Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и кибербезопасности
Высшая школа компьютерных технологий и информационных систем

Отчёт по практической работе

Дисциплина: Теория вероятностей и математическая статистика

Выполнил студент гр. 5130901/20004 ________________ Самохвалова П. А.
(подпись)

Преподаватель ________________________ Никитин К. В.
(подпись)

“____” _____________ 2024 г.

Санкт-Петербург
2024

Список задач для аналитического решения: **16.29, 17.20, 18.22, 19.4, 20.9, 21.20, 22.1, 23.8, 24.15**

№ 16.29

• Найти характеристическую функцию системы n случайных величин, подчиненных нормальному закону распределения, если заданы математические ожидания случайных величин, входящих в систему, $\bar{x}_m = a$, а их корреляционная матрица

$$\|k_{rs}\| = \left\| \begin{matrix} \sigma^2 & \alpha\sigma^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha\sigma^2 & \sigma^2 & \alpha\sigma^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\sigma^2 & \sigma^2 & \alpha\sigma^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 & \alpha\sigma^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha\sigma^2 & \sigma^2 \end{matrix} \right\|, (r, s = 1,2, \dots, n).$$

Решение: характеристическая функция многомерного нормального распределения – $E(u) = \exp\left(i\sum_{m=1}^{n} u_m\bar{x}_m - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} k_{rs}u_r u_s\right)$. По условию $\bar{x}_m = a$, ковариации не равны нулю только на наддиагонали и поддиагонали корреляционной матрицы, которые можно записать как $\sum_{m=1}^{n} a\sigma^2 u_m u_{m+1}$. Тогда

$$E(u) = \exp\left(i\sum_{m=1}^{n} u_m a - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} \sigma^2 u_m^2 - \sum_{m=1}^{n} a\sigma^2 u_m u_{m+1}\right)$$
$$= \exp\left(ia\sum_{m=1}^{n} u_m - \frac{\sigma^2}{2}\sum_{m=1}^{n} u_m^2 - a\sigma^2\sum_{m=1}^{n} u_m u_{m+1}\right)$$

№ 17.20

• Чему равна вероятность попадания точки с координатами X, Y, Z в область, представляющую собой шар радиуса R, из которого вырезан куб с ребром a (диагональ куба меньше диаметра шара)? Центр рассеивания совпадает с общим центром шара и куба. Рассеивание нормальное шаровое со средним квадратическим отклонением σ.

Решение: –

№ 18.22

• Доказать, что если X и Y независимы, то корреляционное отношение равно нулю, а если Y функционально связано с X, то корреляционное отношение равно единице.

Решение: корреляционное отношение определяется формулой $\eta^2_{y|x} = 1 - \frac{\sigma^2_{y|x}}{\sigma^2_y}$. Если X и Y независимы (ковариация равна нулю), тогда условная дисперсия равна безусловной, то есть $\sigma^2_{y|x} = \sigma^2_y$, $\eta^2_{y|x} = 1 - 1 = 0$. В противоположном случае $\sigma^2_{y|x} = 0$, $\eta^2_{y|x} = 1 - 0 = 1$, так как для каждого значения X Y принимает только одно значение.

№ 19.4

• Неподвижная точка O находится на высоте h над концом A горизонтального отрезка AK длины l. На отрезке AK наудачу выбрана точка B. Найти математическое ожидание угла Ф между линиями OA и OB.

Решение: на рис. 1 изображено условие задачи. Пусть $A = 0$, $K = l$. По условию точка B равномерно распределена от 0 до l, $f(B) = \begin{cases} \frac{1}{l}, B \in [0, l] \\ 0, B \notin [0, l] \end{cases}$.

