Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Programa de Pós Graduação em Modelagem Matemática Computacional

Caminhada Aleatória

Distribuições Uniforme, Gaussiana e q-Gaussiana

Breno Martins da Costa Corrêa e Souza (breno.ec@gmail.com)
Na condição de aluno regular de mestrado

Allbens Atman Picardi Faria (atman@dppg.cefetmg.br)
Professor

Disciplina
Modelagem de Sistemas Complexos
Segundas e Quartas-feiras, 10:40 às 12:20

Av. Amazonas, 7675 - Nova Gameleira, Belo Horizonte - MG, 30510-000
Prédio 07

Belo Horizonte, 2016

1. Objetivo

O objetivo é simular caminhadas aleatórias para as seguintes distribuições:

- Uniforme
- Gaussian
- q-Gaussiana, $q \in \{0.5, 1.5, 2.0, 2.5\}$

2. Introdução

A Caminhada Aleatória é uma abstração de um fenômeno físico, simulada em sistemas computacionais, que possui similaridade no eixo x.

Se construírmos gráficos de caminhadas aleatorias distintas sobre um mesmo sistema de eixos, poderemos observar a fomação de um envelope, limitado por valor proporcional a $t^{1/2}$. A raiz da média quadrádica dos pontos gerados para diferentes caminhadas em determinado passo t se aproximará do limite do envelope, à medida que aumentarmos o número de caminhadas.

O expoente do envelope é o expoente de difusão, que é um dos expoentes que caracterizam a classe de universalidade na qual a Caminhada Aleatória está inserida.

3. Materiais e Métodos

As simulações tem teor probabilístico. Logo, se mostrou necessária a implementação de um gerador de números pseudoaleatórios; portanto. O gerador implementado foi o `Ranq2` [1].

O método generalizado de box-müller [2] foi utilizado para gerar as distribuições Gaussiana e q-Gaussiana. O método utiliza dois valores pseudoaleatórios gerados uniformemente para gerar um par de valores na distribuição desejada.

O Pseudocódigo 1 mostra o procedimento para a geração de um par através do método, para distribuição Gaussiana. É necessário substituir a função logaritmo pela função q-logaritmo de $q\prime$ para gerarmos um par na distribuição q-Gaussiana:

$$q \in (-\infty, 3), \quad q \neq 1, \tag{3.1}$$

$$q\prime = \frac{1+q}{3-q}, \tag{3.2}$$

$$x > 0, \tag{3.3}$$

$$ln_q = \frac{x^{1-q}-1}{1-q}. \tag{3.4}$$

Pseudocódigo 1 Gerador de números pseudoaleatórios para Gaussiana

function RandomGaussian

$n_1 \leftarrow$ `Ranq2` $\triangleright\ n \in [0,1)$

$n_2 \leftarrow$ `Ranq2`

$z_1 \leftarrow \sqrt{-2\, ln(n_1)}\ \cos(2\,\pi\, u_2)$

$z_2 \leftarrow \sqrt{-2\, ln(n_1)}\ \sin(2\,\pi\, u_2)$

Para todas as distribuições, o passo do caminhante é o valor gerado pelo gerador de números pseudoaleatório.

Cada simulação gera 2 grupos de 10 caminhadas aleatórias, com 10.000 passos, para cada distribuição. Cada elemento do par gera um grupo distinto de caminhadas.

4. Resultados

Para cada distribuição, são apresentadas as simulações de pares (n_1, n_2 e z_1, z_2 são pares) para escala normal e logarítmica. Curvas de n_1 e z_1 à esquerda; n_2 e z_2 à direita.

O eixo x representa o tempo, enquanto que o eixo y representa distância caminhada em relação à origem (0). O sistema tem dimensão $1 + 1$.

A curva de cor preta em destaque é a curva correspondente a $f(t) = t^{1/2}$. A curva cinza em destaque é a curva correspondente à raiz da média quadrádica dos pontos das curvas em determinado instante t.

5. Conclusões

A raiz da média quadrática para o caminhante q-Gaussiano, com valor $q > 5/3$, parece violar o envelope do caminhante aleatório, caracterizado por $f(t) = t^{1/2}$.

Para que possamos estimar o expoente de difusão e validá-lo com a estimativa presente na literatura, se mostrou necessário simular um maior número de caminhadas. Isso se dá pelo fato de que há um número considerável de saltos abruptos na curva da raiz da média quadrática, que dificulta o ajuste.

