UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

CENTRUL UNIVERSITAR NORD BAIA MARE

FACULTATEA DE STIINȚE

DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

SPECIALIZAREA MATEMATICĂ INFORMATICĂ

Geometria Tetraedului

Absolvent

Ștefania-Cristina GLODAN

Conducător științific

Conf. univ. dr. Laurian-Ioan PIȘCORAN

Baia Mare

2020

Introducere

Se știe că una dintre disciplinele matematice, care a generat numeroase discuții, cu prilejul diferitelor readaptări și modernizări ale învățământului nostru matematic, a fost geometria.

În primul rând, geometria, are ca scop studiul formelor spațiale, a proprietăților figurilor, este o aplicație a instrumentului de cercetare matematic pentru investigarea spațiului unidimensional, bidimensional și tridimensional sau ale generalizărilor acestuia.

Am ales această temă pentru a studia mai îndeaproape tetraedrul deorece este o temă care se studiază în gimaziu și liceu, iar cand voi deveni profesor să mă ajute în pregatirea elevilor, atât în clasă cât și pentru diferite concursuri școlare.

Cea mai simplă distibuție spațială o constituie tetraedrul. Tetraedrul este un poliedru alcătuit din patru fețe triunghiulare, oricare trei dintre ele intersectându-se într-unul din cele patru vârfuri. Tetraedrul este cel mai simplu tip de piramidă, la care baza este triunghi, de aceea mai este denumit și piramidă triunghiulară. Denumirea de tetraedru provine de la cuvintele grecești: tetra= patru, hedra= față.

Primul capitol, intitulat "Noțiuni teoretice fundamentale", conține o prezentare teoretică condensată a cunoștințelor fundamentale legate de tetraedru, precum și principalele puncte, drepte și plane în tetraedru fiind enunțate și demonstrate teoreme clasice din geometria tetraedrului. Acest capitol pune în evidență și principalele tipuri de tetraedre cu definiții și proprietăți specifice fiecărui tip (tetraedre ortocentrice, tetraedre echifaciale, tetraedre tridreptunghice, tetraedre Crelle, tetraedre izodinamice și izofaciale, tetraedre regulate). În finalul acestui capitol, am vorbit despre secțiunile în tetraedu, care este o problema importantă a geometriei.

Al doilea capitul, intitulat "Teoreme fundamentale în tetraedru", presupune o analogie între teoreme clasice de geometrie a triunghiului și corespondentele acestora din geometria tetraedrului, precum și câteva teoreme celebre în tetraedru , enunțate și demonstrate.

Ultimul capitol, capitolul trei, intitulat "Aplicații ale tetraedrului", conține diferite probleme și rezolvări pentru fiecare problem în parte, precum și o contribuție proprie de probleme rezolvată în detaliu.

Pentru elaborarea acestei lucrări am consultat o vastă bibliografie din literatura matematică.

Capitolul I.Noțiuni teoretice fundamentale

Definiție: Tetraedrul este un poliedru alcătuit din patru fețe triunghiulare, oricare trei dintre ele intersectându-se într-unul din cele patru vârfuri. Tetraedrul este cel mai simplu tip de piramidă, la care baza este triunghi, de aceea mai este denumit și piramidă triunghiulară.

Punctele A, B, C, D sunt vârfurile segmentelor închise AB, AC, AD, BC, BD, CD, sunt muchiile, iar suprafețele triunghiulare $[ABC], [ABD], [ACD], [BCD]$ sunt fețele tetraedrului.

Reuniunea fețelor tetraedrului se numește suprafața tetraedrului, iar suma ariilor acestor fețe se numește aria totală a tetraedrului. Orice punct al segmentului $[DP]$ se numește punct interior tetraedrului. Două muchii necoplanare ale unui tetraedru se numesc muchii opuse.

