Microeconomía I (ECO351)

U.4 Utilidad del consumidor

Briam E. Guerrero B.

Instituto Tecnológico de Santo Domingo (INTEC)

2025 T4

Contenido de la unidad

1. Motivación e ideas clave
2. De preferencias a funciones de utilidad
3. Transformaciones monótonas
4. Formas funcionales de utilidad
5. Bienes "buenos", malos y saciedad
6. Utilidad marginal y TMS
7. Mini-ejemplos
8. Ejercicios de ejemplo
9. Resumen

Basado en Varian, Cap. 4.

¿Para qué sirve la utilidad?

- Ya conocemos las **preferencias** y las curvas de indiferencia.
- Ahora buscamos una **representación numérica**: una **función de utilidad** $u(x_1, x_2)$.
- La utilidad asigna un número a cada cesta, respetando el **orden de preferencias**:

$$x \succeq y \quad \Leftrightarrow \quad u(x) \geq u(y).$$

- La utilidad que usamos en micro intermedia es **ordinal**: sólo importa el orden, no la intensidad.
- En finanzas, las funciones de utilidad se usan para modelar preferencias sobre **consumo** o **riqueza** en diferentes estados o períodos.

Definición de función de utilidad

- Una **función de utilidad** $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ representa las preferencias si:

$$x \succeq y \quad \Leftrightarrow \quad u(x_1, x_2) \geq u(y_1, y_2).$$

- Si las preferencias son **completas**, **transitivas**, **monótonas** y **continuas**, existe una función de utilidad que las racionaliza.
- Importante: muchas funciones distintas pueden representar las *mismas* preferencias.
- Ejemplo: si al estudiante le gustan combinaciones de "consumo hoy" y "consumo mañana", podemos resumir esas preferencias con una función $u(c_h, c_m)$.

Curvas de indiferencia como niveles de utilidad

- Cada curva de indiferencia corresponde a un **nivel de utilidad**:

$$U_0 = \{(x_1, x_2) : u(x_1, x_2) = \bar{u}\}.$$

- Un **mapa de indiferencia** se puede ver como las curvas de nivel de una "montaña de utilidad".

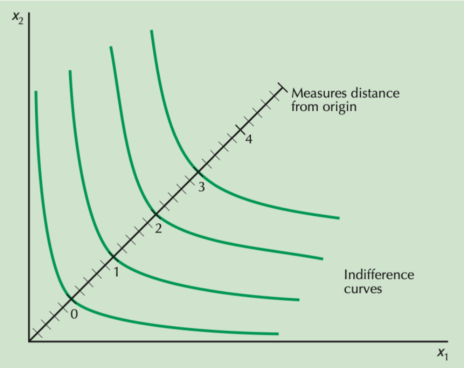

Gráfico 1. Función de utilidad y curvas de indiferencia, Varian (2016)

Utilidad ordinal y transformaciones monótonas

- Si $u(x)$ representa las preferencias, y $f(\cdot)$ es **estrictamente creciente**, entonces:

$$v(x) = f(u(x))$$

  también representa las mismas preferencias.
- u y v generan el **mismo orden** sobre las cestas:

$$u(x) \geq u(y) \quad \Leftrightarrow \quad v(x) \geq v(y).$$

- Ejemplos de transformaciones monótonas:
  - $v(u) = a + b\,u$ con $b > 0$.
  - $v(u) = e^u$.
  - $v(u) = \ln u$ (para $u > 0$).
- En el contexto financiero: multiplicar la utilidad por 2 o sumarle 5 no cambia las decisiones óptimas.

Gráfica: dos utilidades, mismas preferencias

- Ambas funciones asignan **niveles diferentes** de utilidad, pero **preservan el orden**.
- Las curvas de indiferencia (contornos) son las mismas.

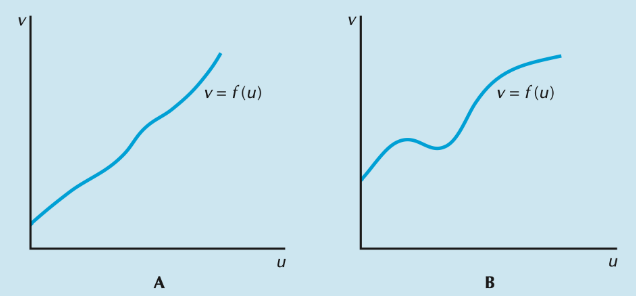

Gráfico 2. Transformaciones monótonas de la utilidad, Varian (2016)

Ejemplo rápido: transformación monótona

Suponga que las preferencias se representan por:

$$u(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}.$$

Definimos una nueva función:

$$v(x_1, x_2) = \ln u(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2} \ln x_1 + \tfrac{1}{2} \ln x_2.$$

- $v(\cdot)$ es una transformación monótona (estrictamente creciente) de $u(\cdot)$.
- $u(A) > u(B) \Rightarrow v(A) > v(B)$.
- Las cestas óptimas **no cambian** si maximizamos u o v.

