Microeconomía II (ECO304)

U.5 Teoría de la firma I: Tecnología, beneficio y costos

Briam E. Guerrero B.

Instituto Tecnológico de Santo Domingo (INTEC)

2025 T4

Contenido de la unidad

1. Motivación y mapa de la semana
2. Tecnología (Cap. 19)
3. Maximización del beneficio (Cap. 20)
4. Minimización de costos (Cap. 21)
5. Ejemplos y ejercicios numéricos
6. Resumen y cierre

Basado en Varian, Caps. 19–21.

¿Qué estudiamos esta semana?

- Damos el salto de **consumidores** a **empresas**.
- Tres bloques:
  1. **Tecnología** (Cap. 19): qué combinaciones de insumos $\rightarrow$ qué niveles de producción.
  2. **Maximización del beneficio** (Cap. 20): cómo elige la firma y e insumos cuando toma precios como dados.
  3. **Minimización de costos** (Cap. 21): cómo producir un nivel dado de y al menor costo posible.
- Semana $\approx$ 3 horas:
  - **Clase 5**: tecnología y primeras ideas de beneficio.
  - **Clase 6**: beneficio, costos y condiciones de primer orden (FOC).

Conexión con el resto del curso

- Consumidor: maximiza **utilidad** sujeto a restricción presupuestaria.
- Firma competitiva: maximiza **beneficio** sujeto a restricción tecnológica.
- Analogías:
  - Curvas de indiferencia $\leftrightarrow$ **isoquantas**.
  - Recta presupuestaria $\leftrightarrow$ **isocostos / isobeneficio**.
  - Slutsky consumidor $\leftrightarrow$ **Slutsky de empresa** (beneficio/costo + revelado).
- Todo esto será la base para:
  - Ofertas de trabajo/ahorro.
  - Curvas de oferta de la empresa y equilibrio competitivo.

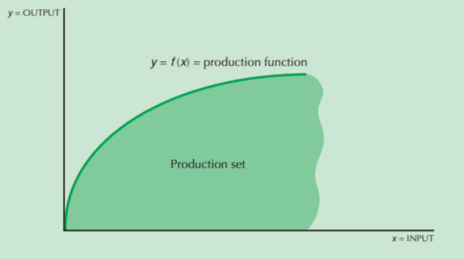
Inputs, output y conjunto de producción

- **Inputs/factores**: trabajo, tierra, materias primas, capital físico, etc.
- **Output**: cantidad producida del bien y (o vector de outputs).
- **Conjunto de producción**:

$$Y = \{(x_1, \ldots, x_n, y) : \text{es tecnológicamente posible}\}.$$

- **Función de producción**: frontera "eficiente" del conjunto de producción.

$$y = f(x_1, \ldots, x_n).$$



Varian (2016), Figura 19.1. Conjunto de producción y función de producción.

Interpretación económica de la función de producción

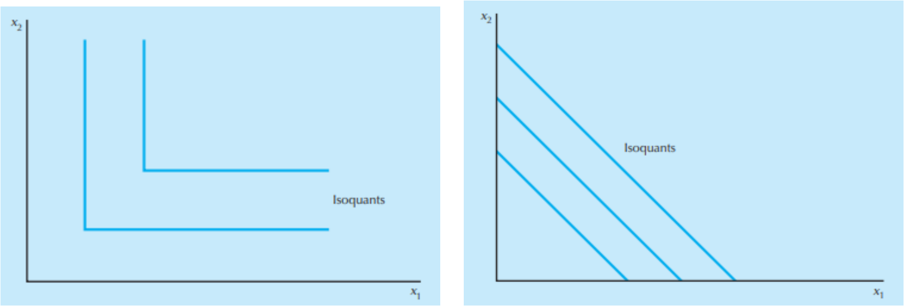
- Para cada combinación de insumos $(x_1, \dots, x_n)$, $f(x_1, \dots, x_n)$ da el **máximo output** alcanzable.
- Pensar siempre en **flujos** (por período): horas de trabajo/semana, máquinas/mes, etc.
- Ejemplos:
  - **Uno a uno**: $y = \min\{x_1, x_2\}$ (un trabajador + una máquina).
  - **Sustitutos**: $y = x_1 + x_2$ (dos tipos de combustible).
  - **Cobb-Douglas**: $y = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$.
- Heurística: piensa qué pasa si duplicas todos los factores.

Isoquantas: análogo a curvas de indiferencia

- Para y fijo:

$$\{(x_1, x_2) : f(x_1, x_2) = y\} \quad \Rightarrow \quad \textbf{isoquanta de } y.$$

- Cada isoquanta muestra las combinaciones de insumos que producen el **mismo output**.
- Se parecen mucho a las curvas de indiferencia:
  - hacia el origen $=$ menos y.
  - más "altas" $=$ más y.



