

## Roteiro

Eficiência em  
Máquinas de  
Turing

Análise de  
Algoritmos

Eficiência em  
Algoritmos

### 1 Eficiência em Máquinas de Turing

Decidindo  $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

### 2 Análise de Algoritmos

### 3 Eficiência em Algoritmos

Ordenação e *Bubble Sort*

Intuição sobre Notação Assintótica

# Eficiência em Máquinas de Turing

## Roteiro

## Eficiência em Máquinas de Turing

Decidindo  $\mathcal{L} =$   
 $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

## Análise de Algoritmos

## Eficiência em Algoritmos

- Dado uma linguagem. Ex.:  $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
- Considere uma MT  $M$  que decide  $\mathcal{L}$ .
- Quanto tempo  $M$  gasta para decidir  $\mathcal{L}$ ?

# Eficiência em Máquinas de Turing

## Roteiro

## Eficiência em Máquinas de Turing

Decidindo  $\mathcal{L} =$   
 $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

## Análise de Algoritmos

## Eficiência em Algoritmos

- Dado uma linguagem. Ex.:  $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
- Considere uma MT  $M$  que decide  $\mathcal{L}$ .
- Quanto tempo  $M$  gasta para decidir  $\mathcal{L}$ ?
- O que é **tempo**?

# Eficiência em Máquinas de Turing

## Roteiro

## Eficiência em Máquinas de Turing

Decidindo  $\mathcal{L} =$   
 $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

## Análise de Algoritmos

## Eficiência em Algoritmos

- Dado uma linguagem. Ex.:  $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
- Considere uma MT  $M$  que decide  $\mathcal{L}$ .
- Quanto tempo  $M$  gasta para decidir  $\mathcal{L}$ ?
- O que é **tempo**? é o número de operações que  $M$  realiza, ou seja, o tamanho da sequência de configurações

# Eficiência em Máquinas de Turing

## Roteiro

## Eficiência em Máquinas de Turing

Decidindo  $\mathcal{L} =$   
 $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

## Análise de Algoritmos

## Eficiência em Algoritmos

- Dado uma linguagem. Ex.:  $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
- Considere uma MT  $M$  que decide  $\mathcal{L}$ .
- Quanto tempo  $M$  gasta para decidir  $\mathcal{L}$ ?
- O que é **tempo**? é o número de operações que  $M$  realiza, ou seja, o tamanho da seqüência de configurações
- Seqüência de configurações para **qual palavra**?
- claramente, o tamanho da seqüência vai depender do **tamanho da palavra**.

# Eficiência em Máquinas de Turing

## Roteiro

## Eficiência em Máquinas de Turing

Decidindo  $\mathcal{L} =$   
 $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

## Análise de Algoritmos

## Eficiência em Algoritmos

- Dado uma linguagem. Ex.:  $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
- Considere uma MT  $M$  que decide  $\mathcal{L}$ .
- Quanto tempo  $M$  gasta para decidir  $\mathcal{L}$ ?
- O que é **tempo**? é o número de operações que  $M$  realiza, ou seja, o tamanho da seqüência de configurações
- Seqüência de configurações para **qual palavra**?
- claramente, o tamanho da seqüência vai depender do **tamanho da palavra**.
- Mas, mesmo para **palavras do mesmo tamanho**, o tamanho da seqüência pode ser diferente!...

# Eficiência em Máquinas de Turing

... por causa disso:

- Usamos o **pior caso** entre todas as palavras de tamanho  $n$ .

Roteiro

Eficiência em  
Máquinas de  
Turing

Decidindo  $\mathcal{L} =$   
 $\{0^n 1^n \mid n \geq$   
 $0\}$

Análise de  
Algoritmos

Eficiência em  
Algoritmos

0000	6
0001	7
0010	7
0011	12
0100	4
0101	4
0110	4
0111	4
1000	4
1001	10
1010	14
1011	3
1100	3
1101	5
1110	8
1111	10

# Eficiência em Máquinas de Turing

- Associamos à máquina  $M$  uma função,  $f_M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , onde:  $f_M(n)$  é o tamanho da maior seqüência de configurações entre todas as palavras de tamanho  $n$ .

