Roteiro da Aula 5

Gramática

- Informalmente, uma gramática é um mecanismo de produção de palavras (ou sentenças) a partir de substituição de variáveis.
- Palavras-chave: Variáveis, símbolos terminais, produções (ou regras)

$$
\begin{array}{lll}
\mathsf{E} & \rightarrow & \varepsilon \\
\mathsf{E} & \rightarrow & \mathsf{0E1}
\end{array}
$$

- Variáveis: E;
- Símbolos terminais: $\{0, 1, \varepsilon\}$;
- Produções: $\{\mathsf{E} \rightarrow \varepsilon,\ \mathsf{E} \rightarrow \mathsf{0E1}\}$.

Gramática

Que linguagem essa gramática vai gerar?

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E} &\rightarrow \varepsilon \\
\mathsf{E} &\rightarrow \mathsf{0E1}
\end{aligned}
$$

Que palavras são geradas (aceitas) pela gramática?

- 0011;
- ε;
- 00011;
- 01010101.

Gramática

Que linguagem essa gramática vai gerar?

$$
\begin{array}{lcl}
E & \rightarrow & \varepsilon \\
E & \rightarrow & 0E1
\end{array}
$$

Que palavras são geradas (aceitas) pela gramática?

- 0011;
- ε;
- 00011;
- 01010101.

Nossa velha conhecida: $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$.

Sintaxe

Uma Gramática Livre de Contexto é um tupla $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde

V	conjunto finito de variáveis (ou símbolos não-terminais)
Σ	alfabeto finito de símbolos terminais: $V \cap \Sigma = \emptyset$
$S \in V$	variável inicial
$R \subseteq V \times (\Sigma \cup V)^*$	conjunto finito de produções (ou regras)

Escrevemos uma produção com $A \to \alpha$, onde $A \in V$ e $\alpha \in (\Sigma \cup V)^*$

Sintaxe

Exemplo

$$G_1 = (\{E\}, \{+, *, [,], \boldsymbol{id}\}, P, E)$$

onde $P = \{(E, E+E), (E, E*E), (E, [E]), (E, \boldsymbol{id})\}$

Representação gráfica

$$E \to E + E$$
$$E \to E * E$$
$$E \to [E]$$
$$E \to \boldsymbol{id}$$

ou

$$E \to E + E \mid E * E \mid [E] \mid \boldsymbol{id}$$

Semântica

- Dada uma gramática $G = (V, \Sigma, R, S)$;
- Sejam u, v e w palavras sobre $V \cup \Sigma$;
- Seja A uma variável em V;
- Dizemos que uAv gera (ou produz) uwv, denotado $uAv \Rightarrow uwv$, se:
  - Existe uma produção $A \to w$ em R;

Exemplo: em G_1

$$\underbrace{[\boldsymbol{id}+}_{u}\underbrace{E}_{A}\underbrace{]}_{v} \Rightarrow \underbrace{[\boldsymbol{id}+}_{u}\underbrace{E * E}_{w}\underbrace{]}_{v}$$

Semântica

- Finalmente, a linguagem gerada (aceita) por G é:
- $\mathcal{L}(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} w\}$

Semântica

- Finalmente, a linguagem gerada (aceita) por G é:
- $\mathcal{L}(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} w\}$

- Escrevemos $u \overset{*}{\Rightarrow} v$ se:
  - $u = v$; ou
  - existe seqüência $u \Rightarrow u_1 \Rightarrow u_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow u_k \Rightarrow v$, para $k \geq 0$.

Exemplo em G_1: $E \overset{*}{\Rightarrow} [\boldsymbol{id} + \boldsymbol{id}]$, pois

$$\underbrace{E \Rightarrow [E] \Rightarrow [E + E] \Rightarrow [\boldsymbol{id} + E] \Rightarrow [\boldsymbol{id} + \boldsymbol{id}]}_{\text{Derivação de } [\boldsymbol{id}+\boldsymbol{id}] \text{ a partir de } E}$$

Semântica

Linguagem Livre de Contexto

Uma linguagem $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ é Livre de Contexto se existe uma gramática livre de contexto G tal que $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}$.

Exercícios

Construa uma gramática livre de contexto para as linguagens abaixo, sobre $\Sigma = \{0, 1\}$:

- Σ^*;
- $\{0^n \mid n \geq 0\}$;
- $\{w \mid |w| \text{ é par}\}$;
- $\{w \mid w \text{ contém dois 1's consecutivos}\}$;
- $\{w \mid w \text{ contém pelo menos três 1's}\}$.

