Домашняя работа

Котов Артем, МОиАД2020

22 сентября 2020 г.

Содержание

Task 1

Случай $p \neq 5, 7$

В таком случае, у матрицы, составленной из исходных векторов в строчках, существует обратная матрица:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7\cdot 5} & \frac{11}{7\cdot 5} & \frac{1}{7} \\ \frac{9}{7\cdot 5} & \frac{3}{7\cdot 5} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

следовательно, существует единственное такое отображение a.

Случай $p = 5$

В таком случае, можно заметить, что

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

а при этом

$$a\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ но } a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

следовательно, для $p = 5$ таких операторов a не существует.

Случай $p = 7$

Рассмотрим вектора

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

при этом они корректно переводятся оператором a. То есть, мы знаем, как оператор a переводит два линейно-независимых вектора в два линейно-независимых вектора (перевели одно двумерное пространство в двумерное пространство). У нас осталась свобода в том, куда переводится оставшееся одномерное пространство. Его можно перевести во что угодно, в любой вектор из исходного множества, мощность которого $p^n = 7^3 = 343$, то есть существует 343 таких операторов a.

Task 2

Будем пользоваться формулой преобразования матрицы оператора при переходе от одного базиса к другому:

$$A = DA'C^{-1}$$

После того, как мы убедились, что исходные и конечные вектора образуют линейно-независимые системы векторов в соответствующих пространствах, найдем матрицу перехода от этих “базисов” к стандартным:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C \Longrightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Аналогично поступим с базисом в результирующем пространстве, разве что добавим в кучу четвертый вектор из стандартных (ранг матрицы слева в следующем уравнении как раз соответствует этому, ее ранг равен 4):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = ID \Longrightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Итого, получаем:

$$A = DA'C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 8 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Проверим:

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 8 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 8 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 8 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, искомое матричное представление в стандартном базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 8 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Task 3

$$U_1 = \{a | [a, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}] = 0\} \quad U_2 = \{b | [b, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}] = 0\}$$

Для начала найдем базисы для U_1 и U_2:

- U_1:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{12} & 2a_{11} + a_{12} \\ a_{21} + 2a_{22} & 2a_{21} + a_{22} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{21} & a_{12} + 2a_{22} \\ 2a_{11} + a_{21} & 2a_{12} + a_{22} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим компоненту $(1{,}1)$: $a_{11} + 2a_{12} = a_{11} + 2a_{21} \Longrightarrow a_{12} = a_{21} = y$

и компоненту $(2{,}1)$: $a_{21} + 2a_{22} = 2a_{11} + a_{21} \Longrightarrow a_{11} = a_{22} = x$, что дает

$$a = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Таким образом

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Замечание. *Вообще говоря, не удивительно, что мы имеем единичную матрицу в качестве одно из базисных векторов, так как единичная матрица коммутирует с любыми матрицами.*

- U_2:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{11} + b_{12} \\ b_{21} & b_{21} + b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} + b_{21} & b_{12} + b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим компоненты $(1, 1)$: $b_{11} = b_{11} + b_{21} \Longrightarrow b_{21} = 0$, и компоненты $(1{,}2)$: $b_{11} + b_{12} = b_{12} + b_{22} \Longrightarrow b_{11} = b_{22} = x$, свободной осталась компоненты b_{12} Таким образом

$$U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$U_1 + U_2$)

$$U_1 + U_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \right\rangle$$

Замечание. *Так как вторая матрица из линейной оболочки порождает нам матрицы только с одинаковыми элементами на побочной диагонали, а в U_2 содержатся матрицы с различными элементами на побочной диагонали, то*

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$$

линейно независимы.

$U_1 \cap U_2$)

$$U_1 \cap U_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \right\rangle \cap \left\langle \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Замечание. *Так как вторая линейная оболочка из пересечения порождает матрицы только с нулевой $(2{,}1)$-компонентой, то для того, чтобы матрица из первой оболочки также была в данном подпространстве, то необходимо, чтобы коэффициент в линейной комбинации 2-ой матрицы из $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ всегда был равен нулю.*

Замечание. *Да, можно было бы это все проделать с помощью процедуры Гаусса, взяв за стандартный базис*

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

и рассматривать матрицы как вектора в этом базисе, то есть

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

.

Второй способ?

Введем векторное представление для матриц в стандартном базисе :

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Определим, какой СЛАУ задается пространство U_1. Для этого найдем базис решений следующей СЛАУ:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Он, например, может выглядеть так (уложены в строчки):

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix} = A_1.$$

Аналогично, получим СЛАУ для U_2:

$$A_2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Для того, чтобы найти базис в пересечении подпространств, нам надо найти базис решения совместной СЛАУ, матрица которой:

$$\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \underbrace{\to}_{\text{Гаусс}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Из последнего видно, что $x_1 = x_4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, следовательно, базис будет состоять из одного вектора, например, $(1, 0, 0, 1)^T \iff \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Task 4 (индивидуальное 2.6)

Будем рассматривать матрицу нашего оператора в стандартном базисе. Тогда можно будет рассмотреть переход от этого базиса, к интересующему нас базису f.

Найдем матрицу A_e такую, что

$$A_e \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7 & -4 & 1\\ -5 & -3 & 1\\ 5 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

Транспонируем левую и правую части:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} A_e^T = \begin{pmatrix}-7 & -5 & 5\\ -4 & -3 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \Longrightarrow A_e = \begin{pmatrix}2 & -3 & -3\\ 2 & -2 & -3\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

Теперь найдем матрицы перехода:

$$[f] = [e]C \Longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} C \Longrightarrow C = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Найдем еще обратную к C:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A_f = C^{-1}A_eC = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3 & -3\\ 2 & -2 & -3\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$