

# TP7 : Applications des bases de Gröbner

Résumé du TP

---

Bertrand Meyer

8 janvier 2020

# Objectifs du TP

- s'amuser avec les **bases de Gröbner**
- faire un peu de géométrie, en préparation au cours ACCQ 205

## Rappel

Calculer une base de Gröbner est difficile et long (algo double exponentiel) : les exemples présentés ici passent difficilement à l'échelle.

# La géométrie algébrique

En géométrie algébrique, on étudie des courbes, surfaces, variétés définie comme les zéros de familles de polynômes.

Il est plus facile d'étudier l'idéal des polynômes qui s'annulent sur une variété (ses équations) et le comportement des fonctions polynômiales ou rationnelles sur cette variété.

**Lissité**

---

# Lissité, points singuliers

## Définition

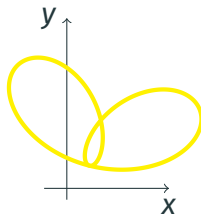
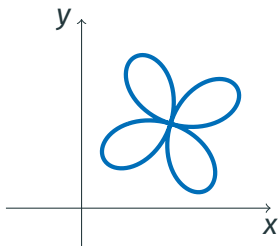
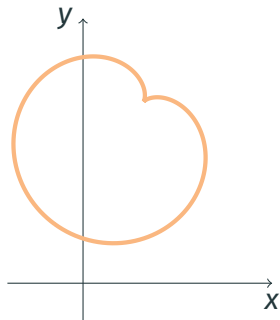
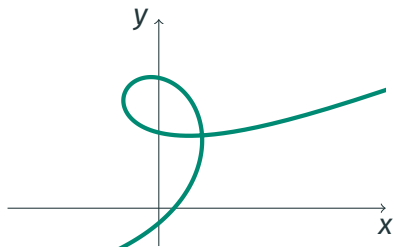
Un point est dit **singulier** quand l'espace tangent est mal défini en ce point. Il est dit **régulier** sinon.

- Pour une courbe plane définie par  $f(x, y) = 0$ , il suffit que le gradient  $\nabla f$  soit non-nul pour que le point soit régulier.
- Pour une surface de  $\mathbb{K}^3$  définie par  $f(x, y, z) = 0$ , il suffit que le gradient  $\nabla f$  soit non-nul pour que le point soit régulier.
- Pour une courbe de  $\mathbb{K}^3$  définie par  $f_1(x, y, z) = 0$  et  $f_2(x, y, z) = 0$ , il suffit que le système  $\{\nabla f_1, \nabla f_2\}$  soit de rang 2, ou encore que  $\nabla f_1 \wedge \nabla f_2 \neq 0$  pour que le point soit régulier.

## Définition

Une variété sans points singuliers est dite **lisse**.

# Examples



## Ordre d'un zéro ou d'un pôle

---

# Ordre d'un zéro ou d'un pôle d'une fraction rationnelle

## Définition

Étant donné une fraction rationnelle  $h$ , l'ordre de  $h$  en un point  $M$  de la courbe est le nombre de fois que l'on peut factoriser dans  $h$  une fonction  $\pi$  qui s'annule simplement en  $M$  (on parle d'uniformisante).

## Exemple

Dans la fonction

$$h = \frac{(x-3)(x-5)^3}{(x-7)^2(x-11)^2}$$

définie sur la droite,

- le point  $x = 3$  est un zéro d'ordre 1,
- le point  $x = 5$  est un zéro d'ordre 3,
- le point  $x = 7$  est un pôle d'ordre 2,
- le point  $x = 11$  est un pôle d'ordre 2.

Les ordres d'un produit s'additionnent



# Ordre d'un zéro ou d'un pôle d'une fraction rationnelle

Sur la droite, on remarque que

$$\dim \mathbb{K}[x] / \langle h(x) \rangle$$

correspond à la somme des multiplicités des zéros de  $h$  et si  $x_0$  est un zéro de  $f$

$$\dim \mathbb{K}[x] / \langle h(x), (x - x_0)^d \rangle$$

correspond à l'ordre de  $h$  en  $x_0$  (pourvu que  $d$  soit assez grand, par exemple  $d \geq \deg h$ ).

## Ordre d'un zéro ou d'un pôle d'une fraction rationnelle

Soit  $h(\mathbf{x}) \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$  défini sur une courbe d'équations  $f_1(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) = 0$ .  
On définit de même l'ordre de  $h$  en un point  $M$  par

$$\dim \mathbb{K}[\mathbf{x}] / \langle f_1, f_2, h, \nu^d \rangle$$

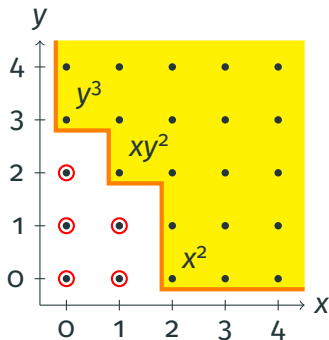
où  $\nu$  est une forme linéaire qui s'annule en  $M$  mais pas en un autre zéro de  $h$ .