Idea para clase: pedir a los estudiantes que verifiquen que las curvas de indiferencia de u y v tienen la **misma forma**.

Sustitutos perfectos

- Preferencias de **sustitutos perfectos**: el consumidor está dispuesto a intercambiar los bienes a una tasa constante.
- Función típica:
$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2, \quad a, b > 0.$$
- Ejemplo (finanzas personales): $x_1 =$ ahorro en cuenta A, $x_2 =$ ahorro en cuenta B, mismas condiciones y seguridad.
- El consumidor sólo se fija en el **total** $ax_1 + bx_2$.

Complementos perfectos

- Preferencias de **complementos perfectos**: los bienes se consumen en proporciones fijas.
- Función típica:

$$u(x_1, x_2) = \text{mín}\{ax_1, bx_2\}, \quad a, b > 0.$$

- Ejemplo (finanzas): x_1 = licencias de software de análisis financiero, x_2 = máquinas con el software instalado; sirven en pares.
- El bienestar depende del **"mínimo"** entre los dos.

Preferencias Cobb–Douglas

- Clase muy utilizada en micro y finanzas:

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

- Representan preferencias **estrictamente convexas** y **monótonas**.
- La razón $\alpha/(\alpha+\beta)$ mide la "importancia" relativa del bien 1 en el gasto óptimo.
- Ejemplo: x_1 = consumo hoy, x_2 = consumo futuro; la forma Cobb–Douglas captura un trade-off suave entre ambos.

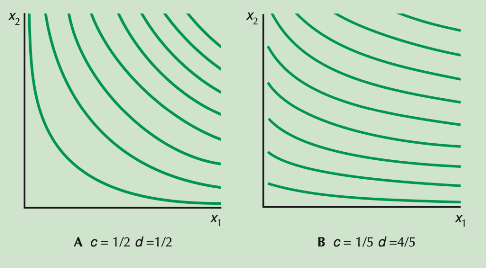

Gráfico 3. Utilidad Cobb–Douglas, Varian (2016)

Utilidad cuasilineal

- Forma **cuasilineal**:

$$u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2.$$

- El bien 2 es "**dinero**" u "otros bienes"; la utilidad es lineal en x_2.
- La demanda de x_1 depende del precio de x_1 y no tanto del ingreso (más adelante veremos implicaciones en Slutsky).
- Ejemplo (finanzas): x_1 = consumo de un servicio específico (datos móviles), x_2 = dinero residual para lo demás.

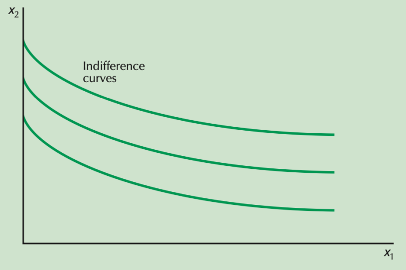

Gráfico 4. Preferencias cuasilineales, Varian (2016)

Bienes malos y bienes neutros

- Hasta ahora hemos supuesto que ambos bienes son "**buenos**": más es mejor.
- Pero podemos modelar:
  - **Bien neutral**: cambios en ese bien no afectan la utilidad.
  - **Bien malo (desutilidad)**: el consumidor prefiere *menos*.
- Ejemplos:
  - Bien neutral: "cantidad de publicidad" en una app financiera (si no le importa).
  - Bien malo: "riesgo de cartera" si al estudiante le desagrada el riesgo.

Saciedad (punto de bliss)

- También podemos tener un **punto de saturación** o *bliss point*.
- A partir de cierto nivel, tener más de un bien puede disminuir la utilidad.
- Ejemplo: demasiadas horas de trabajo (ingreso alto pero cero ocio) puede disminuir el bienestar.

Utilidad marginal

- Para una utilidad diferenciable $u(x_1, x_2)$ definimos:

$$MU_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \qquad MU_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}.$$

- Interpretación:
  - MU_1: cambio marginal en la utilidad ante una unidad extra de x_1, manteniendo x_2 fijo.
  - MU_2: análogo para x_2.
- En finanzas, podemos pensar en **utilidad marginal de riqueza** o de **consumo** en cada período.