$$f_M(1) = 2$$

$$f_M(2) = 4$$

$$f_M(3) = 11$$

$$f_M(4) = 14$$

$$f_M(5) = 16$$

$$f_M(6) = 22$$

$$f_M(7) = 29$$

$$f_M(8) = 45$$

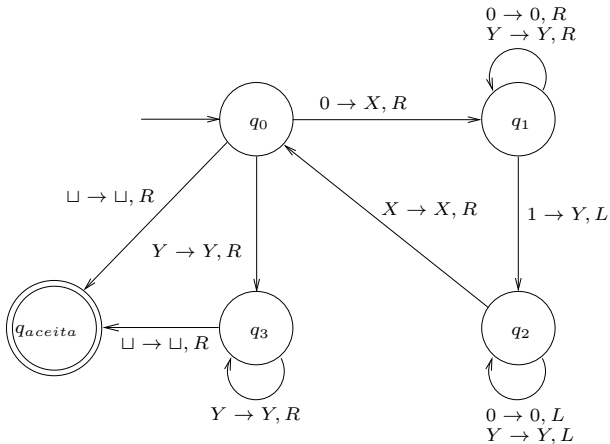
$$\vdots \quad \quad \vdots$$

$f_M(n)$  é a função de custo de tempo de pior caso para  $M$



# Decidindo $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

## A máquina $M_1$



Roteiro

Eficiência em  
Máquinas de  
Turing

Decidindo  $\mathcal{L} =$   
 $\{0^n 1^n \mid n \geq$   
 $0\}$

Análise de  
Algoritmos

Eficiência em  
Algoritmos

# A máquina $M_1$

## Seq. de configurações de $M_1$ para 000111

$q_0 000111 \Rightarrow X q_1 00111 \Rightarrow X 0 q_1 0111 \Rightarrow X 0 0 q_1 111 \Rightarrow X 0 q_2 0Y11 \Rightarrow X q_2 00Y11 \Rightarrow$   
 $q_2 X 00Y11$

$X q_0 00Y11 \Rightarrow X X q_1 0Y11 \Rightarrow X X 0 q_1 Y11 \Rightarrow X X 0 Y q_1 11 \Rightarrow X X 0 q_2 Y Y 1 \Rightarrow$   
 $X X q_2 0 Y Y 1 \Rightarrow X q_2 X 0 Y Y 1$

$X X q_0 0 Y Y 1 \Rightarrow X X X q_1 Y Y 1 \Rightarrow X X X Y q_1 Y 1 \Rightarrow X X X Y Y q_1 1 \Rightarrow X X X Y q_2 Y Y \Rightarrow$   
 $X X X q_2 Y Y Y \Rightarrow X X q_2 X Y Y Y$

$X X X q_0 Y Y Y \Rightarrow X X X Y q_3 Y Y \Rightarrow X X X Y Y q_3 Y \Rightarrow X X X Y Y Y q_3$

$X X X q_0 Y Y Y$

Roteiro

Eficiência em  
Máquinas de  
Turing

Decidindo  $\mathcal{L} =$   
 $\{0^n 1^n \mid n \geq$   
 $0\}$

Análise de  
Algoritmos

Eficiência em  
Algoritmos

# A máquina $M_1$

## Seq. de configurações de $M_1$ para 000111

$[q_0 000111 \Rightarrow X q_1 00111 \Rightarrow X 0 q_1 0111 \Rightarrow X 0 0 q_1 111 \Rightarrow X 0 q_2 0Y11 \Rightarrow X q_2 00Y11 \Rightarrow q_2 X 00Y11]$  6 + 1

$[X q_0 00Y11 \Rightarrow X X q_1 0Y11 \Rightarrow X X 0 q_1 Y11 \Rightarrow X X 0 Y q_1 11 \Rightarrow X X 0 q_2 Y Y 1 \Rightarrow X X q_2 0 Y Y 1 \Rightarrow X q_2 X 0 Y Y 1]$  6 + 1

