Roteiro da Aula 4

Operações regulares – Semântica

Seja Σ um alfabeto e L, L_1 e L_2 linguagens sobre Σ:

- União: $L_1 \cup L_2 = \{x \mid x \in L_1 \text{ ou } x \in L_2\}$;
- Concatenação: $L_1 L_2 = \{xy \mid x \in L_1 \text{ e } y \in L_2\}$;
  - Se $L_1 = \{00, 01, 10, 11\}$ e $L_2 = \emptyset$, quem é $L_1 L_2$?
  - Por definição: $L^1 = L$, $L^2 = LL$, $L^3 = LLL$, $\ldots$;
    - e $L^0 = \{\varepsilon\}$;
- Kleene closure: $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$.

Exemplos

- $L_1 = \{\texttt{bad}, \texttt{good}\}$ e $L_2 = \{\texttt{boy}, \texttt{girl}\}$:
  - $L_1L_2 = \{\texttt{badgirl}, \texttt{badboy}, \texttt{goodgirl}, \texttt{goodboy}\}$;
- $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots\}$;
- $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$;

Expressões Regulares

São expressões (seqüências de símbolos), definidas recursivamente, que representam linguagens sobre um alfabeto Σ

Expressões Regulares

Expressão regular	representa a linguagem
$\emptyset$	vazia
ε	$\{\varepsilon\}$
$\boldsymbol{a}$	$\{a\}$, para cada $a \in \Sigma$
$(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s})$	$R \cup S$
$(\boldsymbol{rs})$	RS
$(\boldsymbol{r}^*)$	R^*

onde $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ são expressões regulares representando as linguagens R e S

Exemplos

Se $\Sigma = \{0, 1\}$:

- $(\mathbf{0} + \mathbf{1})^*$;
- $((\mathbf{0}(\mathbf{1}^*)) + \mathbf{0})$;
  - abreviando como $\mathbf{01}^* + \mathbf{0}$;
  - * precede concatenação, que precede $+$;
- $(\mathbf{0} + \mathbf{1})^* 1 (\mathbf{0} + \mathbf{1})(\mathbf{0} + \mathbf{1})$;
- $\boldsymbol{rr}^*$ é abreviado como $\boldsymbol{r}^+$;

Usamos $\mathcal{L}(\boldsymbol{r})$ para denotar a linguagem representada pela expressão regular $\boldsymbol{r}$.

Exercícios

Escreva expressões regulares para as seguintes linguagens sobre $\{0,1\}$:

- as palavras que têm exatamente um 1;
- as palavras que têm pelo menos um 1;
- as palavras que têm tamanho par;
- as palavras que começam e terminam com o mesmo símbolo;
- as palavras que têm um número par de 0's e/ou de 1's.

Equivalência entre AFN e Exp. Reg.

Teorema

Para toda expressão regular $\boldsymbol{r}$, existe AFN A, tal que $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\boldsymbol{r})$.

Linguagem Regular

Uma linguagem $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ é Regular se existe uma expressão regular $\boldsymbol{r}$ tal que $\mathcal{L}(\boldsymbol{r}) = \mathcal{L}$.