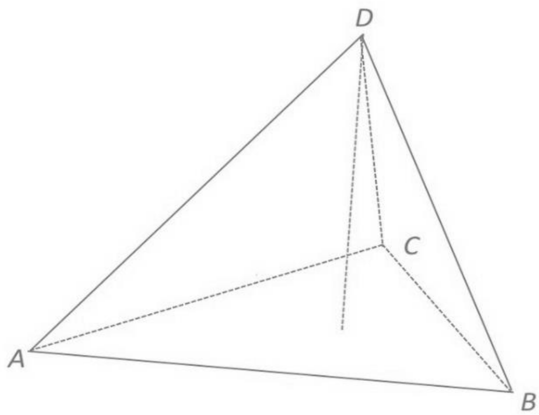


Fig.1

Pentru desenarea tetraedrelor există în principiu două convenții distincte. Prima convenție subînțelege că fețele sunt plăci semitransparente și atunci unele muchii, presupuse în spatele unor fețe, se trasează cu linii întrerupte. A doua convenție subînțelege fețele transparente și muchiile având o vecinătate opacă (nu se traseaza nici o muchie cu linie întreruptă).

Interiorul tetraedrului $ABCD$, se noteaza cu Int($ABCD$) si este intersecția semispațiilor deschise determinate de planele fețelor și vârful opus respectiv.

Interiorul tetraedrului este o mulțime conexă, fiind o intersecție de mulțimi conexe.

Pentru tetraedrul $ABCD$ se vor utiliza frecvent urmatoarele notații:

- Lungimile muchiilor $BC = a, CA = b, AB = c, AD = l, BD = m, CD = n$
- Unghiurile diedre $\widehat{C(AB)}D$ va fi notat frecvent AB
- Unghiurile triedre $A(\widehat{BCD})$ se va nota când nu vor fi posibile confuzii cu A
- Aria feței $[ABC]$ se va nota cu S_{ABC}
- Planul (BCA), adică fața opusă lui D se notează cu D^f

Volumul tetraedrului se calculează dupa formula : $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$.

Aria tetraedrului se calculează cu ajutorul formulei: $A_t = A_l + A_b$.

Planul mediator este planul perpendicular în mijlocul segmentului AB. Se știe ca planul mediator al unui segment este locul geometric al punctelor din spațiu ce se află la egală distanță de capetele segmentului.

Teorema: Planele mediatoare ale muchiilor unui tetraedru sunt concurente.

Planul bisector al diedrului propriu $A(\widehat{BC})D$ este planul α ce conține punctele M cu proprietatea $A(\widehat{BC)M} = M(\widehat{BC)D}$. Semiplanul delimitat de BC în α alcătuit din puncte interioare diedrului dat se numește semiplan bisector. Planul prin BC perpendicular pe α se numește plan bisector exterior.

Teorema: Planele bisectoare ale triedrului sunt concurente.

Medianele tetraedrului este dreapta determinată de un vârf al tetraedrului și centrul de greutate al feței opuse acelui vârf se numește mediana tetraedrului.

Teorema: Medianele unui tetraedru $ABCD$ sunt concurente.

Bimedianele unui tetraedru sunt segmentele care unesc mijloacele a două muchii opuse ale unui tetraedru.

Teorema: Bimedianele unui tetraedru sunt concurente în centrul de greutate, care este mijlocul fiecărei bimediane .

Înălțimea tetraedrului este segmentul ce are ca extremități un vârf al tetraedrului și proiecția acestui vârf pe planul feței opuse. Proiecția unui vârf pe planul feței opuse se numește piciorul înălțimii.

Clasificarea tetraedrelor prezentate mai jos este făcută în funcție de condițiile care se pun asupra fețelor tetraedrului sau asupra lungimilor muchiilor.

