MAC0115 Introdução à Computação
Exercício-Programa 5 (EP5) Entregar até 24 de abril de 2019

Algumas aproximações para o valor de π

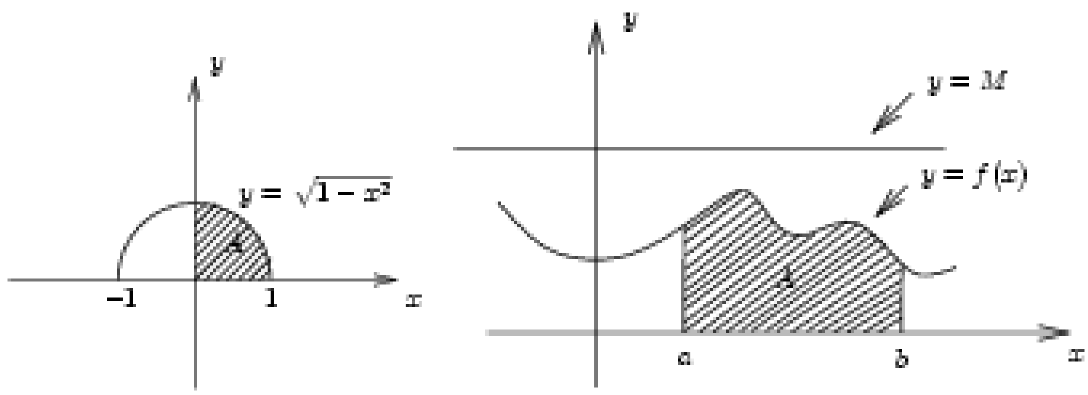
1 Cálculo do valor de π

Considere a função

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1,\ 1] \tag{1}$$

que é a semi-circunferência positiva de raio 1.

Sabemos que a área de uma circunferência de raio 1 é π. Logo, a área A sob $f(x)$ no intervalo $[0,\ 1]$ (veja a área hachurada no primeiro quadrante do gráfico na figura 1(a)) é $\pi/4$. Se soubermos calcular a área A, então podemos obter o valor de π.



(a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (b) Uma função qualquer

Figura 1: Área sob o gráfico de uma função.

2 Área sob o gráfico de uma função

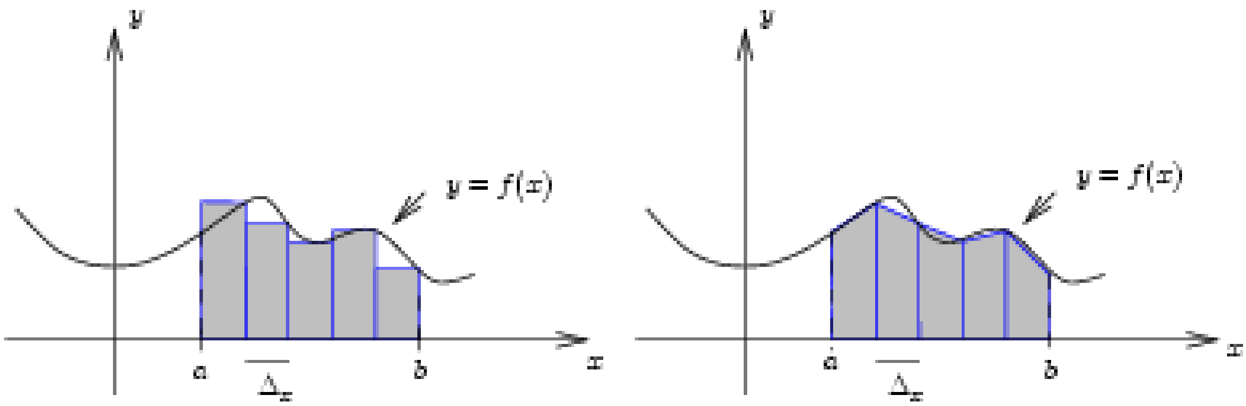
Seja f uma função positiva no intervalo $[a,\ b]$ tal que, para algum $M > 0$, $f(x) \leq M$, para todo $x \in [a,\ b]$. A região hachurada na figura 1(b) corresponde à área A sob $f(x)$, no intervalo $[a,\ b]$. A seguir apresentamos dois métodos que podem ser utilizados para calcular a área A.

