Задание 1 Пусть $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ — одна из следующих последовательностей:

1. $r_k := \alpha^k$
2. $r_k := \alpha^{k^2}$
3. $r_k := \alpha^{2^k}$
4. $r_k := 1/k$
5. $r_k := k^p$
6. $r_k := 1/k!$
7. $r_k := 1/k^k$

Для каждого из указанных вариантов классифицируйте $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ по скорости сходимости (линейная, сублинейная, сверхлинейная). В случае сверхлинейной сходимости дополнительно выясните, имеет ли место квадратичная сходимость. Если у последовательности есть параметры (α, p), то нужно провести анализ в зависимости от значения данного параметра (считаем, что параметр любое вещественное число).

Задание 2

Пусть $C > 0$, и пусть $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ — одна из следующих трех последовательностей:

1. $r_k := C/k^{\gamma}$, где $\gamma > 0$.
2. $r_k := Cq^k$, где $0 < q < 1$.
3. $r_k := C(C^{-1}R)^{2^k}$, где $R > 0$ и $0 < C^{-1}R < 1$.

Пусть $0 < \varepsilon < 1$, и пусть $T(\varepsilon) := \min\{k \geq 1 : r_k \leq \varepsilon C\}$ — первый момент времени достижения относительной точности ε.

1. Классифицируйте по скорости сходимости
2. Для каждого из трех вариантов последовательности выпишите явную формулу для T.
3. Проанализируйте, насколько сильно T зависит от точности ε и параметра последовательности (γ, q, R соответственно).
4. Заполните следующие таблицы, вписав в пустые ячейки соответствующие числовые значения T:

•

1			
ε \ γ	1	2	0.5
10^{-1}			
10^{-3}			
10^{-5}			
10^{-7}			
10^{-12}			

2			
q / ε	0.9	0.999	0.99999
10^{-1}			
10^{-3}			
10^{-5}			
10^{-7}			
10^{-12}			

3			
R / ε	$0.9\,C$	$0.999\,C$	$0.99999\,C$
10^{-1}			
10^{-3}			
10^{-5}			
10^{-7}			
10^{-12}			

Для всех производных (в том числе возникающих в задании 6) написать тест, проверяющий корректность вычислений с помощью разностного дифференцирования. Задание считается выполненым только при наличии как теста, так и вывода аналитической формулы

Задание 3

Упростите каждое из следующих выражений:

1. $\det(AXB(C^{-T}X^TC)^{-T})$, где $A, B, C, X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(C) \neq 0$, $\det(C^{-T}X^TC) \neq 0$.
2. $\|uv^T - A\|_F^2 - \|A\|_F^2$, где $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
3. $\mathrm{Tr}((2I_n + aa^T)^{-1}(uv^T + vu^T))$, где $a, u, v \in \mathbb{R}^n$.

Задание 4

Пусть f — одна из следующих функций:

1. $f(x) := \frac{1}{2}\|xx^T - A\|_F^2$, где A p.d., $x \in \mathbb{R}^n$
2. $f(x) := \frac{\langle Ax, x\rangle}{|x|^2}$, где A p.d., $x \in \mathbb{R}^n$
3. $f(x) := \langle x, x\rangle^{\langle x, x\rangle}$, $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$

Для каждого из указанных вариантов вычислите вектор градиент ∇f и матрицу гессиан $\nabla^2 f$

Задание 5

Пусть $f(X)$, X p.d. одна из следующих функций

1. $f(X) := \mathrm{Tr}(X^{-1})$.

2. $f(X) := \langle X^{-1}v, v\rangle$, где $v \in \mathbb{R}^n$.

3. $f(X) := (\det(X))^{1/n}$.

Для каждого из указанных вариантов покажите, что вторая производная $D^2 f(X)[H, H]$ имеет постоянный знак

Задание 6

Пусть f — одна из следующих функций:

1. функция $f(x, y) := 2x^2 + y^2(x^2 - 2)$.
2. функция $f(x, y) := (1 - x)^2 + \lambda(y - x^2)^2$.
3. функция $f(x) := \dfrac{\langle Ax, x\rangle}{|x|^2}$, где A p.d..

Для каждого из указанных вариантов найдите все точки стационарности f и определите их тип (локальный минимум/максимум, седловая точка).

Задание 7 Для нескольких функций на ваш выбор исследовать зависимость ошибки численного дифференцирования от выбираемого шага h и построить график, на котором по оси y ошибка аппроксимации, по оси x выбранный ε. На оси x отметить точки $\sqrt{\varepsilon_m}, \varepsilon_m$, где ε_m машинная точность для используемого типа Эксперимент провести для одинарной и двойной точности (float32, float64)