# Unidad 3: Elección intertemporal

Apuntes del profesor (material complementario)

Instituto Tecnológico de Santo Domingo (INTEC)
Microeconomía II (ECO304)
Prof. Briam Guerrero

Basado en: Varian (2016). *Intermediate Microeconomics*, Capítulo 10

---

**Objetivos de aprendizaje**

Al final de esta clase usted debe ser capaz de:

1. Formular la **restricción presupuestaria intertemporal** en sus distintas formas (valor futuro, valor presente).
2. Entender el significado económico de la **tasa de interés** como precio relativo entre consumo presente y futuro.
3. Distinguir entre **prestamista** y **prestatario** y analizar cómo cambian sus decisiones cuando varía la tasa de interés.
4. Aplicar la lógica de **Slutsky** a la elección intertemporal: descomponer el efecto de un cambio en la tasa de interés en efecto sustitución e ingreso.
5. Incorporar **inflación** y derivar la tasa de interés **real**, usando la aproximación $\rho \approx r - \pi$.
6. Calcular **valores presentes** de flujos de ingresos/pagos y utilizarlos para comparar proyectos e inversiones.
7. Entender el valor presente de **bonos** y **consols** y su relación inversa con la tasa de interés.
8. Resolver ejercicios numéricos de la clase: ejemplos de ahorro, comparación de inversiones y coste efectivo de la deuda en tarjeta de crédito.

## 1. Marco general: elección intertemporal

El consumidor decide un vector de consumo intertemporal $(c_1, c_2)$:

$$c_1 = \text{consumo en el periodo 1 (hoy)}, \qquad c_2 = \text{consumo en el periodo 2 (mañana)}.$$

Tiene ingresos exógenos:

$$m_1 \text{ hoy}, \qquad m_2 \text{ mañana},$$

y puede pedir prestado o prestar a una tasa de interés $r$.

### Interpretación financiera

En finanzas, piense que $c_1$ es consumo financiado con:

- ingreso laboral actual,
- más o menos deuda/ahorro.

$c_2$ es consumo futuro, financiado con:

- ingreso futuro,
- rendimiento del ahorro de hoy,
- o pago de deudas contraídas hoy.

**Nota**

El punto $(m_1, m_2)$ es la **dotación intertemporal**: lo que consumiría si no usara el mercado de crédito (*"ni prestes ni pidas prestado"*).

## 2. Restricción presupuestaria intertemporal

### Derivación con tasa de interés $r$

Si el individuo ahorra $s$ en el periodo 1, entonces:

$$c_1 = m_1 - s, \qquad s \text{ puede ser positivo (ahorra) o negativo (se endeuda).}$$

En el periodo 2 recibe:

$$c_2 = m_2 + (1 + r)s.$$

Sustituyendo $s = m_1 - c_1$:

$$c_2 = m_2 + (1 + r)(m_1 - c_1).$$

Ésta es la **restricción intertemporal** en forma "geométrica" (recta en el plano $c_1$-$c_2$).

### Forma valor futuro (VF)

Multiplicamos ambos lados por $(1 + r)$:

$$(1 + r)c_1 + c_2 = (1 + r)m_1 + m_2.$$

- Interpretamos todo en "unidades del periodo 2".
- El **precio** de $c_1$ es $(1 + r)$ (para consumir 1 hoy, renunciamos a $1 + r$ unidades de consumo mañana).
- El precio de $c_2$ es 1.

### Forma valor presente (VP)

Dividimos la restricción original por $(1 + r)$:

$$c_1 + \frac{c_2}{1 + r} = m_1 + \frac{m_2}{1 + r}.$$

- Interpretamos todo en "unidades de hoy".
- El **precio** de $c_1$ es 1.
- El precio de $c_2$ es $\dfrac{1}{1 + r}$: cuesta menos en términos de hoy porque se descuenta.

**Nota**

El **valor presente** de la dotación es:

$$VP = m_1 + \frac{m_2}{1+r}.$$

El **valor futuro** es:

$$VF = (1+r)m_1 + m_2.$$

Geométricamente, son los interceptos de la recta presupuestaria con los ejes $c_1$ y $c_2$.