$[X X q_0 0 Y Y 1 \Rightarrow X X X q_1 Y Y 1 \Rightarrow X X X Y q_1 Y 1 \Rightarrow X X X Y Y q_1 1 \Rightarrow X X X Y q_2 Y Y \Rightarrow X X X q_2 Y Y Y \Rightarrow X X q_2 X Y Y Y]$  6 + 1

$[X X X q_0 Y Y Y \Rightarrow X X X Y q_3 Y Y \Rightarrow X X X Y Y q_3 Y \Rightarrow X X X Y Y Y q_3]$  1 + 6/2

$[X X X q_0 Y Y Y]$  1

Roteiro

Eficiência em  
Máquinas de  
Turing

Decidindo  $\mathcal{L} =$   
 $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Análise de  
Algoritmos

Eficiência em  
Algoritmos

# A máquina $M_1$

## Seq. de configurações de $M_1$ para 000111

$[q_0 000111 \Rightarrow X q_1 00111 \Rightarrow X 0 q_1 0111 \Rightarrow X 0 0 q_1 111 \Rightarrow X 0 q_2 0Y11 \Rightarrow X q_2 00Y11 \Rightarrow q_2 X 00Y11]$  6 + 1

$[X q_0 00Y11 \Rightarrow X X q_1 0Y11 \Rightarrow X X 0 q_1 Y11 \Rightarrow X X 0 Y q_1 11 \Rightarrow X X 0 q_2 Y Y 1 \Rightarrow X X q_2 0 Y Y 1 \Rightarrow X q_2 X 0 Y Y 1]$  6 + 1

$[X X q_0 0 Y Y 1 \Rightarrow X X X q_1 Y Y 1 \Rightarrow X X X Y q_1 Y 1 \Rightarrow X X X Y Y q_1 1 \Rightarrow X X X Y q_2 Y Y \Rightarrow X X X q_2 Y Y Y \Rightarrow X X q_2 X Y Y Y]$  6 + 1

$[X X X q_0 Y Y Y \Rightarrow X X X Y q_3 Y Y \Rightarrow X X X Y Y q_3 Y \Rightarrow X X X Y Y Y q_3]$  1 + 6/2

$[X X X q_0 Y Y Y]$  1

Total:  $\frac{6}{2}(1 + 6) + 1 + \frac{6}{2} + 1 = 26$

Roteiro

Eficiência em  
Máquinas de  
Turing

Decidindo  $\mathcal{L} =$   
 $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Análise de  
Algoritmos

Eficiência em  
Algoritmos

# A máquina $M_1$

## Seq. de configurações de $M_1$ para 000111

$[q_0 000111 \Rightarrow X q_1 00111 \Rightarrow X 0 q_1 0111 \Rightarrow X 0 0 q_1 111 \Rightarrow X 0 q_2 0Y11 \Rightarrow X q_2 00Y11 \Rightarrow$   
 $q_2 X 00Y11]$  6 + 1

$[X q_0 00Y11 \Rightarrow X X q_1 0Y11 \Rightarrow X X 0 q_1 Y11 \Rightarrow X X 0 Y q_1 11 \Rightarrow X X 0 q_2 Y Y 1 \Rightarrow$   
 $X X q_2 0 Y Y 1 \Rightarrow X q_2 X 0 Y Y 1]$  6 + 1

$[X X q_0 0 Y Y 1 \Rightarrow X X X q_1 Y Y 1 \Rightarrow X X X Y q_1 Y 1 \Rightarrow X X X Y Y q_1 1 \Rightarrow X X X Y q_2 Y Y \Rightarrow$   
 $X X X q_2 Y Y Y \Rightarrow X X q_2 X Y Y Y]$  6 + 1

$[X X X q_0 Y Y Y \Rightarrow X X X Y q_3 Y Y \Rightarrow X X X Y Y q_3 Y \Rightarrow X X X Y Y Y q_3]$  1 + 6/2

$[X X X q_0 Y Y Y]$  1

Total:  $\frac{6}{2}(1 + 6) + 1 + \frac{6}{2} + 1 = 26$

Generalizando:

$$\frac{n}{2}(1 + n) + 1 + \frac{n}{2} + 1 = \frac{n^2}{2} + 2\frac{n}{2} + 2 \rightarrow f_{M_1}(n) = \frac{n^2}{2} + n + 2$$

# A máquina $M_1$

## Custo de pior caso

$n$	$f_M(n)$	$f_{M_1}(n)$	MxM1
2	10	6	1,666
4	26	14	1,857
8	82	42	1,952
16	290	146	1,986
32	1090	546	1,996
64	4226	2114	1,999
128	16642	8322	1,999
256	66950	33026	1,999
512	263170	131586	1,999

Dá para ser mais eficiente?