Relación entre TMS y utilidades marginales

- A lo largo de una curva de indiferencia $u(x_1, x_2) = \bar{u}$, el diferencial total es:

$$du = MU_1\, dx_1 + MU_2\, dx_2 = 0.$$

- Despejando:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{MU_1}{MU_2}.$$

- La **Tasa Marginal de Sustitución** es:

$$TMS_{1,2} = -\frac{dx_2}{dx_1}\bigg|_{u=\text{cte}} = \frac{MU_1}{MU_2}.$$

- Es decir, la TMS es el **cociente** entre utilidades marginales.

Gráfico: TMS como pendiente de la CI

- La TMS se mide como la pendiente de la curva de indiferencia en el punto elegido.
- Mientras más plano sea el mapa, menor será la TMS (en valor absoluto).

Ejemplo numérico: Cobb–Douglas

Considere $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$, con $\alpha, \beta > 0$.

$$MU_1 = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta, \qquad MU_2 = \beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1}.$$

Entonces:

$$TMS_{1,2} = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta}{\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{x_2}{x_1}.$$

- TMS decreciente: a medida que aumenta x_1 (manteniendo x_2), $\frac{x_2}{x_1}$ baja.
- En un problema de **elección intertemporal** (consumo hoy y mañana), esta TMS se igualará a un precio relativo (tasa de interés) en el óptimo.

Mini-ejemplo 1: transformar utilidades

Dado $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$:

- (a) Proponga una función $v(x_1, x_2)$ que represente las mismas preferencias como transformación monótona de u.
- (b) Verifique que si $u(A) > u(B)$ entonces $v(A) > v(B)$.

Pista: usar $v(u) = u^3$ o $v(u) = \ln(1 + u)$.

Mini-ejemplo 2: identificar tipo de preferencias

Clasifique las siguientes utilidades:

1. $u(x_1, x_2) = \text{mín}\{x_1, 2x_2\}$.
2. $u(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$.
3. $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$.

Preguntas guía:

- ¿Hay proporciones fijas? $\Rightarrow$ complementos perfectos.
- ¿TMS constante? $\Rightarrow$ sustitutos perfectos.
- ¿Lineal en un bien? $\Rightarrow$ cuasilineal.

Mini-ejemplo 3 (finanzas): consumo intertemporal

Un estudiante tiene utilidad:

$$u(c_h, c_m) = c_h^{0,4} c_m^{0,6},$$

donde c_h es consumo "hoy" y c_m consumo "mañana".

- (a) Interprete los exponentes 0,4 y 0,6.
- (b) Calcule la $\text{TMS}_{h,m}$ en $(c_h, c_m) = (4, 9)$.
- (c) Explique cómo se relacionaría esta TMS con la tasa de interés de mercado.

Ejercicio 1: ¿Mismo orden de preferencias?

Considere las utilidades:

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2, \qquad v(x_1, x_2) = \ln(x_1 x_2).$$

- (a) Muestre que v es una transformación monótona de u.
- (b) Concluya que ambas representan el mismo orden de preferencias.
- (c) ¿Cambiaría la cesta óptima si maximizamos u o v?

Ejercicio 2: tipo de bienes

Para cada función de utilidad, identifique si los bienes son buenos, malos, o si hay saciedad:

1. $u(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$.
2. $u(x_1, x_2) = x_1 + \text{mín}\{x_2, 5\}$.
3. $u(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$ (punto de máxima utilidad en $(0, 0)$).

Idea para discusión: reinterpretar x_2 como "riesgo asumido" en una cartera de inversión.

Ejercicio 3: TMS y utilidades marginales

Para $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$:

- (a) Calcule MU_1 y MU_2.
- (b) Obtenga la $\text{TMS}_{1,2}$.
- (c) Evalúe la TMS en $(x_1, x_2) = (1, 4)$ y en $(4, 4)$ y comente sobre la convexidad.

Resumen

- La **utilidad** es una forma conveniente de representar preferencias ordinales.
- Transformaciones monótonas de u representan las **mismas** preferencias.
- Distintas formas funcionales (sustitutos, complementos, Cobb–Douglas, cuasilineal) capturan distintos patrones de gusto.
- Podemos modelar bienes buenos, malos, neutros y saciedad.
- La TMS se relaciona con la utilidad marginal: $TMS_{1,2} = MU_1/MU_2$.