LOGICA SI STRUCTURI DISCRETE

Obiectivul cursului

- Cursul trece în revista notiuni ca: propozitii,
- multimi, relatii si functii discrete.
- La finalul cursului participantii vor fi capabili sa
- înteleaga conceptele asociate cu obiectele
- discrete, proprietatile lor si relatiile dintre
- acestea.
- Studentii vor dobândi competenta în structuri
- discrete si logica, necesare în practica
- specializarii de informatica.

Subiecte tratate pe parcursul cursului

- Introducere în structuri discrete
- Introducere în logica (propozitii,
- rationament)
- Logica predicatelor
- Multimi
- Recursivitate
- Relatii
- Functii

Aplicatii

- Operatii cu propozitii
- Exercitii cu reguli de inferenta
- Lucrul cu predicate
- Operatii cu multimi
- Algoritmi recursivi
- Exercitii cu relatii si functii

Motivatie

- Interesul pentru abordarea
- teoretica/formala a problematicilor din
- informatica se justifica cel putin din doua
- motive:
- Posibilitatea de a manipula o infinitate sau
- mari cantitati de date si care sunt nedefinite
- Rezultatele abordarilor formale sunt
- **reutilizabile**.

Motivatie - Exemplu

- Investiti: 1000 Euro/an cu un profit de 10%
- ? Care va fi profitul dupa 3, 5 sau 10 ani?
- Varianta 1: pentru 3 ani
- 1000 € dupa primul 1 an aduc un profit de 100 €; ca urmare la
- începutul anului urmator suma investita va fi de 1100 €
- 1000 *(1+0.1) €
- care vor aduce un profit de 110 € la sfârsitul celui de al doilea an.
- La începutul celui de-al treilea an suma de investit va fi de 1210 €
- 1000*(1+0.1)(1+0.1) € = 1000 * (1+0.1)2 €
- La sfârsitul celui de-al treilea an suma va fi
- 1000 * (1+0.1)3 €
- Astfel, suma totala dupa cei trei ani va fi
- 1,000 * (1 + 0.1) + 1,000 * (1 + 0.1)^2 + 1,000 * (1 + 0.1)^3
- 3,641 €

Motivatie - Exemplu

- În mod similar pot fi facute calculele si
- pentru suma totala, respectiv profit dupa
- 5 sau 10 ani.
- Procesul este însa greoi si lung.
- Acesta se complica si mai mult daca
- dorim sa cunoastem profitul pentru
- diverse procente (diferite de 10%) sau
- pentru diferite perioade de timp (ex. 15
- ani).

Motivatie - Exemplu

- Pentru a evita calculele complicate si plicticoase se iau în considerare
- similitudinile din problema enuntata si se rezolva într-o maniera
- generala.
- În problema de rezolvat se face referire la profitul obtinut dupa un anumit
- numar de ani, profit asociat unei sume investite în fiecare an.
- Variabile: S – suma investita la începutul fiecarui an
- p – profitul anual
- n – numarul de ani
- Suma investita dupa n ani va fi:
- X = S(1+p) + S(1+p)2 + … + S(1+p)n
- Si mai compact:
- X = S (1+p) [1+(1+p)+(1+p)2+…+(1+p)n] = S (1+p) [(1+p)n-1]/(1+p-1)
- X = S[(1+p)n+1 –(1+p)]/p
- Sub aceasta forma compacta X poate fi calculat usor pentru diferite
- valori ale lui S, n, p.