Caso o expoente de difusão seja superior a 1/2, a Caminhada Aleatória com passo q-Gaussiano poderá simular comportamentos superdifusivos, que se enquadra como difusão anômala.

Figura 5.1: Distribuição uniforme

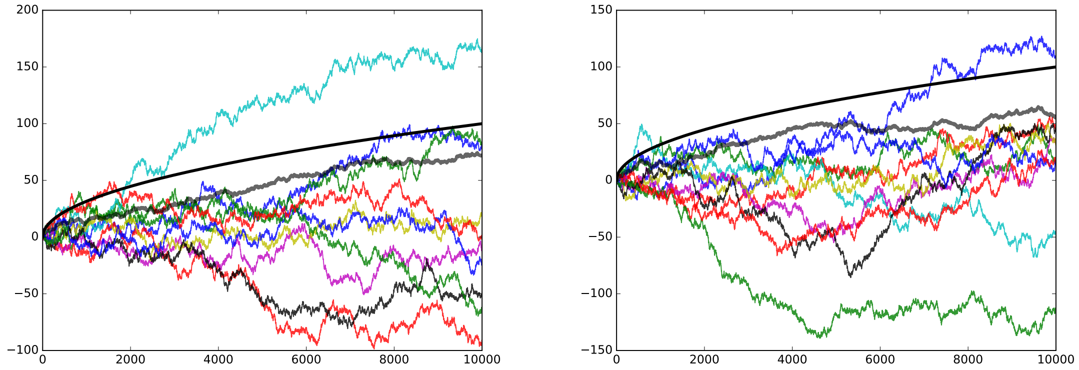


Figura 5.2: Distribuição uniforme (escala log)

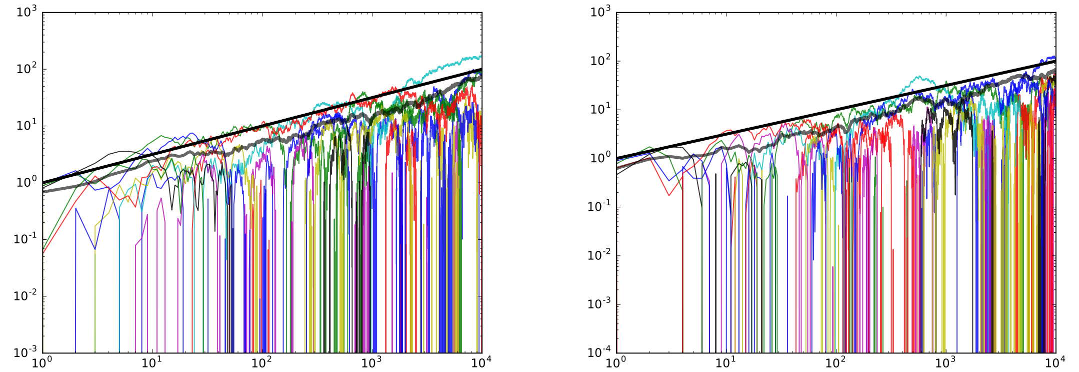


Figura 5.3: Distribuição q-Gaussiana ($q = 0.5$)

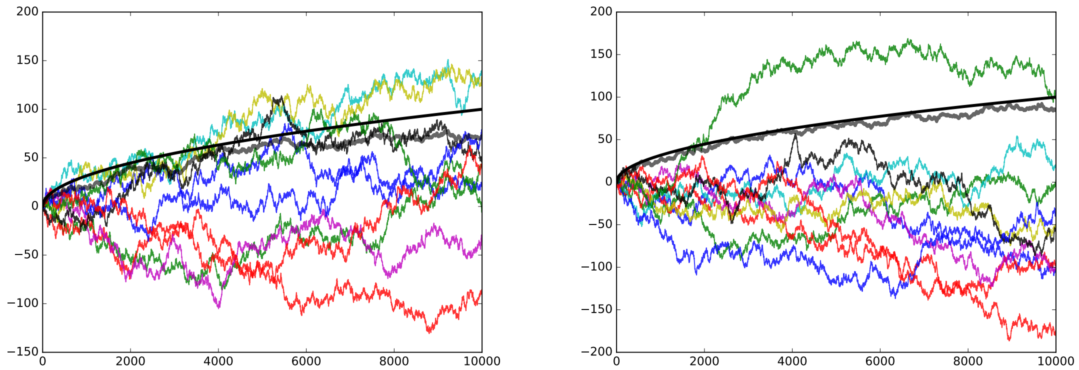


Figura 5.4: Distribuição q-Gaussiana ($q = 0.5$, escala log)