Угол Ф можно выразить через B: $tg\ \Phi = \frac{B}{OA} = \frac{B}{h}$, $\Phi = arctg\frac{B}{h}$.

$$M[\Phi] = \int_0^l arctg\frac{B}{h}\frac{1}{l}dB = \frac{1}{l}\int_0^l arctg\frac{B}{h}dB = \frac{1}{l}\left(B\ arctg\frac{B}{h} - \frac{h}{2}\ln\left(1 + \frac{B^2}{h^2}\right)\right)\Bigg|_0^l$$
$$= \frac{1}{l}\left(l\ arctg\frac{l}{h} - \frac{h}{2}\ln\left(1 + \frac{l^2}{h^2}\right)\right) = arctg\frac{l}{h} - \frac{h}{2l}\ln\left(1 + \frac{l^2}{h^2}\right)$$

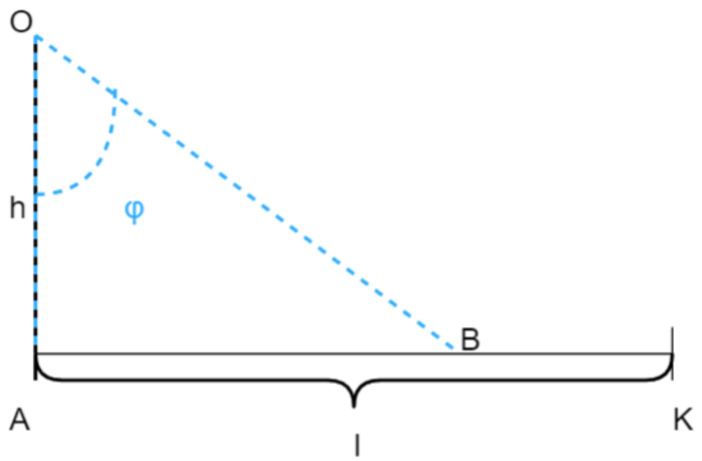

Рисунок 1.

№ 20.9

• Случайная величина X подчиняется закону распределения Коши

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

Найти плотность вероятности случайной величины Y, если:

a) $Y = 1 - X^3$;

b) $Y = aX^2$;

c) $Y = arctg\, X$;

d) $Y = \frac{1}{X}$.

Решение:

a) Функция $Y = \varphi(X) = 1 - X^3$ монотонна, найдем обратную – $X = \psi(Y) = \sqrt[3]{1-Y}$. Тогда плотность $f_y(y) = \left|\psi'^{(y)}\right| * f_x\big(\psi(y)\big) = \frac{1}{3\sqrt[3]{1-y}} f_x\left(\sqrt[3]{1-y}\right) = \frac{1}{3\pi\left(1+\sqrt[3]{1-y}^2\right)\sqrt[3]{1-y}}$;

b) Функция $Y = \varphi(X) = aX^2$ при $a = 0$ функцией не является, рассмотрим при $a > 0$ и $a < 0$.

$a > 0$, разобьём на участки монотонности и на каждом участке найдем обратную функцию:

$$X = \psi_1(Y) = \sqrt{\frac{Y}{a}},\ X \geq 0$$

$$X = \psi_2(Y) = -\sqrt{\frac{Y}{a}},\ X < 0$$

$$f_y(y) = |\psi_1{}'(Y)| * f_x\big(\psi_1(y)\big) + |\psi_2{}'(Y)| * f_x\big(\psi_2(y)\big)$$
$$= \frac{1}{2a\sqrt{\frac{y}{a}}} * \frac{1}{\pi\left(1 + \frac{y}{a}\right)} + \frac{1}{2a\sqrt{\frac{y}{a}}} * \frac{1}{\pi\left(1 + \frac{y}{a}\right)}$$
$$= \frac{1}{\pi\left(1 + \frac{y}{a}\right) a\sqrt{\frac{y}{a}}} = \frac{\sqrt{a}}{\pi(a + y)\sqrt{y}},$$

