Домашняя работа

Котов Артем, МОиАД2020

13 октября 2020 г.

Task

Условие: Про выборки, вариационный ряд и и плотности для него.

Решение.

a)

$$P(X_{(1)} < X) = 1 - P(X_{(1)} > X) = 1 - P(X_{(1)} > X, \dots, X_{(1)} > X) = [\text{независимость}] =$$
$$1 - P(X_1 > X) \dots P(X_n > X) = 1 - (1 - P(X_1 < X)) \dots (1 - P(X_n < X)) =$$
$$1 - (1 - F(X))^n \Longrightarrow f_{X_{(1)}} = \frac{\partial(1 - (1 - F(X))^n)}{\partial X} = n(1 - F(X))^{n-1} f(X)$$

b)

$$P(X_{(n)} < X) = P(X_{(1)} < X, \dots, X_{(n)} < X) = P(X_1 < X) \dots P(X_n < X) = F^n(X) \Longrightarrow$$
$$f_{X_{(n)}} = nF^{n-1}(X) f(X).$$

c)

$$P(X_{(k)} < X) = [\text{хотя бы } k < \text{X}] = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} F^i(X)(1 - F(X))^{n-i} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{производная}}$$
$$\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} f(x) \left(iF^{i-1}(X)(1 - F(X))^{n-i} - (n-i)F^i(X)(1 - F(X))^{n-i-1} \right)$$

Заметим, что $i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1}$ и $(n-i)\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i}$, следовательно, у нас сократятся все, кроме первого члена этой суммы:

$$f_{X_{(k)}}(X) = k\binom{n}{k} f(X) F^{k-1}(1 - F(X))^{n-k}$$

■