Roteiro

Eficiência em  
Máquinas de  
Turing

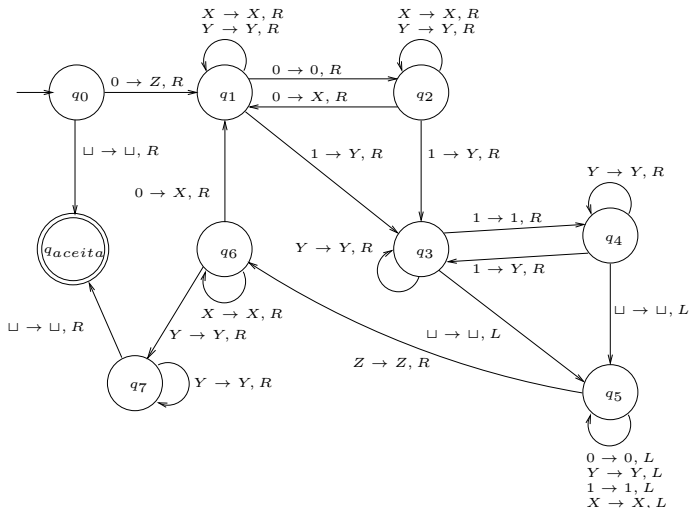
Decidindo  $\mathcal{L} =$   
 $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Análise de  
Algoritmos

Eficiência em  
Algoritmos

# Decidindo $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

## A máquina $M_2$



Roteiro

Eficiência em  
Máquinas de  
Turing

Decidindo  $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Análise de  
Algoritmos

Eficiência em  
Algoritmos

# A máquina $M_2$

## Seq. de configurações de $M_2$ para 00001111

$q_0 00001111$

$Zq_1 0001111 \Rightarrow Z0q_2 001111 \Rightarrow Z0Xq_1 01111 \Rightarrow Z0X0Yq_2 1111 \Rightarrow Z0X0Yq_3 111 \Rightarrow$   
 $Z0X0Y1q_4 11 \Rightarrow Z0X0Y1Yq_3 1 \Rightarrow Z0X0Y1Y1q_4$

$Z0X0Y1Yq_5 1 \Rightarrow Z0X0Y1q_5 Y1 \Rightarrow Z0X0Yq_5 1Y1 \Rightarrow Z0X0q_5 Y1Y1 \Rightarrow Z0Xq_5 0Y1Y1 \Rightarrow$   
 $Z0q_5 X0Y1Y1 \Rightarrow Zq_5 0X0Y1Y1$

Roteiro

Eficiência em  
Máquinas de  
Turing

Decidindo  $\mathcal{L} =$   
 $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Análise de  
Algoritmos

Eficiência em  
Algoritmos



# A máquina $M_2$

## Seq. de configurações de $M_2$ para 00001111

$[q_0 00001111]$  1 configuração inicial

$[Zq_1 0001111 \Rightarrow Z0q_2 001111 \Rightarrow Z0Xq_1 01111 \Rightarrow Z0X0Yq_2 1111 \Rightarrow Z0X0Yq_3 111 \Rightarrow Z0X0Y1q_4 11 \Rightarrow Z0X0Y1Yq_3 1 \Rightarrow Z0X0Y1Y1q_4]$  8 percorre até o final da palavra

$[Z0X0Y1Yq_5 1 \Rightarrow Z0X0Y1q_5 Y1 \Rightarrow Z0X0Yq_5 1Y1 \Rightarrow Z0X0q_5 Y1Y1 \Rightarrow Z0Xq_5 0Y1Y1 \Rightarrow Z0q_5 X0Y1Y1 \Rightarrow Zq_5 0X0Y1Y1]$  7 retorna à posição inicial

