Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería
Tarea 01

Eva Díaz

September 24, 2015

Profesor:	Valentino González
Profesor Auxiliar:	Felipe Pesce

1 Introducción

Se dispone de un *array* que contiene el espectro del Sol medido en las afueras de la atmósfera, es decir, la energía por unidad de tiempo por unidad de área por cada longitud de onda. Se busca calcular la luminosidad total del Sol mediante integración numérica de estos datos y posteriormente se integra numéricamente la función de Planck, para de esta forma obtener una estimación del radio efectivo del Sol.
Finalmente, se realiza una breve comparación de los tiempos de ejecución de los códigos de integración versus los métodos incluídos en el módulo *scipy*.
El código utilizado para cada parte se referencia al pie de la página.

2 Procedimiento

En primer lugar, con los datos proporcionados se grafica[1] el espectro del Sol en unidades del sistema cegesimal (Figure 1) utilizando los módulos *matplotlib* y *numpy*.
A continuación se integra numéricamente[2] este espectro usando el método del trapecio para obtener la luminosidad total del Sol. El valor obtenido en unidades del sistema cegesimal es de 1366090.79 $\frac{erg}{cm^2 s}$, mientras que en el sistema internacional es 1366.09 $\frac{W}{m^2}$.
Por otro lado, se conoce que la radiación de cuerpo negro por longitud de onda está dada por la función de Planck (Equation 1).

$$B_\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2/\lambda^5}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \tag{1}$$

[1] graficar.py
[2] integracion.py

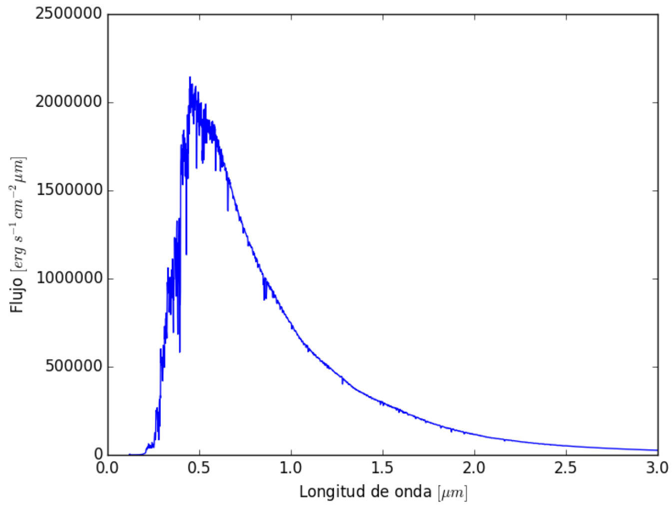

Figure 1: Espectro del Sol.

Donde la temperatura del Sol se estima en 5778 K. Más aún, es posible demostrar que al integrar la función de Planck para todas las longitudes de onda la energía total por unidad de área queda determinada por la siguiente ecuación:

$$P = \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx \tag{2}$$

Para calcular numéricamente esta última integral se requiere hacer un cambio de variable de modo de evitar el límite infinito (pues Python por si solo no puede calcular hasta el infinito). El cambio de variable a utilizar es $y = \arctan x$, de modo que la función equivalente a integrar queda determinada por:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\tan^3 y + \tan^5 y}{e^{\tan y} - 1}dy \tag{3}$$

Esta integral se puede calcular analíticamente y tiene un valor de $\pi^4/15$. Para hacer el cálculo numérico se utiliza el método del trapecio y el método de Simpson[3], los cuales arrojan un valor de 6.49393940227. Ambos métodos entregan el mismo valor (difieren a lo más en un orden de 10^{-14}) por lo que se asume que son muy exactos. De todas formas, es posible seguir refinando este valor dividiendo el intervalo que va de 0 a π en más partes.
Usando este último valor se tiene que la función de Planck integrada en todas las longitudes de onda vale:

[3] integracion2.py

$$P = \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \times 6.49393940227 = 63200679712.4\frac{erg}{cm^2 s} \tag{4}$$

O, en unidades del Sistema Internacional, 63200679.7 $\frac{J}{m^2 s}$.
Ahora, con los valores que se han obtenido, es posible deducir el radio efectivo del Sol. Para esto hay que considerar la Ley de Stefan-Boltzmann, que establece lo siguiente:

$$E = \sigma T_e^4 \tag{5}$$

Donde E representa la potencia emisiva total de un cuerpo negro. Como se acaba de calcular este valor, es posible despejar la constante de Stefan-Boltzmann en función de este y de la temperatura efectiva del Sol (también conocida). Ahora, la densidad de flujo electromagnético por unidad de área a una distancia de 1 AU (distancia Tierra-Sol) está determinada por:

$$K = \sigma T_e^4 \left(\frac{r_s^2}{a_0^2}\right) \tag{6}$$

Esta última ecuación es más conocida como la ecuación de la constante solar, donde r_s es el radio solar y a_0 es la distancia del Sol al planeta.
Reemplazando el valor para σ obtenido en (5) en la ecuación (6) se puede despejar el valor estimado para el radio solar[4], el cual es de 695511508 m, o 695511.508 km.
Finalmente, se prueba la eficiencia de los métodos implementados anterioremente para el cálculo de las integrales. Para esto se vuelven a calcular estas integrales, esta vez mediante los métodos *integrate.trapz*[5] e *integrate.quad*[6], respectivamente, incluidos ambos en el módulo *scipy*. Usando la función *time()* para medir se obtienen los siguientes resultados:

Método	Integral 1	Integral 2
Manual	1.964 s	0.064 s
scipy	0.078 s	0.019 s

Table 1: Tiempos de ejecución.

Es claro que los métodos de integración incluídos en el módulo *scipy* son mucho más eficientes que los que se implementaron manualmente. Esta diferencia puede deberse a que el módulo *scipy* funciona óptimamente cuando trabaja con *arrays*, lo cual se puede apreciar en la Integral 1, donde este módulo supera con creces la eficiencia del método manual. Para la Integral 2 se trabajó con vectores, lo que podría explicar que la diferencia sea mucho menor comparada con la Integral 1.

[4] radiosolar.py
[5] integracion3.py
[6] integracion4.py

3 Conclusiones

Se concluye que los métodos manuales de integración, si bien no son terriblemente lentos en su ejecución, no representan una opción viable frente a los métodos incluídos en el módulo *scipy.* El problema aquí resuelto es pequeño y simple, por lo que para un caso de este tipo sí sería posible utilizar el método de integración manual sin preocuparse de perder demasiados recursos; sin embargo, para problemas de mayor complejidad que suponen un mayor uso de tiempo y recursos es necesario optimizar lo más posible, por lo que no sería conveniente utilizar los métodos manuales.