# Ordre d'un zéro ou d'un pôle d'une fraction rationnelle

On calcule

$$\dim \mathbb{K}[\mathbf{x}] / \langle f_1, f_2, h, \nu^d \rangle$$

en comptant le nombre de monômes dans le diagramme en escalier  
d'une base de Groebner de l'idéal  $\langle f_1, f_2, h, \nu^d \rangle$



## Enveloppe d'une courbe

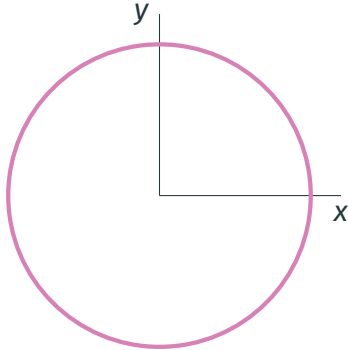
---

# Enveloppe

## Définition

L'**enveloppe d'une famille de courbes planes** est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

$$\text{Equation : } \left\{ f(x, y, t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \right\}$$

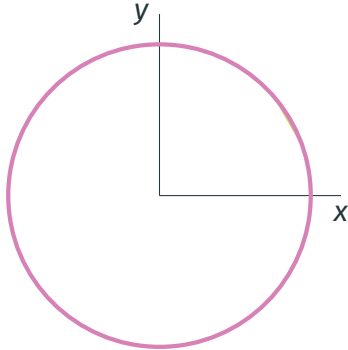


# Enveloppe

## Définition

L'**enveloppe d'une famille de courbes planes** est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

$$\text{Equation : } \left\{ f(x, y, t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \right\}$$

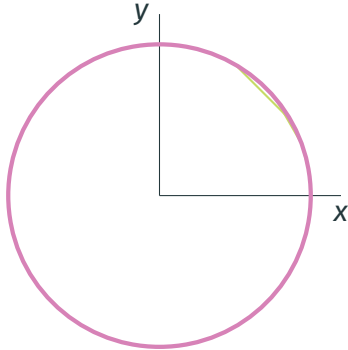


# Enveloppe

## Définition

L'**enveloppe d'une famille de courbes planes** est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

$$\text{Equation : } \left\{ f(x, y, t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \right\}$$

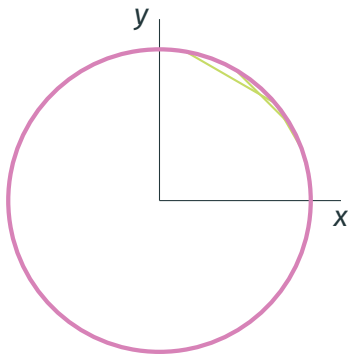


# Enveloppe

## Définition

L'**enveloppe d'une famille de courbes planes** est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

$$\text{Equation : } \left\{ f(x, y, t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \right\}$$



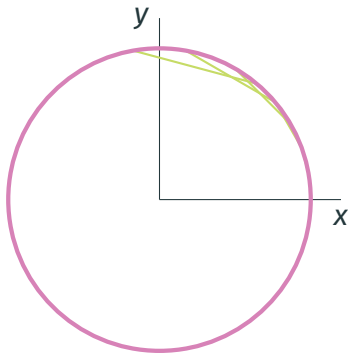


# Enveloppe

## Définition

L'**enveloppe d'une famille de courbes planes** est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

$$\text{Equation : } \left\{ f(x, y, t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \right\}$$

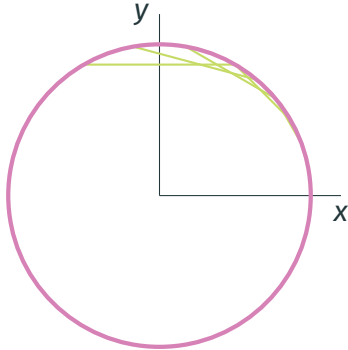


# Enveloppe

## Définition

L'**enveloppe d'une famille de courbes planes** est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

$$\text{Equation : } \left\{ f(x, y, t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \right\}$$

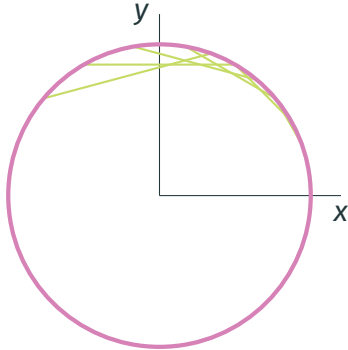


# Enveloppe

## Définition

L'**enveloppe d'une famille de courbes planes** est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

$$\text{Equation : } \left\{ f(x, y, t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \right\}$$

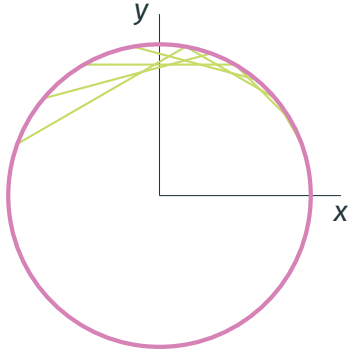


# Enveloppe

## Définition

L'**enveloppe d'une famille de courbes planes** est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

$$\text{Equation : } \left\{ f(x, y, t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \right\}$$

