Hochwasserstände vorhersagen mittels Kleinste-Quadrate-Lösung

Marisa Breßler und Anne Jeschke (PPI27)

21.01.2020

Vorstellung des Ausgleichsproblems

Ziel: in Daten Zusammenhang erkennen, um Prognosen zu erstellen

p_0	172	309	302	283	443	298	319	419	361	267	337	230
p_1	93	193	187	174	291	184	205	260	212	169	216	144
p_2	120	258	255	238	317	246	265	304	292	242	272	191

Tabelle: Pegelstände an den Stellen p_0, p_1 und p_2

Aufstellen eines überbestimmten Gleichungssystems

p_0	172	309	302	283	443	298	319	419	361	267	337	230
p_1	93	193	187	174	291	184	205	260	212	169	216	144

Tabelle: Pegelstände an den Stellen p_0 und p_1

$$p_{0,i} = x_1 p_{1,i} + x_2 \;\; \forall i = 1, \dots, N$$

Aufstellen eines überbestimmten Gleichungssystems

p_0	172	309	302	283	443	298	319	419	361	267	337	230
p_1	93	193	187	174	291	184	205	260	212	169	216	144

Tabelle: Pegelstände an den Stellen p_0 und p_1

$$p_{0,i} = x_1 p_{1,i} + x_2 \;\; \forall i = 1, \dots, N$$

$$\begin{pmatrix} p_{0,1} \\ p_{0,2} \\ \vdots \\ p_{0,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & 1 \\ p_{1,2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ p_{1,N} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad b = A \cdot x$$

Methode der kleinsten Quadrate

gesucht: Lösungsvektor x von $Ax = b$, s.d. $||Ax - b||_2$ minimal

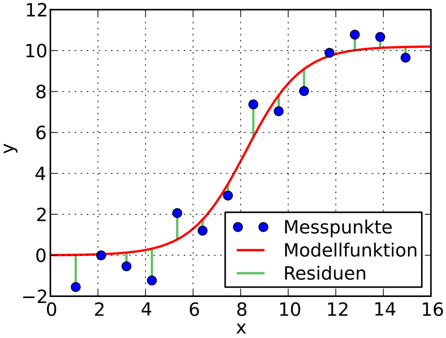


Abbildung: Beispiel einer Kleinste-Quadrate-Lösung, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=12879531

Lösung mittels QR-Zerlegung

$$Ax = b \iff QRx = b \iff Rx = Q^T b$$

$$Q \in \mathbb{R}^{N \times N}, \text{ orthogonal}$$

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \text{ mit } R_1 = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ und } R_2 = 0 \in \mathbb{R}^{(N-2) \times 2}$$

Lösung mittels QR-Zerlegung

$$Ax = b \iff QRx = b \iff Rx = Q^T b$$

$$Q \in \mathbb{R}^{N \times N}, \text{ orthogonal}$$

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \text{ mit } R_1 = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ und } R_2 = 0 \in \mathbb{R}^{(N-2) \times 2}$$

1. $z := Q^T b$ mit $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $z_1 \in \mathbb{R}^2$ und $z_2 \in \mathbb{R}^{N-2}$

Lösung mittels QR-Zerlegung

$$Ax = b \iff QRx = b \iff Rx = Q^T b$$

$$Q \in \mathbb{R}^{N \times N}, \text{ orthogonal}$$

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \text{ mit } R_1 = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ und } R_2 = 0 \in \mathbb{R}^{(N-2) \times 2}$$

1. $z := Q^T b$ mit $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $z_1 \in \mathbb{R}^2$ und $z_2 \in \mathbb{R}^{N-2}$
2. löse $R_1 x = z_1$ mittels Rückwärtseliminierung

Lösung mittels QR-Zerlegung

$$Ax = b \iff QRx = b \iff Rx = Q^T b$$

$$Q \in \mathbb{R}^{N \times N}, \text{ orthogonal}$$

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \text{ mit } R_1 = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ und } R_2 = 0 \in \mathbb{R}^{(N-2) \times 2}$$

1. $z := Q^T b$ mit $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $z_1 \in \mathbb{R}^2$ und $z_2 \in \mathbb{R}^{N-2}$
2. löse $R_1 x = z_1$ mittels Rückwärtselimінierung
3. $||Ax - b||_2 = ||z_2||_2$ ist minimal

Lineare Regression (unmodifizierte Daten)

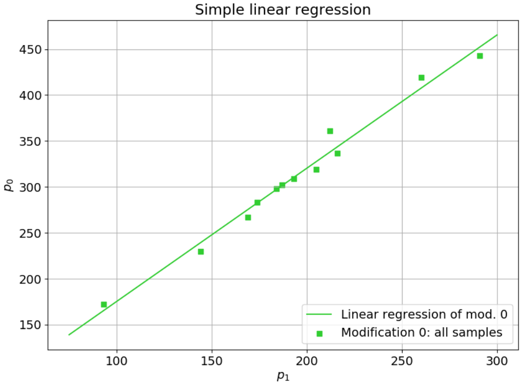


Abbildung: Ergebnis mit unmodifizierten Daten

$$p_0 = 1.450333 p_1 + 30.302158, \; ||Ax - b||_2 = 32.904232$$

Lineare Regression (modifizierte Daten)