Cele mai importante tipuri de tetraedre particulare sunt :

a) Ținând cont de fețele tetredrului:

- Tetredrul izofacial sau piramida triunghiulară regulată
- Tetraedrul echifacial
- Tetraedrul regulat
- Tetraedrul tridreptunghic

b) Ținând cont de lungimile muchiilor:

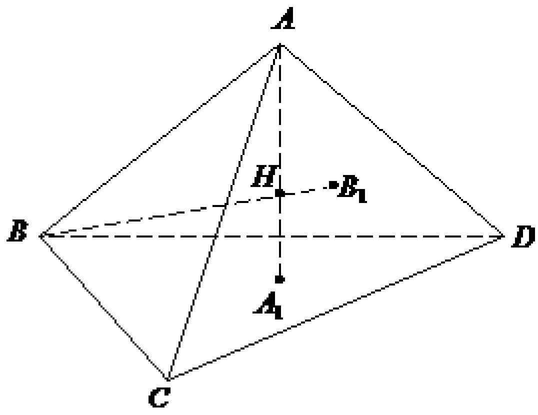
- Tetraedrul echifacial
- Tetraedrul regulat
- Tetredrul izodinamic
- Tetraedrul “Crelle”
- Tetraedrul ortocentric

Există și alte criterii de particularizare:

- După unghiuri diedre
- După unghiuri triedre
- După unghiuri formate de muchii opuse
- După distanța între muchii opuse

Tipuri de tetraedre

1. Tetraedrul ortocentric

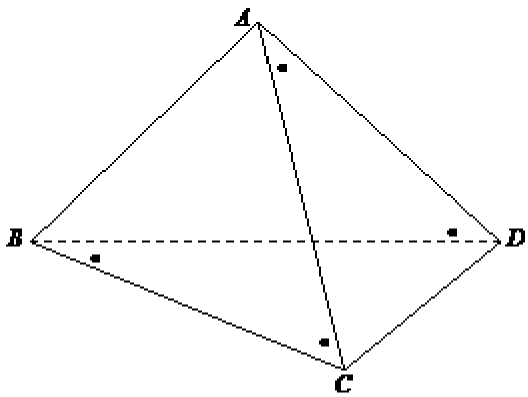


În general, înalțimile unui tetraedru, adică dreptele prin vârfuri perpendiculare pe fețele opuse nu sunt două câte două secante, deci nici concurente.

Definiție: Se numește tetraedru ortocentric sau ortogonal un tetraedru în care cele patru înalțimi sunt patru drepte concurente.

Dacă există punctul H de intersecție a înălțimilor se numește ortocentrul tetraedrului. Denumirea a fost introdusă de Seiner în 1827.

2. Tetraedrul echifacial



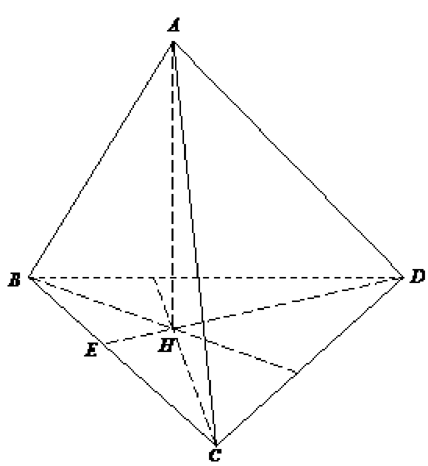
Definiție: Se numește tetraedru echifacial un tetraedru ale cărui fețe sunt echivalente (au aceeași arie).

Teorema: Se observă formula $3V = h_X S_X$ referitoare la volumul tetraedrului.

Teorema: a) Dacă $ABCD$ este tetraedru echifacial, atunci planul bisector al oricărui diedru al său este și plan median.

b) Dacă pentru trei diedre ale tetraedrului $ABCD$ având muchiile necoplanare planele bisectoare sunt și plane mediane, atunci tetraedrul este echifacial.

3. Tetraedru tridreptunghic



Definiție: Se spune că tetraedrul $ABCD$ este tridreptunghic în D dacă oricare două dintre dreptele DA, DB, DC sunt perpendiculare.