2.1 Método dos retângulos

O cálculo de um valor aproximado da área A pelo **método dos retângulos** é definido da seguinte forma:

$$A \approx f(a + \Delta_x) \times \Delta_x + f(a + 2 \times \Delta_x) \times \Delta_x + \cdots + f(a + k \times \Delta_x) \times \Delta_x\ , \tag{2}$$

onde k é o número de retângulos e $\Delta_x = (b - a)/k$ é a largura dos retângulos.



(a) Método dos retângulos (b) Método dos trapézios

Figura 2: Dois métodos para cálculo de área.

A figura 2(a) mostra um exemplo com $k = 5$.

Observe que a precisão do resultado depende de k, ou seja, quanto maior o valor de k, mais próximo o valor calculado será do valor da área A.

2.2 Método dos trapézios

O cálculo de um valor aproximado da área A pelo **método dos trapézios** é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A \approx & ((f(a) + f(a + \Delta_x)) \times \Delta_x)/2 + ((f(a + \Delta_x) + f(a + 2 \times \Delta_x)) \times \Delta_x)/2 + \cdots \\ & \cdots + ((f(a + (k-1) \times \Delta_x) + f(a + k \times \Delta_x)) \times \Delta_x)/2 \,, \end{aligned} \tag{3}$$

onde k é o número de trapézios e $\Delta_x = (b - a)/k$ é a largura dos trapézios. A figura 2(b) mostra um exemplo com $k = 5$.

Observe que, também neste método, quanto maior o valor de k, mais próximo o valor calculado será do valor da área A.

3 Aproximação por série

Algumas séries infinitas foram estudadas para se determinar um valor aproximado para π. Umas convergem mais rapidamente que outras. Neste exercício-programa vamos considerar as duas séries descritas a seguir.

1. Série de **Wallis**:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \times \cdots \tag{4}$$

2. Série de **Nilakantha**:

$$\pi = 3 + \frac{4}{2 \times 3 \times 4} - \frac{4}{4 \times 5 \times 6} + \frac{4}{6 \times 7 \times 8} - \frac{4}{8 \times 9 \times 10} + \cdots \tag{5}$$

4 O exercício programa

Escreva um programa em Python 3.x que calcula valores aproximados para π de acordo com os quatro métodos descritos a seguir. Para cada um deles, seu programa deve ler um número em ponto flututante, *eps*, entre 0 e 1, que será utilizado para controlar a precisão da aproximação a ser calculada.
O seu programa deve usar somente os recursos da linguagem Python 3.x vistos em aula. Mas, não utilize listas.

1. Calcula um valor aproximado para π através da área sob a função $f(x) = \sqrt{1.0 - x^2}$, no intervalo $[a,\ b]$, com $a = 0.0$ e $b = 1.0$, conforme descrito na seção 1, utilizando o método dos retângulos descrito na seção 2. O cálculo dessa área deverá ser feito repetidamente, considerando $k = 2^i$ retângulos, para $i = 0, 1, 2, \cdots$, até que o valor absoluto da diferença entre o valor aproximado calculado, *piAproxRetangulos*, e o valor da constante `math`.pi seja menor do que *eps*.
2. Calcula um valor aproximado para π através da área sob a função $f(x) = \sqrt{1.0 - x^2}$, no intervalo $[a,\ b]$, com $a = 0.0$ e $b = 1.0$, conforme descrito na seção 1, utilizando o método dos trapézios descrito na seção 2. O cálculo dessa área deverá ser feito repetidamente, considerando $k = 2^i$ trapézios, para $i = 0, 1, 2, \cdots$, até que o valor absoluto da diferença entre o valor aproximado calculado, *piAproxTrapezios*, e o valor da constante `math`.pi seja menor do que *eps*.
3. Calcula um valor aproximado para π utilizando a série de Wallis descrita na seção 3. Os termos dessa série devem ser incluídos até que o valor absoluto da diferença entre o valor aproximado calculado, *piAproxWallis*, e o valor da constante `math`.pi seja menor do que *eps*.
4. Calcula um valor aproximado para π utilizando a série de Nilakantha descrita na seção 3. Os termos dessa série devem ser incluídos até que o valor absoluto da diferença entre o valor aproximado calculado, *piAproxNilakantha*, e o valor da constante `math`.pi seja menor do que *eps*.

Obs.: Para o cálculo do valor absoluto utilize a função `fabs` do módulo `math`.