$y \geq 0$ (СВ Y может принимать только неотрицат. значения),

$a < 0$, разобьём на участки монотонности и на каждом участке найдем обратную функцию:

$$X = \psi_1(Y) = \sqrt{\frac{Y}{a}},\ X \leq 0$$

$$X = \psi_2(Y) = -\sqrt{\frac{Y}{a}},\ X > 0$$

$$f_y(y) = |\psi_1{}'(Y)| * f_x\big(\psi_1(y)\big) + |\psi_2{}'(Y)| * f_x\big(\psi_2(y)\big)$$
$$= -\frac{1}{2a\sqrt{\frac{y}{a}}} * \frac{1}{\pi\left(1+\frac{y}{a}\right)} - \frac{1}{2a\sqrt{\frac{y}{a}}} * \frac{1}{\pi\left(1+\frac{y}{a}\right)}$$
$$= -\frac{1}{\pi\left(1+\frac{y}{a}\right)a\sqrt{\frac{y}{a}}} = -\frac{\sqrt{a}}{\pi(a+y)\sqrt{y}},$$

$y \leq 0$(СВ Y может принимать только неположит. значения);

c) Функция $Y = \arctan X$ монотонна, найдем обратную – $X = \psi(Y) = \tan Y$ при $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Тогда плотность $f_y(y) = \left|\psi'^{(y)}\right| * f_x\big(\psi(y)\big) = \frac{1}{\pi\, cos^2\, y(1+tan^2 y)} = \frac{1}{\pi\ cos^2\, y\frac{1}{cos^2 y}} = \frac{1}{\pi}$;

d) Функция $Y = \frac{1}{X}$ не монотонна (разрыв в $X = 0$), разобьем на участки монотонности

$$X = \psi(Y) = \frac{1}{Y}, X \neq 0$$

$$f_y(y) = \left|\psi'^{(y)}\right| * f_x\big(\psi(y)\big) = \frac{1}{y^2} * \frac{1}{\pi\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, y \neq 0$$

№ 21.20

• $X_j (j = 1,2, \dots, n)$ – независимые случайные величины, каждая из которых может принимать только два значения: единицу с вероятностью p и нуль с вероятностью $q = 1 - p$. Найти ряд распределения случайной величины $Y = \sum_{j=1}^{n} X_j$.

Решение: если СВ X_j может принимать значения только нуля или единицы (распределение Бернулли), то СВ Y, по сути, подсчитывает количество величин X_j, которые приняли значение 1 – Y принимает значения от 0 до n. То есть, распределение числа успехов в серии из n экспериментов, каждый из которых завершается успехом с вероятностью p – биномиальное распределение. Подтвердим гипотезу:

производящая функция X_j: $G_{x_j}(u) = pu + q$,

тогда производящая функция Y: $G_y(u) = G_{x_1}(u) * G_{x_2}(u) * \dots * G_{x_j}(u) = (pu + q)(pu + q) \dots (pu + q) = (pu + q)^n$

и ряд распределения $P(Y=k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dU^k}G_y(u)\right]=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dU^k}(pu+q)^n\right]=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k-1}}{dU^{k-1}}n(pu+q)^{n-1}p\right]=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k-2}}{dU^{k-2}}n(n-2)(pu+q)^{n-2}p^2\right]=\frac{1}{k!}[n(n-1)\ldots(n-k+1)(pu+q)^{n-k}p^k]_{u=0}=\frac{1}{k!}n(n-1)\ldots(n-k+1)p^kq^{n-k}=\frac{1}{k!}\frac{n}{(n-k)!}p^kq^{n-k}=C_n^kp^kq^{n-k}$. Ряд распределения соответствует ряду биномиального распределения.

№ 22.1

• Количество тепла Q в калориях, выделяемое в проводнике с сопротивлением R при прохождении тока J в течение времени T, определяется формулой $Q=0.24\,J^2RT$.

Ошибки измерения величин J,R,T являются независимыми случайными величинами с математическими ожиданиями $i=10\,A$, $r=30$ Ом, $t=10$ мин и средними квадратическими отклонениями $\sigma_i=0.1\,A, \sigma_r=0.2$ Ом, $\sigma_t=0.5$ сек. Найти приближенное значение среднего квадратического отклонения случайной величины Q.

