Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и кибербезопасности
Высшая школа компьютерных технологий и информационных систем

Отчёт по практической работе

Дисциплина: Теория вероятностей и математическая статистика

Выполнил студент гр. 5130901/20004 ________________ Самохвалова П. А.
(подпись)

Преподаватель ________________________ Никитин К. В.
(подпись)

“____” _____________ 2024 г.

Санкт-Петербург
2024

Список задач для аналитического решения: **10.3, 11.28, 12.3, 13.19, 14.11, 15.14**

№ 10.3

- Производятся последовательные независимые испытания пяти приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Построить ряд распределения случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытания для каждого из них равна 0,9.

Решение: так как от успешности испытания прибора зависит, будет ли испытываться следующий прибор, то вероятность, что испытания закончатся на первом приборе равна $P(1) = 1 - 0.9 = 0.1$. Для следующего числа n приборов успешно должно пройти $n - 1$ испытаний, а испытание самого x_n прибора должно быть неудачным. Так как приборов всего 5, то для пятого прибора вероятность будет высчитываться только по успешному испытанию прошлых, успех или провал самого пятого прибора не имеет значения.

X	1	2	3	4	5
P	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561

№11.28

- Из сосуда, содержащего m белых и n черных шаров, извлекаются шары до тех пор, пока не появится белый шар. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых черных шаров, если каждый шар после извлечения возвращался.

Решение: вероятность достать шар – $p = \frac{m}{m+n}$ для белых шаров и $q = \frac{n}{m+n}$ для черных. Так как опыты заканчиваются, когда попадается белый шар, то за $n + 1$ опытов будет вынуто n черных шаров, вероятность происхождения этого $P(n) = \left(\frac{n}{m+n}\right)^n \frac{m}{m+n} = q^n p, n \ \geq 0$ – геометрическое распределение. Для того, чтобы вычислить математическое ожидание и дисперсию, определим производящую функцию $G(u) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k u^k = \frac{p}{1-qu}$. Математическое ожидание СВ и ее производящая функция связаны зависимостью $M[X] = \left.\frac{dG(u)}{du}\right|_{u=1}$, дисперсия $D[X] = M[X^2] - M[X]^2$, где $M[X^2] = G_1 + G_2$. Первый момент $G_1 = \left.\left(\frac{p}{1-qu}\right)'\right|_{u=1} = \ p\left.\left(\frac{1}{1-qu}\right)'\right|_{u=1} = \left.\frac{pq}{(1-qu)^2}\right|_{u=1} = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p}$, второй момент $G_2 = \left.\left(\frac{pq}{(1-qu)^2}\right)'\right|_{u=1} = pq\left.\left(\frac{1}{(1-qu)^2}\right)'\right|_{u=1} = pq\left(-\frac{1}{(1-qu)^4}\right) *$

$2(1-qu)*(-q)\Big|_{u=1} = \frac{2pq^2}{(1-qu)^3}\Big|_{u=1} = \frac{2pq^2}{(1-q)^3} = \frac{2pq^2}{p^3} = \frac{2q^2}{p^2}$. Тогда $M[X] = G_1 = \frac{q}{p} = \frac{n}{m}$, $M[X^2] = G_1 + G_2 = \frac{n}{m} + \frac{2q^2}{p^2} = \frac{n}{m} + \frac{2n^2}{m^2}$, $D[X] = M[X^2] - M[X]^2 = \frac{n}{m} + \frac{2n^2}{m^2} - \frac{n^2}{m^2} = \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2} = \frac{n(m+n)}{m^2}$.

№ 12.3

- В книге Г. Крамера дана функция распределения годовых доходов лиц, облагаемых налогом:

$$\boldsymbol{F}(x) = \begin{cases} 1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^a, & \text{при } x \ \geq \ x_0; \\ 0, & \text{при } x \ < \ x_0, \end{cases} \quad (a > 0).$$

Определить размер годового дохода, который для случайно выбранного налогоплательщика может быть превзойден с вероятностью 0,5.