4.1 Funções a serem implementadas

Implemente em seu programa, obrigatoriamente, todas as funções cujos protótipos estão descritos a seguir, sem nenhuma alteração, e sem alterar a ordem de definição das funções. Não utilize em seu programa nenhuma outra função além dessas obrigatórias.

```
def main():
    """
       ...
    """

def f(x):
    """ (float) -> float

    Recebe um número real x e se (1.0-x*x) for positivo, retorna
    a raiz quadrada de (1.0-x*x); em caso contrário, retorna 0.
    Obs.: para determinar a raiz quadrada é utilizada a função sqrt do módulo math.
    """

def areaMetodoRetangulos(a, b, k):
    """ (float, float, int) -> float

    Recebe dois números reais a e b, com a < b, e um inteiro positivo k.
    Esta função retorna um valor aproximado para a área sob a função f(x), no intervalo
```

```
    [a, b], calculada pelo método dos retângulos, utilizando k retângulos.
    """

def areaMetodoTrapezios(a, b, k):
    """ (float, float, int) -> float

    Recebe dois números reais a e b, com a < b, e um inteiro positivo k.
    Esta função retorna um valor aproximado para a área sob a função f(x), no intervalo
    [a, b], calculada pelo método dos trapézios, utilizando k trapézios.
    """

def piSerieWallis(eps):
    """ (float) -> int, float

    Recebe um número real eps, com 0 < eps < 1.
    Esta função calcula um valor aproximado para pi, piAproxWallis, através da série
    de Wallis, incluindo os primeiros termos até que o valor absoluto da diferença entre
    o valor calculado piAproxWallis e o valor da constante math.pi seja menor do que eps.
    A função retorna o número de termos considerados e o valor calculado piAproxWallis.
    Obs.: para determinar o valor absoluto é utilizada a função fabs do módulo math.
    """

def piSerieNilakantha(eps):
    """ (float) -> int, float

    Recebe um número real eps, com 0 < eps < 1.
    Esta função calcula um valor aproximado para pi, piAproxNilakantha, através da
    série de Nilakantha, incluindo os primeiros termos até que o valor absoluto da
    diferença entre o valor calculado piAproxNilakantha e o valor da constante
    math.pi seja menor do que eps. A função retorna o número de termos considerados
    e o valor calculado piAproxNilakantha.
    Obs.: para determinar o valor absoluto é utilizada a função fabs do módulo math.
    """
```

4.2 Saída do programa

Um exemplo de saída de uma execução para este programa está a seguir.

```
  Exemplo de saída de uma execução do EP5.

  Inicialmente, o programa deve fornecer uma descrição resumida do problema
  e as informações relevantes.

  Observe as informações que seu programa deve escrever para cada método.
  A saída do seu programa nesta parte deverá ser idêntica a deste exemplo,
  no conteúdo e na forma. Mas, é claro que podem existir pequenas diferenças
  entre os valores calculados pelo seu programa e os valores apresentados
  neste exemplo.

--------------------------------------------------------------------------

    ALGUMAS APROXIMACOES PARA O VALOR DE PI:
    (utilizamos math.pi que é 3.141592653589793)
```

```
--------------------------------------------------------------------------

Método 1 - Valor aproximado para PI utilizando o Método dos Retângulos

Digite um número (> 0 e < 1) para epsilon: 1e-5

Número de retângulos considerados para o cálculo da última área : 262144

Valor aproximado para PI : 3.141585015433538

--------------------------------------------------------------------------

Método 2 - Valor aproximado para PI utilizando o Método dos Trapézios

Digite um número (> 0 e < 1) para epsilon: 1e-8

Número de trapézios considerados para o cálculo da última área : 262144

Valor aproximado para PI : 3.141592644828062

--------------------------------------------------------------------------

Método 3 - Valor aproximado para PI utilizando a série de Wallis

Digite um número (> 0 e < 1) para epsilon: 1e-5

Número de termos da série incluídos no cálculo : 157079

Valor aproximado para PI : 3.14160265358235

--------------------------------------------------------------------------

Método 4 - Valor aproximado para PI utilizando a série de Nilakantha

Digite um número (> 0 e < 1) para epsilon: 1e-13

Número de termos da série incluídos no cálculo : 13396

Valor aproximado para PI : 3.141592653589893

--------------------------------------------------------------------------
```