Macroeconomía II (ECO306)

Repaso de Macroeconomía I: Optimización Dinámica

Briam E. Guerrero B.

Instituto Tecnológico de Santo Domingo (INTEC)

2026 T1

Hoja de Ruta

Preliminares

Tiempo Discreto

Tiempo Continuo

Referencias:

- Dixit, A. (1990). *Optimization in Economic Theory.* Oxford University Press, Oxford, UK.
- Acemoglu, D. (2009). *Introduction to Modern Economic Growth.* Princeton University Press, Princeton, NJ, USA.
- Feichtinger, G. and Hartl, R. (1986). *Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse: Anwendungen des Maximumprinzips in den Wirtschaftswissenschaften.* De Gruyter, Berlin, Germany.

Sección 1

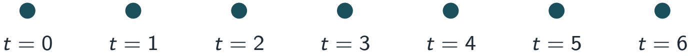
Preliminares

Preliminares I

Podemos conceptualizar la evolución del tiempo de dos maneras:

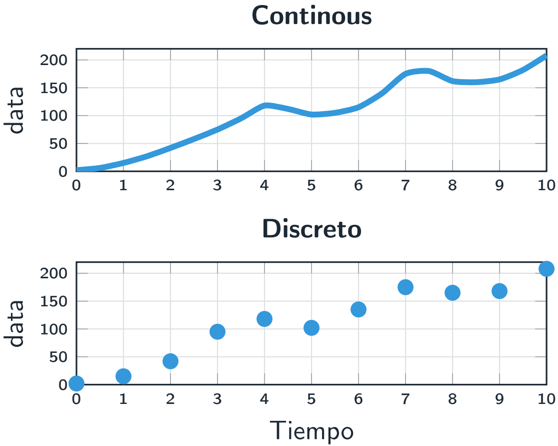
Tiempo continuo

Tiempo discreto



Preliminaries II

Consideremos la gráfica de una función en tiempo continuo y en tiempo discreto (ej. PIB o población). En tiempo continuo la función es derivable respecto al tiempo; en tiempo discreto no lo es.



Preliminares III

- Si una variable X depende del tiempo y el tiempo evoluciona de forma continua, escribimos $X(t)$.
- Podemos derivar esta variable respecto al tiempo y obtener su evolución (un punto sobre una variable denota la derivada temporal):

$$\dot{X}(t) = \frac{dX(t)}{dt} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{X(t+\Delta) - X(t)}{\Delta}.$$

- En tiempo discreto, la derivada no existe porque $\Delta = 1$ es el valor mínimo que puede tomar Δ.
- En su lugar, el cambio de una variable entre el instante t y $t+1$ se obtiene por la diferencia de niveles:

$$\Delta X = X_{t+1} - X_t.$$

Preliminares IV

- Denotemos la tasa de crecimiento de X por γ_x.
- La tasa de crecimiento en tiempo continuo es:

$$\gamma_x = \frac{\dot{X}(t)}{X(t)}.$$

- La tasa de crecimiento en tiempo discreto es:

$$\gamma_x = \frac{X_{t+1} - X_t}{X_t}.$$

- Tenemos la siguiente aproximación:

$$\underbrace{\frac{\dot{X}(t)}{X(t)}}_{\text{tiempo continuo}} \approx \underbrace{\frac{X_{t+1} - X_t}{X_t}}_{\text{tiempo discreto}}.$$

La aproximación mejora cuanto más cerca de cero esté la tasa de crecimiento y cuanto menor sea el paso temporal discreto (ej. trimestral vs. anual).

Preliminares V

- Si una variable X crece a una tasa constante, se dice que crece **exponencialmente**:

$$\frac{\dot{X}(t)}{X(t)} = \gamma_x, \; X(0) = X_0 \quad \Rightarrow \quad X(t) = X_0 \, e^{\gamma_x \cdot t},$$

$$\frac{X_{t+1} - X_t}{X_t} = \gamma_x, \; X_{t=0} = X_0 \quad \Rightarrow \quad X_t = X_0 \, (1 + \gamma_x)^t.$$