Решение: по методу линеаризации, учитывая, что ошибки являются независимыми СВ, дисперсию можно найти как

$$D[Q]\approx\left(\frac{\partial Q}{\partial i}\right)^2 * D[J] + \left(\frac{\partial Q}{\partial r}\right)^2 * D[R] + \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)^2 * D[T]$$
$$=(0.48\,irt)^2*\sigma_i^2+(0.24\,i^2t)^2*\sigma_r^2+(0.24\,i^2r)^2*\sigma_t^2$$
$$=(0.48*10*30*600)^2*0.01+(0.24*100*600)^2*0.04$$
$$+(0.24*100*30)^2*0.25=74\,649\,600+8\,294\,400+129\,600$$
$$=83073600$$

СКО равно квадратному корню из дисперсии:

$$\sigma_Q=\sqrt{D[Q]}\approx\sqrt{83073600}$$

$$\sigma_Q\approx 9100 \text{ кал}$$

№ 23.8

• Применим ли закон больших чисел и в какой форме к последовательности $\{X_k\}$ независимых случайных величин, заданных распределениями

$$P\left(X_k=\sqrt{\ln k}\right)=P\left(X_k=-\sqrt{\ln k}\right)=\frac{1}{2}?$$

Решение: закон больших чисел применим к последовательности $\{X_k\}$, потому что

1. Случайные величины независимы (из условия);
2. Математическое ожидание $M[X_k] = \sqrt{ln\,k} * P\left(X_k = \sqrt{ln\,k}\right) + \left(-\sqrt{ln\,k}\right) * P\left(X_k = \sqrt{ln\,k}\right) = \frac{\sqrt{ln\,k}}{2} - \frac{\sqrt{ln\,k}}{2} = 0$, дисперсия $D[X_k] = M[X_k^2] - (M[(X_k)])^2 = ln\,k - 0 = ln\,k =>$ при всех k $M[X_k] = \overline{x_k} = 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{ln\,k}}{k^2} < \infty$, т.к. $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{ln\,x}}{x^2} = 1$.

Применим усиленный закон больших чисел $\frac{1}{k}\sum_{k=1}^{n} X_k \to 0$ п. н.

№ 24.15

• Найти первые три члена ряда Эджворта для функции распределения случайной величины χ^2, связанной соотношением

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k^2,$$

с независимыми нормально распределенными случайными величинами X_k, имеющими нулевые математические ожидания и единичные дисперсии. Сравнить значения $P\left(\chi^2 > \chi_q^2\right)$ для $\chi_q^2 = 8, 12, 16$, вычисленные с помощью ряда Эджворта с имеющимися в таблицах распределения хи-квадрат при $n = 8$.

Решение:

Список задач для решения с помощью имитационного моделирования: **17.20, 19.4, 20.9, 21.20, 22.1**

№ 17.20

Моделирование: –

№ 19.4

Моделирование:

Параметры – `l` – длина отрезка AK, `h` – длина отрезка AO, – генерируются случайно функцией `random.randint()`. `num` – количество опытов.

Перед выполнением моделирования для каждого случайного набора начальных данных считается результат по формулам, полученным для аналитического решения. В каждом опыте `num` генерируется случайная длина отрезка AB. Для каждой длины считается значение угла Φ и записывается в список. После всех опытов для списка считается математическое ожидание как среднее. В листинге 1 приведен код программы.

Листинг 1. Код программы на языке Python

```
import math
import random

l = random.randint(10, 20)
h = random.randint(1, 10)
print(f"Высота h = {h}, длина l = {l}")
print(f"Аналитическое решение: {math.atan(l / h) - h / (2 * l) * math.log(1
+ l ** 2 / h ** 2, math.e)}")

num = 1000000
phi = []
for _ in range(num):
    B = random.uniform(0, l)
    phi.append(math.atan(B / h))
print(f"Моделирование: {sum(phi) / num}")
```

```
Высота h = 5, длина l = 17
Аналитическое решение: 0.9126100084540413
Моделирование: 0.9129889414024879
```

```
Высота h = 10, длина l = 14
Аналитическое решение: 0.5629792449778004
Моделирование: 0.5630317984849557
```

```
Высота h = 1, длина l = 18
Аналитическое решение: 1.3546360109289093
Моделирование: 1.3546506491761754
```

Высота h = 6, длина l = 18 Аналитическое решение: 0.8652815902325801 Моделирование: 0.8650630337352584
Высота h = 10, длина l = 20 Аналитическое решение: 0.7047892396855653 Моделирование: 0.7050098370278101

Таблица 1. Результаты моделирования

Результаты моделирования, приведенные в табл. 1, с небольшой погрешностью совпадают с аналитическим значением.