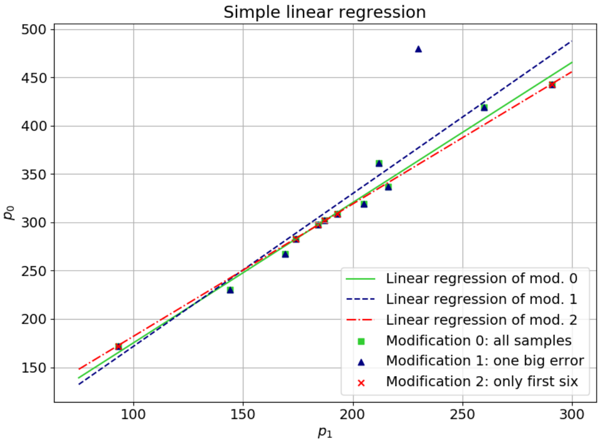
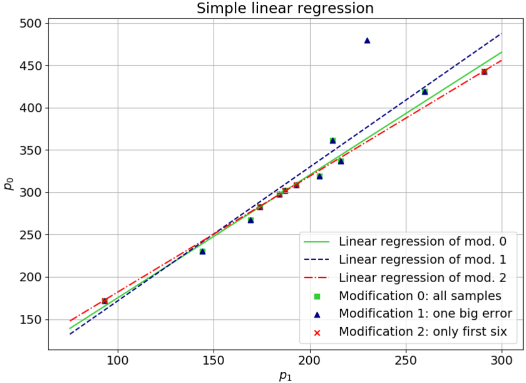


Abbildung: Ergebnis mit verschiedenen modifizierten Daten



Nr. der Modifikation	$cond_2(A)$	$\|\|Ax - b\|\|_2$
0	820.140820	32.904232
1	857.010517	114.146281
2	665.277296	1.542414

Lineare Regression (andere Messung)

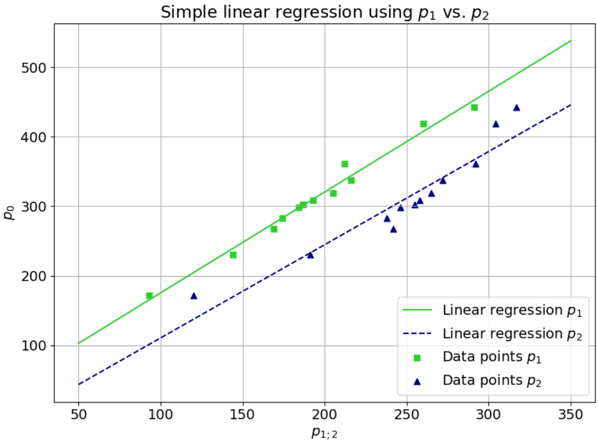
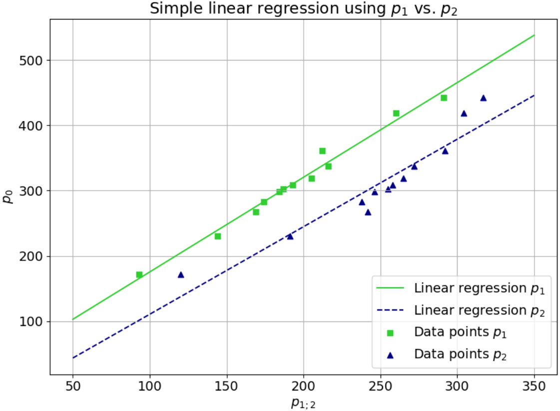


Abbildung: Ergebnis mit p_1 vs. p_2



Nr. des Pegels	$cond_2(A)$	$\|\|Ax - b\|\|_2$
1	820.140820	32.904232
2	1288.744531	78.768276

Lineare Mehrfachregression

$$p_{0,i} = x_1 p_{1,i} + x_2 p_{2,i} + x_3 \quad \forall i = 1, \ldots, N$$

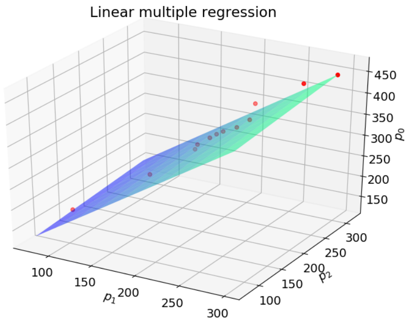


Abbildung: Ergebnis der linearen Mehrfachregression

$$cond_2(A) = 1787.633757, \; ||Ax - b||_2 = 32.091986$$

Alternativer Lösungsweg mit Normalengleichung

viel mehr Messwerte als Variablen $\Rightarrow$ QR-Zerlegung aufwändig

Normalengleichung: $A^T Ax = A^T b$

Alternativer Lösungsweg mit Normalengleichung

viel mehr Messwerte als Variablen $\Rightarrow$ QR-Zerlegung aufwändig

Normalengleichung: $A^T Ax = A^T b$

Nr. der Modifikation	$cond_2(A)$	$cond_2(A^T A)$
0	≈ 820	≈ 672631
1	≈ 857	≈ 734467
2	≈ 665	≈ 442594

Alternativer Lösungsweg mit Normalengleichung

viel mehr Messwerte als Variablen $\Rightarrow$ QR-Zerlegung aufwändig

Normalengleichung: $A^T A x = A^T b$

Nr. der Modifikation	$cond_2(A)$	$cond_2(A^T A)$
0	≈ 820	≈ 672631
1	≈ 857	≈ 734467
2	≈ 665	≈ 442594

$\Rightarrow$ Ergebnisse dann evtl. viel ungenauer

Quellen