UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPTO. DE ESTATÍSTICA

1ª LISTA DE EXERCÍCIOS DE PROC. ESTOCÁSTICOS APLICADOS (CE 222)

Prof. Benito Olivares 1º Sem./ 2018

1. Classifique os seguintes processos segundo seus espaços S e T. Quando possível, desenhe uma trajetória típica. Considere X sendo:

a) Quantidade de bactérias por superfície numa lâmina experimental.
b) Nível da maré em determinado ponto do litoral.
c) Número de gols convertidos em um jogo de futebol.
d) Temperatura diária média de uma determinada localidade.

2. Classifique e construa uma trajetória para os seguintes processos:

a) O processo $X(t)$ definido por $X(t) = Y\cos\omega t,\ t \geq 0$, onde ω é constante e $Y \sim U(0,1)$.
b) Pacientes chegam numa consulta médica em instantes aleatórios de tempo. Seja X_n o tempo (em horas) que o n-ésimo paciente deve esperar na sala antes do seu atendimento.
c) Um processo $\{X_n, n \geq 1\}$ em que $X_1, X_2, \ldots$são variáveis aleatórias i.i.d.Bernoulli (p).

3. Considere um processo estocástico definido por

$$X(t) = Y\cos(\omega\, t + \Theta) \quad t \in \Re,$$

sendo Y e Θ variáveis aleatórias independentes com distribuição Uniforme sobre os intervalos (-A, A) e $(-\pi,\pi)$ respectivamente. É *X(t)* fracamente estacionário?

4. Considere um processo estocástico definido por

$$X(t) = U\cos t + (V+1)\,\mathrm{sen}\, t, \quad t \in \Re,$$

sendo U e V variáveis aleatórias independentes de média zero e segundo momento igual a 1. Encontre a função covariância de *X(t).* É *X(t)* fracamente estacionário?

5. Considere o processo $\{X_n, n \geq 1\}$, onde $X_n = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$ e os Z_n´s são variáveis aleatórias i.i.d. de média zero e variância σ^2. É o processo X_n estacionário em algum sentido?

6. Seja $\{X_n, n \geq 0\}$ o Passeio Aleatório Simples, ou seja um processo $X_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, $, n = 1,2,\ldots$, $(X_0 = 0)$, sendo $Z_1,\ldots Z_n$ variáveis aleatórias iid com $P(Z_n = 1) = p$ e $P(Z_n = -1) = 1 - p$, $\forall n$.

Encontre a função Média e a função Variância do processo X_n.

7. Suponha que um processo $X(t)$ é fracamente estacionário com função de autocorrelação $R_X(t, t+\tau) = e^{-|\tau|/2}$.

a) Encontre o segundo momento da v.a. *X(5)*.

b) Encontre o segundo momento da v. a. *X(5)-X(3).*

8. Considere um processo estocástico definido por

$$X(t) = U \cos \omega t + V \, sen \omega t, \quad t \in \Re,$$

sendo U e V variáveis aleatórias independentes e ω constante.

a) Mostre que a condição *E(U)* = *E(V)* = 0 é necessária para *X(t)* ser estacionário.

b) Mostre que *X(t)* é fracamente estacionário se, e somente se, *U* e *V* são não-correlacionadas com variâncias iguais.

9. Seja $\{X_n; n \geq 0\}$ uma cadeia de Markov de dois estados. Encontre:

a) $P(X_1 = 0 / X_0 = 0, X_2 = 0)$.

b) $P(X_1 \neq X_2)$.

c) $P_0(T_0 = n)$.

d) $P_0(T_1 = n)$.

10. Seja $\{X_n; n \geq 0\}$ uma cadeia de Markov. Mostre que

$$P(X_0 = x_0 / X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_0 = x_0 / X_1 = x_1).$$

11. Uma urna contém 5 bolas, das quais duas são vermelhas e três pretas. A intervalos de tempos regulares escolhe-se uma bola ao acaso. Se a bola escolhida for vermelha, pinta-se a mesma de preto e recoloca-se na urna. Analogamente, se a bola selecionada for preta, pinta-se de vermelho e recoloca-se na urna. O processo para quando todas as bolas estão da mesma cor. Suponha que o interesse seja o número de bolas vermelhas na urna em qualquer instante.

a) Modele como um processo estocástico (ou seja, defina as variáveis e espaços necessários).

b) O processo pode ser considerado uma cadeia de Markov? Justifique.
c) O processo pode ser considerado uma cadeia de Nascimento e Morte? Justifique. Caso afirmativo encontre a função de transição.
d) A cadeia é irredutível?
e) Encontre a matriz de transição.