№ 20.9

Моделирование:

не получилось добиться правильных результатов, но идея была в том, чтобы смоделировать СВ X, распределенные по закону Коши, и на основе их моделировать соответствующие СВ Y. А потом для этих выборок составить гистограммы и приближенно таким образом вычислять плотность для $y = 0.5$.

Листинг 2. Код программы на языке Python

```
import math
import scipy.stats as stats
import numpy as np

y = 0.5
a = 2

print(f"a) Плотность вероятности СВ Y = {1 / (3 * math.pi * (1 + (1 - y) ** (2 / 3))) * (1 - y) ** (1 / y)}")
print(f"b) Плотность вероятности СВ Y = {a ** (1 / 2 / (math.pi * (a + y) * y ** (1 / 2)))} (a = {a})")
print(f"b) Плотность вероятности СВ Y = {-a ** (1 / 2 / (math.pi * (a + y) * y ** (1 / 2)))} (a = {-a})")
print(f"c) Плотность вероятности СВ Y = {1 / math.pi}")
print(f"d) Плотность вероятности СВ Y = {1 / (math.pi * (1 + y ** 2))}")

X = stats.cauchy.rvs(0, 1, size=1000000)
Y = np.array([
    1 - X ** 3,
    2 * X ** 2,
    np.arctan(X),
    1 / X])


def pd(data, value, bins=10):
    hist, edges = np.histogram(data, bins=bins, density=True)
    bin_index = np.searchsorted(edges, value) - 1
    return hist[bin_index]


print(f"a) Моделирование: {pd(Y[0], y, bins=50)}")
print(f"b) Моделирование: {pd(Y[1], y, bins=50)}")
```

```
print(f"c) Моделирование: {pd(Y[2], y, bins=50)}")
print(f"d) Моделирование: {pd(Y[3], y, bins=50)}")
```

```
a) Плотность вероятности СВ Y = 0.016273905682166526
b) Плотность вероятности СВ Y = 1.0643935194142022 (a = 2)
b) Плотность вероятности СВ Y = -1.0643935194142022 (a = -2)
c) Плотность вероятности СВ Y = 0.3183098861837907
d) Плотность вероятности СВ Y = 0.25464790894703254
a) Моделирование: 1.723460999671182e-16
b) Моделирование: 5.728941721370315e-11
c) Моделирование: 0.3178970614132349
d) Моделирование: 1.32706482899887e-05
```

```
a) Плотность вероятности СВ Y = 0.016273905682166526
b) Плотность вероятности СВ Y = 1.0643935194142022 (a = 2)
b) Плотность вероятности СВ Y = -1.0643935194142022 (a = -2)
c) Плотность вероятности СВ Y = 0.3183098861837907
d) Плотность вероятности СВ Y = 0.25464790894703254
a) Моделирование: 1.310572529113535e-17
b) Моделирование: 1.0378126249394455e-11
c) Моделирование: 0.31676638594392104
d) Моделирование: 0.00013482183881500682
```

Таблица 2. Результаты моделирования

Таким образом приемлемый результат получается только для c), для других Y никак не получилось добиться равенства хотя бы в одном разряде.

№ 21.20

Моделирование:

Параметр – `p` – вероятность наступления события,– генерируется случайно функцией `random.random()`. `num` – количество опытов.

Перед выполнением моделирования для случайного `p` считается ряд распределения по формулам, полученным для аналитического решения. В каждом опыте `num` генерируется СВ Y с помощью функции `xj(n)` и на основе значения Y считаются частоты появления разных значений СВ. После прекращения цепочки опытов каждая частота делится на количество опытов. В листинге 3 приведен код программы.