Motivatie - Exemplu

- Se poate scrie un program care sa calculeze valoarea lui X pentru
- diverse valori ale lui S,n,p;
- Cum putem dovedi ca programul este corect?
- Exista o infinitate de variante care nu pot fi testate toate.
- “Halting problem” – în contextul discutiei despre corectitudinea
- programelor: se pune problema daca, fiind dat un program pe calculator,
- acesta se va opri sau nu la o anumita intrare dupa un anumit interval de
- timp.
- Se cunoaste pâna în prezent ca aceasta problema nu poate fi rezolvata
- de catre un calculator.
- Dar pe ce se bazeaza aceasta afirmatie - ca este imposibil de rezolvat?
- Cum putem afirma ca un astfel de program nu poate fi scris?
- Este imposibil sa testam toate metodele posibile ca solutii si sa
- constatam ca la un moment dat rezulta un esec. Este imposibil sa gasim
- toate metodele candidate pentru a rezolva HP.
- Ca urmare, avem nevoie de o abordare formala pentru a evita numarul
- extrem (daca nu chiar infinit) de mare de posibilitati

Logica si structuri discrete

- Lucrul cu structuri discrete reprezinta baza
- abordarilor formale.
- Se refera la
- limbajele utilizate în rationamente matematice,
- concepte de baza,
- proprietatile lor si
- relatiile dintre acestea.
- Subiectele prezentate pe parcursul cursului se
- refera la **logica propozitionala, logica**
- **predicatelor, multimi, relatii, functii**.

Logica

- Logica propozitionala se refera la logica propozitiilor.
- Elemente de logica.
- Relatii (logice)între propozitii
- Rationament
- Logica predicatelor – mai puternica: permite rationamentul cu
- enunturi care implica, printre altele, variabile.
- Multimi
- Relatii între multimi
- Operatii cu multimi
- Daca este nevoie de rigoare, aproape orice poate fi exprimat sub
- forma de multimi. Acestea reprezinta baza tuturor teoriilor din stiinta
- calculatoarelor si matematica.

Logica

- Recursivitatea
- Multimi, operatii si functii pot fi definite în mod riguros folosind
- recursivitatea.
- Proprietatile obiectelor definite recursiv pot fi stabilite corect folosind
- inductia.
- Relatii
- Abstractizare a relatiilor din lumea reala: sot/sotie, parinte/copil,
- relatii de apartenenta, etc.
- Sunt un concept cheie legat de multe subiecte din domeniul
- informatic.
- Spre exemplu, o baza de date este reprezentata de un set de relatii,
- iar limbajele de interogare de baze de date sunt construite pe baza
- operatiilor asupra relatiilor si multimilor.
- Grafurile sunt un exemplu de structuri discrete si reprezinta unul
- dintre cele mai utile modele pentru informaticieni si ingineri pentru
- a rezolva probleme.

Logica

- Functii
- Sunt un tip special de relatii
- Concept important legat de calculator si
- calcule: structuri de date, baze de date,
- limbaje formale si automate, analiza
- algoritmilor.

Rezolvarea problemelor

- **Rezolvarea problemelor**

Rezolvarea problemelor - obiective

- Nu exista abordari universal valabile pentru rezolvarea
- unei probleme
- Este necesara explorarea a diverse cai care duc catre
- o solutie si din aproape în aproape se gaseste calea
- cea mai potrivita.
- Rezolvarea unei probleme implica si un factor de
- presupunere, dar care se micsoreaza odata cu
- câstigarea experientei în rezolvarea problemelor. Deci
- supozitiile sunt educate si nu arbitrare.
- În continuare sunt prezentate cadrul general pentru
- rezolvarea problemelor si strategiile care sunt uzual
- folosite de catre specialisti.

Cadrul general

- În procesul de rezolvare a problemelor
- sunt parcurse în general 4 etape:
- Întelegerea problemei
- Planificarea în vederea obtinerii solutiei
- Punerea în aplicarea a planului
- Verificarea

Întelegerea problemei

- O problema care nu este înteleasa nu are mari
- sanse sa fie rezolvata
- Pentru a întelege o problema ne este de ajutor
- sa:
- 1. Evidentiem principalele parti ale problemei
- Pentru probleme de tipul “determinati valoarea totala si
- profitul pentru o anumita suma investita” elementele
- principale sunt: necunoscutele, datele si conditiile.
- Pentru probleme de tip “dovezi” principalele elemente sunt
- ipotezele si concluziile.
- (v. ex. 1 si ex. 3)

Întelegerea problemei

- 2. Cautam definitiile termenilor necunoscuti
- (sau chiar si a celor familiari).
- 3. Construim unul sau doua exemple care sa
- ilustreze enuntul problemei.

