Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и кибербезопасности
Высшая школа компьютерных технологий и информационных систем

Отчёт по практической работе

Дисциплина: Теория вероятностей и математическая статистика

Выполнил студент гр. 5130901/20004 ________________ Самохвалова П. А.
(подпись)

Преподаватель ________________________ Никитин К. В.
(подпись)

“____” _____________ 2024 г.

Санкт-Петербург
2024

Список задач для аналитического решения: **6.12, 7.15, 8.13, 9.1**

Добавлено примечание ([СПА1]): Исправлено

№ 6.12

- Определить вероятность того, что 100 лампочек, взятых наудачу из 1000, окажутся исправными, если известно, что число испорченных лампочек на 1000 штук равновозможно от 0 до 5.

Решение: гипотезы – испорчено 0, 1, 2, 3, 4, 5 лампочек ($H_{0,1,2,3,4,5}$). По условию, $P(H_i) = \frac{1}{6}$ (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5). Событие A – все лампочки исправные. $P(A|H_0) = \frac{C_{999}^{100}}{C_{1000}^{100}} = 1$, $P(A|H_1) = \frac{C_{999}^{100}}{C_{1000}^{100}} = = 0.9$, $P(A|H_2) = \frac{C_{998}^{100}}{C_{1000}^{100}} \approx 0.81$, $P(A|H_3) = \frac{C_{997}^{100}}{C_{1000}^{100}} \approx 0.73$, $P(A|H_4) = \frac{C_{996}^{100}}{C_{1000}^{100}} \approx 0.66$, $P(A|H_5) = \frac{C_{995}^{100}}{C_{1000}^{100}} \approx 0.59$. Полная вероятность $P(A) = \frac{1}{6} * 1 + \frac{1}{6} * 0.9 + \frac{1}{6} * 0.81 + \frac{1}{6} * 0.73 + \frac{1}{6} * 0.66 + \frac{1}{6} * 0.59 \approx 0.78$.

№ 7.15

- Произведено три независимых испытания, в каждом из которых событие А происходит с вероятностью 0.2. Вероятность появления другого события В зависит от числа появлений события А: при однократном появлении события А эта вероятность равна 0.1, при двукратном появлении равна 0.3, при трехкратном появлении равна 0.7; если событие А не имело места ни разу, событие В невозможно. Определить наивероятнейшее число появлений события А, если событие В имело место.

Решение: воспользуемся выбором наиболее вероятной гипотезы. Гипотеза H_0 – событие А не появлялось, H_1 – событие А появлялось однократно, H_2 – А появлялось двукратно, H_3 – А появлялось трехкратно. Вероятности гипотез до опыта: $P(H_0) = 0.8 * 0.8 * 0.8 = 0.512$, $P(H_3) = 0.2 * 0.2 * 0.2 = 0.008$, $P(H_1)$ и $P(H_2)$ рассчитаем по формуле Бернулли $P_{n,;m} = C_n^m p^m q^{n-m}$. $P(H_1) = C_3^1 p^1 q^2 = \frac{3!}{2!} * 0.2 * 0.8^2 = 0.384, P(H_2) = \frac{3!}{2!} * 0.2^2 * 0.8 = 0.096.$ В результате опыта произошло событие В. Условные вероятности равны $P(A|H_0) = 0$, $P(A|H_1) = 0.1$, $P(A|H_2) = 0.3$, $P(A|H_3) = 0.7$.

Добавлено примечание ([СПА2]): Исправлено

По формуле Байеса найдем вероятности гипотез после опыта:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_0)P(A|H_0)+P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)} = \frac{0.384*0.1}{0+0.384*0.1+0.096*0.3+0.008*0.7} = \frac{48}{91} \approx 0.527472,$$

$$P(H_2|A) = \frac{0.096*0.3}{0.384*0.1+0.096*0.3+0.008*0.7} = \frac{36}{91} \approx 0.395604,$$

$P(H_3|A) = \frac{0.008*0.7}{0.384*0.1+0.096*0.3+0.008*0.7} = \frac{1}{13} \approx 0.076923.$

Добавлено примечание ([СПАЗ]): Исправлено

Значит, наивероятнейшее число появлений события А – одно.

