PPI Bericht Serie 1

Marisa Breßler und Anne Jeschke

08.11.2019

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation 1

2 Theorie 2
- 2.1 Herleitung der Formeln 2
- 2.2 Optimale Schrittweite finden 3

3 Experimente 3

4 Auswertung 3

5 Zusammenfassung 3

1 Motivation

Im Gegensatz zur Analysis bietet die Numerik praktikable Nährungen an Real- bzw. Idealbilder. Die Güte dieser Näherung ist im Minimum abschätzbar oder gegen eine Toleranz beweisbar.
- Wozu müssen/wollen wir Ableitungen approximieren?
Wieso ist es sinnvoll, dies auf die dargestellte Weise durchzuführen?
Die Funktionen sind durch Formeln explizit bekannt, aber das exakte Differenzieren ist sehr aufwändig und das Ermitteln von Funktionswerten ist schwierig, weil die Ableitungen komplex sind.
Eines der Hauptanwendungsgebiete ist die Verarbeitung von Messwerten, wenn die Funktion nicht explizit bekannt ist, bzw. nicht in analytischer Form vorliegt, sondern nur in Form von diskreten Punkten. Da die Funktionen hier immer nur lückenhaft vorhanden sind, ist eine Ableitung mit analytischen Methoden der Differentialrechnung nicht exakt bestimmbar. Man braucht numerische Verfahren, um die Ableitungen näherungsweise zu berechnen oder zu schätzen. Dies ist zum Beispiel möglich mithilfe der finiten Differenzen.
- In Praxis 1. Ableitung oft wichtig.

2 Theorie

Die Fehler der numerischen Berechnung der Ableitungen gegenüber der exakten analytischen Berechnung setzen sich zusammen aus Verfahrensfehlern, d.h. Diskretisierungs- und Abbruchfehlern, und Rundungsfehlern.
Beim Verfahrensfehler hält es sich im Wesentlichen um den Unterschied zwischen dem exakten Wert der Ableitung an der Stelle x und dem exakten Wert des Differenzenquotienten an der Stelle x. Man ersetzt den Differentialquotienten durch den Sekantenanstieg.
- Computerarithmetik
Die Rundungsfehler sind darauf zurückzuführen, dass die Zahlendarstellung auf dem Computer nur mit endlicher Genauigkeit, näherungsweise an die eigentliche Zahl herankommt.

2.1 Herleitung der Formeln

Zur Herleitung einer Formel für die Approximation der Ableitung sind zwei Ansätze möglich: Der geometrische Ansatz über die Derfinition der Ableitung mittels des Differentialquotienten, also den Anstieg der Tangente an die Funktion an der zu betrachtenden Stelle und der Ansatz über die Taylorentwicklung. Ersterer fordert, dass man h (DEFINITION AUFSCHREIBEN) gegen 0 laufen lässt. Dies ist numerisch nicht Möglich, da es im Rechner zu einem Overflow kömmen kann.
Wenn Rundungsfehler vernachlässigt werden, geht der numerische Wert des Differenzenquotienten gegen den exakten Wert der Ableitung.
Die Taylorentwicklung liefert eine Approximationsmöglichkeit für Ableitungen von Funktionen mittels der Taylorentwicklung von einer Funktion f um einen Wert x, also an Stellen x+h, x-h.
Der Differenzenquotient misst die mittlere spezifische Veränderung von f zwischen den Stellen x und x+h, indem die Steigung der Sekante durch x und x+h berechnet wird. Man unterscheidet zwischen dem rechtsseitigem Differenzenquotienten, bei dem man die Steigung zwischen x und x+h betrachtet, und dem linksseitigem Differenzenquotienten, bei dem man die Steigung zwischen x und x-h betrachtet.
Die Nutzung des links- oder rechtsseitigen Differenzenquotienten ist suboptimal vorallem für einseitig gekrümmte Funktionsgraphen, bei denen man oft eine sehr hohe Abweichung zwischen Sekanten- und Tangentesteigung beobachten kann. Deshalb kann es sinnvoll sein diesen Fehler durch Mittelung zu verkleinern und das arithmetische Mittel der beiden einseitigen Differenzenquotienten zu betrachten, d.h. die Sekantensteigung zwischen x-h und x+h. Dies bezeichnet man als symmetrischen Differenzenquotienten erster Ordnung.
Um die zweite Ableitung zu approximieren, kann man analog den symmetrischen Differenzenquotienten zweiter Ordnung nutzen. (FORMELN)

2.2 Optimale Schrittweite finden

Ein Problem bei der Approximation mit Differenzenquotienten ist die Wahl der optimalen Schrittweite h. Ein zu großes h führt zu Verfahrensfehlern, ein zu kleines h zu Auslöschung.

3 Experimente

- Untersuchen Konvergenzverhalten der Approximation der Ableitungen mit Finiten Differenzen
- 1.: $g_1(x) = sin(x)/x$ auf $[\pi, 3\pi]$ mit $p = 1000$
- Vergleich der exakten und approximierten ersten und zweiten Ableitungen von g1 fur $h = \pi/3$, $h = \pi/4$, $h = \pi/5$ und $h = \pi/10$
- Fehlerplots für verschiedene h, Vergleich erwartetes und actual Konvergenzverhalten

- 2.: $g_1(x) = sin(jx)/x$ Vergleich für kleinere j:
- bei j=0.5, 0.25 e2 fast konstant, e1 lin
- 0.1, 0.075 wie gewohnt
- 0.05, 0.01 wieder konstant
- 3.: Vergleich für größeres j:
- j=2, 4, 10, 20: e1 fast linear, e2 minimum bei 10-4, fehler insgesamt immer größer
- j=100-450: e2 minimum bei ca. 10-5, dann quadr , dann konstant?
- j=475: e1 konstant
- j=500 e2 fast gleich e1

- Amplitude der exakten 2. Abl immer viel größer als der Appr.

4 Auswertung

- Größenordunung des Fehlers bei 1. Abl größer, weil h, bei 2. kleiner, weil h hoch 2 für h<1
- bei zu wenig auswertungspunkten ungenauer plot, etc.

5 Zusammenfassung

Dann die Zusammenfassung.