Planificarea în vederea obtinerii solutiei

- De unde începem?
- Începem prin trecerea în revista a partilor principale:
- necunoscute, date, si conditii pentru probleme de “cautare” si
- ipoteze si concluzii pentru probleme de tip “dovezi”.
- Ce putem face?
- Odata ce principalele parti au fot identificate si întelese
- urmatorul pas este abordarea problemei din diverse unghiuri
- si cautarea elementelor de legatura cu cunostintele acumulate
- anterior. Se cauta faptele care au legatura cu problema
- curenta. Faptele relevante implica în general aceleasi cuvinte
- sau cuvinte similare celor din problema data. Este de
- asemenea de folos sa ne amintim solutii ale unor probleme
- similare rezolvate anterior.

Sfaturi utile

- Nu exista o metoda universala pentru obtinerea solutiei unei
- probleme, dar exista o multime de modalitati euristice pe care le
- putem încerca. În continuare sunt prezentate câteva dintre
- acestea, la care se pot adauga experientele dvs. pe masura ce
- câstigati experienta.
- Va puneti întrebarea daca ati mai întâlnit o astfel de problema:
- cunoasteti probleme similare? Adica probleme cu aceleasi
- necunoscute sau cu necunoscute diferite, dar observate în acelasi
- cadru sau într-un cadru similar. (v. ex.2)
- Faceti o scurta analiza a relatiile dintre date, conditii si necunoscute
- sau între ipoteze si concluzii.
- Luati în considerare ce fapte cunoasteti legate de problema curenta.
- Acestea sunt faptele legate de subiectele care apar în problema. În
- general ele implica aceleasi cuvinte sau cuvinte asemanatoare. În
- acest context sunt foarte importante regulile de inferenta

Sfaturi utile

- Asigurati-va ca sunteti familiarizati cu definitia, întelesul termenilor
- tehnici. (v. ex.1, ex.2)
- Alcatuiti o lista cu obiectivele intermediare dorite si încercati sa le
- atingeti.
- Întrebati-va daca ati folosit toate conditiile sau ipotezele. Atunci când
- cautati calea catre o solutie sau verificati o solutie gasita e recomandabil
- sa verificati daca ati utilizat toate datele/ipotezele. În cazul în care
- raspunsul este negativ, s-ar putea sa lipseasca ceva. (v. ex.4)
- Împartiti problema în cazuri. Exista posibilitatea ca, prin împartirea
- problemei în cazuri separate de studiu pe baza proprietatilor obiectelor
- implicate în problema sa simplificati problema si aceasta sa devina mai
- clara. Spre exemplu, daca e vorba despre o problema care implica
- numere întregi, atunci puteti sa o împartiti în doua cazuri: pentru
- numerele pare si pentru numere impare. (v. ex. 3)

Sfaturi utile

- Folositi metoda reducerii la absurd. Daca faceti o
- presupunere care produce un enunt care nu are sens,
- atunci trageti concluzia ca presupunerea e gresita.
- Aceasta metoda presupune ca asertiunea care trebuie
- dovedita nu este adevarata si încercam sa gasim o
- contradictie, spre exemplu ceva întotdeauna fals. Daca
- obtinem un raspuns în contradictie, înseamna ca
- presupunerea e gresita si ca urmare asertiunea pe care
- încercam sa o dovedim este adevarata. (v.ex. 3)
- În cazul în care pare ca nu gasiti o solutie pentru a
- justifica o asertiune se recomanda sa încercati aceasta
- metoda.