- Observemos que, por la regla de la cadena, podemos calcular la tasa de crecimiento de una variable en tiempo continuo tomando el logaritmo y derivando respecto al tiempo:

$$\frac{d \ln[X(t)]}{dt} = \frac{\dot{X}(t)}{X(t)}.$$

Preliminares: Resolución de ecuaciones diferenciales

- Caso más simple (*ecuación diferencial lineal homógena de primer orden con coeficiente constante*):
$$\dot{X}(t) = g\,X(t).$$
- Dividimos ambos lados entre $X(t)$ e integramos respecto a t:

$$\frac{\dot{X}(t)}{X(t)} = g,$$

$$\int \frac{\dot{X}(t)}{X(t)}\,dt = \int g\,dt,$$

$$\ln[X(t)] + c_0 = gt + c_1. \tag{1}$$

donde c_0 y c_1 son constantes de integración.

Preliminares: Resolución de ecuaciones diferenciales

- La exponenciación arroja la **solución general**:

$$e^{\ln[X(t)]+c_0} = e^{gt+c_1}$$

$$X(t) = c\, e^{gt},$$

  donde $c = \pm e^{c_1 - c_0}$ es la constante de integración.
- Supongamos que $X(0) = X_0$; entonces $c = X_0$ porque $X(0) = c\, e^{g \cdot 0}$, y la **solución particular** de la ecuación diferencial queda:

$$X(t) = X_0\, e^{gt}.$$

- Observemos que g es la **tasa de crecimiento** de X, que denotamos por γ_x (a veces usaremos g_x porque existen distintas convenciones en la literatura).

Preliminares: Resolución de ecuaciones de diferencias

- Caso más simple (*ecuación de diferencias lineal homógena de primer orden con coeficiente constante*):
$$X_{t+1} = b\,X_t.$$
- Iteración sucesiva:
$$\begin{aligned} X_1 &= b\,X_0, \\ X_2 &= b\,X_1 = b^2\,X_0 \\ &\vdots \\ X_{t+1} &= b^{\,t+1}\,X_0, \end{aligned}$$
donde la última línea es la **solución general**. En este caso la **solución particular** sigue inmediatamente.
- Aquí b es el **factor de crecimiento** de X. Notemos la conexión con la tasa de crecimiento: $b = 1 + \gamma_x$.

Optimización dinámica

- Estas nociones son necesarias para la optimización dinámica.
- Discutiremos la optimización dinámica en tiempo discreto y en tiempo continuo.
- La restricción lateral en estos problemas (ej. restricción presupuestaria de flujo) toma la forma de una ecuación diferencial en tiempo continuo y de una ecuación de diferencias en tiempo discreto.
- Una solución central de los problemas de optimización es también una ecuación diferencial en tiempo continuo y una ecuación de diferencias en tiempo discreto: la **ecuación de Euler**.
- Junto con la restricción, la ecuación de Euler forma un sistema dinámico que, a su vez, tiene una solución general y una particular.
- En el caso de dos ecuaciones dinámicas (ej. modelo de Ramsey) necesitamos dos condiciones para determinar la solución particular.
- Estas condiciones son generalmente una condición inicial sobre el capital y una condición de terminal (la **condición de transversalidad**).

Sección 2

Tiempo Discreto

Un problema de optimización en múltiples periodos

- El tiempo evoluciona de forma discreta y se denota por t.
- Consideremos un hogar que vive durante T periodos, donde permitimos explícitamente que $T = \infty$.
- La función de utilidad se define como creciente en el consumo:

$$U = u(c_t).$$

- El precio del bien de consumo es constante y se normaliza a 1.
- El hogar tiene activos a_t al inicio del periodo t e ingresos w_t en cada periodo.
- El ahorro se denota por s_t y renta un interés r.

Un problema de optimización en múltiples periodos

- La utilidad de vida es:

$$U_0 = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t),$$

  donde $\beta = 1/(1+\rho) < 1$ es el factor de descuento y ρ la tasa de descuento.
- El hogar elige un plan de consumo óptimo $\{c_t\}_{t=0}^{T} = \{c_0, c_1, \ldots c_T\}$ para maximizar U_0 sujeto a la restricción presupuestaria de vida:

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t} = a_0 + \sum_{t=0}^{T} \frac{w_t}{(1+r)^t}.$$

Un problema de optimización en múltiples periodos

- El Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \, u(c_t) - \lambda \left[\sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t} - a_0 - \sum_{t=0}^{T} \frac{w_t}{(1+r)^t} \right].$$

- Las condiciones de primer orden (CPO) son:

$$\mathcal{L}_{c_t} = \beta^t \, u'(c_t) - \frac{\lambda}{(1+r)^t} = 0 \qquad \text{para } t = 0, 1, 2, \ldots, T,$$

$$\mathcal{L}_{\lambda} = a_0 + \sum_{t=0}^{T} \frac{w_t}{(1+r)^t} - \sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t} = 0.$$

- Notemos que hay $T+2$ CPO y $T+2$ variables.