# 3. Preferencias intertemporales y prestamista/prestatario

## Curvas de indiferencia intertemporales

Las preferencias del individuo sobre $(c_1, c_2)$ se representan con curvas de indiferencia:

$$U(c_1, c_2) = \text{constante}.$$

Casos típicos:

- **Convexas**: perfil "suave" de consumo (no quiere extremos).
- **Sustitutos perfectos**: indiferencia respecto a la fecha exacta del consumo.
- **Complementos perfectos**: desea consumir cantidades similares en ambos periodos.

## Prestamista y prestatario

Dado el óptimo $(c_1^*, c_2^*)$:

- **Prestamista**: $c_1^* < m_1$ (renuncia a consumo presente para tener más futuro).
- **Prestatario**: $c_1^* > m_1$ (consume de más hoy, financiado con menor consumo futuro).
- **No usa el mercado**: $c_1^* = m_1, c_2^* = m_2$.

En el diagrama, la dotación $(m_1, m_2)$ está sobre la recta; los óptimos prestamista/prestatario están a la izquierda/derecha de ese punto.

# 4. Comparativa estática: cambios en la tasa de interés

## Giro de la recta presupuestaria

La pendiente de la restricción (en forma $c_2 = a - bc_1$) es:

$$c_2 = m_2 + (1+r)(m_1 - c_1) = \underbrace{m_2 + (1+r)m_1}_{\text{intercepto}} - (1+r)c_1.$$

**Pendiente**:

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -(1+r).$$

- Si $r$ sube, la pendiente es más negativa: la recta se hace más empinada.
- Interpretación: el **precio relativo** del consumo presente en términos de futuro aumenta.

Nota

El mercado ofrece una **TMS del mercado** entre consumo presente y futuro igual a:

$$\mathrm{TMS}_{1,2}^{\text{mercado}} = 1 + r.$$

El individuo en el óptimo iguala su TMS *privada* a ese precio relativo (si hay interior y no hay restricciones de crédito).

### Prestamista ante aumento de $r$

Caso: $c_1^0 < m_1$ (prestamista) y $r$ sube a $r'$:

- La recta presupuestaria gira en torno a $(m_1, m_2)$.
- Por **preferencia revelada**, el nuevo óptimo debe estar en la parte de la nueva recta que era asequible antes y no fue escogida.
- Se puede mostrar que ese nuevo óptimo sigue cumpliendo $c_1' < m_1$: continúa siendo prestamista.

### Prestatario ante aumento de $r$

Caso: $c_1^0 > m_1$ (prestatario) y $r$ sube:

- La deuda es más costosa.
- Tiende a reducir $c_1$: pide menos prestado; puede incluso pasar a prestamista.
- Si sigue siendo prestatario luego de la subida de $r$, está **peor** (en una curva de indiferencia más baja).

### Conexión con Slutsky

En forma valor futuro:

$$(1 + r)c_1 + c_2 = (1 + r)m_1 + m_2,$$

la tasa de interés $r$ juega el papel de "precio" del bien $c_1$.
En la versión de Slutsky (esquemática):

$$\frac{\Delta c_1}{\Delta p_1} = \underbrace{\frac{\Delta c_1^s}{\Delta p_1}}_{\text{sustitución}<0} + \underbrace{(m_1 - c_1)\frac{\Delta c_1^m}{\Delta m}}_{\text{efecto ingreso}}.$$

- Si el individuo es **prestatario** ($c_1 > m_1$) y el bien presente es normal:

  $$m_1 - c_1 < 0 \Rightarrow \frac{\Delta c_1}{\Delta r} < 0.$$

  $\Rightarrow$ consume menos hoy si sube $r$.
- Si es **prestamista**, el signo de la variación en $c_1$ es ambiguo (sustitución vs ingreso).

## 5. Inflación y tasa de interés real

### Inflación

Hasta ahora asumimos precios constantes. Si hay inflación $\pi$, el precio del consumo del periodo 2 en unidades del periodo 1 es $1 + \pi$.

