Marcelo Drummond Fonseca – DRE 117216621

Leonardo Emerson André Alves – DRE

João Heitor Albuquerque – DRE 118170917

Breno Curvello dos Santos Breves – DRE 118154107

1)

Podemos calcular a média de duração de um período ocupado com $\mu = 2$ e $\lambda = 1$ utilizando a fórmula:

$E(B) = 1 / (\mu - \lambda) = 1 / (2 - 1) = 1 / 1 = 1$

1.1)

Podemos utilizar da fórmula do exercício anterior para provar que a média de duração do período ocupado também pode ser calculado através de $E(B) = (1 / \mu) / (1 - \rho)$.

Sabemos que $\rho = \lambda / \mu$, então $\lambda = \rho * \mu$, substituindo na equação, temos:

$E(B) = 1 / (\mu - \lambda) = 1 / (\mu - \rho * \mu) = 1/ \mu * (1- \rho) = (1/ \mu) * (1/ (1 - \rho)) = (1 / \mu) / (1 - \rho)$

1.2)

Alterando um pouco o código do simulador do trabalho anterior para que salve os tempos em que saímos do estado 0 para o estado 1 e os tempos em que chegamos no estado 0, podemos tirar a diferença para achar a duração de cada período ocupado, tiramos então a média dos períodos nessa lista, dando como resultado valores próximos de 1 em ambos os tipos de simuladores conforme os prints abaixo:

```
[0.17585649920438196, 0.4964350621988911, 5.771302166586344, 10.754283311769646,
[0.3862174839337932, 0.7285460701169121, 8.397400386983234, 12.321233398015874,
[0.21036098472941123, 0.23211100791802097, 2.62609822039689, 1.5669500862462282,
Duração média do período ocupado:1.0144994898970021s
```

```
[0.19125257065956833, 1.1704429218035086, 4.051522524805037, 4
[0.48227929019183524, 1.36261047440445, 4.073762941663443, 4.1
[0.2910267195322669, 0.19216755260094143, 0.02224041685840561,
Duração média do período ocupado:1.00464455186891s
```

Acima do resultado temos como exemplo os tempos de início, fim e duração dos primeiros períodos ocupados.

2) O período ocupado generalizado é uma medida do tempo que leva para um sistema se esvaziar, começando com C clientes - ou seja, o sistema já começa com alguns clientes em seu interior. A fórmula para calcular essa medida, E(B_C), é dada por:

$$E(B_C) = C(1/\mu)/(1-\rho)$$

Onde μ é a taxa média de serviço e ρ é a proporção de tempo em que o servidor está ocupado (ou seja, a utilização do sistema).

Podemos entender essa fórmula através de argumentos lógicos. Primeiro, note que se C=1, esse cálculo se reduz ao tempo médio de atendimento de uma única pessoa, que é 1/μ. Isso faz sentido, pois se o sistema já começa vazio, então o período ocupado generalizado seria igual ao tempo médio de atendimento de uma única pessoa.

Quando C>1, no entanto, precisamos considerar que o sistema já começa com C pessoas dentro dele. Vamos supor que essas pessoas levem um tempo T cada uma para serem atendidas e saírem do sistema. Nesse caso, o sistema precisará esperar até que todas elas sejam atendidas antes de efetivamente começar a se esvaziar. Esse tempo de espera será dado pela soma dos tempos de atendimento de todos os clientes no sistema, que é TC.

Além disso, enquanto esses C clientes estão sendo atendidos, novos clientes podem chegar e entrar no sistema. Isso significa que, mesmo depois de todos os C clientes iniciais terem sido atendidos e saído, o sistema ainda pode ter mais clientes dentro dele. Para calcular quanto tempo o sistema leva para se esvaziar completamente, então, precisamos considerar esse tempo adicional após a saída dos C clientes iniciais.