Un problema de optimización en múltiples periodos

- Tomemos las CPO para c_t y c_{t+1}:

$$\beta^t\, u'(c_t) = \frac{\lambda}{(1+r)^t},$$

$$\beta^{t+1}\, u'(c_{t+1}) = \frac{\lambda}{(1+r)^{t+1}}.$$

- Dividiendo estas dos expresiones y reordenando obtenemos:

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = (1+r)\,\beta.$$

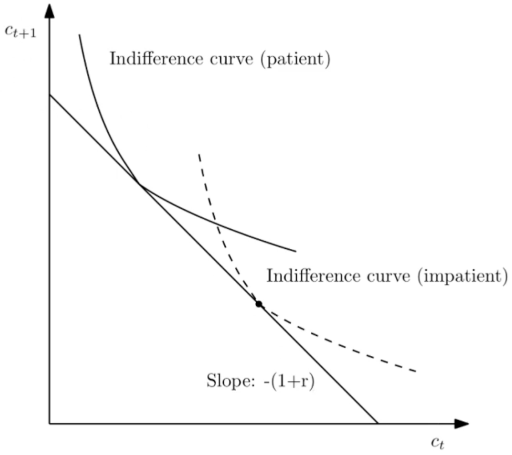
- Esta es la **ecuación de Euler**, que relaciona el crecimiento óptimo del consumo con la preferencia temporal y la tasa de interés, dado que $(1+r)\beta > 0$.
- Para utilidad iso-elástica

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta},$$

  la ecuación de Euler es

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \left[(1+r)\,\beta\right]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Ilustración gráfica



Un problema de múltiples periodos

- En principio los problemas dinámicos se pueden resolver mediante los métodos de Lagrange y Kuhn-Tucker.
- Sin embargo, con más variables de elección y/o en entornos estocásticos y/o con interacciones estratégicas (juegos dinámicos) esto puede volverse inmanejable.
- Por lo tanto, consideraremos una alternativa poderosa llamada **programación dinámica**.
- La idea es descomponer un problema de infinitos periodos en uno de dos periodos (periodo actual y el futuro).
- Si los agentes actúan de forma óptima entre t y $t+1$, entonces, por inducción, actuarán de forma óptima para todo t.

Programación dinámica

- Denotamos por c_t las **variables de control** que el agente puede elegir y que son típicamente **flujos** (ej. consumo).
- Denotamos por x_t las **variables de estado** que son típicamente **stocks** y resumen la situación del decisor (ej. activos).
- Las elecciones de c_t afectan a x_{t+1}, y los valores iniciales de x_t se denotan por x_0 y están dados exógenos.
- La función de utilidad es:

$$U_0 = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \, u(c_t).$$

- La restricción dinámica tiene la forma:

$$x_{t+1} = f(x_t,\, c_t).$$

Programación dinámica

- El problema de optimización dinámica es:

$$\max_{\{c_t\}_{t=0}^{T}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t) \qquad \text{s.a.} \quad x_{t+1} = f(x_t, c_t).$$

- Podemos reescribir U_0 como:

$$U_0 = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t) = u(c_0) + \beta \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(c_t) = u(c_0) + \beta\, U_1.$$

- La utilidad se descompone en utilidad instantánea U_0 y utilidad futura descontada βU_1.
- Más en general, para cada $s < T$ podemos escribir:

$$U_s = u(c_s) + \beta\, U_{s+1}.$$

Programación dinámica

- Podemos aplicar el mismo principio a la **función de valor** del problema.
- La utilidad máximo alcanzable es:

$$V(x_s) = \max_{\{c_t\}_{t=s}^{T}} U_s = \max_{\{c_t\}_{t=s}^{T}} \sum_{t=s}^{T} \beta^{t-s} u(c_t).$$

- Supongamos que el decisor ya ha resuelto el problema que comienza en $t+1$ para un x_{t+1} dado.
- Entonces la utilidad máximo alcanzable en t se puede descomponer en utilidad instantánea y utilidad futura máxima, dada la elección que conduce a x_{t+1}.
- Por lo tanto tenemos:

$$V(x_t) = \max_{c_t} \; u(c_t) + \beta \, V(x_{t+1}) \qquad \text{s.a.} \quad x_{t+1} = f(x_t, c_t).$$

- Esta ecuación se llama la **Ecuación de Bellman**.