Решение: требуется найти значение x такое, что $P(X > x^*) = 0.5$. Если вероятность для СВ X быть больше x^* равна 0.5, тогда вероятность быть меньше также равна 0.5 – $P(X > x^*) = P(X < x^*) => F(x^*) = 0.5$. При $x \ \geq \ x_0$: $F(x^*) = \ 1-\left(\frac{x_0}{x^*}\right)^a = 0.5$, $\left(\frac{x_0}{x^*}\right)^a = 0.5$, $\frac{x_0}{x^*} = \sqrt[a]{0.5}$, $\frac{x_0}{x^*} = \sqrt[a]{\frac{1}{2}}$, $\frac{x_0}{x^*} = \frac{1}{2^{\frac{1}{a}}}$, $x^* = 2^{\frac{1}{a}} x_0$.

№ 13.19

- Найти для распределения Стьюдента, задаваемого плотностью вероятности

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

начальные моменты m_k при $k < n$.

Решение: начальный момент k-го порядка m_k вычисляется по формуле

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx$$

Известно, что моменты распределения Стьюдента нечетного порядка равны нулю. Произведем замену $k = 2v+1$ и рассмотрим отдельно интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2v+1}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx$$

Функция x^{2v+1} – нечетная, функция $\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ – четная. Произведение четной и нечетной функций дает нечетную функцию, а интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2v+1}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx = 0$$

Поэтому моменты нечетного порядка равны нулю.

Произведем замену $k = 2v$ и рассмотрим интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2v}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx$$

Функция x^{2v} – четная, функция $\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ – четная. Произведение четных функций дает четную функцию, а интеграл от четной функции в симметричных пределах равен удвоенному интегралу по половинному промежутку:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2v}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx = 2\int_{0}^{\infty} x^{2v}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx$$

Произведем замену $x = \sqrt{n\frac{y}{1-y}}$. Пределы интегрирования изменяются на (0, 1) , т.к $x \to \infty, \sqrt{n\frac{y}{1-y}} \to \infty$, значит $(1-y) \to 0, y \to 1$. $dx = \frac{d\left(\sqrt{n\frac{y}{1-y}}\right)}{dy}dy = (1-y)^{-\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{y}}dy$:

$$2\int_{0}^{1}\left(n\frac{y}{1-y}\right)^{v}\left(\frac{1}{1-y}\right)^{-\frac{n+1}{2}}(1-y)^{-\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{y}}dy$$

$$= 2\int_{0}^{1} n^v y^v (1-y)^{-v}(1-y)^{\frac{n+1}{2}}(1-y)^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{n}}{2}dy$$

$$= n^{\frac{v}{2}}\int_{0}^{1} y^{\frac{2v-1}{2}}(1-y)^{\frac{n-2v-2}{2}}dy$$

Заменим интеграл на бета-функцию:

$$n^{\frac{v}{2}}\int\limits_0^1 y^{\frac{2v-1}{2}}(1-y)^{\frac{n-2v-2}{2}}dy = n^{\frac{v}{2}}\int\limits_0^1 y^{\frac{2v-1}{2}-1+1}(1-y)^{\frac{n-2v-2}{2}-1+1}dy$$

$$= n^{\frac{v}{2}}\int\limits_0^1 y^{\frac{2v+1}{2}-1}(1-y)^{\frac{n-2v}{2}-1}dy = n^{\frac{v}{2}}\,B\left(\frac{2v+1}{2},\frac{n-2v}{2}\right)$$

Бета-функцию можно выразить через гамма-функцию:

$$n^{\frac{v}{2}}\,B\left(\frac{2v+1}{2},\frac{n-2v}{2}\right) = n^{\frac{v}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{2v+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2v+1}{2}+\frac{n-2v}{2}\right)} = n^{\frac{v}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{2v+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)}$$

Вернемся к изначальному выражению и подставим результат вычисления интеграла:

$$m_{2v} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2v}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx$$

$$= \frac{n^v}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{2v+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)} = \frac{n^v}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{2v+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$= \frac{n^v}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{n^v}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}\,\frac{(2v)!}{4^v v!}\Gamma\left(\frac{n-2v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{(2v)!}{4^v v!}\Gamma\left(\frac{n}{2}-v\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}n^v$$

n, v – целые неотрицательные числа.

$$\frac{\frac{(2v)!}{4^v v!}\Gamma\left(\frac{n}{2}-v\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}n^v = \frac{(2v)!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-v\right)}{4^v v!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}n^v$$