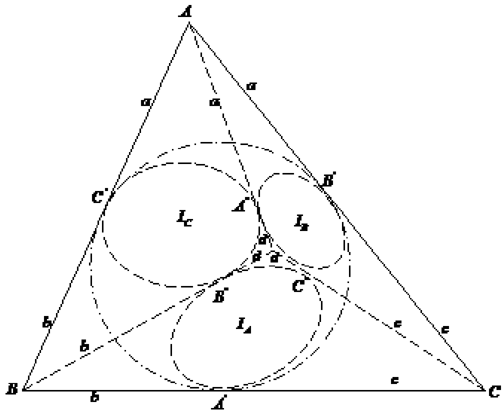
Observație: Cum 1) $DB \perp AD$ și $DB \perp CD$ rezultă $DB \perp (ADC)$ rezultă $DB \perp AC$

2) $AD \perp BD$ și $AD \perp DC$ rezultă $AD \perp (BDC)$ rezultă $AD \perp BC$

3) $CD \perp BD$ și $CD \perp AD$ rezultă $CD \perp (ABD)$ rezultă $CD \perp AC$.

Deci tetraedrul tridreptunghic având și muchiile opuse perpendiculare este și ortocentric.

4. Tetredrul Crelle



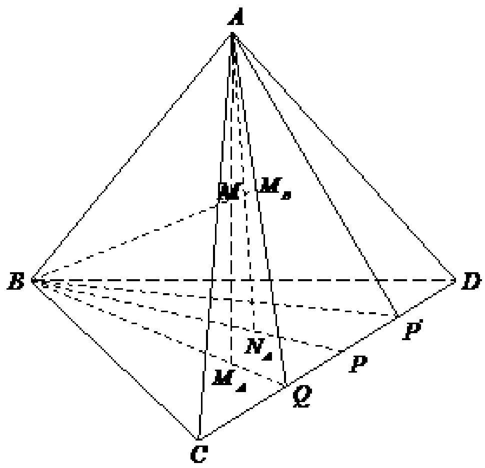
Definiție: Tetraedrul Crelle este tetraedrul pentru care exista o sfera tangenta la muchiile sale.

Teorema Fiind dat un tetraedru [ABCD] exista o sfera tangenta celor sase muchii ale tetraedrului daca si numai daca au loc conditiile AB + CD = AC + BD = AD + BC.

5. Tetraedre izodinamice și izofaciale

Definiție: Un tetraedru $ABCD$ se numește izodinamic dacă produsul lungimilor muchiilor opuse este constant.

$$(1)\ AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$$



Un caz particular de tetraedru izodinamic $ABCD$ este tetraedrul în care una din fețe este triunghi echilateral. Presupunând că această față este ABC, în afara egalităților (1) vor avea loc:

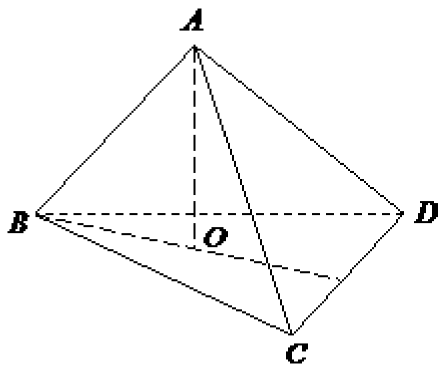
$$(2)\ AB = BC = CA$$

$$(3)\ AD = BD = CD.$$

Pentru cazul particulare menționat se spune că $ABCD$ este un tetraedru izofacial sau mai frecvent că este piramidă triunghiulară regulată. Desigur, pentru o piramidă regulată $ABCD$ este preferabil să acceptăm egalitățile (2) și (3), obținând (1) ca o consecință a lor.

Teorema 1.9.5.2. [4] Un tetraedru izodinamic $ABCD$ este izofacial dacă și numai dacă este ortocentric.

6. Tetraedrul regulat



Definiție: Se numește tetraedru regulat un tetraedru cu toate fețele triunghiuri echilaterale. Evident, toate muchiile unui tetraedru regulat $ABCD$ au aceeași lungime ce o vom nota cu a.

Teorema 1.9.6.2. [4] Un tetaedru regulat $ABCD$ este : ortocentric; echifacial; crelle; izodinamic (izofacial)

Secțiuni în tetraedru

Determinarea secțiunii

O problema centrală a geometriei în spațiu admite următoarea formulare:

Fiind dat un poliedru P și un plan σ să se determine secțiunea în P prin σ. Caracterul central al acestei probleme derivă din observația: teoremele și problemele de geometrie în spațiu revin la analoage din geometria plană; modaliatatea generală de rezolvare a problemelor din spațiu constă la reducerea lor la probleme de geometrie plană prin considerarea unor secțiuni convenabile.