Programación dinámica

- La idea de que, dada la elección en t, la decisión posterior debe ser óptima desde $t+1$ es el **Principio de Optimalidad de Bellman**.
- Resolver la ecuación de Bellman para todo t arroja la secuencia óptima de variables de control.
- Si T es finito, la secuencia de ecuaciones de Bellman se puede resolver de forma recursiva (se resuelve para el último periodo, luego el penúltimo, y así sucesivamente).
- Sin embargo, esto puede ser tedioso y para $T=\infty$ no funciona.
- Afortunadamente, existen mejores métodos que permiten obtener más información.
- Nos concentramos en $T=\infty$ a partir de ahora.

Programación dinámica

- Resolver el problema por programación dinámica consta de los siguientes pasos.

Paso 1: Planteamos la ecuación de Bellman e insertamos la restricción:

$$V(x_t) = \max_{c_t}\left\{u(c_t) + \beta\, V[f(x_t, c_t)]\right\}.$$

La CPO es:

$$u'(c_t) + \beta\, V'(x_{t+1})\,\frac{\partial f(x_t, c_t)}{\partial c_t} = 0.$$

Paso 2: Caracterizamos $V'(x_{t+1})$ mediante el **Teorema de la Envolvente**:

$$\begin{aligned} V'(x_{t+1}) &= \frac{d}{dx_{t+1}}\left[u(c^*_{t+1}) + \beta\, V\left[f(x_{t+1}, c^*_{t+1})\right]\right] \\ &= \beta\, V'(x_{t+2})\,\frac{\partial f(x_{t+1}, c^*_{t+1})}{\partial x_{t+1}}. \end{aligned}$$

Programación dinámica

Paso 3: Usamos las CPO respecto a c_t y c_{t+1} para expresar $V'(x_{t+1})$ y $V'(x_{t+2})$:

$$V'(x_{t+1}) = -\frac{u'(c_t)}{\beta \dfrac{\partial f(x_t, c_t)}{\partial c_t}}, \qquad \beta V'(x_{t+2}) = -\frac{u'(c_{t+1})}{\dfrac{\partial f(x_{t+1}, c_{t+1})}{\partial c_{t+1}}}$$

- Insertando en la expresión del Paso 2 y reordenando:

$$u'(c_t)\left[\frac{\partial f(x_t, c_t)}{\partial c_t}\right]^{-1} = \beta\, u'(c_{t+1})\left[\frac{\partial f(x_{t+1}, c_{t+1})}{\partial c_{t+1}}\right]^{-1}\frac{\partial f(x_{t+1}, c^*_{t+1})}{\partial x_{t+1}}.$$

Programación dinámica

- Esta es la **ecuación de Euler**.
- Esta expresión solo contiene la función de utilidad, que es conocida.
- Las funciones de valor, que generalmente *no* se conocen, han sido eliminadas.

Ejemplo: Decisión de ahorro intertemporal del hogar

- Consideramos la decisión de ahorro de un hogar (asignación intertemporal del consumo).
- La función de utilidad es:

$$U_0 = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \, u(c_t).$$

- Denotamos los activos (variable de estado) por a_t.
- El ingreso laboral es exógeno y dado por w_t.
- La restricción presupuestaria dinámica es:

$$a_{t+1} = (1 + r) \, a_t + w_t - c_t.$$

- Notemos que a_{t+1} depende de la variable de estado de hoy (a_t), de la elección de la variable de control (c_t), y del ingreso laboral exógeno.