Если n – четное:

$$\frac{(2v)!\left(\frac{n}{2}-v-1\right)!}{4^v v!\left(\frac{n}{2}-1\right)!}n^v = \frac{2v(2v-1)(2v-2)\dots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\left(\frac{n}{2}-v-1\right)!}{4^v v!\left(\frac{n}{2}-1\right)!}n^v$$

$$= \frac{(2v*2(v-1)2(v-2)\dots 4*2)\cdot\left((2v-1)(2v-3)\dots 3*1\right)\left(\frac{n}{2}-v-1\right)!}{2^{2v}v!\left(\frac{n}{2}-1\right)!}n^v$$

$$=$$

$$= \frac{2^v(v(v-1)(v-2)\dots 2*1)\big((2v-1)(2v-3)\dots 3*1\big)\left(\frac{n}{2}-v-1\right)!}{2^{2v}v!\left(\frac{n}{2}-1\right)!}n^v$$

$$= \frac{v!\,(2v-1)(2v-3)\dots 3*1\left(\frac{n}{2}-v-1\right)!}{2^v v!\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\dots\left(\frac{n}{2}-v\right)\left(\frac{n}{2}-v-1\right)\dots 3*2*1}n^v$$

$$= \frac{(2v-1)(2v-3)\dots 5*3*1}{2^v\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\dots\left(\frac{n}{2}-v\right)}n^v$$

$$= \frac{(2v-1)(2v-3)\dots 5*3*1}{2^v(n-2)(n-4)\dots(n-2v)}n^v$$

$$m_{2v} = \frac{(2v-1)(2v-3)\dots 5*3*1}{(n-2)(n-4)\dots(n-2v)}n^v, n - \text{четное}$$

Если n – нечетное:

$$\frac{(2v)!\left(\frac{n}{2}-v-1\right)!!}{4^v v!\left(\frac{n}{2}-1\right)!!}n^v =..\text{аналогичные преобразования}..=$$

$$= \frac{(2v-1)(2v-3)\dots 5*3*1}{2^v(n-2)(n-4)\dots(n-2v)}n^v$$

$$m_{2v} = \frac{(2v-1)(2v-3)\dots 5*3*1}{(n-2)(n-4)\dots(n-2v)}n^v, n > k$$

№ 14.11

- Производится два независимых измерения прибором, ошибки измерения которого X имеют $\bar{x} = 10$ м и $\sigma = 30$ м. Какова вероятность того, что каждая из ошибок измерения, имея разные знаки, по абсолютной величине превзойдет 10 м? (ошибки измерения – нормально распределенные случайные величины)

Решение: вероятность нормально распределенных СВ X_1 и X_2 превзойти по абсолютной величине 10м находится по формуле –

$$P(|X_1| > 10) = \frac{1}{2}\left(1 - \Phi\left(\frac{10-\bar{x}}{\sigma}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \Phi\left(\frac{10-10}{30}\right)\right) = \frac{1}{2}\big(1-\Phi(0)\big)$$
$$= 0.5$$

$$P(|X_2| > 10) = \frac{1}{2}\left(1 - \Phi\left(\frac{10-\bar{x}}{\sigma}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \Phi\left(\frac{10-10}{30}\right)\right) = \frac{1}{2}\big(1-\Phi(0)\big)$$
$$= 0.5$$

Так как в задаче требуется найти вероятность того, что обе ошибки превзойдут 10 м, то искомая вероятность – произведение $P(|X_1| > 10)$ и $P(|X_2| > 10)$: $P(|X_1| > 10)P(|X_2| > 10) = 0.5 * 0.5 = 0.25$.

№ 15.14

- Станок настраивается на середину поля допуска, шириной $2d$, с ошибкой X, подчиняющейся нормальному закону с параметрами $\bar{x}$ и σ_x, которая остается неизменной для всех деталей. Отклонение размера каждой детали от номинального равно $X + Y_i$, где Y_i – независимые нормально распределенные величины с параметрами $\overline{y_i} = 0$ и $\sigma_{yi} = \sigma_y$ для всех номеров деталей i. Определить плотность вероятности X после изготовления n деталей, среди которых k имеют контролируемый размер в пределах поля допуска.