№ 8.13

- Вероятность появления некоторого события в каждом из восемнадцати независимых опытов равна 0.2. Определить вероятность появления этого события по крайней мере три раза.

Решение: для решения задачи используем формулу Бернулли. По крайней мере 3 раза – значит, от 3 раз и более. Искомая вероятность находится по формуле $R_{n,m} = \sum_{k=m}^{n} P_{n,k} = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k p^k q^{n-k} = 1 - \sum_{k=0}^{2} C_{18}^k p^k q^{n-k} = 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{18!}{(18-k)!k!} 0.2^k 0.8^{18-k} \approx 1 - (0.02 + 0.08 + 0.17) = 0.73.$

№ 9.1

- В урне имеется три шара: черный, красный и белый. Из урны шары по одному извлекаются 5 раз, причем после каждого извлечения шар возвращался обратно. Определить вероятность того, что черный и белый шары извлечены не менее чем по два раза каждый.

Решение: не менее чем по два раза каждый – нужно посчитать вероятности вытащить 2 белых, 2 черных и 1 красный, либо 3 белых, 2 черных, либо 2 черных, 3 белых. Вероятность того, что при n независимых испытаниях, в каждом из которых может произойти только событие A_1, A_2, … A_m, соответственно с вероятностью p_1,p_2, … p_m, события A_k произойдут ровно n_k раз, определяется формулой $P_{n;n_1,\,n_2,\ldots n_m} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_m!} * {p_1}^{n_1} {p_2}^{n_2} \ldots\ {p_m}^{n_m}$. Соответственно, для задачи $n = 5$; p_1,p_2, … $p_m = \frac{1}{3}$.

2 белых, 2 черных и 1 красный: $P_{5;2,2,1} = \frac{5!}{2!2!1!} * \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{10}{81}$

3 белых, 2 черных/2 черных, 3 белых: $P_{5;2,3,0} = \frac{5!}{2!3!0!} * \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{10}{243}$

Искомая вероятность: $P_{5;2,2,1} + 2 * P_{5;2,3,0} = \frac{10}{81} + 2 * \frac{10}{243} = \frac{50}{243} \approx 0.2058$

Список задач для решения с помощью имитационного моделирования: **6.12, 7.15, 8.13, 9.1**

Добавлено примечание ([СПА4]): Исправлено

№ 6.12

Моделирование:

Параметры – `lamps` (общее количество ламп), `takenLamps` (количество выбранных ламп); `num` – количество опытов, `all_good` – для подсчета благоприятствующих исходов.

Для каждого опыта случайно выбирается `i` – количество испорченных ламп. Далее создается список `lamps_list`, в котором первые `i` элементов – строки `'bad'`, обозначающие испорченные лампочки, а остальные строки `'good'`, обозначающие исправные. В `selected_lamps` хранится список случайно выбранных 100 лампочек из списка `lamps_list`. Если в `selected_lamps` нет испорченных лампочек, исход засчитывается как благоприятствующий. В листинге 1 приведен код программы.

Листинг 1. Код программы на языке Python

```
import random

lamps = 1000
takenLamps = 100
all_good = 0
num = 100000
for k in range(100000):
    i = random.randint(0, 5)  # случайный выбор кол-ва испорченных лампочек
    lamps_list = ['bad'] * i + ['good'] * (lamps - i)
    selected_lamps = random.sample(lamps_list, takenLamps)
    if 'bad' not in selected_lamps:
        all_good += 1
prob = all_good / num
print(prob)
```

```
C:\Users\HP\teorver\teorver\.venv\Scripts\python.exe C:\Users\HP\teorver\teorver\main.py
0.78108

Process finished with exit code 0
```

Рисунок 1. Результат выполнения программы

Результат моделирования, приведенный на рис. 1, совпадает с [аналитическим решением] первыми двумя цифрами после запятой.

№ 7.15

Моделирование:

Параметры – `a` – массив, вероятность выбора единицы из которого составляет 0.2 , `num` – количество опытов, `b_happens_one`, `b_happens_two`, `b_happens_three` – для подсчета происхождений события B при соответствующем количестве происхождений события A. `b_happens` – для подсчета опытов, в которых событие B произошло.