Ejemplo: Decisión de ahorro intertemporal del hogar

Paso 1: La ecuación de Bellman es:

$$V(a_t) = \max_{c_t}\left\{u(c_t) + \beta\, V(a_{t+1})\right\},$$

donde $a_{t+1} = (1+r)\, a_t + w_t - c_t$. La CPO es:

$$u'(c_t) + \beta\, V'(a_{t+1}) \frac{\partial a_{t+1}}{\partial c_t} = 0.$$

Como $\partial a_{t+1}/\partial c_t = -1$, tenemos:

$$u'(c_t) = \beta\, V'(a_{t+1}).$$

Interpretación

En el óptimo, la ganancia marginal de utilidad instantánea por mayor consumo debe igualar la pérdida marginal de utilidad futura descontada originada por el menor nivel de activos asociado a un consumo mayor hoy.

Ejemplo: Decisión de ahorro intertemporal del hogar

Paso 2: Caracterizamos $V'(a_{t+1})$ mediante el Teorema de la Envolvente:

$$\begin{aligned} V'(a_{t+1}) &= \frac{d}{da_{t+1}}\Big[u(c_{t+1}^{*}) + \beta\, V(a_{t+2})\Big] \\ &= \beta\, V'(a_{t+2})\,\frac{\partial a_{t+2}}{\partial a_{t+1}} = \beta\, V'(a_{t+2})\,(1+r). \end{aligned}$$

Paso 3: Usamos las CPO respecto a c_t y c_{t+1}:

$$V'(a_{t+1}) = \frac{u'(c_t)}{\beta}, \qquad \beta\, V'(a_{t+2}) = u'(c_{t+1}).$$

Ejemplo: Decisión de ahorro intertemporal del hogar

- Insertando estas expresiones en la del Paso 2:

$$\frac{u'(c_t)}{\beta} = u'(c_{t+1})\,(1+r) \quad \Longrightarrow \quad \frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta\,(1+r).$$

- Esta es la **ecuación de Euler**, que se verifica fácilmente aplicando la utilidad iso-elástica:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \left[(1+r)\,\beta\right]^{\frac{1}{\theta}}.$$

- Proporciona el cambio óptimo del consumo en el tiempo.
- Sin embargo, aún no podemos calcular el **nivel** del consumo (la solución particular).
- Esta es una característica estándar de las CPO de los problemas intertemporales.

Ejemplo: Decisión de ahorro intertemporal del hogar

- Podríamos calcular c_0 para una forma funcional dada de la utilidad y apoyándose en la restricción presupuestaria de vida para salarios y activos iniciales dados.
- Una vez obtenido c_0, derivaríamos toda la secuencia $\{c_t\}_1^T$ mediante la Ecuación de Euler.
- Es esencialmente lo que vieron en el **modelo de Ramsey**.

Sección 3

Tiempo Continuo

Teoría de control óptimo: Motivación

- Ahora consideramos la optimización dinámica en **tiempo continuo**.
- Los métodos matemáticos son distintos porque, en tiempo continuo, es posible derivar respecto al tiempo.
- El problema original concierne al cálculo del empuje óptimo de un cohete que debe llevar una carga útil a la órbita terrestre.
- El empuje de un cohete es continuo.
- El método también se puede aplicar a problemas económicos como la decisión de ahorro óptimo de los hogares.
- Veremos que, a pesar de las diferencias metodológicas y conceptuales, los resultados son notablemente similares al caso de tiempo discreto.

Ejemplo: Decisión de ahorro óptimo

- Consideremos un hogar promedio.
- El hogar ofrece inelásticamente una unidad de trabajo en el mercado laboral y obtiene un salario w.
- El hogar decide cómo dividir el ingreso entre consumo y ahorro.
- El tradeoff es nuevo entre el flujo de ingresos por intereses obtenido sobre el ahorro acumulado y el deseo de consumir ahora en lugar de después (impaciencia).
- Buscamos una trayectoria óptima del consumo (y por tanto del ahorro) a lo largo del horizonte de planificación.
- El resultado es un sistema de ecuaciones diferenciales para el que podemos calcular las soluciones general y particular.

