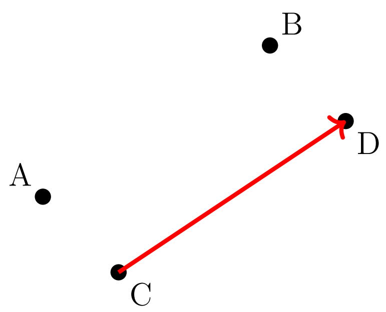
Chapitre 3: Les vecteurs

1 Définition d'un vecteur

1.1 Translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Sur la figure ci-contre, on considère D, l'image de C dans la translation qui transforme A en B.



La flèche rouge indique :

- La direction
- Le sens
- La longueur

du déplacement que l'on doit effectuer pour construire l'image d'un point.

Définition 3.1

La translation qui transforme A en B est appelée translation de **vecteur** $\overrightarrow{AB}$

Remarque

La longueur d'un vecteur est appelé **norme** du vecteur.

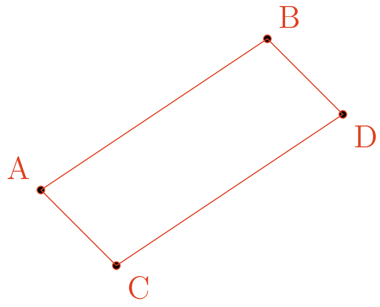
1.2 Egalité de deux vecteurs

Définition 3.2

Soients A,B,C et D quatre points du plan.
Dire que $\overrightarrow{AB}$ est égal à $\overrightarrow{CD}$ signifie que les deux vecteurs ont la même direction, le même sens et la même norme.

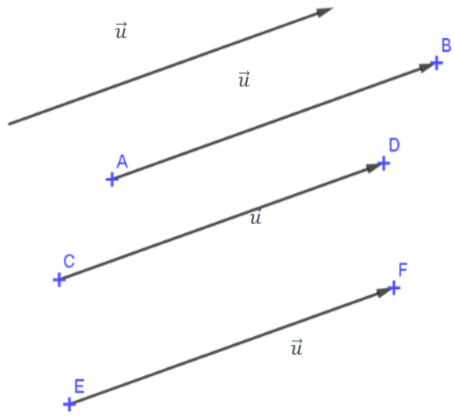
Propriété 3.1

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.



1.3 Notation

Il existe une infinité de vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Par exemple, sur la figure ci-dessous, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$. Ce vecteur peut être noté $\vec{u}$.
$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{EF}$ sont des **représentants de $\vec{u}$**



1.4 Le vecteur nul

Définition 3.3

On appelle vecteur nul, noté $\vec{u}$, tout vecteur dont l'origine et l'extrémité sont confondues

Par exemple, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

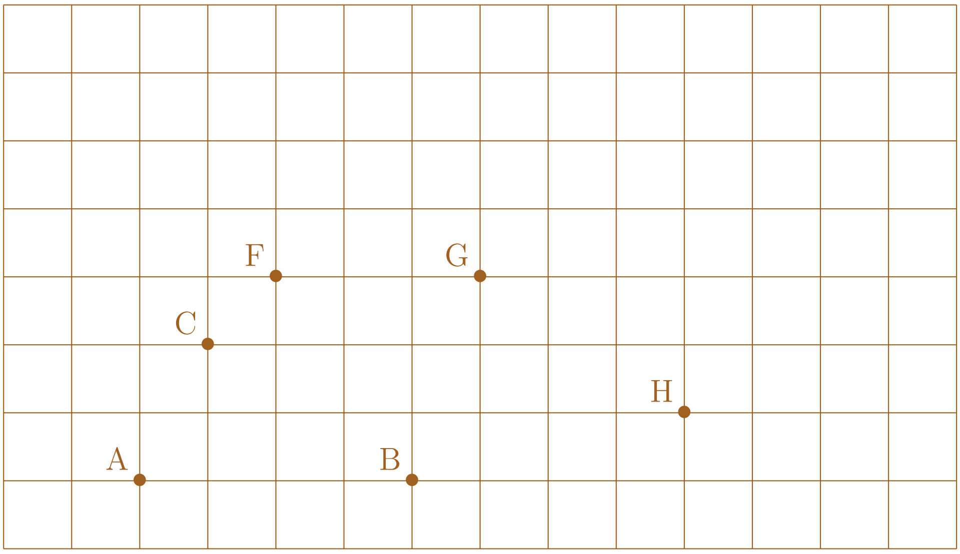
Remarque

Le vacteur nulle à une norme égale à 0, mais n'a ni direction, ni sens !