La restricción pasa a ser:

$$c_2 = m_2 + \frac{1+r}{1+\pi}(m_1 - c_1).$$

Definimos la **tasa de interés real** $\rho$ como:

$$1+\rho = \frac{1+r}{1+\pi}.$$

Entonces:

$$c_2 = m_2 + (1+\rho)(m_1 - c_1).$$

**Nota**

Interpretación: $\rho$ mide el aumento de *capacidad de consumo* que genera prestar 1 unidad hoy, una vez ajustado por inflación.

### Aproximación $\rho \approx r - \pi$

Partimos de:

$$1+\rho = \frac{1+r}{1+\pi} \quad \Longrightarrow \quad \rho = \frac{r-\pi}{1+\pi}.$$

Si $\pi$ es pequeña, $1+\pi \approx 1$ y:

$$\rho \approx r - \pi.$$

Ejemplo para clase: $r = 0.15$, $\pi = 0.10$:

$$\rho_{\text{exacta}} = \frac{0.15 - 0.10}{1.10} = \frac{0.05}{1.10} \approx 0.04545 = 4.545\,\%.$$

$$\rho_{\text{aprox}} \approx 0.15 - 0.10 = 0.05 = 5\,\%.$$

Diferencia $\approx 0.45$ puntos porcentuales.

## 6. Varios periodos y valor presente

### Tres periodos (visión rápida)

Con tres periodos y tasa constante $r$:

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} + \frac{c_3}{(1+r)^2} = m_1 + \frac{m_2}{1+r} + \frac{m_3}{(1+r)^2}.$$

El **precio** hoy de una unidad de consumo en el periodo $t$ es:

$$p_t = \frac{1}{(1+r)^{t-1}}.$$

**Nota**

Principio clave: si el individuo puede pedir prestado y prestar al tipo $r$, prefiere siempre el flujo con **mayor valor presente**.

# 7. Bonos y consols

### Bonos

Un **bono** promete pagos en el futuro, por ejemplo:

$$(x, x, \dots, x, F),$$

donde $x$ son los cupones y $F$ el valor nominal al vencimiento $T$.
Valor presente:

$$PV = \frac{x}{1+r} + \frac{x}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{x}{(1+r)^{T-1}} + \frac{F}{(1+r)^T}.$$

### Consols (perpetuidades)

Pagan $x$ cada periodo para siempre. Valor presente:

$$PV = \frac{x}{r}.$$

Intuición:
- Si invertimos $V$ a la tasa $r$, generamos $Vr$ cada periodo.
- Para que $Vr = x$, necesitamos $V = x/r$.

**Nota**

En ambos casos, si la tasa de interés $r$ sube, el valor presente de los bonos baja. Ésta es la base micro de la *relación inversa* entre precios de bonos y tasas de interés.

# 8. Ejemplos numéricos de las diapositivas

**Ejercicio 1 – Ejemplo 1: perfil de consumo constante**

Considere un individuo con ingresos:

$$m_1 = 1000, \qquad m_2 = 1000,$$

y tasa de interés $r = 0.10$ (10 %). Suponga que sus preferencias le hacen desear un perfil de consumo **constante** en ambos periodos, es decir $c_1 = c_2 = c$.

a) Calcule el **valor presente** del flujo de ingresos $(m_1, m_2)$.
b) Utilizando la restricción en valor presente, determine el nivel de consumo constante $c$.
c) ¿Es prestamista, prestatario o no usa el mercado de crédito?

**Respuesta**

**(a) Valor presente del ingreso.**
El valor presente es:

$$VP = m_1 + \frac{m_2}{1+r} = 1000 + \frac{1000}{1.10}.$$

$$\frac{1000}{1.10} \approx 909.09.$$

Por tanto:

$$VP \approx 1000 + 909.09 = 1909.09.$$

**(b) Consumo constante $c_1 = c_2 = c$.**
Si desea un perfil constante $c_1 = c_2 = c$, el valor presente del *consumo* debe ser igual al valor presente del *ingreso* (no hay otros activos ni herencias):

$$c + \frac{c}{1+r} = VP.$$

Sustituimos $VP$ y $r = 0.10$:

$$c + \frac{c}{1.10} = 1909.09.$$

Factorizamos $c$:

$$c\left(1 + \frac{1}{1.10}\right) = 1909.09.$$

Calculamos el factor:

$$1 + \frac{1}{1.10} = 1 + 0.90909 = 1.90909.$$

Entonces:

$$c = \frac{1909.09}{1.90909} \approx 1000.$$

Es decir, el perfil constante de consumo es:

$$c_1 = c_2 = 1000.$$

**(c) Prestamista o prestatario.**
Comparamos con la dotación:

$$(m_1, m_2) = (1000, 1000).$$

Como el consumo óptimo coincide exactamente con la dotación, se cumple:

$$c_1 = m_1, \qquad c_2 = m_2.$$

No ahorra ni pide prestado: se encuentra en el punto de "*ni prestes ni pidas prestado*". Por tanto, **no utiliza el mercado de crédito**.

**Ejercicio 2 – Ejemplo 2: comparar dos inversiones**

Compare las inversiones siguientes:

- **Inversión A**: recibe \$100 hoy (periodo 1) y \$200 el próximo año (periodo 2).
- **Inversión B**: recibe \$0 hoy y \$310 el próximo año.

a) Calcule el valor presente de A y B cuando $r = 0$.
b) Repita cuando $r = 0.20$ (20 %).
c) Indique cuál inversión es preferible en cada caso, suponiendo que el individuo puede pedir prestado/prestar a la tasa $r$.

**Respuesta**

Usamos la fórmula general de valor presente con dos periodos:

$$VP = \text{pago en } 1 + \frac{\text{pago en } 2}{1+r}.$$

**(a) Caso $r = 0$.**
Para la inversión A:

$$VP_A = 100 + \frac{200}{1+0} = 100 + 200 = 300.$$

Para la inversión B:

$$VP_B = 0 + \frac{310}{1+0} = 310.$$

Como $VP_B = 310 > VP_A = 300$, la inversión B es mejor cuando $r = 0$.
**(b) Caso $r = 0.20$.**
Ahora $1 + r = 1.20$.
Para la inversión A:

$$VP_A = 100 + \frac{200}{1.20}.$$

$$\frac{200}{1.20} \approx 166.67.$$

$$VP_A \approx 100 + 166.67 = 266.67.$$

Para la inversión B:

$$VP_B = 0 + \frac{310}{1.20} \approx 258.33.$$

**(c) Comparación.**
Cuando $r = 0.20$:

$$VP_A \approx 266.67, \qquad VP_B \approx 258.33,$$

por lo que ahora **A** es mejor que B.
**Interpretación económica:**

- Si el tipo de interés es bajo, los pagos futuros casi valen lo mismo que los presentes; la opción B (que paga más en el futuro) es más atractiva.
- Si el tipo de interés es alto, los pagos futuros se descuentan fuertemente; la opción A, que paga más pronto, pasa a ser más valiosa.

**Ejercicio 3 – Ejemplo 3: coste efectivo de la deuda en tarjeta de crédito**

Un consumidor compra bienes por \$2000 con su tarjeta de crédito. El banco cobra 1.5 % mensual sobre el **saldo promedio**. Al final del mes, el consumidor paga \$1800.

a) Suponga que el cliente realmente "financia" sólo \$200 (es decir, el banco le presta \$200 por un mes). ¿Cuánto sería un interés "justo" al 1.5 % mensual sobre esos \$200?
b) Calcule el saldo promedio durante el mes si asumimos que durante todo el mes el saldo pasa linealmente de \$2000 a \$200 (antes del pago). Use ese saldo promedio para calcular los intereses que el banco **efectivamente** cobra al 1.5 %.
c) Compare ambas cantidades e interprete la tasa de interés "efectiva" que está pagando el cliente.

**Respuesta**

**(a) Interés "justo" sobre los $200 realmente financiados.**
Si el cliente sólo financia $200 por un mes y la tasa mensual es $1.5\,\% = 0.015$, el interés "justo" sería:

$$\text{Interés justo} = 0.015 \times 200 = 3 \text{ dólares.}$$

**(b) Intereses con saldo promedio.**
El banco calcula el interés sobre el **saldo promedio**. Suponiendo que el saldo baja linealmente de $2000 a $200 durante el mes, el saldo promedio es:

$$\text{Saldo promedio} = \frac{2000 + 200}{2} = \frac{2200}{2} = 1100 \text{ dólares.}$$