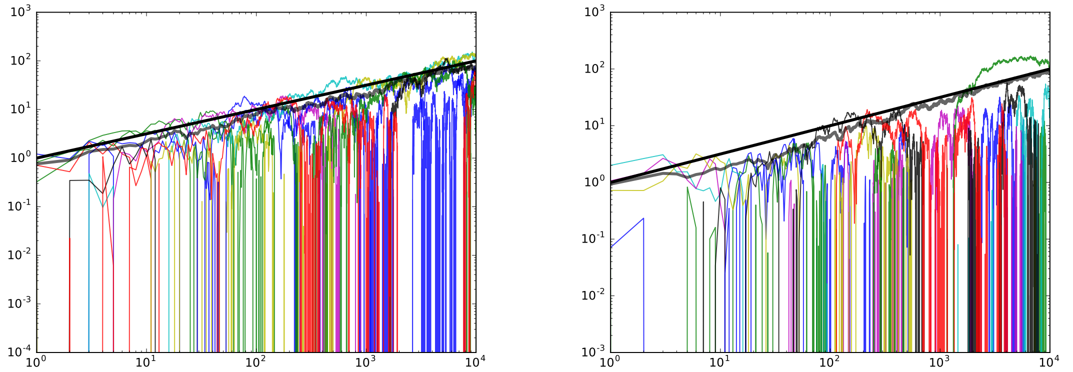


Figura 5.5: Distribuição Gaussiana ($q = 1.0$)

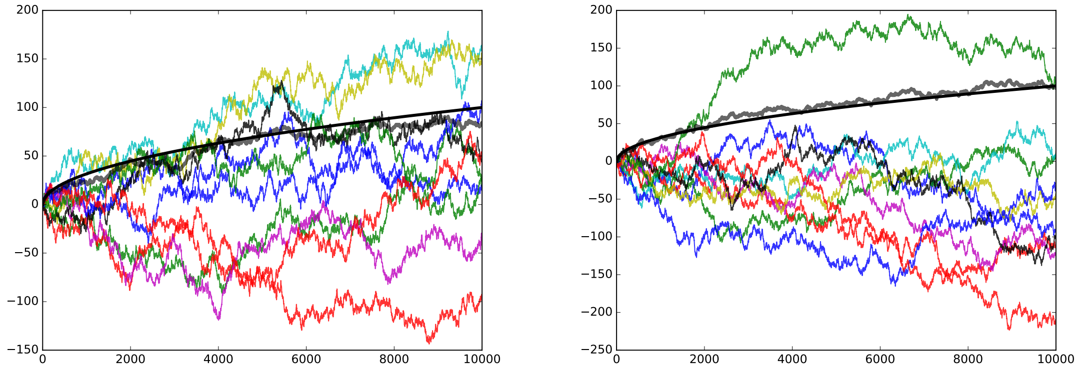


Figura 5.6: Distribuição Gaussiana ($q = 1.0$, escala log)

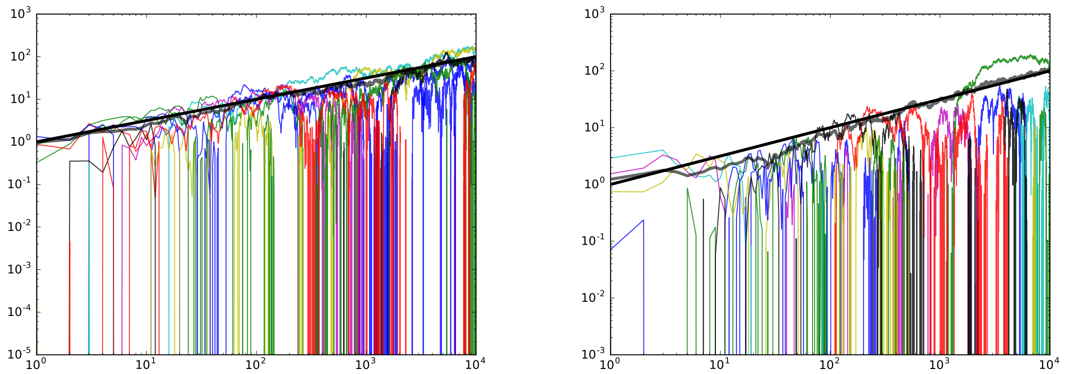


Figura 5.7: Distribuição q-Gaussiana ($q = 1.5$)