Ambigüidade

- A palavra $\boldsymbol{id} + \boldsymbol{id} * \boldsymbol{id}$ possui várias derivações em G_1:

$$E \Rightarrow E + E \Rightarrow \boldsymbol{id} + E \Rightarrow \boldsymbol{id} + E * E \Rightarrow \boldsymbol{id} + E * \boldsymbol{id} \Rightarrow \boldsymbol{id} + \boldsymbol{id} * \boldsymbol{id}$$

$$E \Rightarrow E * E \Rightarrow E * \boldsymbol{id} \Rightarrow E + E * \boldsymbol{id} \Rightarrow \boldsymbol{id} + E * \boldsymbol{id} \Rightarrow \boldsymbol{id} + \boldsymbol{id} * \boldsymbol{id}$$

$$E \Rightarrow E + E \Rightarrow \boldsymbol{id} + E \Rightarrow \boldsymbol{id} + E * E \Rightarrow \boldsymbol{id} + \boldsymbol{id} * E \Rightarrow \boldsymbol{id} + \boldsymbol{id} * \boldsymbol{id}$$

$$E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow \boldsymbol{id} + E * E \Rightarrow \boldsymbol{id} + E * \boldsymbol{id} \Rightarrow \boldsymbol{id} + \boldsymbol{id} * \boldsymbol{id}$$

$$E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow \boldsymbol{id} + E * E \Rightarrow \boldsymbol{id} + \boldsymbol{id} * E \Rightarrow \boldsymbol{id} + \boldsymbol{id} * \boldsymbol{id}$$

$$\vdots$$

Ambigüidade

- A palavra $\boldsymbol{id} + \boldsymbol{id} * \boldsymbol{id}$ possui várias derivações em G_1:

$$E \Rightarrow E + E \Rightarrow \boldsymbol{id} + E \Rightarrow \boldsymbol{id} + E * E \Rightarrow \boldsymbol{id} + E * \boldsymbol{id} \Rightarrow \boldsymbol{id} + \boldsymbol{id} * \boldsymbol{id}$$

$$E \Rightarrow E * E \Rightarrow E * \boldsymbol{id} \Rightarrow E + E * \boldsymbol{id} \Rightarrow \boldsymbol{id} + E * \boldsymbol{id} \Rightarrow \boldsymbol{id} + \boldsymbol{id} * \boldsymbol{id}$$

$$E \Rightarrow E + E \Rightarrow \boldsymbol{id} + E \Rightarrow \boldsymbol{id} + E * E \Rightarrow \boldsymbol{id} + \boldsymbol{id} * E \Rightarrow \boldsymbol{id} + \boldsymbol{id} * \boldsymbol{id}$$

$$E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow \boldsymbol{id} + E * E \Rightarrow \boldsymbol{id} + E * \boldsymbol{id} \Rightarrow \boldsymbol{id} + \boldsymbol{id} * \boldsymbol{id}$$

$$E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow \boldsymbol{id} + E * E \Rightarrow \boldsymbol{id} + \boldsymbol{id} * E \Rightarrow \boldsymbol{id} + \boldsymbol{id} * \boldsymbol{id}$$

$$\vdots$$

Derivações mais à esquerda. Por quê?

Ambigüidade

- Dizemos que a palavra $\boldsymbol{id} + \boldsymbol{id} * \boldsymbol{id}$ é gerada ambiguamente em G_1; pois possui mais de uma derivação mais à esquerda em G_1.

Isso não ocorre necessariamente para toda palavra gerada em G_1!

- Exemplo: $[\boldsymbol{id} + \boldsymbol{id}] * \boldsymbol{id}$ possui apenas uma derivação mais à esquerda:

$$E \Rightarrow E * E \Rightarrow [E] * E \Rightarrow [E + E] * E \Rightarrow [\boldsymbol{id} + E] * E \Rightarrow [\boldsymbol{id} + \boldsymbol{id}] * E \Rightarrow [\boldsymbol{id} + \boldsymbol{id}] * \boldsymbol{id}$$

Gramática Ambígua

Uma gramática livre de contexto G é ambígua se existe uma palavra w gerada ambiguamente em G.

Se é regular, é livre de contexto...

Intuição sobre a prova desse teorema