Sfaturi utile

- Transformati/reformulati problema si apoi folositi-va de primele 3 sfaturi.
- Folositi metoda “inversa. În aceasta abordare, porniti de la ceea ce se
- cere, cum ar fi concluzia sau forma finala (dorita) a unei ecuatii, etc. si
- presupuneti ca ceea ce se cauta a fost gasit. Cautati atunci din ce solutie
- antecedenta a fost obtinut rezultatul dorit. Daca gasiti aceasta solutie
- antecedenta cautati din ce alta solutie antecedenta a fost gasite la rândul
- ei, samd. Se repeta procesul pâna când fie se ajunge la date/ipoteza sau
- se gaseste o alta solutie mai simpla. (v. ex. 4, ex. 5)
- Daca este posibil, simplificati problema. Folositi-va de simetriile care apar
- în multe cazuri.
- Este posibil ca primele încercari sa nu reuseasca, dar daca o
- abordare nu reuseste încercati o alta. Odata cu câstigarea
- experientei se îmbunatatesc si calitatile dvs. de rezolvare a
- problemelor si veti gasi abordarea potrivita mai rapid.
- Exemple (1-8)

Logica

Logica

- Logica este limbajul ratiunii.
- Cuprinde o colectie de reguli pe care folosim pentru a rationa
- logic.
- Grecia antica
- George Boole (matematician britanic) – mijlocul sec. al XIX-lea.
- Logica lucreaza cu propozitii adevarate sau false si trateaza
- modul în care rezulta aceste valori de adevar unele din altele.
- Se utilizeaza simboluri pentru reprezentarea unor propozitii
- oarecare astfel încât rezultatele sa poata fi utilizate în mod
- similar, dar pentru cazuri diferite.
- Formalizarea promoveaza de asemenea claritatea în gândire si
- elimina greselile.
- Exista diverse tipuri de logica: logica propozitiilor (logica
- propozitionala), logica obiectelor (logica predicatelor), logica care
- lucreaza cu incertitudini, logica fuzzy, logica temporala, etc.

Logica propozitionala

Introducere

- Logica propozitionala este o logica la nivelul
- enuntului.
- Cea mai mica unitate cu care lucram în logica
- propozitionala este propozitia.
- Nu intervenim în interiorul propozitiilor pentru a
- analiza întelesul asociat acestora.
- Ne intereseaza valoarea de adevar a
- propozitiilor, daca ele sunt adevarate sau
- false.

Propozitia

- Enunturile în logica propozitionala nu sunt arbitrare.
- Ele sunt fie adevarate, fie false; deci nu ambele. Acest
- tip de enunturi sunt **propozitiile**.
- Daca o propozitie este adevarata spunem ca ea are
- valoarea de adevar ***true*** (adevarat), iar daca este
- falsa, valoarea sa de adevar este ***false*** (fals).
- Spre exemplu, “Facultatea are parti galbene” sau
- “3+4=6” sunt propozitii. Prima are valoarea de adevar
- *true*, iar cea de a doua *false*.
- “Deschide fereastra” sau “Ploua afara?” nu sunt
- propozitii.

Propozitia

- “y este mai mic decât 4”, unde y este o variabila care
- reprezinta un numar nu este propozitie.
- Atât timp cât y nu are o valoare nu putem sti daca este
- adevarata sau falsa si nici nu stim ce reprezinta y.
- “x=x” nu este propozitie
- Nu stim ce reprezinta ‘x’ sau ‘=‘
- Întelegem ce înseamna 5=5, dar nu stim la ce s-ar putea referi
- “aer este egal cu aer” sau “apa este egala cu apa”; o masa de
- aer are acelasi volum cu alta sau conceptul aer este
- echivalent cu conceptul de aer? Deci nu ne este clar ce
- înseamna “x=x”. Ca urmare nu putem sti daca este adevarat
- sau fals. Deci, nu este o propozitie.

Elemente de logica propozitionala

- Elementele cu care construim propozitii complexe:
- **propozitiile de baz**a s**i conectorii**.
- Enunturile simple, care pot fi adevarate sau false, sunt
- propozitii de baza.
- Propozitiile mai mari, complexe, sunt construite din
- propozitii de baza combinate prin conectori.
- Conectori de baza:
- NOT (¬), AND ( ), OR ( ),
- IF_THEN (or IMPLY),
- IF_AND_ONLY_IF.

