Домашняя работа

Котов Артем

18 сентября 2020 г.

Содержание

Task 1

Построим матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & -4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Транспонируем:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Методом Гаусса приводим к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -11 & -3 & 6 & 5 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2-ая строчка не зануляется 3-ьей, следовательно, базис:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ -3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Task 2

(a)

$$g = fC$$
$$f = (1, 1+t, (1+t)^2, (1+t)^3), g = (t^3, t^3 - t^2, t^3 - t, t^3 - 1)$$
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{G} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{F} \cdot C$$
$$\Downarrow$$

$(F|G)$ по методу Гаусса получим в левом блоке I, тогда в правом блоке будет искомая C

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -4 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ -3 & -4 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

Не уверен, что это все надо было доказывать, но мы начнем с отыскания общего вида матрицы поворота относительно произвольного вектора $\boldsymbol{n}$ на угол θ. Считаем, что $|\boldsymbol{n}| = 1$. Обозначим компоненты матрицы повтора R как R_{ij}. Тогда, наша задача — составить тензор второго ранга из некой комбинации n_i, дельта-символа Кронекера δ_{ij} и символа Леви-Чивиты ε_{ijk}. Сделаем это в самом общем виде (подразумеваем соглашение Эйнштейна, то есть по повторяющимся индекса производится суммирование):

$$R_{ij} = a\delta_{ij} + bn_in_j + c\varepsilon_{ijk}n_k$$

Так как, логично, что поворот относительно некоторого вектора не должен менять этот самый вектор, то мы можем записать

$$R_{ij}n_j = n_i \Longrightarrow (a\delta_{ij} + bn_in_j + c\varepsilon_{ijk}n_k)n_j =$$
$$an_i + bn_i + 0 = n_i \Longrightarrow a + b = 1$$

Так как это самый общий вид, то, в частности, это должно работать и для поворота вокруг оси oZ. Воспользуемся этим, чтобы определить наши константы (ремарка, эти константы действительно скаляры, причем, они зависят только от угла, так как исходно из скалярных величин у нас только величина угла поворота)

$$R(\boldsymbol{z},\theta)_{11} = \cos\theta = a \Longrightarrow b = 1-\cos\theta$$
$$R(\boldsymbol{z},\theta)_{12} = -\sin\theta = c$$

Таким образом, мы имеем (формула Родриго?)

$$R_{ij}(\boldsymbol{n},\theta) = \cos\theta\delta_{ij} + (1-\cos\theta)n_i n_j - \sin\theta\varepsilon_{ijk}n_k$$

Теперь к задаче. В нашем случае $\theta = \pi$:

$$R(\boldsymbol{n},\pi)_{ij} = 2n_i n_j - \delta_{ij}$$

Вектор $\boldsymbol{n}$ задан уравнением $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$, ему, например, удовлетворяет

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = [\text{нормируем}] = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

P.S. формально, можно было бы и не нормировать.

Вычислим элементы матрицы поворота:

$$R = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

И, если я правильно все понимаю, то это именно то, что нам нужно.

Task 3

$$U_1 = \{a|[a, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}] = 0\} \quad U_2 = \{b|[b, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}] = 0\}$$

Для начала найдем базисы для U_1 и U_2:

- U_1:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+2a_{12} & 2a_{11}+a_{12} \\ a_{21}+2a_{22} & 2a_{21}+a_{22} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+2a_{21} & a_{12}+2a_{22} \\ 2a_{11}+a_{21} & 2a_{12}+a_{22} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим компоненту $(1{,}1) : a_{11} + 2a_{12} = a_{11} + 2a_{21} \Longrightarrow a_{12} = a_{21} = y$

и компоненту $(2{,}1): a_{21} + 2a_{22} = 2a_{11} + a_{21} \Longrightarrow a_{11} = a_{22} = x$, что дает

$$a = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Таким образом

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Замечание. *Вообще говоря, не удивительно, что мы имеем единичную матрицу в качестве одно из базисных векторов, так как единичная матрица коммутирует с любыми матрицами.*

- U_2:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{11} + b_{12} \\ b_{21} & b_{21} + b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} + b_{21} & b_{12} + b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим компоненты $(1,1) : b_{11} = b_{11} + b_{21} \Longrightarrow b_{21} = 0$, и компоненты $(1{,}2) : b_{11} + b_{12} = b_{12} + b_{22} \Longrightarrow b_{11} = b_{22} = x$, свободной осталась компоненты b_{12} Таким образом

$$U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$U_1 + U_2$)

$$U_1 + U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Замечание. *Так как вторая матрица из линейной оболочки порождает нам матрицы только с одинаковыми элементами на побочной диагонали, а в U_2 содержатся матрицы с различными элементами на побочной диагонали, то*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

линейно независимы.

$U_1 \cap U_2$**)**

$$U_1 \cap U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cap \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Замечание. *Так как вторая линейная оболочка из пересечения порождает матрицы только с нулевой* $(2,1)$*-компонентой, то для того, чтобы матрица из первой оболочки также была в данном подпространстве, то необходимо, чтобы коэффициент в линейной комбинации 2-ой матрицы из* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *всегда был равен нулю.*

Замечание. *Да, можно было бы это все проделать с помощью процедуры Гаусса, взяв за стандартный базис*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и рассматривать матрицы как вектора в этом базисе, то есть

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

Task 4

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Транспонируем уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} X^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \\ 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Методом Гаусса будем искать X^T:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & -4 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right) \Longrightarrow X^T = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -11 \\ 2 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -11 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Таким образом искомый базис:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$