El banco aplica $1.5\,\%$ sobre 1100:

$$\text{Interés cobrado} = 0.015 \times 1100 = 16.5 \text{ dólares.}$$

**(c) Tasa efectiva sobre los $200 financiados.**
Desde el punto de vista económico, lo relevante es que el cliente *realmente* está financiando sólo $200 durante el mes (después de pagar los 1800). Sin embargo, el banco cobra $16.5 de interés.
La tasa de interés efectiva mensual sobre el préstamo de $200 es:

$$i_{\text{efectivo}} = \frac{16.5}{200} = 0.0825 = 8.25\,\% \text{ mensual.}$$

Si anualizamos de forma simple (multiplicando por 12):

$$\text{TAE aproximada} \approx 0.0825 \times 12 = 0.99 = 99\,\% \text{ anual.}$$

**Conclusión pedagógica:** aunque la tasa "nominal" que anuncian ($1.5\,\%$ mensual) suena razonable, el método de cálculo sobre el saldo promedio hace que la tasa efectiva que paga el cliente sobre el verdadero monto financiado sea muchísimo más alta. Es un buen ejemplo para enfatizar la importancia del **valor presente** y de entender la base sobre la que se calcula el interés.

# 9. Ejercicios de práctica de las diapositivas (con solución)

**Ejercicio 4 – Ejercicio 1: pendiente de la restricción intertemporal**

Considere la restricción intertemporal:

$$c_2 = m_2 + (1 + r)(m_1 - c_1).$$

a) Exprese la ecuación en la forma $c_2 = a - bc_1$ e identifique la pendiente.
b) Explique qué ocurre con la pendiente cuando $r$ aumenta.
c) Interprete esa pendiente como una **TMS del mercado** entre consumo presente y futuro.

## Respuesta

**(a) Forma $c_2 = a - bc_1$.**
Partimos de:

$$c_2 = m_2 + (1+r)(m_1 - c_1).$$

Distribuimos:

$$c_2 = m_2 + (1+r)m_1 - (1+r)c_1.$$

Por tanto:

$$c_2 = \underbrace{[m_2 + (1+r)m_1]}_{a} - \underbrace{(1+r)}_{b} c_1.$$

La **pendiente** es:

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -b = -(1+r).$$

**(b) Efecto de aumentar $r$.**
Si $r$ aumenta, el término $(1+r)$ aumenta. Entonces:

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -(1+r)$$

se hace más negativo: la recta se vuelve **más empinada**. Gráficamente, gira alrededor del punto de dotación $(m_1, m_2)$.

**(c) Interpretación como TMS del mercado.**
La pendiente indica cuánto consumo futuro $c_2$ debe sacrificarse por cada unidad adicional de consumo presente $c_1$, si nos mantenemos en la frontera (es decir, sin cambiar la riqueza intertemporal total).
Formalmente:

$$\left.\frac{dc_2}{dc_1}\right|_{\text{mercado}} = -(1+r).$$

Esto significa que para consumir 1 unidad más hoy, hay que renunciar a $(1+r)$ unidades de consumo mañana. Es el "precio relativo" del consumo presente en términos de consumo futuro.

- Se puede interpretar como la **TMS del mercado**: cuanto vale 1 unidad de consumo hoy en unidades de consumo futuro.
- En el óptimo interior, el individuo iguala su TMS **privada** (pendiente de la curva de indiferencia) a esta TMS del mercado.

## Ejercicio 5 – Ejercicio 2: tasa de interés real

Suponga que:

- La tasa de interés nominal es $r = 0.15$ (15 %).
- La inflación esperada es $\pi = 0.10$ (10 %).

a) Calcule la tasa de interés real exacta:

$$\rho = \frac{r - \pi}{1 + \pi}.$$

b) Calcule la aproximación $\rho \approx r - \pi$.

c) Compare ambas cifras e interprete cuándo es razonable usar la aproximación.

