Домашняя работа к 09.09.20

Котов Артем

8 сентября 2020 г.

Содержание

1. Task 1

Рассмотрим, удовлетворяют ли вектора

$$\boldsymbol{v} \in V = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \end{pmatrix} : \begin{cases} \sum x^i = 0 \\ 2(x^2 + x^3) = x^5 \end{cases} \right\}$$

аксиомам линейного пространства:

- $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$:
  $\sum (x^i + y^i) = \sum x^i + \sum y^i = 0 + 0 = 0$
  $2(x^2 + y^2 + x^3 + y^3) = 2(x^2 + x^3) + 2(y^2 + y^3) = x^5 + y^5$

- $c \cdot \boldsymbol{x} \in V$:
  $c \cdot \sum x^i = c \cdot 0$
  $2(cx^2 + cx^3) = cx^5 \implies 2(x^2 + x^3) = x^5$

Также $\mathbf{0} \in V$. Таким образом, V является пространством в K^6.

Найдем базис:

$$\text{СЛАУ: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$x^1 = -x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6$$

$$x^5 = 2x^2 + 2x^3$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x^1 = -3x^2 - 3x^3 - x^4 - x^6 \\ x^5 = 2x^2 + 2x^3 \end{cases}$$

Т. о. свободные переменные: $x^2, x^3, x^4, x^6 \implies \dim(V) = 4$ В качестве базиса можно взять следующие вектора:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Task 2

Рассмотрим СЛАУ на коэффициенты для системы уравнений, задающую V (сразу переставим строчки более удобным образом):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

После преобразования матрицы методом Гаусса получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Что приводит к

$$\begin{cases} a_4 = -a_5 - a_6 \\ a_3 = a_6 \\ a_2 = a_5 \\ a_1 = -a_5 - a_6 \end{cases} \implies \begin{cases} a_1 = -a_5 - a_6 \\ a_2 = a_5 \\ a_3 = a_6 \\ a_4 = -a_5 - a_6 \end{cases} \implies a_5, a_6 \text{ — свободные параметры}$$

Выберем сначала $a_5 = 1, a_6 = 0$, а затем $a_5 = 0, a_6 = 1$, тогда получим два уравнения из системы:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_4 + x_6 = 0 \end{cases}$$

3. Task 3

$x^2 + 4x + 3$ в базисе:

1)

$$1, x, x^2 : \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2)

$$2x + 1, x, x^2 + x + 1 : \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3)

$$(x-5)(x-6), (x-5)(x-7), (x-6)(x-7):$$
$$x^2+4x+3 = \alpha(x-5)(x-6)+\beta(x-5)(x-7)+\gamma(x-6)(x-7) =$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)x^2-(11\alpha+12\beta+13\gamma)x+(30\alpha+35\beta+42\gamma)$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=1\\ 11\alpha+12\beta+13\gamma=-4\\ 30\alpha+35\beta+42\gamma=3\end{cases} \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 11 & 12 & 13 & -4\\ 30 & 35 & 42 & 3\end{array}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\gamma=24, \beta=-63, \alpha=40 \implies \begin{pmatrix}40\\-63\\24\end{pmatrix}$$

4. Task 4

4.1. $\{\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{v}_j\}_{i\neq j}$

Для $\{\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{v}_j\}_{i\neq j} = \hat{V}$ предъявим схему, по которой можно выбрать базис из $\hat{V}$ в V: Рассмотрим $\{\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_j\}_{j=2}^{n}$. Это множество содержит $n-1$ линейно-независимых векторов, их координаты к исходном базисе:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

Из их представления в базисе $\{\boldsymbol{v}_i\}$ как раз наглядно видна их линейная независимость, но их лишь $n-1$ штук.