Решение: событие A – станок изготовил n деталей, среди которых k имеют контролируемый размер в пределах поля допуска. По формуле Байеса:

$$f(x|A) = \frac{P(A|x)f(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} P(A|x)f(x)dx}$$

$f(x)$ – плотность вероятности СВ X до опыта, которая по условию подчиняется нормальному закону:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(X-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right)}$$

$P(A|x)$ – вероятность того, что k из n деталей имеют контролируемый размер при условии ошибки настройки X. Деталь имеет контролируемый размер, если $|X + Y_i| \leq d$. Вероятность того, что одна деталь имеет контролируемый размер при заданном X:

$$P(-d - X \leq Y_i \leq d - X) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{x + d}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{x - d}{\sigma_y}\right)\right)$$

Вероятность того, что k из n деталей имеют контролируемый размер при заданном X, описывается биномиальным распределением, обозначим $p(x) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{x+d}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{x-d}{\sigma_y}\right)\right)$, и $q(x) = 1 - p(x)$, тогда

$$P(A|x) = p^k(x)q(x)^{n-k}$$

Плотность вероятности X после изготовления n деталей, среди которых k имеют контролируемый размер в пределах поля допуска:

$$f(x|A) = \frac{P(A|x)f(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} P(A|x)f(x)dx} = \frac{p^k(x)q(x)^{n-k}\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)}}{\int_{-\infty}^{+\infty} p^k(x)q(x)^{n-k}\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)}dx}$$

Список задач для решения с помощью имитационного моделирования: **10.3, 11.28, 12.3, 13.19, 14.11, 15.14**

№ 10.3

Моделирование:

В задаче СВ имеет геометрическое распределение, так как проводятся испытания до первого прибора, который не выдержит испытание. Из-за того, что приборов всего 5, для последнего прибора вероятность не включает в себя вероятность того, что он сломается, ведь в любом случае испытания на нем закончатся. В листинге 1 содержится реализация на языке Python, которая строит ряд распределения как гистограмму.

Листинг 1. Код программы на языке Python

```
    import scipy.stats as stats
import matplotlib.pyplot as plt

q = 0.1
k_values = range(1, 6)
probs = []

for k in k_values:
    if k == 5:
        probs.append(stats.geom.pmf(k, q) * 10)
    else:
        probs.append(stats.geom.pmf(k, q))

plt.bar(k_values, probs)
plt.xlabel("Число испытаний до поломки одного из приборов")
plt.ylabel("Вероятность")
plt.title("Ряд распределения числа испытанных приборов")
plt.show()
```

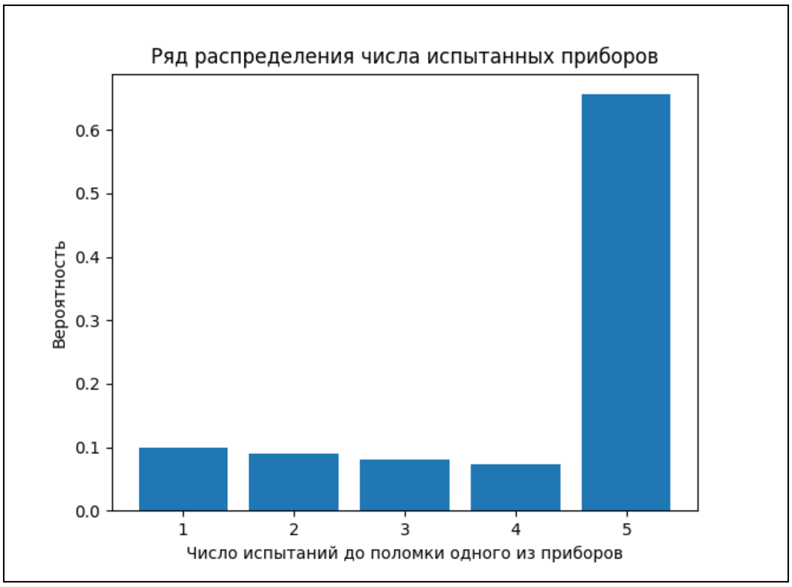

Рисунок 1. Результаты моделирования

На рис. 1 приведена гистограмма для ряда распределения из данной задачи. Ряд распределения соответствует тому, что был получен аналитически.

