Les fonctions affines - tableaux de signes

1 Caractérisation des fonctions affines

1.1 Définitions et propriétés

Définition 8.1

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite affine s'il existe deux réels m et p tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$.
m est appelé coefficient directeur de f et p est appelé ordonnée à l'origine.

Définition 8.2

- Si $m = 0$, alors la fonction f est une fonction constante.
- Si $p = 0$, alors la fonction f est une fonction *linéaire*.

Exemple

- $f(x) = 2x + 3$
- $f(x) = -4x + 5$
- $f(x) = 2x$

Propriété 8.1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
f est une fonction affine si, et seulement si, pour tous réels distincts a et b, le rapport $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est constant.

Remarque

Soient f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ et a et b deux réels distincts.
Alors, $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Savoir-Faire 8.1

Savoir retrouver la fonction affine connaissant deux images.

Soit f une fonction affine. Déterminer f sachant que $f(7) = 26$ et $f(2) = 11$.

✎Je m'entraîne seul(e)

Déterminer la fonction affine f dans chaque cas :

- $f(0) = 1$ et $f(3) = 22$. Réponse : $f(x) = 7x + 1$
- $f(-1) = -2$ et $f(1) = 6$. Réponse : $f(x) = 4x + 2$
- $f(5) = 1$ et $f(3) = 1$. Réponse : $f(x) = 1$
- $f(-5) = 6$ et $f(4) = -3$. Réponse : $f(x) = -x + 1$
- $f(5) = 10$ et $f(-3) = -6$. Réponse : $f(x) = 2x$

1.2 Représentation graphique

Propriété 8.2

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$,la courbe représentative d'une fonction affine f est une droite sécante avec l'axe des ordonnées.

Remarque

Soit f une fonction affine définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$. Pour représenter f, il suffit de placer deux points distincts et de tracer la droite passant par ces deux points.

Savoir-Faire 8.2

Savoir tracer la courbe représentative d'une fonction affine.

Exemple : Tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$.

Savoir-Faire 8.3

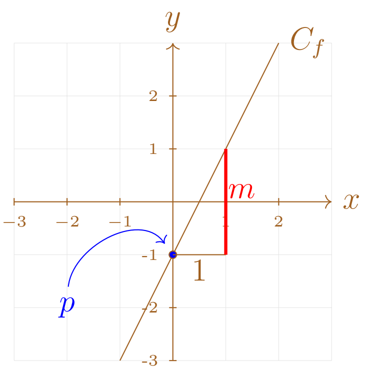
Savoir tracer la courbe représentative d'une fonction affine f en utilisant la signification graphique de m et p.

Exemple : On considère la fonction affine définie par $f(x) = 2x - 1$, et on souhaite tracer la courbe représentative de f en utilisant son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.

Propriété 8.3

La courbe représentative d'une fonction affine est la droite passant par le point $A(0; p)$ et de coefficient directeur m.

Il est possible de tracer la fonction affine en utilisant simplement l'ordonnée à l'origine p et le coefficient directeur m :
p est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 0.
Pour trouver m, il suffit de se placer sur un point de la droite, d'avancer d'une unité vers la droite. Le coefficient directeur m est le nombre qui permet de "revenir" sur la droite en suivant l'axe des ordonnées.

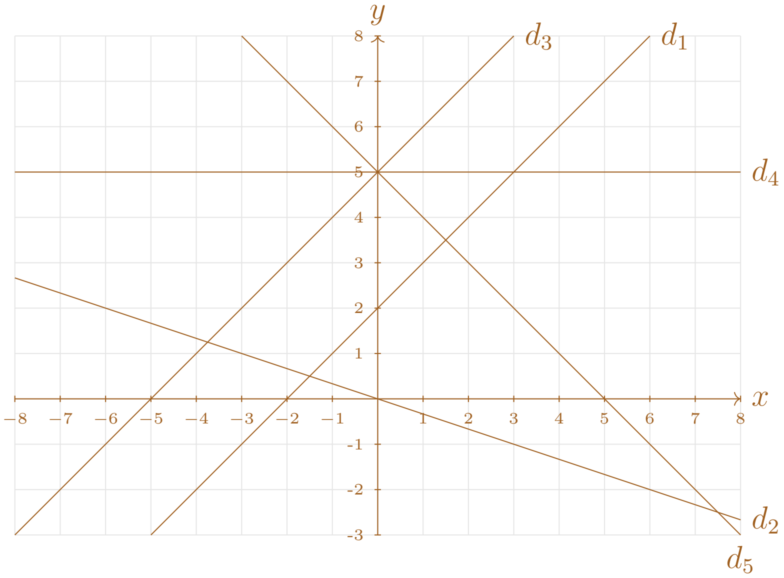


✎Je m'entraîne seul(e)

Pour vous entraîner, choisissez une fonction affine ($f(x) = 3x + 4$ par exemple), et tracez sa courbe représentative en utilisant la méthode ci-dessus. Vérifier ensuite le tracé de la courbe en calculant l'image de deux ou trois réels. (par exemple $f(2)$ et $f(5)$.

Savoir-Faire 8.4

Savoir retrouver la fonction affine représentée par une droite.
On considère les droites suivantes. Déterminer la fonction affine qui les représente.



2 Étude d'une fonction affine

2.1 Variations et parité

Propriété 8.4

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$.

- Si $m < 0$,alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m > 0$,alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = mx + p$	$\nearrow$	

Cas où $m > 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = mx + p$	$\searrow$	

Cas où $m < 0$.

Remarque

Si $m = 0$ alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exemple

- soit f définie par $f(x) = 2x+3$. $m = 2$ donc $m > 0$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- soit g définie par $g(x) = -x + 3$. $m = -1$ donc $m < 0$ et donc la fonction f est

strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété 8.5

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$, avec $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$.