Roteiro

Eficiência em  
Máquinas de  
Turing

Decidindo  $\mathcal{L} =$   
 $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Análise de  
Algoritmos

Eficiência em  
Algoritmos

# A máquina $M_2$

Seq. de configurações de  $M_2$  para 00001111

$[q_0 00001111]$  1 configuração inicial

$[Z_{q_1} 0001111 \Rightarrow Z_{q_2} 001111 \Rightarrow Z_{0X_{q_1} 01111} \Rightarrow Z_{0X_{0Y_{q_2}} 1111} \Rightarrow Z_{0X_{0Y_{q_3}} 111} \Rightarrow Z_{0X_{0Y_{1q_4}} 11} \Rightarrow Z_{0X_{0Y_{1Y_{q_3}}} 1} \Rightarrow Z_{0X_{0Y_{1Y_{1q_4}}}}]$  8 percorre até o final da palavra

$[Z_{0X_{0Y_{1Y_{q_5}}} 1} \Rightarrow Z_{0X_{0Y_{1q_5}} Y_1} \Rightarrow Z_{0X_{0Y_{q_5} 1Y_1} \Rightarrow Z_{0X_{0q_5} Y_1 Y_1} \Rightarrow Z_{0X_{q_5 0Y_1 Y_1}} \Rightarrow Z_{0q_5 X_{0Y_1 Y_1}} \Rightarrow Z_{q_5 0X_{0Y_1 Y_1}}]$  7 retorna à posição inicial

Quantas vezes vai repetir esse procedimento?

Roteiro

Eficiência em  
Máquinas de  
Turing

Decidindo  $\mathcal{L} =$   
 $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Análise de  
Algoritmos

Eficiência em  
Algoritmos

# A máquina $M_2$

Seq. de configurações de  $M_2$  para 00001111

$[q_0 00001111]$  1 configuração inicial

$[Z_{q_1} 0001111 \Rightarrow Z_{q_2} 001111 \Rightarrow Z_{q_1} 01111 \Rightarrow Z_{q_2} 1111 \Rightarrow Z_{q_3} 111 \Rightarrow Z_{q_4} 11 \Rightarrow Z_{q_3} 1 \Rightarrow Z_{q_4}]$  8 percorre até o final da palavra

$[Z_{q_5} 1 \Rightarrow Z_{q_5} Y1 \Rightarrow Z_{q_5} 1Y1 \Rightarrow Z_{q_5} Y1Y1 \Rightarrow Z_{q_5} 0Y1Y1 \Rightarrow Z_{q_5} X0Y1Y1 \Rightarrow Z_{q_5} 0X0Y1Y1]$  7 retorna à posição inicial

Quantas vezes vai repetir esse procedimento?

Total:  $\log_2(8) * (1 + 8 + 7) = 2 * 8 * \log_2(8) = 48$

# A máquina $M_2$

Seq. de configurações de  $M_2$  para 00001111

$[q_0 00001111]$  1 configuração inicial

$[Z_{q_1} 0001111 \Rightarrow Z_{q_2} 001111 \Rightarrow Z_{q_1} 01111 \Rightarrow Z_{q_2} 1111 \Rightarrow Z_{q_3} 111 \Rightarrow Z_{q_4} 11 \Rightarrow Z_{q_3} 1 \Rightarrow Z_{q_4}]$  8 percorre até o final da palavra

$[Z_{q_5} 1 \Rightarrow Z_{q_5} Y 1 \Rightarrow Z_{q_5} 1 Y 1 \Rightarrow Z_{q_5} Y 1 Y 1 \Rightarrow Z_{q_5} 0 Y 1 Y 1 \Rightarrow Z_{q_5} X 0 Y 1 Y 1 \Rightarrow Z_{q_5} 0 X 0 Y 1 Y 1]$  7 retorna à posição inicial

Quantas vezes vai repetir esse procedimento?