12. Suponha que temos duas caixas e 20 bolas, das quais 15 são pretas e 5 são vermelhas. Inicialmente, a metade das bolas são colocadas na caixa I e as restantes na caixa II. Em cada ensaio uma bola é escolhida aleatoriamente de cada uma das caixas e essas duas bolas são trocadas de caixa. Seja X_0 o número de bolas pretas inicialmente na caixa I e seja X_n o número de bolas pretas na caixa I após o n-ésimo ensaio. Encontre a função de transição da cadeia. Encontrar a probabilidade de, em dado instante, ter 4 bolas na caixa I e logo após dois ensaios ter somente duas.

13. Um sociólogo propõe modelar a evolução das classes sociais a que pertence um indivíduo como uma cadeia de Markov $\{X_n, n \geq 1\}$, sendo X_n a classe social do indivíduo na n-ésima geração e os estados correspondendo às classes baixa, média e alta respectivamente.

a) Faça a modelagem. Atribua probabilidades que você achar razoáveis. Justifique.
b) Se eu pertenço à classe média, qual a probabilidade do meu neto pertencer à classe alta?
c) Qual a probabilidade de que a quarta geração de uma pessoa da classe baixa venha a pertencer à classe alta?
d) Calcule a probabilidade de uma família ser rica pela primeira vez em duas gerações.
e) O que você acha que acontecerá após muitas gerações?

14. Seja $\{X_n; n \geq 0\}$ uma cadeia de Ehrenfest e suponha que X_0 tem uma distribuição binomial de parâmetros d e ½, ou seja

$$P(X_0 = x) = \frac{\binom{d}{x}}{2^d},\ x = 0,\dots,d\ .$$

Encontre a distribuição de X_1.

15. Considere a cadeia de Ehrenfest com d=3
a) Encontre $P_x(T_0 = n),\ x \in S\ e\ 1 \leq n \leq 3$.
b) Encontre P, P^2 e P^3.
c) Seja π_0 a distribuição Uniforme. Encontre π_1, π_2 e π_3.

16. Considere a cadeia de Markov tendo espaço de estados {0, 1, 2} e matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Explique ou interprete o comportamento da cadeia.
b) Mostre que $P^4 = P^2$.
c) Encontre $P^n, n \geq 1$.

17. Considere uma cadeia de Markov sobre os inteiros não negativos tal que, saindo de x, a cadeia vai para o estado $x+1$ com probabilidade p $(0 < p < 1)$ e vai para o estado 0 com probabilidade $1-p$.

a) Mostre que essa cadeia é irredutível.
b) Encontre $P_0(T_0 = n), n \geq 1$.
c) Mostre que essa cadeia é recorrente.

18. Considere uma cadeia de Markov tendo espaço de estados $S = \{0,1,\ldots,6\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

a) Determine quais estados são transientes e quais recorrentes.
b) Encontre $\rho_{0y}, \forall y \in S$.

19. Suponha que o último censo indica que as pessoas estão se deslocando das áreas rurais para as áreas urbanas a uma taxa de 5% ao ano e que as pessoas das áreas urbanas deslocam-se para as áreas rurais a uma taxa de 2% ao ano. Suponha, ainda, que o censo revelou que 80% da população mora atualmente em área urbana e 20% em área rural. Admita que a população permanece constante e que o Processo satisfaz à propriedade Markoviana.

a) Assumindo estacionariedade, que percentagem da população estará residindo em área rural dois anos após o último censo? (para isso encontre Π_2).

b) Assumindo estacionariedade, qual a distribuição da população no que diz respeito à moradia em zona rural ou urbana 3 anos após o último recenseamento?

c) Existe uma distribuição estacionária? Caso afirmativo, calcule-a.

d) Existe limite de P^n? Justifique.