Для каждого опыта `num` проводится 3 опыта, где подсчитывается количество происхождений `a_times` события A – выбора единицы из массива `a`. Если `a_times` равно трем, в `b_happens_three` считается количество происхождений события B – выбора единицы из массива `b`. Аналогично программа работает для других значений `a_times`, изменяется только массив `b`, т.е. вероятность происхождения события B. В листинге 2 приведен код программы.

```python
import random

a = [0, 0, 0, 0, 1]
b_happens_one = 0
b_happens_two = 0
b_happens_three = 0
b_happens = 0
num = 1000000
for i in range(num):
    a_times = 0
    for k in range(3):
        a_times += random.choice(a)
    if a_times == 3:
        b = [0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
        b_happens_three += random.choice(b)
        b_happens += random.choice(b)
    elif a_times == 2:
        b = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1]
        b_happens_two += random.choice(b)
        b_happens += random.choice(b)
    elif a_times == 1:
        b = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]
        b_happens_one += random.choice(b)
        b_happens += random.choice(b)
print("Вероятность происхождения B при трех появлениях A: ",
b_happens_three / b_happens)
print("Вероятность происхождения B при двух появлениях A: ",
b_happens_two / b_happens)
print("Вероятность происхождения B при одном появлении A: ",
b_happens_one / b_happens)
```

```
C:\Users\HP\teorver\teorver\.venv\Scripts\python.exe C:\Users\HP\teorver\teorver\7.15.py
Вероятность происхождения В при трех появлениях А:  0.07819524064832763
Вероятность происхождения В при двух появлениях А:  0.3927633659146836
Вероятность происхождения В при одном появлении А:  0.5292888467301797

Process finished with exit code 0
```

Рисунок 2. Результат выполнения программы

Результат моделирования, приведенный на рис. 2, показал, что наиболее вероятно появление В при одном появлении А, что совпадает с аналитическим решением. Вероятности гипотез после опыта также с небольшой погрешностью совпадают.

Добавлено примечание ([СПА5]): Исправлено

№ 8.13

Моделирование:

Параметры – `n` (количество опытов в задаче); `prob` – массив, вероятность выбора единицы из которого составляет 0.2 , `num` – количество опытов, `more_than_three` – для подсчета благоприятствующих исходов.

Для каждого опыта `num` проводится `n` опытов, где подсчитывается количество происхождений `a` события А – выбора единицы из массива `prob`. Если `a` больше либо равно трем, исход засчитывается как благоприятствующий. В листинге 3 приведен код программы.

Листинг 2. Код программы на языке Python

```python
import random

n = 18
prob = [0, 0, 0, 0, 1]
num = 100000
more_than_three = 0
for i in range(num):
    a = 0
    for k in range(n):
        a += random.choice(prob)
    if a >= 3:
        more_than_three += 1
print(more_than_three / num)
```

```
C:\Users\HP\teorver\teorver\.venv\Scripts\python.exe C:\Users\HP\teorver\teorver\8.13.py
0.72856

Process finished with exit code 0
```

Рисунок 3. Результат выполнения программы

Результат моделирования, приведенный на рис. 3, с небольшой погрешностью совпадает с аналитическим решением.

№ 9.1

Моделирование:

Параметры – `box` (массив, имитирующий коробку с шарами); `num` – количество опытов, `two_or_more` – для подсчета благоприятствующих исходов.

Для каждого опыта `num` проводится 5 опытов, где в массив `result` добавляются шары, которые были вытянуты случайно за определенный опыт из пяти. Если черных и белых шаров было вытянуто два и больше раз, исход засчитывается как благоприятствующий. В листинге 4 приведен код программы.

Листинг 3. Код программы на языке Python

```python
import random

box = ["red", "black", "white"]
num = 100000
two_or_more = 0
for i in range(num):
    result = []
    for k in range(5):
        result.append(random.choice(box))
    if result.count("black") >= 2 and result.count("white") >= 2:
        two_or_more += 1
print(two_or_more/num)
```

```
C:\Users\HP\teorver\teorver\.venv\Scripts\python.exe C:\Users\HP\teorver\teorver\9.1.py
0.20919

Process finished with exit code 0
```

Рисунок 4. Результат выполнения программы

Результат моделирования, приведенный на рис. 4, с небольшой погрешностью совпадает с аналитическим решением.