Tabele de adevar

- Exista multe situatii în care este necesara stabilirea
- proprietatilor/relatiilor comune tuturor propozitiilor.
- În aceste cazuri, în loc sa le precizam pentru fiecare propozitie,
- se folosesc variabile care reprezinta o propozitie oarecare si se
- stabilesc proprietatile/relatiile în functie de aceste variabile.
- Aceste variabile se numesc **variabile propozitionale** (ele sunt tot
- propozitii).
- O propozitie complexa contine mai multe variabile propozitionale.
- Spre exemplu, P Q contine variabilele P si Q, fiecare
- reprezentând o propozitie oarecare.
- Astfel, propozitia ia valori în functie de valorile variabilelor
- constituente.
- Relatia dintre propozitie si variabilele care o alcatuiesc poate fi
- reprezentata într-un tabel. Tabelul va contine valoarea propozitiei
- pentru toate valorile posibile pe care le pot lua variabilele
- constitutive - **Tabel de adevar**

Tabele de adevar

- **OR**
- A A A
- A F A
- F A A
- F F F
- **P Q (P v Q)**

Conectorii

NOT

- F A
- A F
- **P ¬P**

AND

A A A

A F F

F A F

F F F

P Q (P VQ)

Conectorii

- **OR**
- A A A
- A F A
- F A A
- F F F
- **P Q (P ^ Q)**

Conectorii

- **IMPLIES**
- A A   A
- A F   F
- F A   A
- F F   A
- **P Q   (P$\rightarrow$ Q)**

Conectorii

- **IF AND ONLY IF**
- A A A
- A F F
- F A F
- F F A
- **P Q (P $\leftrightarrow$ Q)**

Conectorii

- Întelesul conectorilor
- - NOT: Negarea propozitiei de baza
- - AND: Rezultat adevarat doar daca ambele componente sunt
- adevarate
- - OR: Rezultat adevarat daca oricare din componente este
- adevarata
- - IMPLIES: Atunci când P->Q este întotdeauna adevarata
- exprimam acest lucru prin P=>Q.
- - P=>Q este utilizat atunci când propozitia P implica întotdeauna
- propozitia Q indiferent de valorile variabilelor.
- - P -> Q este adevarat atunci când P este Fals si atunci când P si Q
- sunt ambele Adevarate. (Implicatii)
- - IF AND ONLY IF: Atunci când P <-> Q este întotdeauna
- Adevarata, exprimam acest lucru prin PQ. este folosit
- atunci când doua propozitii au aceeasi valoare indiferent de
- valoarea variabilelor continute.(Identitati)

Construirea propozitiilor

- Cum se construiesc propozitii complexe – sintaxa
- propozitiilor
- Construirea propozitiilor complexe din propozitii simple
- metode generale de construire a propozitiilor
- Exemplu din viata de zi cu zi:
- Soarele este galben. Iarba este verde. Combinatii folosind
- conectorii:
- Soarele este galben si iarba este verde.
- Daca soarele este galben, atunci iarba este verde.
- Soarele este galben si iarba nu este verde, etc.
- Astfel se pot construi propozitii complexe, care la
- rândul lor se pot combina în alte propozitii complexe,
- samd.

Construirea propozitiilor – generalizare

- Fie X si Y doua propozitii arbitrare.
- X, X^Y, X V Y, XY, X<-->Y sunt de
- asemenea propozitii.
- **Exemplu :** [P -> [Q V R]] este o propozitie si
- se obtine construind mai întâi [Q V R] aplicând
- cazului general [X V Y] particularizarea prin Q
- si R, iar apoi aplicând [X -> Y] propozitiilor P
- si [Q V R].
- X si Y sunt variabile propozitionale (forme care
- vor deveni propozitii concrete).

Convers si contrapozitie

- Convers (despre judecati, rationamente) – al
- carui subiect poate fi transformat în atribut sau
- invers, fara a schimba sensul judecatii sau a
- altera adevarul ei.
- *Nici un om nu e pix. Nici un pix nu e om.*
- O propozitie în care, dupa ce rezulta o
- concluzie dintr-o supozitie, se inverseaza
- ordinea transformând concluzia în supozitie
- sau premiza.
- Pentru propozitia PQ, propozitia Q P
- reprezinta propozitia conversa.

