Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería
Tarea 03

Eva Díaz, 18.741.638-8

October 8, 2015

Profesor:	Valentino González
Profesor Auxiliar:	Felipe Pesce

1 Introducción

La tarea consiste en implementar el método de integración de Runge Kutta de orden 3 y utilzar el módulo *integrate* incluído en *scipy* para integrar las ecuaciones de dos problemas conocidos. El procedimiento seguido es descrito a continuación.

2 Descripción y solución del problema

2.1 Parte 1: Oscilador de Van der Pol

La dinámica de algunos circuitos electrónicos puede ser descrita mediante la ecuación del oscilador de Van der Pol (1), en la que k es la constante elástica y μ es el coeficiente de roce. El parámetro a determina si el roce amortigua el movimiento ($|x| < a$) o si le inyecta energía ($|x| > a$).

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu(x^2 - a^2)\frac{dx}{dt} \tag{1}$$

Esta ecuación puede ser simplificada de modo que dependa sólo de una constante. Si se realiza el cambio de variable $s = \frac{t}{\sqrt{k}}$ e $y = \frac{x}{a}$ la ecuación resultante es:

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -y - \mu^*(y^2 - 1)\frac{dy}{ds} \tag{2}$$

Para la resolución de este problema se elige el valor de la constante μ^* como un uno seguido de los tres últimos dígitos del RUT del estudiante, por lo cual se tiene que $\mu^* = 1.638$. A continuación se discretiza el problema implementando manualmente el método de Runge Kutta de orden 3[1] para un vector $(dy/ds, y)$, de modo de bajarle un orden a la ecuación diferencial y hacer viable la aplicación de este método de integración. Se elige un intervalo de tiempo de integración de 0 a 20π, mientras que el número de pasos elegido es de 10000, lo que da como resultado que el valor de cada paso sea de $6.2831 \cdot 10^{-3}$.

Las figuras 1 y 2 muestran la forma de la solución de esta ecuación diferencial para dos condiciones iniciales distintas.

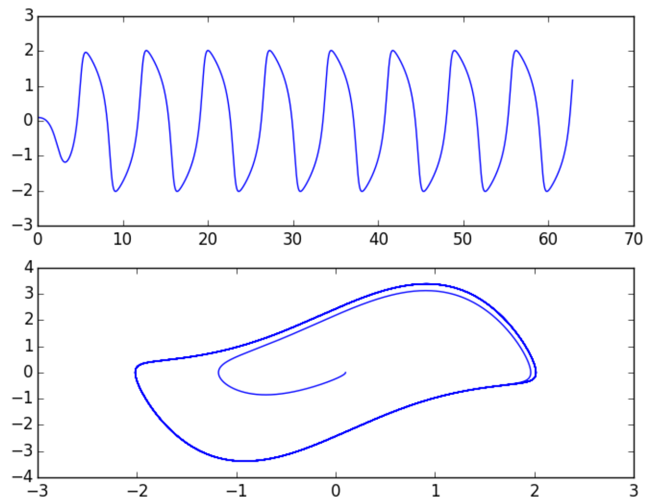

Figure 1: Arriba se grafica y vs s. Abajo se grafica dy/ds vs y. Las condiciones iniciales son $y = 0.1$ y $dy/ds = 0$.

2.2 Parte 2: Atractor de Lorenz

El atractor de Lorenz es una de las soluciones caóticas más conocidas del sistema de Lorenz. Las ecuaciones del problema son:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{ds} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{ds} &= xy - \beta z \end{aligned} \tag{3}$$

Los valores de las constantes que generan el atractor de Lorenz son $\sigma = 10$,

[1]tarea3.py

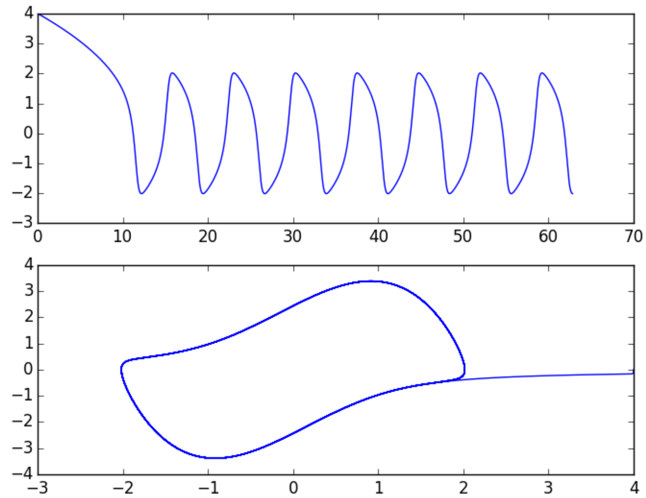

Figure 2: Arriba se grafica y vs s. Abajo se grafica dy/ds vs y. Las condiciones iniciales son $y = 4$ y $dy/ds = 0$.

$\beta = 8/3$ y $\rho = 28$.

Para este problema se utiliza el método de integración *integrate.ode*[2], incluído en *scipy*. Se eligen las condiciones iniciales $x_0 = 3$, $y_0 = 3$ y $z_0 = 3$, y la Figura 3 muestra el gráfico obtenido

3 Conclusiones

Los métodos manuales de integración resultan ser bastantes precisos si se les proporciona un paso adecuado, pues se puede apreciar que los gráficos obtenidos en la primera parte son muy cercanos a las soluciones conocidas de este problema. Por otra parte, los métodos de integrados incluídos en la librería *scipy* resultan naturalmente precisos, ya que han sido optimizados para entregar la solución más exacta posible.

Muchos problemas físicos no poseen solución analítica conocida o éstas resultan muy difíciles de obtener, por lo que es fundamental conocer métodos de integración numérica, como los estudiados en esta tarea, que permitan resolver estos problemas y que ayuden a aclarar un poco el panorama.

[2] p2tarea3.py

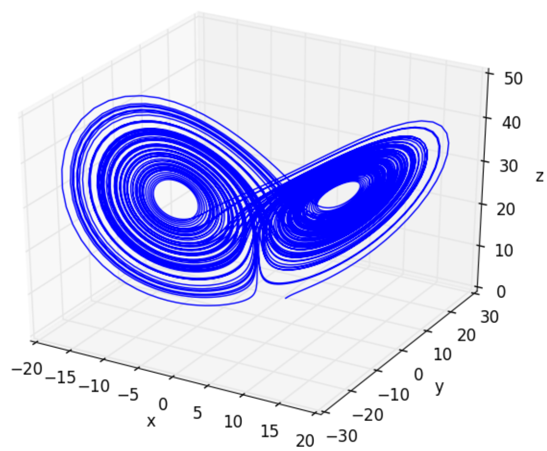

Figure 3: Atractor de Lorenz.