Total:  $\log_2(8) * (1 + 8 + 7) = 2 * 8 * \log_2(8) = 48$

Generalizando:  $\log_2(n) * (1 + n + n - 1) \rightarrow f_{M_2}(n) = 2n \log_2 n$

## Quem é mais eficiente?

Custo de pior caso

$n$	$f_M(n)$	$f_{M_1}(n)$	$f_{M_2}(n)$	M1xM2
2	10	6	4	1,5
4	26	14	16	0,875
8	82	42	48	0,875
16	290	146	128	1,14
32	1090	546	320	1,7
64	4226	2114	768	2,75
128	16642	8322	1792	4,64
256	66950	33026	4096	8,06
512	263170	131586	9216	14,27
1024	1050626	525314	20480	25,65
2048	4198402	2099202	45056	46,59

No limite, quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $M_2$  é mais eficiente!

# Análise de Complexidade de Tempo de Algoritmos

Roteiro

Eficiência em  
Máquinas de  
Turing

Análise de  
Algoritmos

Eficiência em  
Algoritmos

Medida da eficiência com a qual  
um dado algoritmo resolve um dado problema

- Nossas **palavras-chave**:
  - Função de custo do algoritmo;
  - Notação Assintótica;
  - Cotas Superiores e Inferiores:
    - para funções de custo de algoritmos;
    - para problemas;

# Máquinas de Turing → Algoritmos

Roteiro

Eficiência em  
Máquinas de  
Turing

Análise de  
Algoritmos

Eficiência em  
Algoritmos

Ordenação e  
*Bubble Sort*  
Intuição sobre  
Notação  
Assintótica

Mas vimos que...

Formal	Intuitivo, conceitual
Linguagens	Problemas
Máquina de Turing	Algoritmo
Palavra	Entrada ou Instância

Então o que fizemos para as Máquinas de Turing  
também vale para análise de algoritmos!

## Bubble Sort

Roteiro

Eficiência em  
Máquinas de  
Turing

Análise de  
Algoritmos

Eficiência em  
Algoritmos

Ordenação e  
*Bubble Sort*

Intuição sobre  
Notação  
Assintótica

```
int v[N];  
...  
bubbleSort( int *v ){  
    int i, flag = 1;  
    while( flag ){  
        flag = 0;  
        for( i = 0; i < N-1; i++ )  
            if (v[i] > v[i+1]){  
                swap( &v[i], &v[i+1] );  
                flag = 1;  
            }  
    }  
}
```

Quantas **comparações** serão feitas no pior caso?



# Bubble Sort

## Roteiro

## Eficiência em Máquinas de Turing

## Análise de Algoritmos

## Eficiência em Algoritmos

## Ordenação e Bubble Sort

## Intuição sobre Notação Assintótica

- No melhor caso, o vetor  $v$  já está ordenado e serão feitas  $(n - 1)$  comparações;
- Se mais ou menos metade dos elementos estiverem ordenados: mais ou menos  $\frac{n}{2}(n - 1)$  comparações;
- No pior caso,  $v$  está em ordem decrescente:  $n(n - 1)$  comparações;

$$f_{bubbleSort}(n) = n^2 - n$$

# Notação Assintótica

Roteiro

Eficiência em  
Máquinas de  
Turing

Análise de  
Algoritmos

Eficiência em  
Algoritmos

Ordenação e  
Bubble Sort

Intuição sobre  
Notação  
Assintótica

A **notação assintótica** dá informação  
sobre o crescimento assintótico de uma função

A **intuição** é:

função	$\leq$	$\geq$	$=$	$<$	$>$
$f_{M_1}(n) = \frac{n^2}{2} + n + 2$	$O(n^2)$	$\Omega(n)$	$\Theta(n^2)$	$o(n^3)$	$w(n)$
$f_{M_2}(n) = 2n \log_2 n$	$O(n^4)$	$\Omega(n)$	$\Theta(n \log n)$	$o(n^2)$	$w(n)$
$f_{bubbleSort}(n) = n^2 - n$	$O(f_{M_2}(n))$	$\Omega(\log n)$	$\Theta(f_{M_1}(n))$	$o(n^4)$	$w(n \log n)$