Convers si contrapozitie

- Contrapozitie – deducerea unei judecati
- noi prin înlocuirea termenilor cu
- contrariile lor.
- Pentru propozitia P Q,
- propozitia Q P este propozitia
- contrapozitiva.

Convers si contrapozitie

- *Daca ploua, atunci ma ud.*
- Conversa: *Daca ma ud, atunci ploua.*
- Contrapozitiva: *Daca nu ma ud, atunci*
- *nu ploua.*

Convers si contrapozitie

- Conversa unei propozitii nu este neaparat
- necesar sa fie echivalenta logic cu propozitia,
- adica este posibil, sau nu, sa aiba aceeasi
- valoare de adevar în acelasi timp.
- Contrapozitiva unei propozitii este întotdeauna
- echivalenta logic cu propozitia, adica au
- aceeasi valoare de adevar indiferent de
- valorile variabilelor constitutive.

Rationamente cu propozitii

Rationamentul logic

- **Rationamentul logic** este un proces prin care se trag
- concluzii din premize folosind reguli de inferenta.
- Exista **rationament logic cu propozitii**, si cu
- **predicate logice**.
- Regulile de inferenta din logica propozitionala se
- aplica si pentru logica predicatelor.
- Regulile de inferenta rezulta din experienta umana
- referitoare la rationament, dobândita de-a lungul
- istoriei. Ca urmare, desi nu exista nimic absolut legat
- de acestea, ele au contribuit semnificativ la progresul
- stiintific al umanitatii. Astazi ele sunt universal
- acceptate ca reguli de rationament logic.

Reguli de inferenta

- Regulile de inferenta se bazeaza pe identitati si
- implicatii. Aceste doua notiuni sunt legate la rândul lor
- de alte trei: **tautologie, contradictie, contingenta.**
- Unele propozitii sunt întotdeauna adevarate, indiferent
- de valoarea de adevar a propozitiilor componente.
- Spre exemplu, **(P V not (P))**
- este întotdeauna adevarata, indiferent de valoarea de
- adevar a propozitiei P.
- O propozitie care este **întotdeauna adevarata** se
- numeste **tautologie.**

Reguli de inferenta

- Unele propozitii sunt întotdeauna false,
- indiferent de valoarea de adevar a propozitiilor
- componente. Spre exemplu,
- **(P ^ not P)**
- este întotdeauna falsa.
- O propozitie care este **întotdeauna fals**a se
- numeste **contradic**t**ie**.
- O propozitie care nu este nici tautologie nici
- contradictie se numeste **contingen**ta**.**

Rationamente cu propozitii

Rationamentul logic

- **Rationamentul logic** este un proces prin care se trag
- concluzii din premize folosind reguli de inferenta.
- Exista **rationament logic cu propozitii**, si cu
- **predicate logice**.
- Regulile de inferenta din logica propozitionala se
- aplica si pentru logica predicatelor.
- Regulile de inferenta rezulta din experienta umana
- referitoare la rationament, dobândita de-a lungul
- istoriei. Ca urmare, desi nu exista nimic absolut legat
- de acestea, ele au contribuit semnificativ la progresul
- stiintific al umanitatii. Astazi ele sunt universal
- acceptate ca reguli de rationament logic.

Reguli de inferenta

- Regulile de inferenta se bazeaza pe identitati si
- implicatii. Aceste doua notiuni sunt legate la rândul lor
- de alte trei: **tautologie, contradictie, contingenta.**
- Unele propozitii sunt întotdeauna adevarate, indiferent
- de valoarea de adevar a propozitiilor componente.
- Spre exemplu, **(P V not (P))**
- este întotdeauna adevarata, indiferent de valoarea de
- adevar a propozitiei P.
- O propozitie care este **întotdeauna adevarata** se
- numeste **tautologie.**