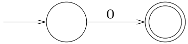
Intuição sobre o Teorema

$(0+1)^*10$

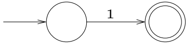
Intuição sobre o Teorema

$(0+1)^*10$

0



1



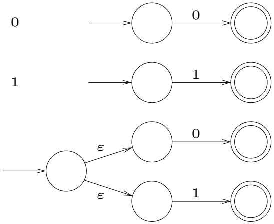
Intuição sobre o Teorema

$(0+1)^*10$

0

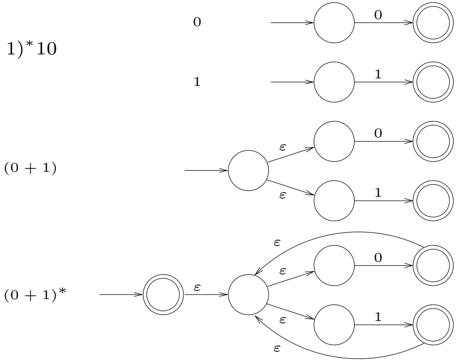
1

$(0+1)$



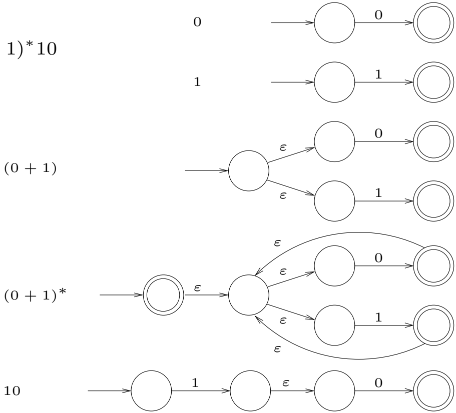
Intuição sobre o Teorema

$(0+1)^*10$



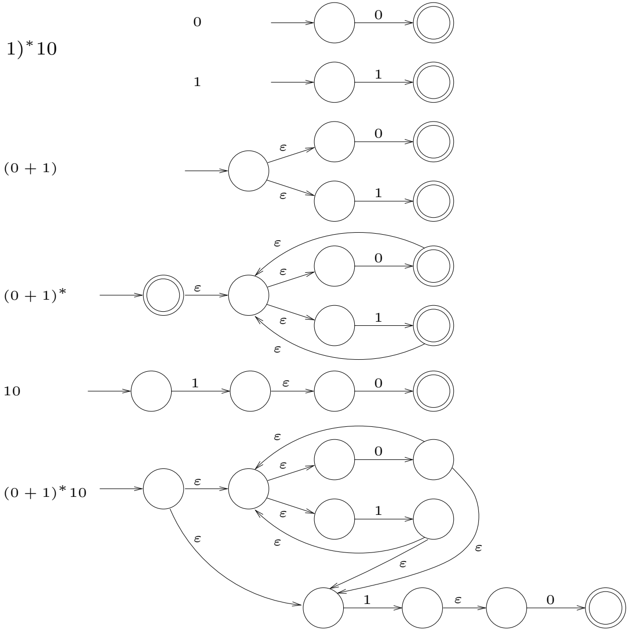
Intuição sobre o Teorema

$(0+1)^*10$

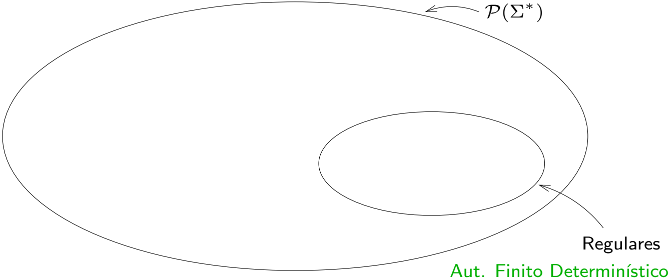


Intuição sobre o Teorema

$(0+1)^*10$



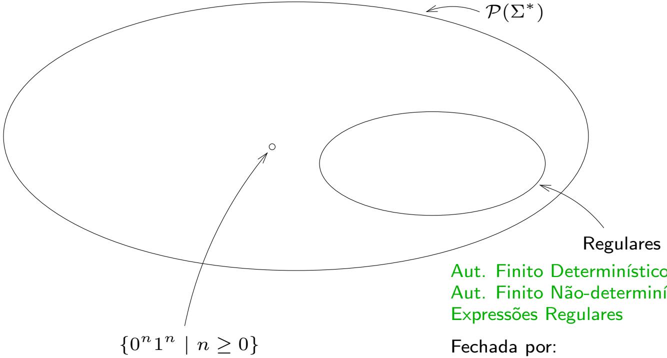
Situação Atual



Aut. Finito Determinístico
Aut. Finito Não-determinístico
Expressões Regulares

Fechada por:
Complementação
União
Interseção

Situação Atual



Aut. Finito Determinístico
Aut. Finito Não-determinístico
Expressões Regulares

Fechada por:
Complementação
União
Interseção

Linguagens Finitas

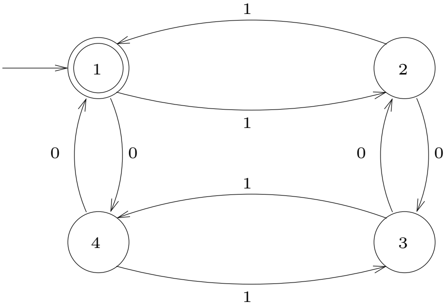
Teorema

Toda linguagem Finita é Regular.

- Um problema com um número finito de instâncias, a rigor, é trivial do ponto de vista de Computabilidade (e mesmo de Complexidade Computacional)

O autômato é Finito!

$$\mathcal{L} = \{w \mid \#\text{ de }1\text{'s e }\#\text{ de }0\text{'s é par}\}$$



o que acontece se $|w| > 4$?

Pumping Lemma

Pumping Lemma

- Para toda linguagem regular $\mathcal{L}$;
- Existe $p \in \mathbb{N}$; tal que
- Para toda palavra $w \in \mathcal{L}$, $|w| \geq p$;
- Existe x, y, z:
  - $w = xyz$;
  - $|xy| \leq p$;
  - $|y| \geq 1$; tal que
- Para todo $i \geq 0$, $xy^iz \in \mathcal{L}$.

Pumping Lemma

Pumping Lemma

- Para toda linguagem regular $\mathcal{L}$;
- Existe $p \in \mathbb{N}$; tal que
- Para toda palavra $w \in \mathcal{L}$, $|w| \geq p$;
- Existe x, y, z:
  - $w = xyz$;
  - $|xy| \leq p$;
  - $|y| \geq 1$; tal que
- Para todo $i \geq 0$, $xy^iz \in \mathcal{L}$.

Se $\mathcal{L}$ é regular $\Longrightarrow$ vale o PL para $\mathcal{L}$
$\downarrow$ contrapositiva
Se não vale o PL para $\mathcal{L} \Longrightarrow \mathcal{L}$ não é regular

Aplicando o PL

Se não vale o PL para $\mathcal{L}$

- Para todo $p \in \mathbb{N}$;
- Existe palavra $w \in \mathcal{L}$, $|w| \geq p$; tal que
- Para todo x, y, z:
    - $w = xyz$;
    - $|xy| \leq p$;
    - $|y| \geq 1$;
- Existe $i \geq 0$, tal que $xy^iz \notin \mathcal{L}$.

Aplicando o PL

Se não vale o PL para $\mathcal{L}$

- Para todo $p \in \mathbb{N}$;
- Existe palavra $w \in \mathcal{L}$, $|w| \geq p$; tal que
- Para todo x, y, z:
  - $w = xyz$;
  - $|xy| \leq p$;
  - $|y| \geq 1$;
- Existe $i \geq 0$, tal que $xy^iz \notin \mathcal{L}$.

Vamos mostrar que $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$ não é regular...

Exercício

Mostre que $\mathcal{L} = \{w \mid w \in \Sigma^* \ e \ w = w^r\}$
isto é, w é um palíndromo, **NÃO** é regular