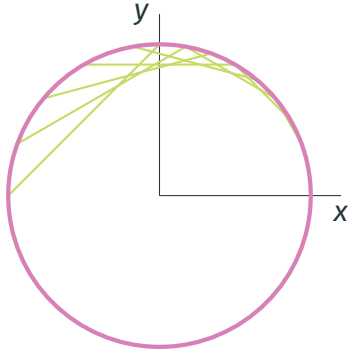


# Enveloppe

## Définition

L'**enveloppe d'une famille de courbes planes** est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

$$\text{Equation : } \left\{ f(x, y, t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \right\}$$

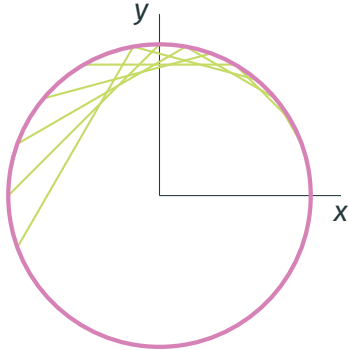


# Enveloppe

## Définition

L'**enveloppe d'une famille de courbes planes** est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

$$\text{Equation : } \left\{ f(x, y, t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \right\}$$

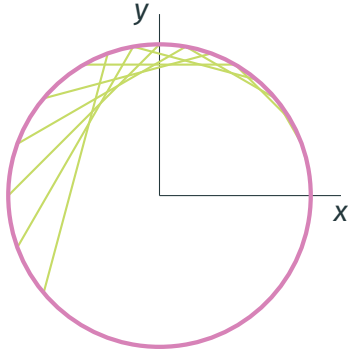


# Enveloppe

## Définition

L'**enveloppe d'une famille de courbes planes** est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

$$\text{Equation : } \left\{ f(x, y, t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \right\}$$

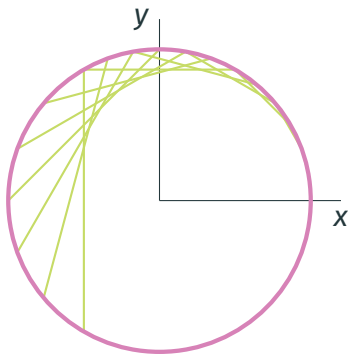


# Enveloppe

## Définition

L'**enveloppe d'une famille de courbes planes** est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

$$\text{Equation : } \left\{ f(x, y, t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \right\}$$



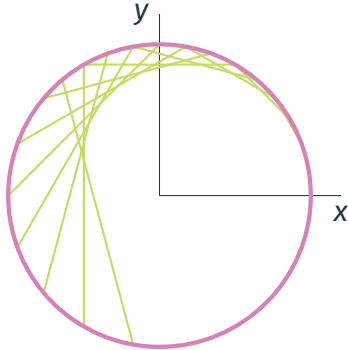


# Enveloppe

## Définition

L'**enveloppe d'une famille de courbes planes** est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

$$\text{Equation : } \left\{ f(x, y, t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \right\}$$

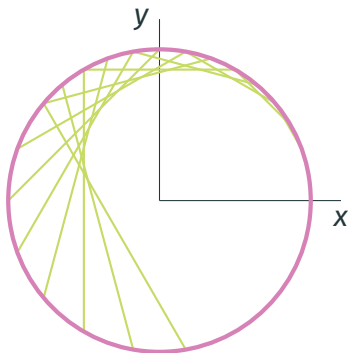


# Enveloppe

## Définition

L'**enveloppe d'une famille de courbes planes** est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

$$\text{Equation : } \left\{ f(x, y, t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \right\}$$

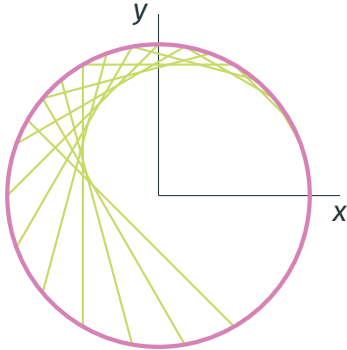


# Enveloppe

## Définition

L'**enveloppe d'une famille de courbes planes** est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

$$\text{Equation : } \left\{ f(x, y, t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \right\}$$

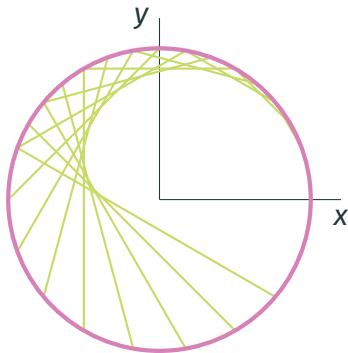


# Enveloppe

## Définition

L'**enveloppe d'une famille de courbes planes** est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

$$\text{Equation : } \left\{ f(x, y, t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \right\}$$



# Enveloppe

## Définition

L'**enveloppe d'une famille de courbes planes** est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

$$\text{Equation : } \left\{ f(x, y, t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \right\}$$