Identitati

- Din definitia (întelesul) conectorilor pot fi
- derivate un numar de relatii între propozitii,
- utile în procesul de rationament.
- Unele dintre cele mai întâlnite perechi de
- propozitii logice echivalente sunt **identitatile**
- (tautologie). Acestea sunt folosite în
- rationamente logice.
- Daca doua propozitii sunt logic echivalente,
- **una poate fi înlocuita de cealalta** în orice
- propozitii apar, **fara a modifica valoarea**
- **logica a propozitiei.**

Lista de identitati:

1.	$P \Leftrightarrow (P \vee P)$	idempotența lui $\vee$
2.	$P \Leftrightarrow (P \wedge P)$	idempotența lui $\wedge$
3.	$(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$	comutativitatea lui $\vee$
4.	$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$	comutativitatea lui $\wedge$
5.	$[(P \vee Q) \vee R] \Leftrightarrow [P \vee (Q \vee R)]$	asociativitatea lui $\vee$
6.	$[(P \wedge Q) \wedge R] \Leftrightarrow [P \wedge (Q \wedge R)]$	asociativitatea lui $\wedge$
7.	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$	Legea lui DeMorgan
8.	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$	Legea lui DeMorgan
9.	$[P \wedge (Q \vee R] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$	distributivitatea lui $\wedge$ peste $\vee$
10.	$[P \vee (Q \wedge R] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$	distributivitatea lui $\vee$ peste $\wedge$
11.	$(P \vee True) \Leftrightarrow True$	
12.	$(P \wedge False) \Leftrightarrow False$	
13.	$(P \vee False) \Leftrightarrow P$	
14.	$(P \wedge True) \Leftrightarrow P$	
15.	$(P \vee \neg P) \Leftrightarrow True$	
16.	$(P \wedge \neg P) \Leftrightarrow False$	
17.	$P \Leftrightarrow \neg(\neg P)$	dubla negare
18.	$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$	implicare
19.	$(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)]$	echivalență
20.	$[(P \wedge Q) \rightarrow R] \Leftrightarrow [P \rightarrow (Q \rightarrow R)]$	export
21.	$[(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q)] \Leftrightarrow \neg P$	absurd
22.	$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$	contrapozitiva

Exemple:

1. $P \Leftrightarrow (P \vee P)$ - idempotența lui $\vee$
"Dan e fericit." este echivalent cu "Dan e fericit sau Dan e fericit."
Este o identitate aproape neutilizată în viața de zi cu zi, dar poate să apară în cazul manipulării propozițiilor în raționamente cu simboluri.

2. $P \Leftrightarrow (P \wedge P)$ – idempotența lui $\wedge$
Similar cu 1.

3. $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$ – commutativitatea lui $\vee$
"Dan e bogat sau (Dan e) celebru." este echivalent cu "Dan e celebru sau (Dan e) bogat".

4. $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$ - commutativitatea lui $\wedge$
"Dan e bogat şi (Dan e) celebru." este echivalent cu "Dan e celebru şi (Dan e) bogat".

Identitati

Identitățile anterioare sunt duale (1 cu 2, 3 cu 4…15 cu 16).

Fie X o propoziție care conține doar ¬, ∧, şi ∨ ca şi conectori. Fie X^* propoziția obținută din X prin înlocuirea lui ∧ cu ∨, ∨ cu ∧, *A* cu *F* şi *F* cu A.
X^* este propoziția duală propoziției *X*.

Dualul lui

$[P \wedge Q] \vee P$ este $[P \vee Q] \wedge P$, iar

Dualul lui

$[\neg P \wedge Q] \vee \neg[T \wedge \neg R]$ este $[\neg P \vee Q] \wedge \neg[F \vee \neg R]$.

Proprietate: Dacă două propoziții P şi Q, care conțin doar conectorii ¬, ∧, şi ∨ sunt echivalente, atunci propozițiile lor duale, P^* şi Q^* sunt de asemenea echivalente.