**Respuesta**

**(a) Tasa real exacta.**
Usamos la fórmula:

$$\rho = \frac{r - \pi}{1 + \pi}.$$

Sustituimos $r = 0.15$, $\pi = 0.10$:

$$\rho = \frac{0.15 - 0.10}{1.10} = \frac{0.05}{1.10} \approx 0.04545.$$

En porcentaje:

$$\rho \approx 4.545\,\%.$$

**(b) Aproximación $r - \pi$.**

$$\rho_{\text{aprox}} \approx r - \pi = 0.15 - 0.10 = 0.05 = 5\,\%.$$

**(c) Comparación e interpretación.**

- Exacta: $\rho \approx 4.545\,\%$.
- Aproximada: $5\,\%$.

La diferencia es de alrededor de 0.455 puntos porcentuales (algo menor a medio punto). Con tasas moderadas de inflación, la aproximación $\rho \approx r - \pi$ suele ser razonable para cálculos rápidos.
Sin embargo, si $r$ o $\pi$ son muy altos, el término $(1 + \pi)$ en el denominador deja de ser cercano a 1, y la diferencia entre la tasa real exacta y la aproximada se vuelve más relevante. En contextos de alta inflación, conviene usar la fórmula exacta.

**Ejercicio 6 – Ejercicio 3: elegir entre flujos de ingresos**

A una tasa de interés $r = 0.10$, compare los flujos de ingresos siguientes:

- **Opción A**: $(500, 800)$.
- **Opción B**: $(300, 1000)$.

a) Calcule el valor presente de cada opción.
b) Indique cuál opción es mejor desde el punto de vista puramente financiero.
c) Comente brevemente qué ocurriría si la tasa de interés fuera mucho menor (por ejemplo, cercana a cero).

**Respuesta**

**(a) Valores presentes con $r = 0.10$.**
Recordamos:

$$VP = \text{pago en } 1 + \frac{\text{pago en } 2}{1 + r}.$$

Para la opción A:

$$VP_A = 500 + \frac{800}{1.10}.$$

$$\frac{800}{1.10} \approx 727.27.$$

$$VP_A \approx 500 + 727.27 = 1227.27.$$

Para la opción B:

$$VP_B = 300 + \frac{1000}{1.10}.$$

$$\frac{1000}{1.10} \approx 909.09.$$

$$VP_B \approx 300 + 909.09 = 1209.09.$$

**(b) Opción preferida.**
Como:

$$VP_A \approx 1227.27 > VP_B \approx 1209.09,$$

la opción A es **financieramente mejor** a una tasa de interés del 10 %.
**(c) Efecto de una tasa de interés menor.**
Si $r$ fuera muy pequeño (por ejemplo, $r \to 0$), los pagos futuros casi no se descontarían. En el límite $r = 0$:

$$VP_A(0) = 500 + 800 = 1300, \qquad VP_B(0) = 300 + 1000 = 1300.$$

Ambas opciones serían **equivalentes** desde el punto de vista del valor presente.
A medida que $r$ aumenta desde 0, los pagos del segundo periodo se descuentan más. Como la opción B tiene más peso en el periodo 2, su valor presente cae relativamente más rápido que el de A. Por eso, a $r = 0.10$ ya preferimos A. Este es un buen ejemplo para discutir cómo el nivel de la tasa de interés afecta la **preferencia temporal** entre flujos de ingresos.

## Resumen para cerrar la clase

- La elección intertemporal combina la teoría estándar del consumidor con un **mercado de crédito** que permite trasladar consumo entre hoy y mañana.
- La restricción intertemporal tiene formas equivalentes en términos de **valor presente** y **valor futuro**.
- La tasa de interés (real) es el **precio relativo** entre consumo presente y futuro; el análisis de Slutsky se aplica a cambios en este precio.
- El estatus de **prestamista** o **prestatario** determina el signo del efecto ingreso cuando cambia la tasa de interés.
- La **tasa real** ajusta la tasa nominal por la inflación, y la aproximación $\rho \approx r - \pi$ es útil cuando la inflación es moderada.
- El **valor presente** es la herramienta central para comparar flujos de pagos: más VP $\Rightarrow$ mejor (si se puede operar al tipo $r$ en el mercado financiero).
- Los ejemplos numéricos (perfil de consumo constante, comparación de inversiones, tarjeta de crédito) conectan la teoría con decisiones reales de ahorro, deuda y proyectos de inversión.