Добавим $\boldsymbol{u} = (0,1,1,0,\ldots,0)^T$ в этот набор. Тогда, надо проверить, что мы не нарушили линейную независимость. Рассмотрим следующую тройку (остальные вектора содержат вторую 1 месте с бо̀льшим индексом, следовательно, “новый” вектор не скажется на них, а они ни при каких коэффициентах не окажут влияния на линейную зависимость/независимость рассматриваемой тройки, хотя формально можно было бы посчитать определитель матрицы, составленный из всех этих векторов и убедиться, что он не равен 0):

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

Если не учитывать “несущественные” нули далее 3-ей компоненты, то можно заметить, что эта система векторов есть попарные суммы стандартных базисных векторов в $D3$, которые линейно-независимы. Таким образом, можно выбрать набор $\{\{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_j\}_{j=2}^n, \boldsymbol{u}\}$.

4.1.1. Случай поля $1 + 1 = 0\,(1 = -1)$

Рассмотрим вектора $\boldsymbol{w}_{ij} = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j$. Пусть $\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_i$ по прежнему будем рассматриваться нами как часть искомого базиса (при другом возможном наборе $n-1$ векторов можно переразложить их по $\{\boldsymbol{b}_i\}$). Тогда, для того, чтобы искомый набор являлся базисов в исходном пространстве V, достаточно добавить еще один вектор, который будет линейно-независим с $\{\boldsymbol{b}_i\}$. Покажем, что нельзя выбрать такой $\boldsymbol{w}_{ij}$:

$$\boldsymbol{w}_{ij}\big|_{i\neq 1} = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j = (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_1) + \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_i) + (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{b}_j$$

То есть любой оставшийся вектор $\boldsymbol{w}_{ij}$ является линейной комбинацией $\{\boldsymbol{b}_i\} \implies$ нельзя выбрать базис в таком пространстве.

4.2. $\{\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j\}_{i\neq j}$

Заметим, что конечномерные линейные пространства размерности n изоморфны $\mathbb{R}^n$, которое в свою очередь представляет в виде прямой суммы $\mathbb{R}^n = F \bigoplus G$, где $F = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \sum x^i = 0\}$ и $G = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : x^1 = x^2 = \ldots = x^n\}$. Можем рассмотреть $\{\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j\}_{i\neq j}$ как подмножество $U = \{\boldsymbol{x} : \sum x^i = 0\}$. Но тогда видно, что нам не хватает, как минимум, вектора из G, то есть из $\{\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{j}}\}_{i\neq j}$ можно выбрать в лучшем случае базис только для F.

4.2.1. Случай поля 1+1 = 0 (1 = -1)

$\boldsymbol{u}_{ij} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{w}_{ij} \implies$ можно сослаться на 4.1.1.

5. Task 5

5.1. Отсутствие одно-элементных подмножеств

Воспользуемся изоморфизмом $2^M \longleftrightarrow^n K : x^i \in 0, 1$, то есть с бинарными строками длины n. В терминах бинарных строк, утверждается, что можно выбрать такое подпространство в 2^M размерности $n-1$, что ни какой элемент не будет содержать ровно одну 1. Рассмотрим следующие бинарные строки:

$$110\dots0$$
$$1010\dots0$$
$$\vdots$$
$$10\dots01$$

Количество таких строк $n-1$, они линейно-независимы. Видно, что сумма любой пары этих строк даст строку также содержащую две 1, так как x^1 сократится, а на остальных координатах стоят непересекающиеся 0 и 1. То есть в линейных комбинациях не будет содержаться строки с лишь одной 1.

5.2. Наличие двух-элементных подмножеств

Рассмотрим следующий набор бинарных строк:

$$10\dots0$$
$$010\dots0$$
$$\vdots$$
$$0\dots01$$

Очевидно, что это базис (причем, стандартный) в n-мерном пространстве. Выкинем какой-то вектор из этого набора, тогда останется базис $n-1$ мерного пространства. Видно, что в нем всегда будут получатся в линейных комбинациях строки, содержащие две 1.

Но это был какой-то конкретный базис. Предположим, что нашелся другой базис, тогда мы переразложим найденный базис, по стандартному.