Implicatii

- Implicatiile sunt relatii între propozitii care pot fi
- derivate din definitia (întelesul) conectorilor.
- => semnifica faptul ca implicatia este valabila
- întotdeauna. Adica este o tautologie.
- Implicatiile sunt folosite în rationamentul logic.
- Atunci când partea dreapta a acestei implicatii
- este înlocuita de partea stânga într-o
- propozitie, propozitia care rezulta este derivata
- din propozitia originala, adica se poate deduce
- noua propozitia din propozitia originala.

Implicatii

1.	$P \Rightarrow (P \vee Q)$	**adăugare**
2.	$(P \wedge Q) \Rightarrow P$	**simplificare**
3.	$[P \wedge (P \rightarrow Q)] \Rightarrow Q$	**modus ponens**
4.	$[(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q] \Rightarrow \neg P$	**modus tollens**
5.	$[\neg P \wedge (P \vee Q] \Rightarrow Q$	**silogism disjunctiv**
6.	$[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \Rightarrow (P \rightarrow R)$	**silogism ipotetic**
7.	$(P \rightarrow Q) \Rightarrow [(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)]$	
8.	$[(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)] \Rightarrow [(P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge S)]$	
9.	$[(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \leftrightarrow R)$	

Implicatii

1. $P \Rightarrow (P \vee Q)$
Dacă soarele străluceşte, atunci în mod sigur soarele străluceşte sau ninge.

2. $(P \wedge Q) \Rightarrow P$
Dacă este frig şi ninge atunci în mod sigur este frig.

3. $[P \wedge (P \rightarrow Q] \Rightarrow Q$
Dacă ninge şi (dacă ninge atunci şcolile se închid) în mod sigur şcolile se închid.

4. $[(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q] \Rightarrow \neg P$
(Dacă ninge, atunci şcolile se închid) şi şcolile nu se închid, atunci putem trage concluzia că nu ninge.

5. $[\neg P \wedge (P \vee Q] \Rightarrow Q$
(Nu ninge) şi (ninge sau plouă) – tragem concluzia că plouă.

6. $[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \Rightarrow (P \rightarrow R)$
(Dacă e polei, autobuzele pentru şcoală nu circulă) şi (dacă autobuzele pentru şcoală nu circulă, atunci şcolile sunt închise) – tragem concluzia că Dacă e polei, atunci şcolile sunt închise.

Rationamentul logic

- Rationamentul logic - un proces prin care se ajunge la concluzii pornind
- de la ipoteze, folosind reguli de inferenta.
- Regula de inferenta de baza este **modus ponens (modul sustinerii).**
- Aceasta precizeaza ca, daca P -> Q si P sunt valide, atunci rezulta ca si
- concluzie Q:
- P
- P ->Q
- -----
- Q
- Ceea ce se afla deasupra liniei sunt **premizele**, iar ceea ce se afla
- dedesubt este **concluzia** rezultata din premize.
- *Daca ploua, atunci* meciul nu se joaca. *Ploua.*
- Ambele premize sunt adevarate, deci putem trage concluzia ca *meciul*
- *nu se joaca*.
- În plus fata de utilizarea modului ponens se pot face rationamente
- folosind identitatile si implicatiile.

Rationamentul logic

- Daca partea stânga/dreapta a unei identitati care
- apare într-o propozitie este înlocuita cu partea
- dreapta/stânga a identitatii, atunci propozitia care
- rezulta este logic echivalenta cu propozitia originala.
- Astfel, noua propozitie se deduce din propozitia
- originala.

Rationamentul logic

Spre exemplu, în propoziția
$P \wedge (Q \rightarrow R)$,
$(Q \rightarrow R)$ poate fi înlocuit cu $(\neg Q \vee R)$
Pentru a trage concluzia
$P \wedge (\neg Q \vee R)$,
cum $(Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (\neg Q \vee R)$

.

Rationamentul logic

- În mod similar, daca partea
- stânga/dreapta a unei implicatii care
- apare într-o propozitie este înlocuita cu
- partea dreapta/stânga a implicatiei,
- atunci propozitia care rezulta este logic
- echivalenta cu propozitia originala.
- Astfel, noua propozitie se deduce din
- propozitia originala.