Esse tempo adicional será dado pela duração média do período ocupado de um sistema com apenas um cliente. Essa é uma propriedade bem conhecida dos sistemas de filas: quando um sistema tem apenas um cliente, seu período ocupado tende a ser igual ao tempo médio de atendimento desse cliente. Isso faz sentido, pois nesse caso não há outros clientes competindo pelo serviço, então o sistema pode operar livremente.

Portanto, podemos escrever a seguinte equação:

$$E(B_C) = TC + E(B_1)$$

Onde TC é o tempo de espera para que todos os C clientes iniciais sejam atendidos e E(B_1) é a duração média do período ocupado de um sistema com apenas um cliente.

Para calcular cada um desses termos, podemos usar as fórmulas:

$$TC = C/T$$

$$E(B_1) = 1/\mu/(1-\rho)$$

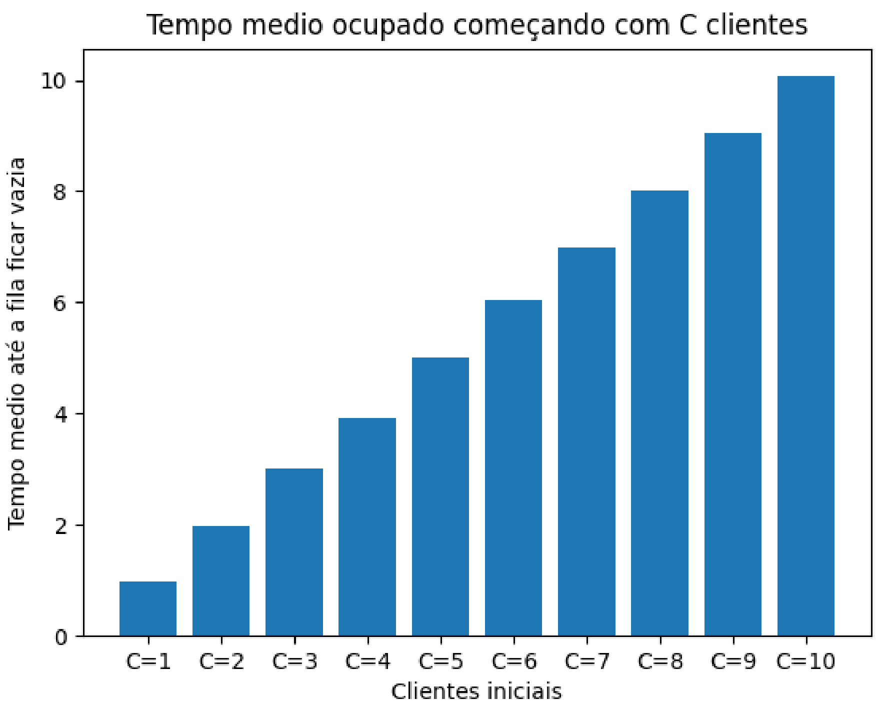
Onde T é o tempo médio de serviço de um cliente (1/μ) e ρ é a utilização do sistema (Cρ = T).

Substituindo essas fórmulas na equação acima, chegamos a:

E(B_C) = C/T + 1/μ/(1-ρ)

Que é exatamente a fórmula inicial E(B_C) = C(1/μ)/(1-ρ). Portanto, via argumentos lógicos, podemos entender por que essa fórmula é correta e como ela reflete a dinâmica do sistema de filas com C clientes iniciais.

2.1) O seguinte gráfico mostra o tempo médio que levou para acabar o estado ocupado, iniciando com C clientes na fila.