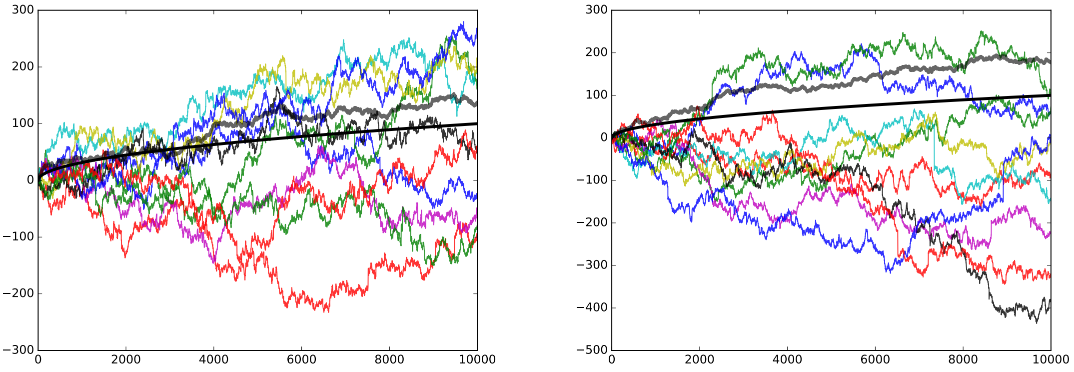


Figura 5.8: Distribuição q-Gaussiana ($q = 1.5$, escala log)

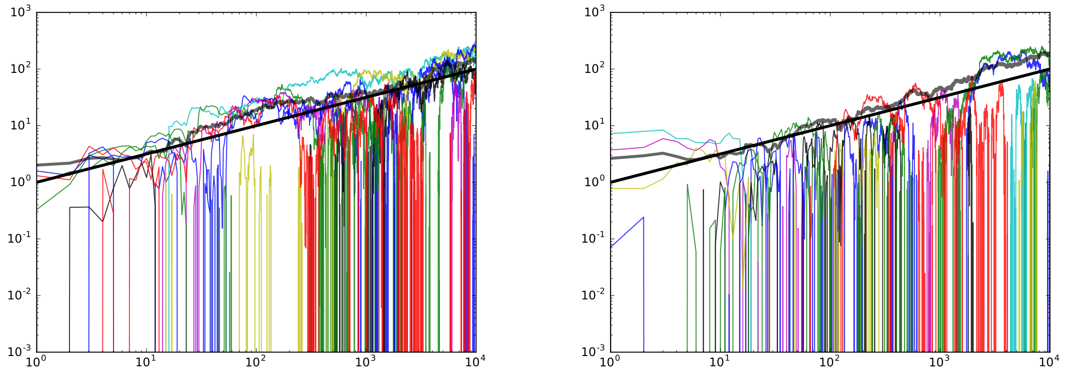


Figura 5.9: Distribuição q-Gaussiana ($q = 2.0$)

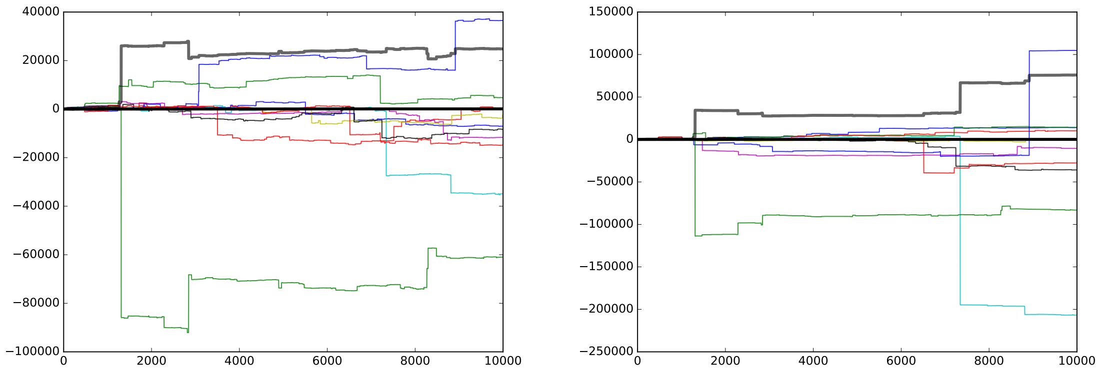


Figura 5.10: Distribuição q-Gaussiana ($q = 2.0$, escala log)