Savoir-Faire 3.1

Savoir représenter un vecteur

Recopier la figure ci-dessous :



1. Construire un vecteur $\vec{u}$, ayant la même direction et le même sens que $\overrightarrow{AB}$ et pour longueur 3.
2. Construire le point P tel que $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{BC}$.
3. Construire le point Q tel que $\overrightarrow{GQ} = \overrightarrow{BH}$
4. Construire un vecteur $\vec{v}$, ayant la même direction que $\overrightarrow{BC}$, un sens contraire à $\overrightarrow{BC}$, et pour longueur identique à $\overrightarrow{BC}$.
5. Construire le point R tel que $\overrightarrow{RF} = \overrightarrow{GH}$
6. Construire le point T tel que $\overrightarrow{BT} = \vec{0}$

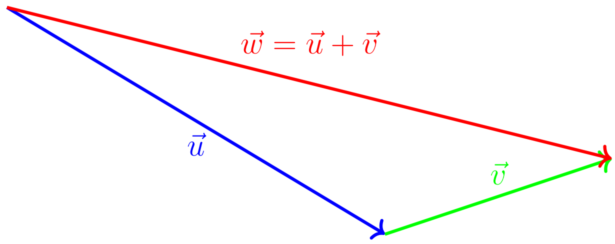
2 Opérations sur les vecteurs

2.1 Somme de deux vecteurs

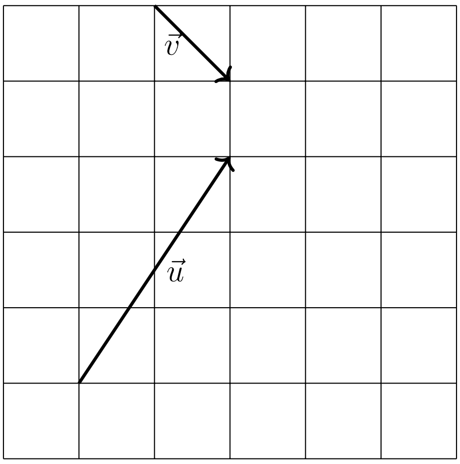
2.1.1 Définition

Définition 3.4

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ qui résulte de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ puis de vecteur $\vec{v}$.
On écrit : $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$

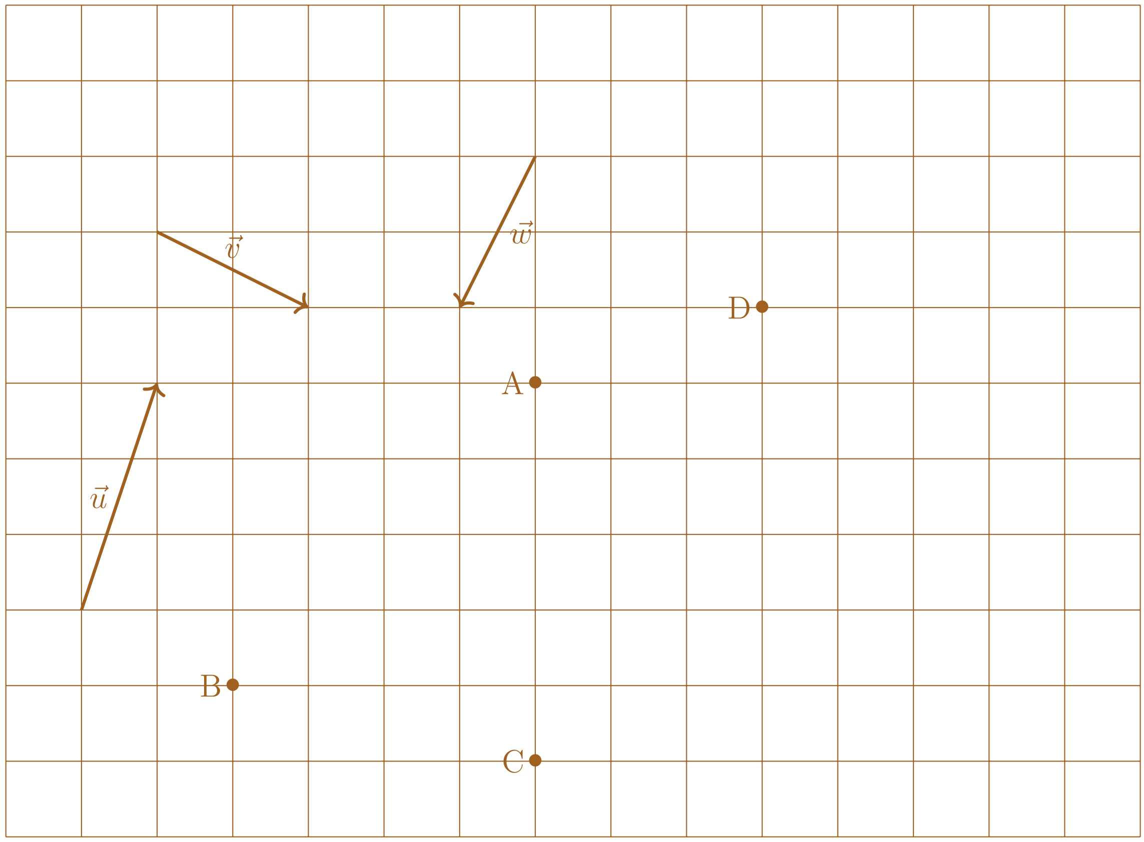


Exemple



Savoir-Faire 3.2

Savoir représenter la somme de deux vecteurs



1. Tracer un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.
2. Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF} = \vec{u} + \vec{v}$
3. Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{w}$
4. Placer le point H tel que $\overrightarrow{CH} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
5. Placer le point I tel que $\overrightarrow{DI} = \vec{v} + \vec{w}$

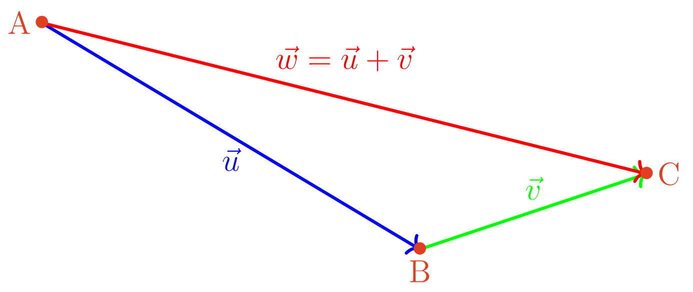
2.1.2 Relation de Chasles

Propriété 3.2 (admise)

Relation de Chasles

Pour tous points A,B et C du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



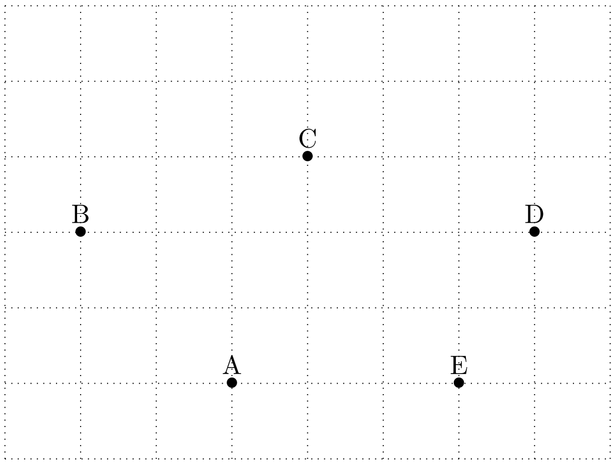
Savoir-Faire 3.3

Savoir Utiliser la relation de Chasles

1. Compléter :
   (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{\quad\quad}$
   (b) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{\quad G} = \overrightarrow{\quad\quad}$
   (c) $\overrightarrow{FR} + \overrightarrow{\quad\quad} = \overrightarrow{FB}$
   (d) $\overrightarrow{\quad R} + \overrightarrow{\quad T} = \overrightarrow{B\quad}$
   (e) $\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{\quad I} = \overrightarrow{RI}$
   (f) $\overrightarrow{K\quad} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{KM}$
2. Simplifier :
   (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
   (b) $\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{BA}$
   (c) $\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{GD}$
   (d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$
   (e) $\overrightarrow{RG} + \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{GH}$

Exercice 3.1

Reproduire la figure ci-dessous :



1. Construire un représentant du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{ED}$, puis un représenant du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EB}$. (utilser des couleurs). Que constate-t-on ?
2. Le démontrer à l'aide de la relation de Chasles.

Exercice 3.2
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrer que :

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$
4. $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$

Exercice 3.3
Soit RST un triangle.

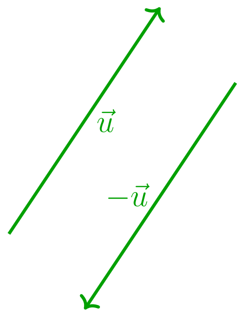
1. Construire le point P tel que $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RT}$
2. Montrer que $\overrightarrow{TP} = \overrightarrow{RS}$. Penser à la relation de Chasles !

2.2 Opposé d'un vecteur

Définition 3.5

L'opposé d'un vecteur $\vec{u}$ du plan est le vecteur noté -$\vec{u}$, qui a :

- même direction que $\vec{u}$.
- même norme que $\vec{u}$.
- le sens opposé à celui de $\vec{u}$.

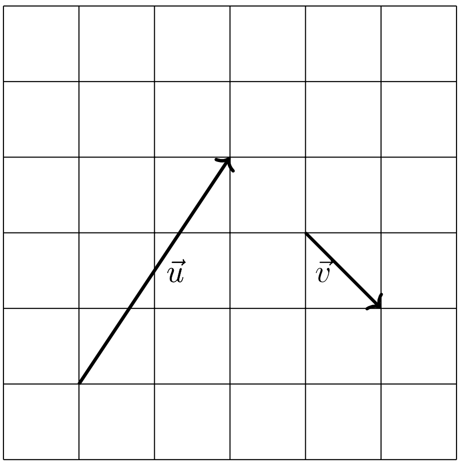


2.2.1 Soustraction de deux vecteurs

Définition 3.6

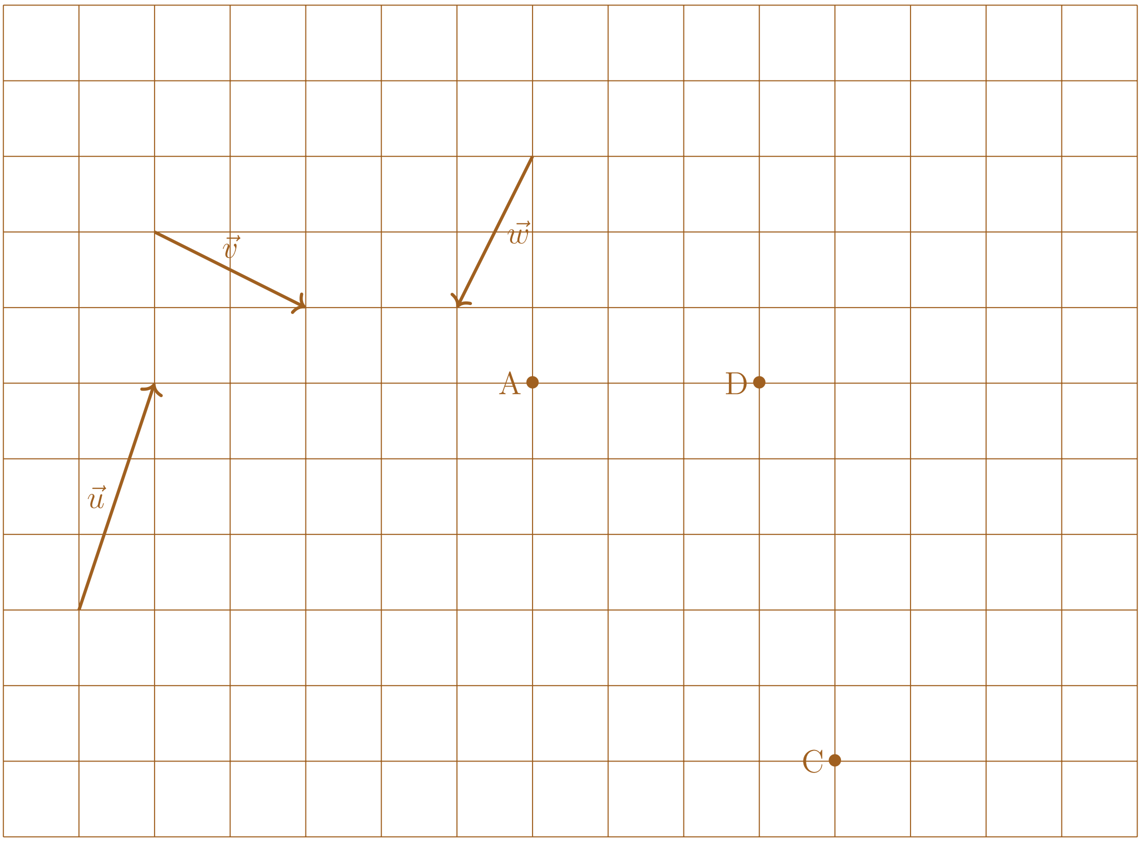
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On définit la soustraction de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, notée $\vec{u}$ -$\vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ défini par $\vec{w} = \vec{u} +$ (-$\vec{v}$).

Exemple



Savoir-Faire 3.4

Savoir représenter la différence de deux vecteurs



1. Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \vec{v} - \vec{w}$
2. Placer le point H tel que $\overrightarrow{DH} = \vec{u} - \vec{v}$
3. Placer le point I tel que $\overrightarrow{CI} = \vec{u} - \vec{w}$

2.3 Produit d'un vecteur par un nombre

Définition 3.7

Soient $\vec{u}$ un vecteur du plan et k un réel.

Si $k = 0$ ou si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k \times \vec{u} = \vec{0}$

Sinon :

- Direction : $\vec{u}$ et $k \times \vec{u}$ ont la même direction.
- Sens :
  - si $k > 0$ alors $\vec{u}$ et $k \times \vec{u}$ ont le même sens
  - si $k < 0$, alors $\vec{u}$ et $k \times \vec{u}$ ont des sens contraires
- Longueur : La longueur du vecteur $k \times \vec{u}$ est égale à la longueur du vecteur $\vec{u}$ multipliée par $|k|$.

Propriété 3.3 (admise)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, pour tous réels k et k',on a :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(\vec{u} - \vec{v}) = k\vec{u} - k\vec{v}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
- $k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

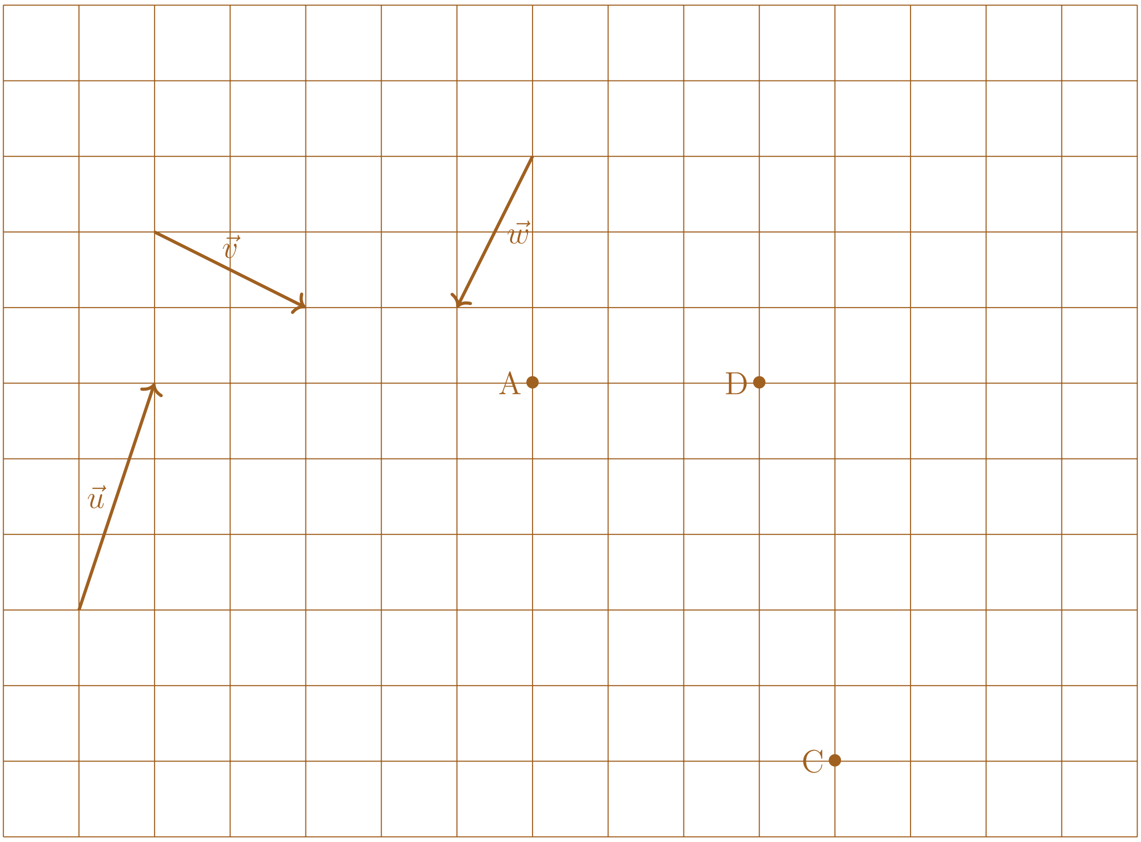
Exemple

Simplifier les expressions suivantes :

- $5\vec{u} + 3\vec{u} =$
- $5\vec{u} - 3\vec{u} =$
- $5\vec{u} + 5\vec{v} =$
- $5 \times (3\vec{v}) =$

Savoir-Faire 3.5

Savoir placer un point défini par des égalités vectorielles



1. Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG} = -2\vec{u} - 2\vec{v} - 2\vec{w}$
2. Placer le point H tel que $\overrightarrow{DH} = 2\vec{w} + \vec{v}$
3. Placer le point I tel que $\overrightarrow{CI} = 3\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$

Savoir-Faire 3.6

Savoir utiliser les règles de calcul sur les vecteurs afin d'exprimer un vecteur en fonction d'un autre

1. Placer trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$
2. Exprimer $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Vérifier la cohérence du résultat obtenu sur la figure.

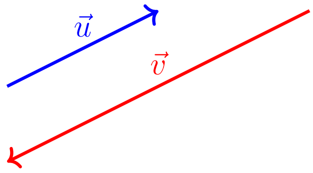
2.4 Vecteurs colinéaires

Définition 3.8

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque

- Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout autre vecteur.
- Deux vecteurs <u>non nuls</u> sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.



Exemple de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

Savoir-Faire 3.7

Savoir montrer que deux vecteurs sont colinéaires

On considère un triangle MNP non applati.
Soit le point R tel que $\overrightarrow{MR} = 2\overrightarrow{MN}$.
Soit le point S tel que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{MP}$.

1. Faire une figure
2. En remarquant que $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PS}$, exprimer le vecteurs $\overrightarrow{RS}$ en fonction de $\overrightarrow{NP}$
3. Que peut-on en déduire au sujet des deux vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{NP}$?
4. Que peut-on en déduite pour les droites (RS) et (NP) ?

Exercice 3.4

Soit EFG un triangle non applati.
On considère les points H et K définis par $\overrightarrow{EH} = -\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HK} = 2\overrightarrow{EG}$.

1. Faire une figure
2. Montrer que $\overrightarrow{FH} = 2\overrightarrow{FE}$ en utilisant la relation de Chasles.
3. En remarquant que $\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HK}$, montrer que $\overrightarrow{FK} = 2\overrightarrow{FG}$.
4. Que dire des vecteurs $\overrightarrow{FK}$ et $\overrightarrow{FG}$?
5. Que peut-on endéduire pour les points F, G et K ?

Exercice 3.5

On considère un rectangle $ABCD$. On note i et J les points définis par $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure
2. Exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
4. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont-ils colinéaires ?Justifier.
5. Que peut-on en déduire ?