№ 11.28

Моделирование:

Параметры – `n` – количество черных шаров, `m` – количество белых шаров,– генерируются случайно функцией `random.randint()`. `num` – количество опытов.

Перед выполнением моделирования для каждого случайного набора начальных данных считается результат по формулам, полученным для аналитического решения. В каждом опыте `num` проводятся опыты по вытаскиванию шаров из «коробки» – массива `balls` до тех пор, пока не будет вытащен белый шар (`ball = 0`). Пока этого не происходит, подсчитывается каждый вытащенный черный шар. После прекращения цепочки опытов количество шаров записывается в массив `black_num`, для которого после окончания всех опытов `num` рассчитывается математическое ожидание и дисперсия. В листинге 2 приведен код программы.

Листинг 2. Код программы на языке Python

```
     import random
import statistics

m = random.randint(1, 1000)
n = random.randint(1, 1000)
print("m =", m, "n = ", n)
print("Аналитическое решение: M[X] =", n / m, "D[X] =", n * (m + n) / m **
2)
num = 1000000
black_num = []
box = [0, 1]
for _ in range(num):
    ball = 1
    black = 0
    while ball == 1:
        ball = random.choices(box, weights=[m, n], k=1)[0]
        if ball == 1:
            black += 1
    black_num.append(black)
print("Моделирование: M[X] =", statistics.mean(black_num), "D[X] =",
statistics.variance(black_num))
```

```
m = 129 n =  539
Аналитическое решение: M[X] = 4.178294573643411 D[X] = 21.636440117781383
Моделирование: M[X] = 4.17558 D[X] = 21.57530523890524
```

```
m = 421 n =  701
Аналитическое решение: M[X] = 1.665083135391924 D[X] = 4.437584983158525
Моделирование: M[X] = 1.663772 D[X] = 4.431821163837164
```

```
m = 794 n =  229
Аналитическое решение: M[X] = 0.2884130982367758 D[X] = 0.3715952134713119
Моделирование: M[X] = 0.28791 D[X] = 0.3705322024322024
```

```
m = 865 n =  857
Аналитическое решение: M[X] = 0.9907514450867052 D[X] = 1.9723398710281
Моделирование: M[X] = 0.993287 D[X] = 1.9817019173329173
```

```
m = 231 n =  434
Аналитическое решение: M[X] = 1.878787878787879 D[X] = 5.408631772268136
Моделирование: M[X] = 1.879475 D[X] = 5.424168148543148
```

Таблица 1. Результаты моделирования

В табл. 1 приведены результаты моделирования. Они с небольшой погрешностью совпадают с аналитическим решением.

№ 12.3

Моделирование:

Функция распределения в задаче аналогична функции распределения Парето, поэтому оно используется при моделировании. Параметры распределения – `alpha`, `x0` – коэффициент масштаба, – генерируются случайно функцией `random.randint()`. `num` – количество опытов.

Перед выполнением моделирования для каждого случайного набора начальных данных считается результат по формулам, полученным для аналитического решения. В каждом опыте `num` для случайного значения из распределения Парето с заданными параметрами высчитывается значение функции вероятности (т.е. вероятность, что СВ X примет значение, меньшее `x_rand`). Если округленное до трех знаков после запятой значение вероятности для `x_rand = 0`, то точка считается подходящей и записывается в массив `good`. В конце выводится среднее значение для массива. В листинге 2 приведен код программы.

Листинг 3. Код программы на языке Python

```python
    import random
import scipy.stats as stats

alpha = random.randint(1, 10)
x0 = random.randint(1, 10)
print(f"Альфа = {alpha}, x0 = {x0}")
print(f"Аналитическое решение: x* = {2 ** (1 / alpha) * x0}")
num = 1000000
good = []
```

```
for _ in range(num):
    x_rand = stats.pareto.rvs(alpha, loc=0, scale=x0, size=1,
random_state=None)[0]
    prob = 1 - (x0 / x_rand) ** alpha
    if round(prob, 3) == 0.500:
        good.append(x_rand)
print(f"Моделирование: x* = {sum(good) / len(good)}")
```

```
Альфа = 1, x0 = 9
Аналитическое решение: x* = 18.0
Моделирование: x* = 18.00034700965758
```

```
Альфа = 8, x0 = 1
Аналитическое решение: x* = 1.0905077326652577
Моделирование: x* = 1.0905067611553756
```

```
Альфа = 6, x0 = 2
Аналитическое решение: x* = 2.244924096618746
Моделирование: x* = 2.2449178465726694
```

```
Альфа = 4, x0 = 6
Аналитическое решение: x* = 7.135242690016327
Моделирование: x* = 7.135272697849351
```

```
Альфа = 8, x0 = 4
Аналитическое решение: x* = 4.362030930661031
Моделирование: x* = 4.3620270412379405
```