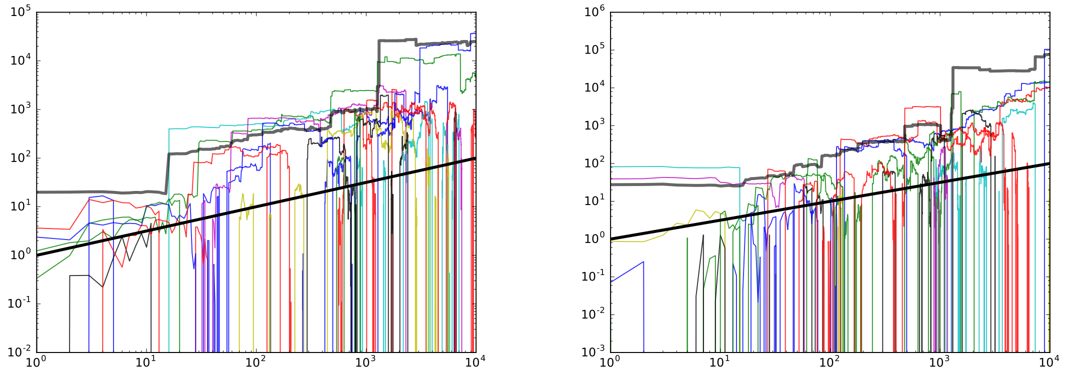


Figura 5.11: Distribuição q-Gaussiana ($q = 2.5$)

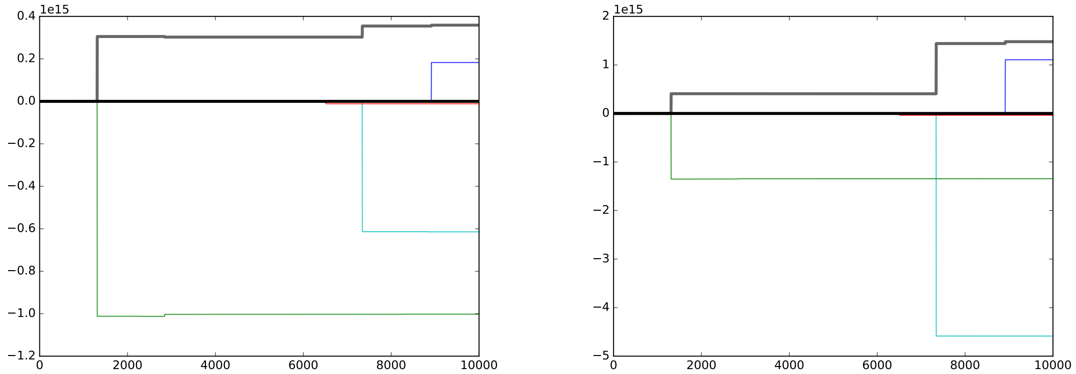
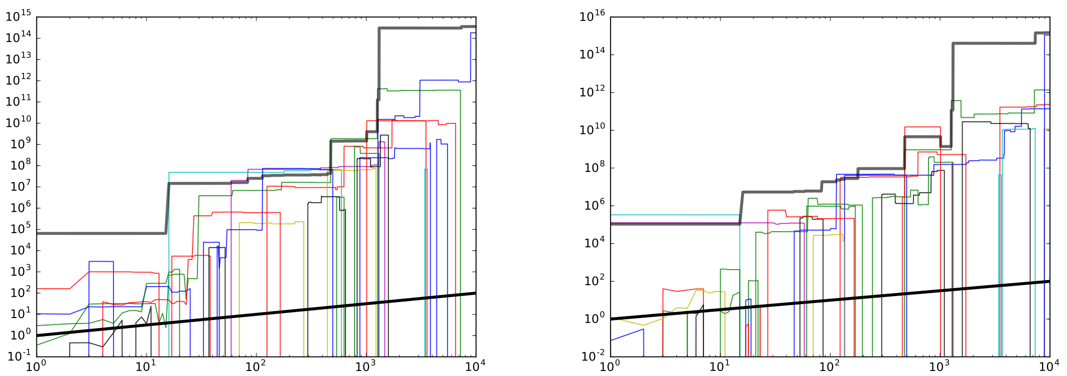


Figura 5.12: Distribuição q-Gaussiana ($q = 2.5$, escala log)



6. Referências

[1] W. H. Press. *Numerical Recipes.* Cambridge University Press, 2007.

[2] W. J. Thistleton, J. A. Marsh, K. Nelson, and C. Tsallis. Generalized box-müller method for generating q-gaussian random deviates. *IEEE Trans. Inf. Theor.*, 53(12):4805–4810, Dec. 2007.