Considerăm cazul în care poliedrul se reduce la un tetraedru $ABCD$; pe de o parte acesta este cel mai simplu caz imaginabil, iar pe de altă parte orice poliedru poate fi descompus in tetraedre.

Capitolul II.Teoreme fundamentale în tetraedru

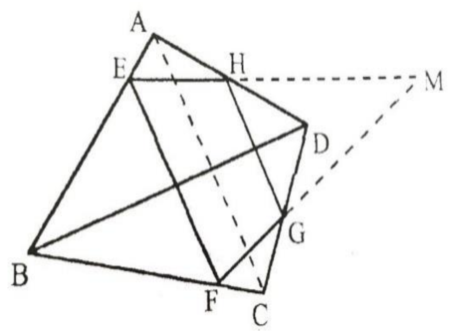
În acest capitol am prezentat anumite teroeme fundamentale din tetredru, dar si analogii între teoreme.

Poliedrul cu cel mai mic număr de fețe, doar patru, tetraedrul este corespondent în spațiu cu trei dimensiuni, al triunghiului. Se pot stabili, astfel analogii între unele teoreme din geometria plană a triunghiului și geometria tetraedrului.

Teorema lui Menelaus

În tetraedru: Dacă un plan α, intersectează muchiile $[AB], [BC], [CD], [DA]$ ale unui tetraedru $ABCD$, respectiv în punctele E, F, G, H atunci are loc relația:

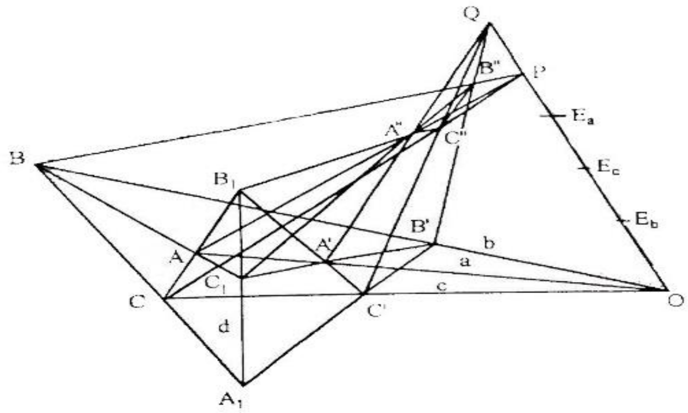
$$\frac{EA}{EB} \cdot \frac{FB}{FC} \cdot \frac{GC}{GD} \cdot \frac{HD}{HA} = 1.$$



Teorema lui Desargues

În tetraedru: Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$ astfel încât există drepte unice $AA' = a, BB' = b, CC' = c$ și punctele unice: $\{AA_1\} = BC \cap B'C', \{BB_1\} = CA \cap C'A'$, $\{CC_1\} = AB \cap A'B'$. Următoarele două afirmații sunt echivalente:

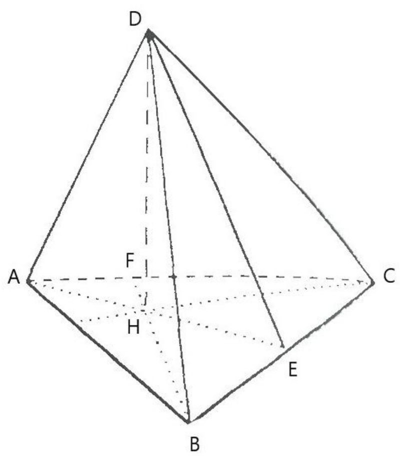
1. Există un punct $\{O\} = a \cap b \cap c$ (centru de omologie),sau dreptele a, b, c sunt paralele și distincte;
2. Există o dreaptă d incidentă punctelor A_1, B_1, C_1, numită axă de omologie a triunghiurilor ABC și $A'B'C'$.