Таблица 2. Результаты моделирования

В табл. 2 приведены результаты моделирования. Они с небольшой погрешностью совпадают с аналитическим решением.

№ 13.19

Моделирование:

Параметры – `n` – степени свободы распределения Стьюдента, `k` – порядок начального момента (обязательно меньше `n`), – генерируются случайно функцией `random.randint()`. `num` – количество опытов.

Перед выполнением моделирования для каждого случайного набора начальных данных считается результат по формулам, полученным для аналитического решения. В каждом опыте `num` генерируется выборка случайных величин из распределения Стьюдента с заданными степенями свободы. Для каждой выборки считается значение момента. Сумма моментов после выполнения всех опытов делится на их количество. В листинге 4 приведен код программы.

Листинг 4. Код программы на языке Python

```
import random
from scipy.stats import moment, t

n = random.randint(1, 50)
k = random.randint(1, n % 10 + 1)
if k % 2 == 0:
    v = k // 2
    m_k = 1
    for i in range(1, 2 * v, 2):
        m_k *= i
    for i in range(2, 2 * v + 1, 2):
        m_k /= n - i
    m_k *= n ** v
else:
    m_k = 0
print(f"Степени свободы: {n}, порядок: {k}, аналитическое значение момента:
{m_k}")
num = 1000000
moment_k = 0
for i in range(num):
    data = t.rvs(n, size=100)
    moment_k += moment(data, k)
print(f"Моделирование: {moment_k / num}")
```

```
Степени свободы: 3, порядок: 2, значение момента: 3.0000000000000004
Моделирование: 3.0031427506936312
```

```
Степени свободы: 92, порядок: 4, значение момента: 3.206060606060606
Моделирование: 3.204604587175482
```

```
Степени свободы: 10, порядок: 2, аналитическое значение момента: 1.25
Моделирование: 1.2500119891938188
```

```
Степени свободы: 40, порядок: 1, аналитическое значение момента: 0
Моделирование: 0.0
```

```
Степени свободы: 25, порядок: 2, аналитическое значение момента: 1.0869565217391304
Моделирование: 1.0757429038143544
```

Таблица 3. Результаты моделирования

В табл. 3 приведены результаты моделирования. Они с небольшой погрешностью совпадают с аналитическим решением.

№ 14.11

Моделирование:

Параметры – `mean` – среднее значение (мат. ожидание) нормального распределения, `sigma` – среднеквадратичное отклонение. `n` – количество опытов.

В каждом опыте генерируются СВ `x1` и `x2` из нормального распределения по заданным параметрам. Далее, если ошибки имеют разные знаки и по абсолютной величине превосходят 10, исход засчитывается как благоприятствующий. После всех опытов количество благоприятствующих исходов делится на количество опытов. В листинге 5 приведен код программы

Листинг 5. Код программы на языке Python

```python
import numpy as np

mean = 10
sigma = 30
n = 1000000
good = 0
for i in range(n):
    x1 = np.random.normal(mean, sigma)
    x2 = np.random.normal(mean, sigma)
    if x1 > 10 and x2 < -10 or x1 < -10 and x2 > 10:
        good += 1

print(good / n)
```

```
C:\Users\HP\teorver\teorver\.venv\Scripts\python.exe C:\Users\HP\teorver\teorver\14.11.py
0.251995

Process finished with exit code 0
```

Рисунок 2. Результаты моделирования

На рис. 2 приведены результаты моделирования. Они с небольшой погрешностью совпадают с аналитическим решением.

№ 15.14

Моделирование: –