Домашняя работа к 09.09.20

Котов Артем, МОиАД2020

8 сентября 2020 г.

Task: про двух игроков

Старый (новый) способ

Пусть A, B — игроки; H, T — стороны монеты; $H_A(T_A)$ — будет означать, что игрок выкинул решку (герб). Игра закончится, если будет два T подряд.

Рассмотрим вероятность выигрыша первого игрока (A): по формуле полной вероятности $P(A) = \frac{1}{2}P(A|H_A) + \frac{1}{2}P(A|T_A)$. Если игрок выкинул H в свой первый ход, то игра повторяется, как будто первый игрок B, то есть $P(A|H_A) = P(B) = 1 - P(A)$.

Разберемся с $P(A|T_A)$: в этом случае рассмотрим эту "ветвь" развития игры аналогично самой игре, то есть по формуле полной вероятности $P(A|T_A) = \frac{1}{2}P(A|T_AH_B) + \frac{1}{2}P(A|T_AT_B)$. Второй член этой суммы равен нулю, так как, очевидно, что игрок A не может выиграть в случае, если игрок B выкинул второй T подряд, следовательно, $P(A|T_AT_B) = 0 \Longrightarrow P(A|T_A) = \frac{1}{2}P(A|T_AH_B)$. Теперь рассмотрим, что происходит с игрой, в случае, когда игрок B не выкинул в свой ход T (то есть, как раз оставшийся вклад в $P(A|T_A)$). В таком случае $P(A|T_AH_B) = \frac{1}{2}P(A)$ (прим. игра "начинается" заново). В итоге находим, что $P(A) = \frac{1}{2}(1 - P(A)) + \frac{1}{4}P(A)$. Отсюда вычисляем $P(A) = \frac{2}{5}$. Из симметричности находим $P(B) = 1 - P(A) = \frac{3}{5}$

Числа Фибоначчи

Рассмотрим последовательности типа $(\Omega \ldots \Omega)011$ (игра заканчивает при двух 1 подряд). Сначала пересчитаем, сколько существует различных комбинаций 0 и 1 в $(\Omega \ldots \Omega)$, не содержащих двух 1 подряд. Это классическая задача о расстановке двух несоседствующих перегородок (1 — перегородка). У нас есть k нулей, и i единиц. При условии, что единицы не могут соседствовать, что число таких расстановок ($+1$ от того, что мы можем перегородку поставить сбоку):

$$\binom{k-i+1}{i}$$

Всего же таких способов (надо просуммировать по i, с очевидным ограничением, что единиц не должно быть больше половины, разве что для нечетной длины можно еще одну единицу вставить, иначе по Дирихле все сломается):

$$\sum_{i=0}^{[k/2]+1} \binom{k-i+1}{i} = F_{k+1-1} = F_k \text{ — число Фибоначчи.}$$

Ясно так же, что вероятность получить какую-то конкретную последовательность длины k из 0 и 1 будет равна $\left(\frac{1}{2}\right)^k$. Таким образом, вероятность, что игра длины k будет иметь какой-то конкретный Ω-хвост, будет $\left(\frac{1}{2}\right)^k F_k$.

Теперь рассмотрим вероятность выиграть для первого игрока, $+1$ говорит нам, на самом деле, что первый игрок может выиграть в игре с длиной не меньше 3 (прим. вообще говоря, хвост 011 дает множитель $(1/2)^3$, но это как раз вписывается в эту схему, если учесть, что первый игрок может выиграть только на нечетном ходе игры, а длина игры не меньше 3):

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} F_{2k} = \text{[ф-ла Бине через золотое сечение]} =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \frac{\varphi^{2k} - (-\varphi)^{2k}}{2\varphi - 1} = \frac{1}{2(2\varphi-1)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\varphi}{2}\right)^{2k} - \left(\frac{-1}{2\varphi}\right)^{2k}\right) =$$

$$\frac{1}{2(\varphi-1)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi^2}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{4\varphi}\right)^k = \text{[разбили на два ряда геом. последовательности]} =$$

$$\frac{2\varphi^4 - 2}{(2\varphi-1)(4-\varphi^2)(4\varphi^2-1)} = \text{[упрощаем дробь]} = \frac{2}{5}$$

Окончательно, из симметричности $P(B) = 1 - P(A) = \frac{3}{5}$