Листинг 3. Код программы на языке Python

```python
import math
import random


def xj(n):
    array = []
    for _ in range(10):
        array.append(random.binomialvariate(1, p))
    return sum(array)


p = random.random()
q = 1 - p
print(f"p = {p}, q = {1 - p}")
y = []
py = []
for i in range(1, 11):
    py.append(round(math.comb(10, i) * p ** i * q ** (10 - i), 6))
print(f"Ряд, полученный аналитически: {py}")

num = 1000000
Py = [0] * 10
for _ in range(num):
    y = xj(10)
    for i in range(1, 11):
        if y == i:
            Py[i - 1] += 1
Py = [x / num for x in Py]
print(f"Моделирование: {Py}")
```

```
p = 0.8873797085341447, q = 0.11262029146585528
Ряд, полученный аналитически: [0.0, 1e-06, 1.9e-05, 0.000266, 0.002512, 0.016495, 0.074267, 0.219443, 0.38424, 0.302758
Моделирование: [0.0, 1e-06, 1.4e-05, 0.000267, 0.002471, 0.016431, 0.074082, 0.219571, 0.384192, 0.302971]
```

```
p = 0.2683287390498543, q = 0.7316712609501457
Ряд, полученный аналитически: [0.161254, 0.266118, 0.260252, 0.167026, 0.073505, 0.022464, 0.004708, 0.000647, 5.3e-05, 2e-06
Моделирование: [0.161774, 0.265655, 0.260668, 0.166432, 0.073853, 0.022258, 0.004668, 0.000629, 5.8e-05, 2e-06]
```

```
p = 0.8323013764921773, q = 0.16769862350782272
Ряд, полученный аналитически: [1e-06, 1.9e-05, 0.000258, 0.002241, 0.013349, 0.05521, 0.156579, 0.291418, 0.321407, 0.159517
Моделирование: [1e-06, 2e-05, 0.000253, 0.002176, 0.013248, 0.055279, 0.156567, 0.291307, 0.322219, 0.15893]
```

```
p = 0.7097904162747317, q = 0.2902095837252683
Ряд, полученный аналитически: [0.000104, 0.001141, 0.00744, 0.031843, 0.093457, 0.190479, 0.266212, 0.244161, 0.132704, 0.032456
Моделирование: [0.000116, 0.001117, 0.007406, 0.032059, 0.093899, 0.190363, 0.266002, 0.24411, 0.132106, 0.032818]
```

```
p = 0.530415311206246, q = 0.46958468879375403
Ряд, полученный аналитически: [0.005889, 0.029933, 0.090163, 0.178224, 0.241574, 0.22739, 0.146769, 0.062168, 0.015605, 0.001763
Моделирование: [0.005987, 0.029884, 0.090377, 0.178229, 0.242488, 0.227235, 0.145684, 0.062237, 0.015564, 0.001758]
```

Таблица 3. Результаты моделирования

По результатам моделирования, приведенным в табл. 3., видно, что смоделированный ряд распределения с небольшой погрешностью отличается от ряда, полученного аналитически (ряды строились для значений Y от 1 до 10).

№ 22.1

Моделирование:

Так как распределение случайных величин J, R, T не было задано, но даны математические ожидания и СКО, было принято решение генерировать массивы СВ функцией `np.random.normal(a, std, 1000000)`. Массив СВ Q вычисляется по заданной формуле и для него считается СКО как квадратный корень из дисперсии. В листинге 4 приведен код программы.

Листинг 4. Код программы на языке Python

```
import numpy as np

J = np.random.normal(10, 0.1, 1000000)
R = np.random.normal(30, 0.2, 1000000)
T = np.random.normal(600, 0.5, 1000000)

Q = 0.24 * J ** 2 * R * T

print(np.var(Q) ** (1 / 2))
```

```
C:\Users\HP\teorver\teorver\.venv\Scripts\python.exe C:\Users\HP\teorver\teorver\22.1.py
9107.9977260483
```

Рисунок 4. Результаты моделирования

Результат моделирования, приведенный на рис. 4, с небольшой погрешностью совпадает со значением, полученным аналитически.