20. Um certo produto é fabricado por duas empresas A e B que controlam totalmente o mercado. Atualmente a empresa A detém 60% dos consumidores e a empresa B os 40% restantes. A cada ano, a empresa A perde 2/3 dos seus clientes para a empresa B, enquanto que, no mesmo período, a empresa B perde a metade dos seus clientes para A.

a) Modele como uma cadeia de Markov.
b) Trata-se de um processo de Nascimento e Morte?
c) A distribuição inicial é estacionária?
d) Existe uma distribuição estacionária para a proporção de clientes? Ela é única? Justifique
e) Encontre a distribuição estacionária
f) Podemos afirmar que a distribuição limite coincide com a distribuição estacionária? Justifique.
g) Calcule a proporção de clientes de cada marca dentro de dois anos.

21. Considere uma cadeia de Markov tendo espaço de estados {0,1,2} e matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Mostre que essa cadeia possui uma única distribuição estacionária e encontre-a.

22. Considere uma cadeia de Markov tendo função de transição dada por $P(x,y) = \alpha_y,\ x \in s, y \in s$. Sendo α_y constante. Mostre que existe uma única distribuição estacionaria dada por $\pi(y) = \alpha_y,\ y \in s$.

23. Seja π uma distribuição estacionaria de uma cadeia de Markov. Suponha que y e z são dois estados tais que para alguma constante c:

$$P(x,y) = cP(x,z), \qquad x \in s.$$

Mostre que $\pi(y) = c\pi(z)$.

24. Considere uma canal de comunicação binário com as seguintes probabilidades de transição $P(0,1) = 0.1$ e $P(1,0) = 0.2$.

a) Encontre a matriz a n passos P^n.
b) Encontre a distribuição de X_n quando a distribuição inicial é $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 1) = 0.5$.
c) Encontre o limite de P^n, quando $n \to \infty$.

d) Encontre, se existir, a distribuição estacionária. Ela coincide com o limite de P^n?
e)

25. Sejam π_0 e π_1 duas distribuições estacionárias distintas para uma cadeia de Markov Mostre que para $0 \leq \alpha \leq 1$, a função π_α definida por

$$\pi_\alpha(x) = (1-\alpha)\pi_0(x) + \pi_1(x), \quad x \in s,$$

é uma distribuição estacionária.

26. Considere uma cadeia de nascimento e morte sobre os inteiros não-negativos e suponha que $p_0 = 1$, $p_x = p > 0$ e $q_x = q = 1 - p > 0$ para $x \geq 1$. Encontre a distribuição estacionária quando ela existir.

27. (Difícil!) Encontre a distribuição estacionária de uma cadeia de Ehrenfest e indique a média e variância dessa distribuição.

28. Considere uma cadeia de Markov sobre os inteiros não-negativos tendo função de transição dada por $P(x, x+1) = p$ e $P(x, 0) = 1 - p$, $0 < p < 1$. Mostre que essa cadeia possui uma única distribuição estacionária e encontre-a.

29. A função de transição de uma cadeia de Markov é chamada duplamente estocástica se

$$\sum_{x \in S} P(x, y) = 1, \quad y \in S.$$

Qual a distribuição estacionária de uma cadeia de Markov irredutível com *d* estados e tendo função de transição duplamente estocástica?

30. Uma partícula se movimenta ao longo de um círculo que possui marcas numeradas 0, 1, 2, 3 e 4 em sentido horário. Em cada passo existe uma probabilidade p da partícula pular para direita (sentido horário) e 1-p de pular para esquerda (sentido anti-horário). Seja Xn a localização da partícula no círculo após o n-ésimo passo.
Existe uma distribuição estacionária? Calcular a probabilidade limite P^n.

31. Considere uma cadeia de Markov sobre $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ tendo matriz de transição dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Encontre a distribuição concentrada em cada um dos conjuntos fechados irredutíveis.

32. Considere uma cadeia de Markov sobre $\{0,1,2,3,4,5\}$ tendo matriz de transição dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

Encontre a distribuição concentrada em cada um dos conjuntos fechados irredutíveis.

33. Considere uma cadeia de Markov sobre $\{0,1,2\}$ tendo matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Mostre que a cadeia é irredutível.
b) Encontre o período.
c) Encontre a distribuição estacionária.

34. Considere uma cadeia de Markov sobre $\{0,1,2, 3, 4\}$ tendo matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Mostre que a cadeia é irredutível.
b) Encontre o período.
c) Encontre a distribuição estacionária.