Lösen des Poisson-Problems mittels Finite-Differenzen-Diskretisierung und LU-Zerlegung

Marisa Breßler und Anne Jeschke (PPI27)

03.01.2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitende Worte

In unserem Bericht vom 29.11.2019 haben wir das Poisson-Problem vorgestellt und einen numerischen Lösungsansatz aufgezeigt, der es mittels einer Diskretisierung des Gebietes und des Laplace-Operators in das Lösen eines linearen Gleichungssystems überführt. Letzteres soll nun wie angekündigt durchgeführt werden. In dieser Arbeit wollen wir das lineare Gleichungssystem direkt lösen. Dazu nutzen wir die LU-Zerlegung (mit Spalten- und Zeilenpivotisierung) der ermittelten tridiagonalen Block-Matrix A^d.
Anhand einer Beispielfunktion und den bereits im vorherigen Bericht betrachteten Fällen des Einheitsintervalls, -quadrates, -würfels (d.h. für das Gebiet ... gilt: ...) wollen wir im Folgenden die Funktionalität (Genauigkeit/Fehler, Konvergenzgeschwindigkeit, Effizienz) dieses Lösungsverfahrens exemplarisch untersuchen. Alle im Rahmen dessen nötigen theoretischen Grundlagen finden sich in unseren vorherigen Berichten.

2 Untersuchungen zur Genauigkeit

Für unsere Untersuchungen wählen wir folgende Beispielfunktion: ...
Gesamtfehler = Verfahrens-/Approximationsfehler + Rundungsfehler

2.1 Verfahrens-/Approximationsfehler

Genauigkeit der numerischen Lösung umso höher, je kleiner Intervalllänge $h = 1/n$ bzw. je größer Anzahl der Intervalle (in jeder Dimension) oder der Diskretisierungspunkte
beispielhaft für Fall $d = 2$
grafische Darstellung der Lösung
selbst bei sehr grober Diskretisierung ($n = 5$) Abweichung/Fehler mit Auge kaum wahrzunehmen $>$ deswegen Differenz auch im Plot
Zusammenhang: je größer N, desto genauer Lösung/kleiner Fehler

2.2 Rundungsfehler

Lösen eines linearen Gleichungssystems beschreibt mathematisches Problem
Kondition einer Matrix: Maß für Abhängigkeit der Lösung eines Problems von Störung der Eingangsdaten
Konditionszahl: Faktor, um den sich der Eingangsfehler maximal verstärken kann

3 Untersuchungen zum Speicherplatz

4 Zusammenfassung und Ausblick