Flujo de consumo

- El hogar "suma" la utilidad generada por consumir $c(t)$ en cada instante entre 0 y T:

$$U = \int_0^T u\left[c(t)\right] dt.$$

- En lo que sigue suprimimos el índice temporal (t) cuando esto no perjudica la claridad de la exposición.
- Frecuentemente se supone un horizonte infinito sobre el que los individuos optimizan, es decir, $T \to \infty$. Esta simplificación se puede justificar desde una perspectiva dinástica con altruismo intergeneracional. Entonces:

$$U = \int_0^\infty u(c)\, dt.$$

Preferencia temporal y restricción presupuestaria

- Recordemos que los hogares descuentan el futuro a la tasa ρ, es decir, son impacientes:

$$U = \int_0^\infty u(c)\, e^{-\rho t}\, dt.$$

- Un hogar tiene activos a.
- El hogar obtiene ingresos por activos $r \cdot a$ (intereses sobre los activos).
- Obtiene ingreso laboral w (sobre input laboral normalizado $L \equiv 1$).
- En este escenario los activos del hogar evoluciona con el tiempo según la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{a} = w + ra - c.$$

- Se llama **restricción presupuestaria de flujo**.

Condición de No-Ponzi-Game

- Si el horizonte temporal termina en T, el nivel de deuda restante debe ser no negativo, es decir, $a(T) \geq 0$.
- En el caso de un horizonte de planificación infinito, la formulación equivalente es:

$$\lim_{t \to \infty} a(t)\, e^{-\bar{r}\, t} \geq 0,$$

  donde $\bar{r} = \frac{1}{t} \int_0^t r(\tau)\, d\tau$ es la tasa de interés promedio.
- **Interpretación:** La deuda solo puede crecer a una tasa menor que $\bar{r}$.
- Dicho de otra forma: no se permite endeudarse y pagar la deuda contraída con deuda aún mayor.
- Dicho de otra manera: el valor presente de los activos debe ser no negativo.
- Se llama **Condición de No-Ponzi-Game**.

La condición de transversalidad

- Si $a(T) > 0$, los hogares podrían aún aumentar su utilidad consumiendo más en el último periodo de su vida, de modo que la solución original no habría sido óptima.
- Por lo tanto: solo $a(T) = 0$ es consistente con un comportamiento óptimo en el último periodo.
- La optimalidad en el caso de un horizonte infinito exige no dejar activos asintóticamente:

$$\lim_{t \to \infty} a(t)\, e^{-\bar{r}\, t} = 0.$$

- Se llama **condición de transversalidad**. Engloba la condición de No-Ponzi-Game.
- Ahora tenemos todos los ingredientes para resolver el problema de optimización mediante el **Principio del Máximo de Pontryagin** [1].

Teoría de control óptimo: Planteamiento del problema

- Sean
  - x: las **variables de estado** (activos, velocidad, etc.),
  - c: las **variables de control** (consumo, empuje, etc.),
  - $f(t, x, c)$: la función objetivo (utilidad descontada, etc.),
  - $g(t, x, c)$: la **restricción dinámica** (restricción presupuestaria de flujo, etc.)
- Entonces necesitamos determinar el control óptimo c que resuelve el siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned} \max_{c(t)} \quad & \int_0^T f(t, x, c)\, dt, \\ \text{s.a.} \quad & \dot{x} = g(t, x, c), \\ & x(0) = x_0 \end{aligned}$$

  y una condición de transversalidad apropiadamente definida.
- **Observación:** También se permite $T \to \infty$.

Teoría de control óptimo (Procedimiento de receta general)

1. Definir el **Hamiltoniano** como
$$\mathcal{H} = f(t, x, c) + \lambda \cdot g(t, x, c).$$
2. Derivar las condiciones de primer orden (CPO) necesarias para máximos interiores en los que c y x cumplen:
$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = \dot{x},$$
$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\dot{\lambda},$$
y la condición de transversalidad:
$$\lim_{t \to \infty} x(t)\,\lambda(t) = 0.$$

Teoría de control óptimo (Procedimiento de receta general)

Observación:

- La variable λ se llama la **variable adjunta (costate)**.
  - Se puede interpretar como el **precio sombra de la variable de estado**, análogo al multiplicador de Lagrange pero dependiendo ahora del tiempo, de modo que λ es una función de t (una restricción por instante).

Ejemplo: Problema de maximización intertemporal del hogar

- El problema de maximización intertemporal para la decisión óptima de consumo-ahorro del hogar se resume como:

$$\max_{c(t)} \int_0^{\infty} u(c)\, e^{-\rho t}\, dt$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \dot{a} &= w + ra - c, \\ a(0) &= a_0 \quad \text{es dado}, \\ 0 &= \lim_{t\to\infty} a(t)\, e^{-\bar{r}\, t}. \end{aligned}$$

- El consumidor debe elegir una función óptima $c(t)$. Las evoluciones futuras de w y r le son conocidas (expectativas perfectas).