Os valores exatos, incluindo intervalos de confiança, foram:

Tempo médio até chegar a zero clientes começando com 1: 0.9881962540407165

Intervalo de confiança IC95: 0.9535372058164071 - 1.022855302265026

Tempo médio até chegar a zero clientes começando com 2: 1.9875331230635394

Intervalo de confiança IC95: 1.9391854491830178 - 2.0358807969440607

Tempo médio até chegar a zero clientes começando com 3: 2.998339111086461

Intervalo de confiança IC95: 2.9378910434748935 - 3.0587871786980285

Tempo médio até chegar a zero clientes começando com 4: 3.9290478921242835

Intervalo de confiança IC95: 3.861131789103359 - 3.996963995145208

Tempo médio até chegar a zero clientes começando com 5: 5.011658641183395

Intervalo de confiança IC95: 4.934951462253801 - 5.088365820112989

Tempo médio até chegar a zero clientes começando com 6: 6.029282263345431

Intervalo de confiança IC95: 5.946296492961178 - 6.112268033729684

Tempo médio até chegar a zero clientes começando com 7: 6.987861813295048

Intervalo de confiança IC95: 6.897314877538161 - 7.078408749051935

Tempo médio até chegar a zero clientes começando com 8: 7.999127866012817

Intervalo de confiança IC95: 7.902623365723665 - 8.095632366301968

Tempo médio até chegar a zero clientes começando com 9: 9.052418911375524

Intervalo de confiança IC95: 8.949727663688076 - 9.155110159062971

Tempo médio até chegar a zero clientes começando com 10: 10.066370486055385

Intervalo de confiança IC95: 9.958185688882892 - 10.174555283227878

Os resultados parecem indicar que o tempo médio até o período ocupado acabar, iniciando com C clientes, é igual a C. Isso faz sentido, pois E(B_C) = C*(1/mu)/(1-rho), como vimos anteriormente. Mas como mu = 2 e rho = lambda/mu = ½, temos E(B_C) = C*(½)(½) = C. Logo, os resultados simulados batem com os resultados teóricos.

2.2) Temos que E(B_C) = E(U_C) + E(B). Mas como vimos no item 1.1) e no item 2), E(B) = (1/mu)/(1-rho), e E(B_C) = C*(1/mu)/(1-rho). Assim, podemos reescrever a equação como:

C*(1/mu)/(1-rho) = E(U_C) + (1/mu)/(1-rho)

E(U_C) = (C-1)*(1/mu)/(1-rho)

Temos que mu = 2 e rho = lambda/mu = ½. Substituindo, temos:

E(U_C) = (C-1)*(½)/(½) = C-1

Para todo valor inicial de clientes C, o tempo médio até a fila chegar a um cliente será C-1.

Simulando, obtivemos os seguintes resultados:

Tempo médio até chegar a um cliente começando com 1: 0.0

Intervalo de confiança IC95: 0.0 - 0.0

Tempo médio até chegar a um cliente começando com 2: 1.0273894688251304

Intervalo de confiança IC95: 0.9921877870698242 - 1.0625911505804366

Tempo médio até chegar a um cliente começando com 3: 1.9608046978221012

Intervalo de confiança IC95: 1.9135709343137246 - 2.008038461330478

Tempo médio até chegar a um cliente começando com 4: 3.004330213809005

Intervalo de confiança IC95: 2.9455738223777996 - 3.0630866052402106

Tempo médio até chegar a um cliente começando com 5: 3.933310748923237

Intervalo de confiança IC95: 3.8668455488711704 - 3.9997759489753033

Tempo médio até chegar a um cliente começando com 6: 4.979264552313673

Intervalo de confiança IC95: 4.901865434040663 - 5.0566636705866825

Tempo médio até chegar a um cliente começando com 7: 6.014271640509462

Intervalo de confiança IC95: 5.930567090756849 - 6.0979761902620755

Tempo médio até chegar a um cliente começando com 8: 7.024919339511821

Intervalo de confiança IC95: 6.933731125436195 - 7.116107553587447

Tempo médio até chegar a um cliente começando com 9: 7.939393700700575

Intervalo de confiança IC95: 7.844223692385403 - 8.034563709015746

Tempo médio até chegar a um cliente começando com 10: 9.073539302042953

Intervalo de confiança IC95: 8.971963000069556 - 9.17511560401635

Observa-se que os resultados obtidos estão em linha com o valor obtido acima, C-1. O seguinte gráfico mostra a média obtida para cada C inicial: