1.1 Les ensembles de nombres

Maths 2nde 7 - JB Duthoit

Histoire

Au fil de l'histoire, les mathématiciens ont progressivement pris conscience qu'il existait une infinité de nombres, de natures très variées. Ils se sont aperçus qu'il était possible de « ranger » en grandes familles les nombres ayant des propriétés identiques.
Cette typologie fut l'œuvre de trois mathématiciens de la deuxième moitié du XIXe siècle et du début du XXe siècle : l'Allemand Richard Dedekind (1831-1916), le Russe Georg Cantor (1845-1918) et l'Italien Giuseppe Peano (1858-1932).

1.1.1 L'ensemble des réels

Définition 1.1

L'ensemble de tous les nombres connus en seconde s'appelle l'ensemble des réels.
Il est noté $\mathbb{R}$.

Remarque

On peut représenter chaque nombre réel par un point d'une droite graduée. Et inversement : Chaque point de la droite graduée correspond à un réel et un seul.

$-5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

Exercices
47 à 50 page 22

1.1.2 Les autres ensembles de nombres

Définition 1.2

Il existe des réels particuliers :

- L'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$:
  $0; 1; 2; 3; 4; \ldots.$
- L'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$:
  $\ldots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots$
- L'ensemble des nombres décimaux, noté $\mathbb{D}$: Un décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient d'entiers dont le dénominateur est une puissance de 10.
- L'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$: Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient d'entiers.

Exemple

- 1.25 est un décimal car il peut s'écrire sous la forme $\frac{125}{100}$. 1.25 est donc aussi un nombre rationnel. On note $1.25 \in \mathbb{D}$ et $1.25 \in \mathbb{Q}$.
- $\frac{2}{3}$ est un nombre rationnel (sans être un décimal). On note $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$.
- -5 est un entier relatif. C'est aussi un décimal car $-5 = \frac{-50}{10}$, et c'est également un nombre rationnel. On note $-5 \in \mathbb{Z}$, $-5 \in \mathbb{D}$, $-5 \in \mathbb{Q}$ et bien évidemment $-5 \in \mathbb{R}$.

Démonstration 1.1

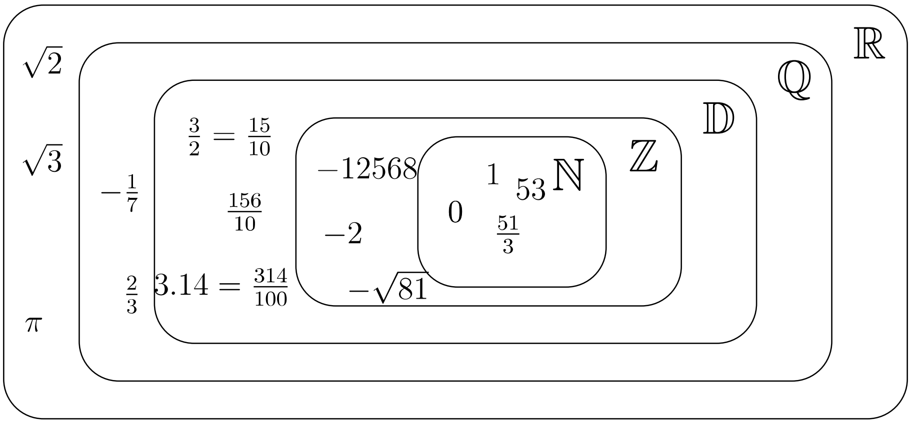
Montrons que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

1.1.3 Propriétés

Propriété 1.1 (admise)

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemple



Savoir-Faire 1.1

Savoir déterminer à quel(s) ensemble(s) appartient un nombre

Indiquer par une croix à quel **plus petit ensemble** de nombres appartiennent les nombres suivants (Attention, deux colonnes) :

Dans le tableau apparaissent les nombre a et b qui sont définis de la façon suivante :

☞ a est l'inverse de 5

☞ b est la somme de 7 et de l'opposé de 8.

✰ Si ce n'est pas évident, il faut **expliquer** !

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$		$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-3						π					
$-\sqrt{144}$						$\sqrt{7}$					
$\frac{12}{3}$						0					
$-\frac{2}{3}$						$\frac{77}{25}$					
$\frac{-56874}{3}$						$\frac{4}{7}$					
a						b					

Exercices

82 page 24, 86 et 87 page 25 (+ déterminer à quel ensemble appartiennent les nombres) .

Exercices

97 page 25, 143 page 29.

Algorithme 1.1

$\sqrt{2}$ est irrationnel, on ne peut donc pas l'écrire sous la forme d'une fraction. On cherche donc à déterminer une valeur approchée à l'aide de l'informatique.

Question préliminaire : Donner deux entiers consécutifs a et b tel que $a \leq \sqrt{2} \leq b$. On obtient ainsi un encadrement de $\sqrt{2}$ à l'unité près.

Déterminer par balayage un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-n}.

1.2 Inégalités et intervalles

MATHS 2NDE 7 - JB DUTHOIT

1.2.1 Inégalités

Exercices
83 page 24

Ordre dans $\mathbb{R}$

Propriété 1.2 (admise)
Si a,b et c sont des réels tels que $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$.

Somme

Propriété 1.3 (admise)

- Si a,b et c sont des réels tels que $a < b$,alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$. .
- Si a,b et c sont des réels tels que $a > b$,alors $a + c > b + c$ et $a - c > b - c$.

Propriété 1.4 (admise)
On peut additionner les inégalités de même sens :
Si a,b,c et d sont des réels tels que $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.

Produit

Propriété 1.5 (admise)

- On peut multiplier(ou diviser) chaque membre d'une inégalité par un réel strictement positif, sans changer l'ordre :
  si a et b sont deux réels tels que $a < b$ et si $c > 0$, alors $a \times c < b \times c$
- On peut multiplier(ou diviser) chaque membre d'une inégalité par un réel strictement négatig, mais il faut changer l'ordre :
  si a et b sont deux réels tels que $a < b$ et si $c < 0$, alors $a \times c > b \times c$

Savoir-Faire 1.2
SAVOIR UTILISER LES PROPRIÉTÉS SUR LES INÉGALITÉS POUR ENCADRER UNE EXPRESSION.
une bille a pour rayon $r = 0.76$ cm. Donner un encadrement de son volume en cm^3 à 0.1 près (rappel : $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$) en utilisant l'encadrement suivant de π : $3.14 < \pi < 3.15$.

Exercices
89, 90 page 25

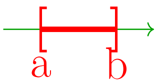
Exercices
127 page 28

1.2.2 Intervalles

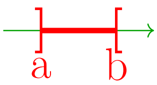
Définitions

Définition 1.3

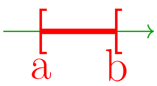
- L'intervalle fermé $[a;b]$ désigne l'ensemble des nombres x tels que $a \leq x \leq b$.



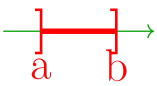
- L'intervalle ouvert $]a;b[$ désigne l'ensemble des nombres x tels que $a < x < b$.



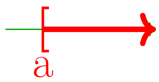
- L'intervalle semi-ouvert $[a;b[$ désigne l'ensemble des nombres x tels que $a \leq x < b$.



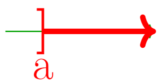
- L'intervalle semi-ouvert $]a;b]$ désigne l'ensemble des nombres x tels que $a < x \leq b$.



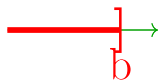
- L'intervalle $[a;+\infty[$ désigne l'ensemble des nombres x tels que $a \leq x$.



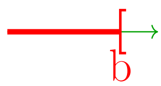
- L'intervalle $]a;+\infty[$ désigne l'ensemble des nombres x tels que $a < x$.



- L'intervalle $]-\infty;b]$ désigne l'ensemble des nombres x tels que $x \leq b$.



- L'intervalle $]-\infty;b[$ désigne l'ensemble des nombres x tels que $x < b$.



Exercices
53,56,57,58 page 22
73,74 page 24 (+ convertir en intervalle)

Réunion et intersection d'intervalles

Définition 1.4

Soient I et J deux intervalles.

- L'intersection de I et J, noté $I \cap J$, l'ensemble des réels qui appartiennent à I et à J.
- L'union de I et J, noté $I \cup J$, l'ensemble des réels qui appartiennent à I ou à J.

Savoir-Faire 1.3

Savoir déterminer une réunion ou intersection d'intervalles

- Déterminer la réunion de $[3;7]$ et $[4;10]$
- Déterminer l'intersection de $[3;7]$ et $[4;10]$

Savoir-Faire 1.4

Savoir résoudre une équation du premier degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$, et donner la nature de la solution :

- $3x + 1 = 8$
- $4x - 4 = 5$

Savoir-Faire 1.5

Savoir résoudre une inéquation du premier degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $3x + 1 \leq 8$
- $-4x - 4 \geq 5$

Exercices

67 page 23

110, 112, 115 page 26, 119 page 27, 120, 121 page 27

1.3 Les puissances

MATHS 2NDE 7 - JB DUTHOIT

1.3.1 Définition

Définition 1.5

Pour tout entier relatif a et tout entier naturel n non nul, on a : $a^n = a \times a \times ... \times a$ (n facteurs)
Ce nombre se lit « a puissance n » ou bien « a exposant n »

Remarque

Pour tout entier relatif a non nul, $a^0 = 1$.

Définition 1.6

Pour tout entier relatif a non nul, et tout entier naturel n non nul, on a : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Exemples

- $5^4 =$
- $3^{-4} =$
- $10^3 =$
- $10^{-3} =$
- $4^0 =$

1.3.2 Propriétés

Propriété 1.6 (admise)

On considère a et b des entiers relatifs non nuls, et n et p des entiers naturels. On a :

- $a^n \times a^p = a^{n+p}$
- $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
- $(a^p)^n = a^{p \times n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

Exemples

- $4^8 \times 4^6 =$
- $\dfrac{5^4}{5^6} =$
- $(x^2)^4 =$
- $3.5^7 \times 2^7 =$
- $\dfrac{10^4}{5^4} = \left(\dfrac{10}{5}\right)^4 =$

Exercices
98,99,100 page 26, 106 page 26

1.3.3 Écriture scientifique

Définition 1.7

L'écriture scientifique d'un nombre décimal est $a \times 10^p$ où p est un entier relatif et a un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$.

Exemples

- L'écriture scientifique de 4 236 000 est
- L'écriture scientifique de 0.000 036 est

Exercices
101,102 page 26

1.4 La racine carrée

Maths 2nde 7 - JB Duthoit

1.4.1 Définition

Définition 1.8

Soit a un réel positif. La racine carrée de a est le réel positif dont le carré est égal à a.

Remarque

Pour tout $a \geq 0$, on a donc $(\sqrt{a})^2 = a$.

Exemples

- $\sqrt{4} =$
- $\sqrt{100} =$
- $\sqrt{36} =$
- $\sqrt{1.44} =$
- $\sqrt{0.01} =$
- $(\sqrt{5})^2 =$
- $\sqrt{5^2} =$

1.4.2 Propriétés

Propriété 1. 7

Soient a et b deux réels positifs. On a : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Exemples

- $\sqrt{18} =$
- $\sqrt{7 \times 5} =$

Démonstration 1.2

Démonter que pour tous a et b réels positifs, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Propriété 1.8 (admise)

Soient a et b deux réels positifs, avec b non nul.

On a : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemples

- $\sqrt{\frac{16}{9}} =$
- $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} =$

⚠ En général : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Exemple

- $\sqrt{9+16} =$
- $\sqrt{9} + \sqrt{16} =$

Propriété 1. 9

Soient a et b deux réels strictement positifs. Alors on a $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Démonstration 1.3

Démonter que pour tous a et b réels strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Savoir-Faire 1.6

Savoir additionner, lorsque cela est possible, des racines carrées

- $\sqrt{18} + \sqrt{8} =$

Exercices

104, 105 page 2

Exercice 1.1

Le nombre $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé *"nombre d'or"*.

1. Calculer Φ^2 et simplifier le résultat obtenu.
2. Calculer $1 + \Phi$
3. Calculer $\dfrac{1}{\Phi}$ et simplifier le résultat obtenu en multipliant le numérateur et le dénominateur par $1 - \sqrt{5}$
4. Que constate t-on ?

Exercices

138 page 28

1.5 La valeur absolue

MATHS 2NDE 7 - JB DUTHOIT

1.5.1 Définition

Définition 1.9

La valeur absolue d'un nombre réel x est la distance entre x et 0 sur l'axe des réels.
Elle se note $|x|$.

Exemples

- $|8| =$
- $|-4| =$
- $|0| =$

1.5.2 Propriétés

Propriété 1.10 (admise)

Soit x un nombre réel. Alors :

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Exemples

- $|5| =$
- $|-5| =$

Remarque

- Pour tout réel x, on a $|x| \geq 0$: la valeur absolue d'un nombre réel est toujours positive ou nulle car c'est une distance.
- pour tout réel x, on a $|x| = |-x|$.

Algorithme 1.2

En utilisant la propriété précédente, programmer la fonction valeur absolue sous la forme d'une fonction python, comme le montre le screen suivant :

```
>>> val_absolue(5)
5
>>> val_absolue(0)
0
>>> val_absolue(-5)
5
```

Savoir-Faire 1.7

Savoir résoudre des équations et d'inéquations avec la valeur absolue

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

- $|x| = 5$
- $|x| = -3$
- $|x| = 7.23$
- $|x| \leq 5$
- $|x| \leq 8$