Teorema catetei

În tetraedrul tridreptunghic: Ca o generalizare a teoremei catetei în triunghiul dreptunghic, în tetraedru avem: Aria unei fețe laterale a unui tetraedu tridreptunghic în D este media geometrică între aria bazei și proiecția pe bază a feței:

$S_{DBC}^2 = S_{ABC} \cdot S_{HBC}$, unde H este ortocentrul triunghiului ABC.



Concluzii

Poliedrul cu cel mai mic număr de fețe, doar patru, tetraedrul. Cea mai simplă distibuție spațială o constituie tetraedrul. Tetraedrul este cel mai simplu tip de piramidă, la care baza este triunghi, de aceea mai este denumit și piramidă triunghiulară.

Această temă “Geometria tetraedrului” a fost concepută astfel încât să vină în sprijinul elevilor din gimnaziu și liceu. Ea este de asemenea utilă și profesorilor de matematică din învățământul gimnazial și liceal, în munca lor la catedră sau pentru pregătirea concursurilor școlare.

În această lucrare am prezentat noțiunile cele mai importante din geometria tetraedrului, clasificarea tetradrelor fiind realizată în funcție de condițiile care se pun asupra lungimilor muchiilor, fiind tratate următoarele tipuri de tetraedre: ortocentrice, echifaciale, tridrptunghice, Crelle, izodinamice, izofaciale și regulate precum și celebrele teoreme regăsite în tetraedru conținând definiții și demonstrați specifice fiecărei teoreme.

Pornind de la faptul că rolul geometriei nu este acela de a însuma niște cunoștințe, ci acela de a forma capacități de gândire creatoare, nedogmatică, fără prejudecăți, extinderea de la tetraedrul regulat la tetraedru în general constituie un mod de aprofundare a noțiunilor teoretice, adâncind înțelegerea acestora și raportului dintre ele. De aceea am prezentat în ultimul capitol un set de probleme care conține și rezolvarea fiecărei probleme.

Am reușit să imi fixez anumite noțiuni legate de tetraedru, dar am și învățat totodată anumite elemente. Cercetând noțiuni despre tetraedrul am folosit o vastă bibliografie, care ma ajutat să-mi îmbogățesc cunoștințele.

Bibliografie

[1] https://docgo.net/detail-doc.html?utm_source=tetraedrul-regulat-cu-aplicatii&fbclid=IwAR0p-J_acCIWDKAPuM4DHHBgCbt0GaYhvifgp79SgMvY8mAC-fo1rZg2pb0

[2] https://ro.wikipedia.org/wiki/Tetraedru

[3] Niculescu, M., Geometria tetraedrului, Editura TehnoArt, Petroșani, 2002.

[4] Georgescu, I., Geometrie în spațiu, Editura All Educațional, București,1 1995.

[5] Pârvescu, Geometria poliedrelor, Editura Princeps Edit, Iași, 2005.

[6] Moț, A., Lecții de matematică. Tetraedre. Editura Eurobit, Timișoara, 1993.

[7] Nicolescu, L., Boskoff, V., Probleme practice de geometrie, Editura Tehnică, București, 1990.

[8] https://www.creeaza.com/referate/matematica/Tetraedre-regulate648.php

[9]https://www.creeaza.com/referate/matematica/Tetraedre-izodinamice-si-izofa815.php

[10] https://www.creeaza.com/referate/matematica/Tetraedre-echifaciale985.php

[11] https://www.creeaza.com/referate/matematica/Tetraedre-Crelle315.php

[12] https://www.creeaza.com/referate/matematica/Tetraedre-ortocentrice563.php

[13] Drăghicescu, I., Masgras, V., Probleme de geometrie, Editura Tehnică, București, 1987.

[14] Brânzei, D. ș.a., Olimpiadele de matematică 1990-1997, clasa a VIII-a, Editura Gril, Zalău, 1997.

[15] Becheanu, M. ș.a., Olimpiadele de matematică 1990-1996, clasele IX-X, Editura Gril, Zalău, 1997.