ч. A.

$$f(x) = C \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k^2$$

$$x = \alpha v_{max} \Rightarrow f(x) = \lambda_{max}$$

Но как это увидеть по-хорошему?

$$D^2 f = \frac{2}{|x|^4}\Big(|x|^2 A - 2Axx^T - (Ax)^T x\, I_n - 2x(Ax)^T$$
$$+ \frac{4}{|x|^2}(Ax)^T x\, xx^T\Big)$$

$$x = \alpha v$$

$$D^2 f = \frac{2}{\alpha^4}\Big(\alpha^2 A - 2A\alpha v \alpha v^T - (A\alpha v)^T \alpha v\, I_n -$$
$$- 2\alpha v(A\alpha v)^T + \frac{4}{\cancel{\alpha^2}}(A\cancel{\alpha} v)^T \cancel{\alpha} v\, \alpha v\, \alpha v^T\Big) =$$

$$= \frac{2}{\alpha^4}\Big(\alpha^2 A - 2\alpha^2 A v v^T - \alpha^2 (Av)^T v\, I_n -$$
$$- 2\alpha^2 v(Av)^T + 4\alpha^2 (Av)^T v\, vv^T\Big) =$$

$$= \frac{2}{\alpha^2}\Big(A - 2\lambda vv^T - \lambda I_n - 2\lambda vv^T +$$
$$+ 4\lambda vv^T\Big) =$$

$$= \frac{2}{\alpha^2}\left(A - \lambda I_n\right) = \nabla^2 f(\alpha v)$$

v — с.в. A

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_i > 0$$

Если $\lambda \to \max$ $\quad (A - \lambda I_n) = \begin{pmatrix} \tilde\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde\lambda_n \end{pmatrix}$

$\tilde\lambda_i < 0 \Rightarrow x = \alpha v_{max}$

(.) max

Если $\lambda \to \min$ $\quad (A - \lambda I_n) = \begin{pmatrix} \ddots \end{pmatrix} > 0$

$x = \alpha v_{min}$ — (.) min

Для $\lambda \notin \{\lambda_{min}, \lambda_{max}\}$

какие-то $\tilde\lambda_i > 0$, а какие-то $\tilde\lambda_i < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ седло.