Tarea 05: Ecuación de Poisson

Eva Díaz
18.741.638-8

October 28, 2015

Curso:	Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería
Profesor:	Valentino González
Profesor Auxiliar:	Felipe Pesce

1 Introducción

La tarea consiste en integrar la ecuación de Poisson para el potencial electrostático en dos dimensiones, dado por:

$$\nabla^2 V(x,y) = -\rho(x,y) \tag{1}$$

Se debe integrar en una caja de dimensiones 10 cm $\times$ 15 cm cuyos bordes están conectados a tierra ($V = 0$). Además, dentro de la caja hay una línea en $y = -5.5$ y $x = [-3, 3]$ que presenta una condición de borde derivativa tipo Neumann.

$$\frac{dV}{dn} = \pm 1 \tag{2}$$

Esta derivada toma el valor $+1$ cuando $y > -5.5$ y el valor -1 cuando $y < -5.5$.

Finalmente, dentro de la caja hay una letra E centrada en ésta y de medidas 5 cm $\times$ 7 cm. Esta letra, cuyos trazos tienen un grosor de 1 cm, tiene una carga total de 1 C.

A partir de esto, y considerando que la densidad de carga es constante dentro de la letra, se puede determinar la función $\rho(x,y)$ y se puede resolver el problema discretizando la caja que "contiene" el potencial e integrando mediante el método de sobre-relajación.

2 Procedimiento

Para resolver esta ecuación se genera una grilla de 10 $cm \times 15$ cm dividida en pequeñas celdas de lado $h = 0.2$ cm. Cada una de estas celdas poseerá una coordenada i, j, de tal modo que la ecuación 1 puede ser discretizada dentro de la caja como:

$$\frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{h^2} + \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{h^2} = -\rho_{i,j} \tag{3}$$

Despejando para $V_{i,j}$ obtenemos:

$$V_{i,j} \leftarrow \frac{1}{4}[V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + h^2\rho_{i,j} \tag{4}$$

Sin embargo, utilizando el método de sobre-relajación se puede definir una expresión más general para el potencial, dada por:

$$V_{i,j} \leftarrow (1-\omega)V_{i,j} + \frac{\omega}{4}[V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + h^2\rho_{i,j}] \tag{5}$$

Donde ω puede tomar diversos valores, y donde se observa claramente que para $\omega = 1$ se recupera la expresión obtenida en 4. Es preciso notar también que el método define el valor del potencial en una celda de acuerdo a los valores del potencial en aquellas que la rodean, por lo que se hace necesario tener dos copias de la grilla, de modo que al empezar a recorrerla una de ellas guarde los valores que se utilizarán para definir los valores de la otra (ver código adjunto[1]).

Por otra parte, se sabe que la carga total que los trazos que forman la letra E es 1 C y que la densidad de carga es constante. El área cubierta por la letra es de 19 cm^2 (esto es fácil de ver y calcular), por lo que se tiene:

$$Q = 1 = \int \rho(x,y)dxdy = \rho \int dxdy = \rho \times \text{Área} \Rightarrow \rho = \frac{1}{19} \tag{6}$$

Con este resultado se tienen todos los datos para poder integrar en la grilla y encontrar los valores de V en cada celda.

Además de esto, se puede conocer aproximadamente después de cuántas iteraciones el método ha convergido. Este número puede variar dependiendo de la tolerancia que admite la función que evalúa la convergencia, así como del valor de ω escogido para integrar V.

[1] tarea5.py

3 Resultados

Se fija como rango de tolerancia el valor 1×10^{-3}, es decir, que la máxima diferencia permitida entre cada iteración corresponda a este valor. Se ha escogido este número pues el tamaño de cada celda corresponde a aproximadamente 10^{-1} y es claro que si la diferencia entre una iteración y otra es muchísimo menor (dos órdenes de magnitud, exactamente) a la "nitidez" que se le da a la grilla es porque el método ya ha alcanzado un punto óptimo. Se podría ir aún más lejos y pedir que la tolerancia fuera de, por ejemplo, 1×10^{-4}; sin embargo, aunque ciertamente se obtendría un mejor criterio de seguridad de que la solución obtenida es la correcta, no sería conveniente en términos de recursos computacionales, pues es posible que tome un gran número de iteraciones alcanzar este estándar (si es que se alcanza del todo).

Fijado el valor de la tolerancia, ahora se toman algunos valores de ω y se calcula el número de iteraciones requerido para que el método converja. Los resultados obtenidos se ilustran en la Tabla 1.

ω	Iteraciones
0.8	5289
1.0	3610
1.2	2466
1.4	1626
1.6	972
1.8	426
1.9	522

Table 1: Número de iteraciones para diferentes valores de ω. La tolerancia de convergencia es 1×10^{-3}.

A continuación se puede probar cambiando el valor de la tolerancia por 1×10^{-2}, con el fin de estudiar la dependencia de la convergencia en la tolerancia del método. Los resultados se ilustran en la Tabla 2.

Se observa que para ambos valores de tolerancia, ω no cambia significativamente y tiene un óptimo bien definido cerca de $\omega = 1.8$, lo que sugiere que la convergencia del método de sobre-relajación depende fuertemente, como era de suponer, del valor que se le asigne al parámetro ω.