- Si $m \neq 0$ et $p \neq 0$, alors f est ni paire, ni impaire. (Figure 1).
- Si $m = 0$, alors f est paire. (Figure 2).
- Si $p = 0$, alors f est impaire. (Figure 3).

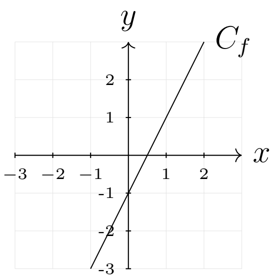


FIGURE 1

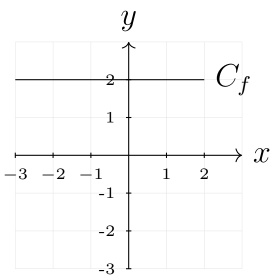


FIGURE 2

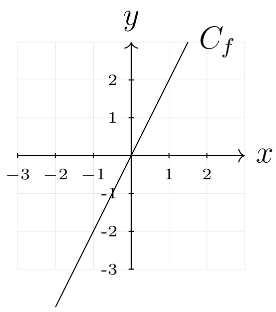


FIGURE 3

2.2 Signe d'une fonction affine

2.2.1 Approche : Lien entre variation d'une fonction affine et signe d'une fonction affine : étude d'un exemple

On désire déterminer le signe de $f(x) = 2x + 4$. quand a-t-on $f(x) = 0$? Quel est le sens de variations de f ? Que peut-on en déduire au niveau du signe de $f(x)$?

2.2.2 Propriété

Propriété 8.6

On considère la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

- Si $m = 0$, la fonction f est constante, et son signe l'est également
- Si $m > 0$, alors on a :

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x) = mx + p$		$-$	0	$+$	

- Si $m < 0$, alors on a :

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x) = mx + p$		$+$	0	$-$	

Savoir-Faire 8.5

Savoir étudier le signe d'une fonction affine. Étudier le signe des fonctions affines suivantes :

- $f(x) = 3x + 4$
- $f(x) = -3x + 4$
- $f(x) = 3$
- $f(x) = 2x - 5$

✎Je m'entraîne seul(e)

Étudier le signe des fonctions suivantes :

- $f(x) = 5x + 10$. Rép $f(x) > 0$ sur $]-2; +\infty[$ et $f(x) < 0$ sur $]-\infty; -2[$.
- $f(x) = 5x - 2$. Rép $f(x) > 0$ sur $]\frac{2}{5}; +\infty[$ et $f(x) < 0$ sur $]-\infty; \frac{2}{5}[$.
- $f(x) = 1 - x$. Rép $f(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$ et $f(x) > 0$ sur $]-\infty; 1[$.
- $f(x) = -3x + 7$. Rép $f(x) < 0$ sur $]\frac{7}{3}; +\infty[$ et $f(x) > 0$ sur $]-\infty; \frac{7}{3}[$.
- $f(x) = -3$. Rép Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$.

3 Étude de signes et inéquations

Savoir-Faire 8.6

ÉTUDE DU SIGNE D'UN PRODUIT OU D'UN QUOTIENT

Déterminer le signe des fonctions suivantes :

- $f(x) = (x-5)(4-2x)$
- $f(x) = \dfrac{10x+20}{3-2x}$

Réaliser un tableau de signes nécessite d'avoir un produit ou un quotient ! Dans le cas contraire, il faut commencer par factoriser et \ou mettre sous la forme d'un quotient.

✎Je m'entraîne seul(e)

- $f(x) = (3x+2)(5x-4)$. Réponse : $f(x) > 0$ pour $x \in]-\infty; -\frac{2}{3}[\cup]\frac{4}{5}; +\infty[$, $f(x) < 0$ pour $x \in]-\frac{2}{3}; \frac{4}{5}[$ et $f(x) = 0$ pour $x = -\frac{2}{3}$ et $x = \frac{4}{5}$.
- $f(x) = (-2x+7)(5x-4)$. Réponse : $f(x) < 0$ pour $x \in]-\infty; \frac{4}{5}[\cup]\frac{7}{2}; +\infty[$, $f(x) > 0$ pour $x \in]\frac{4}{5}; \frac{7}{2}[$ et $f(x) = 0$ pour $x = \frac{4}{5}$ et $x = \frac{7}{2}$.
- $f(x) = (-5x+2)(-13x+7)$. Réponse : $f(x) > 0$ pour $x \in]-\infty; \frac{2}{5}[\cup]\frac{7}{13}; +\infty[$, $f(x) < 0$ pour $x \in]\frac{2}{5}; \frac{7}{13}[$ et $f(x) = 0$ pour $x = \frac{2}{5}$ et $x = \frac{7}{13}$.
- $f(x) = \dfrac{13x-11}{6-5x}$. Réponse : $f(x) < 0$ pour $x \in]-\infty; \frac{11}{13}[\cup]\frac{6}{5}; +\infty[$, $f(x) > 0$ pour $x \in]\frac{11}{13}; \frac{6}{5}[$ et $f(x) = 0$ pour $x = -\frac{6}{5}$.

Savoir-Faire 8.7

SAVOIR RÉSOUDRE UNE INÉQUATION PRODUIT OU QUOTIENT

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $(2x+7)(3x-2) > 0$
- $(-5x+4)(7-3x) \leq 0$
- $\dfrac{1-6x}{3+x} \geq 0$

Savoir-Faire 8.8

SAVOIR RÉSOUDRE UNE INÉQUATION QUI SE RAMÈNE À UNE INÉQUATION PRODUIT OU UNE INÉQUATION QUOTIENT

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $x^2 + 4x \geq 0$
- $5 + \frac{1}{x+1} \leq 0$
- $(x-5)^2 > (2x+1)^2$