Ejemplo: Solución del problema de maximización intertemporal

- **Hamiltoniano:**

$$\mathcal{H} = u(c)\, e^{-\rho t} + \lambda \big[w + ra - c \big].$$

- **Condiciones de primer orden necesarias:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = 0 \quad &\Rightarrow \quad u'(c)\, e^{-\rho t} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = \dot{a} \quad &\Rightarrow \quad w + ra - c = \dot{a}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a} = -\dot{\lambda} \quad &\Rightarrow \quad \lambda\, r = -\dot{\lambda}, \end{aligned}$$

y $\lim\limits_{t \to \infty} a(t)\, \lambda(t) = 0.$

Ejemplo: Derivación de la ecuación de Euler en tiempo continuo

- Tomando el logaritmo de la primera CPO obtenemos:

$$\ln\left[u'(c)\right] - \rho\, t = \ln(\lambda).$$

- Derivando respecto al tiempo obtenemos la tasa de crecimiento de λ:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{du'(c)/dt}{u'(c)} - \rho = \frac{u''(c)}{u'(c)}\,\dot{c} - \rho.$$

- Junto con la tercera ecuación $\dot{\lambda}/\lambda = -r$, resulta que:

$$r = \frac{c\, u''(c)}{u'(c)}\,\frac{\dot{c}}{c} - \rho,$$

o, expresado de otra forma:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{r - \rho}{-\dfrac{c\, u''(c)}{u'(c)}}.$$

Ejemplo: La elasticidad de sustitución intertemporal

- Consideremos de nuevo el caso de utilidad iso-elástica:

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta}.$$

- Se puede demostrar que el **coeficiente de aversión relativa al riesgo**

$$\theta = -\frac{c\, u''(c)}{u'(c)} = -\frac{du'(c)}{dc}\,\frac{c}{u'(c)}$$

  es constante para esta función de utilidad particular.
- Recordemos:
  - Cuanto mayor sea θ, más los individuos desean **alisar** el consumo en el tiempo (es menos probable que acepten el riesgo de tener un nivel de consumo bajo en algún instante).
  - La inversa $1/\theta$ es la **elasticidad de sustitución intertemporal**.

Ejemplo: La ecuación de Euler, de nuevo

La tasa de crecimiento del consumo puede entonces escribirse como:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{r - \rho}{\theta}.$$

Esta es nuestra antigua conocida, la ecuación de Euler. **Interpretación:**

- La optimalidad exige:
  - una trayectoria de consumo constante si $r = \rho$,
  - consumo creciente en el tiempo si $r > \rho$ (ahorro),
  - consumo decreciente en el tiempo si $r < \rho$ (desahorro).
- La tasa de crecimiento del consumo es menor cuanto mayor sea θ, pues entonces los individuos son más averse al riesgo y buscan una trayectoria de consumo más suave.
- Como en tiempo discreto: la tasa de crecimiento del consumo no depende del ingreso. ¡Sin embargo, el nivel de consumo sí lo hace!

Ejemplo: comentarios

- La solución del problema de optimización consta de un sistema de dos ecuaciones diferenciales:
  1. La ecuación de Euler para la evolución del consumo.
  2. La restricción presupuestaria de flujo para la evolución de los activos.
- Se podría derivar la **solución general** de este sistema.
- Junto con **dos** condiciones adicionales, se podría derivar la **solución particular** del sistema.
- Las dos condiciones adicionales en nuestro caso son proporcionadas por la condición inicial y por la condición de transversalidad:

$$
\begin{aligned}
a(0) &= a_0, \\
\lim_{t \to \infty} a(t)\, e^{-\bar{r}\, t} &= 0.
\end{aligned}
$$

- Una de las condiciones es, por lo tanto, una condición de extremo (endpoint).

¿Preguntas?

briam.guerrero@intec.edu.do

Material disponible en el aula virtual

Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V., y Mishchenko, E. F. (1962). *The Mathematical Theory of Control Processes.* Interscience Publishers, Nueva York.