ω	Iteraciones
0.8	3837
1.0	2875
1.2	1933
1.4	1416
1.6	834
1.8	360
1.9	404

Table 2: Número de iteraciones para diferentes valores de ω. La tolerancia de convergencia es 1×10^{-2}.

El potencial obtenido luego de que el método ha convergido puede apreciarse en la Figura 1. Se puede observar claramente la línea donde existía una condición de borde de tipo Neumann y, en cambio, la zona donde está la letra con carga casi no se logra apreciar. Esto se debe a que se debe repartir 1 C entre un área de 19 cm^2, por lo que la influencia de ésta sobre el potencial en la caja es mínima.

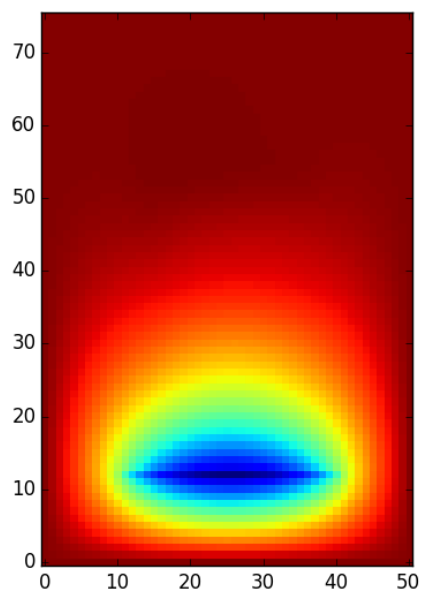

Figure 1: Potencial cuando el método ha convergido.

En la Figura 2 se puede ver el potencial, esta vez para 10 iteraciones (es decir, cuando el método aún no está ni cerca de converger). Aquí sí es más evidente la influencia de la carga de la letra sobre el potencial, pero aún así esta es mínima comparada con aquella ejercida por la línea con condición de borde.

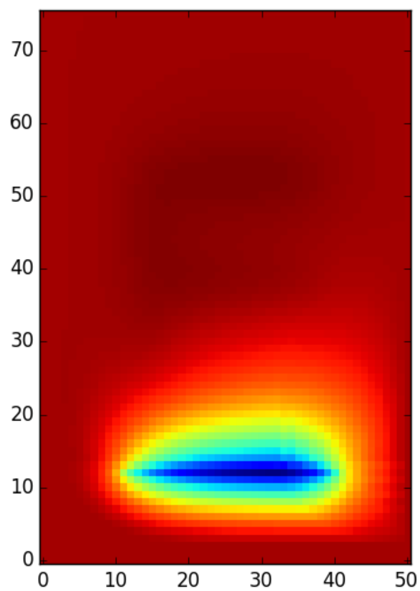

Figure 2: Potencial cuando el método aún no ha convergido, a las 10 iteraciones.

Se puede apreciar en la Figura 3 que el potencial electrostático es continuo y suave, lo cual indica que el método fue correctamente aplicado y que la solución obtenida es confiable.

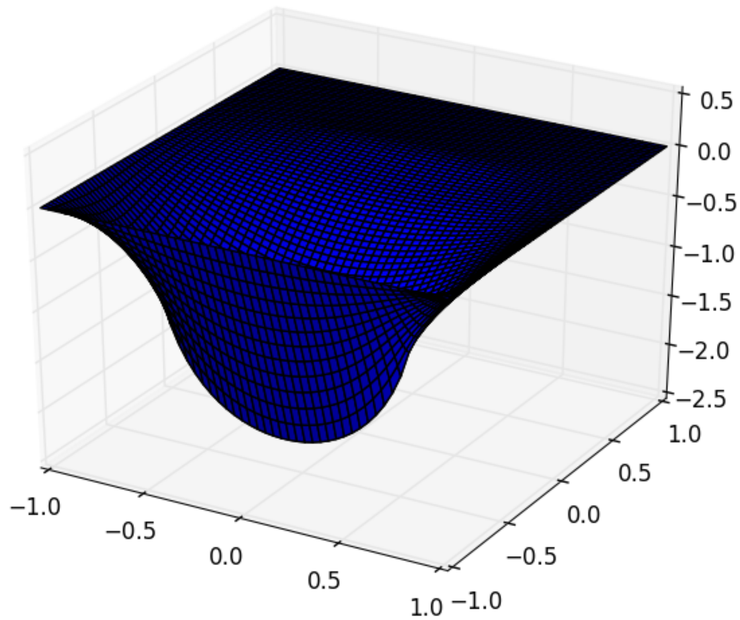

Figure 3: Potencial en 3D.

4 Conclusiones

Se logra obtener una buena solución para la ecuación de Poisson mediante el método de sobre-relajación. Se encontró que este método depende fuertemente del parámetro ω, lo cual era esperado, y que para ω cercano a 1.8 la convergencia de la solución es la más rápida.

Por otro lado, se obtuvo que la solución para el potencial se encuentra fuertemente definida por la condición de borde impuesta y la influencia de la carga es casi nula, esto debido a que ésta ha debido ser distribuida sobre un área grande, haciendo que la densidad sea pequeña.