Varian (2016), Figuras 19.2 y 19.3. Ejemplos de isoquantas.

Tecnologías bien comportadas

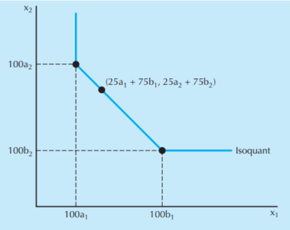
- **Monótona**: si aumento cualquier input, el output no disminuye.

$$x' \geq x \Rightarrow f(x') \geq f(x).$$

- **Convexa**: promedios de insumos producen "al menos tanto" como extremos.

$$f(\theta x + (1-\theta)x') \geq \theta f(x) + (1-\theta) f(x'),\ 0 < \theta < 1.$$

- Isoquantas:
  - más alejadas del origen = mayor output.
  - convexas hacia el origen (sustitución "suave" entre factores).



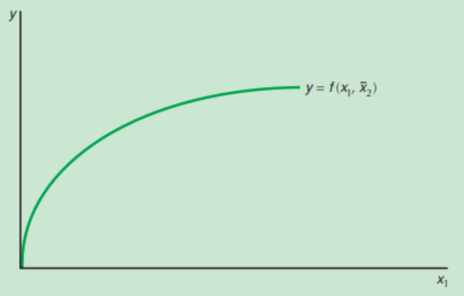
Varian (2016), Figura 19.4. Isoquantas bien comportadas.

Producto marginal y tasa técnica de sustitución

- **Producto marginal** del factor 1:
$$MP_1(x_1, x_2) = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}.$$
- Mide cuánto aumenta y al incrementar x_1 "un poquito", manteniendo x_2 fijo.
- **Tasa técnica de sustitución** (TRS) entre 1 y 2:
$$TRS_{12} = \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{y \text{ fijo}} = -\frac{MP_1}{MP_2}.$$
- Analogía: es la "pendiente" de la isoquanta, igual que la TMS en el consumidor.
- En tecnologías bien comportadas, la TRS suele **disminuir** a medida que reemplazamos un factor por el otro.

Producto marginal decreciente y corto plazo

- **Producto marginal decreciente**: si aumentas mucho un input, manteniendo los demás fijos, el incremento adicional de y se hace cada vez menor.
- **Ley de rendimientos decrecientes**: no puedes producir toda la comida del mundo en un tiesto.
- **Corto plazo**: al menos un factor fijo.
- **Largo plazo**: todos los factores son variables.



Varian (2016), Figura 19.5. Producción de corto plazo y MP decreciente.

Rendimientos a escala

- Considera una función $y = f(x_1, x_2)$ y un escalar $t > 0$.
- **Rendimientos constantes a escala** (RCE):

$$f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2).$$

- **Rendimientos crecientes a escala** (RCE+):

$$f(tx_1, tx_2) > tf(x_1, x_2).$$

- **Rendimientos decrecientes a escala** (RDE):

$$f(tx_1, tx_2) < tf(x_1, x_2).$$

- No confundir:
  - **Rendimientos a escala**: cambias *todos* los inputs.
  - **Producto marginal decreciente**: cambias *uno* manteniendo el resto fijo.

Definición de beneficio y costos de oportunidad

- Beneficio:

$$\pi = \sum_{j=1}^{n} p_j y_j - \sum_{i=1}^{m} w_i x_i.$$

- **Costo de oportunidad**: valora todos los factores al precio de mercado, aunque no se compren ahí (ej.: tiempo del dueño).
- En general: firma competitiva toma como **dados**:
  - Precios de outputs p_j.
  - Precios de inputs w_i.
- Problema: elegir (y, x) para **maximizar** π.

Beneficio y valor de la empresa

- Beneficios se generan a lo largo del tiempo: $\pi_1, \pi_2, \ldots$.
- **Valor presente** de la firma:

$$VP = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\pi_t}{(1+r)^t}.$$

- En un mundo sin incertidumbre:
  - El **valor de mercado** de la empresa = valor presente del flujo de beneficios.
  - Maximizar beneficio $\Rightarrow$ maximizar valor de la acción / precio en bolsa.
- Con incertidumbre es más complicado, pero la idea básica sigue: objetivos de los managers alineados con dueños.

Corto plazo, largo plazo y factores cuasi-fijos

- **Corto plazo**: algunos factores fijos (planta, equipos).
- **Largo plazo**: todos los factores son variables.
- Factores **cuasi-fijos**: sólo se pagan si la firma produce $y > 0$ (ej.: iluminación, publicidad mínima).
- Importancia:
  - Cambia la forma de la función de costos.
  - Cambia la respuesta de oferta de corto vs largo plazo.

Maximización de beneficio en el corto plazo

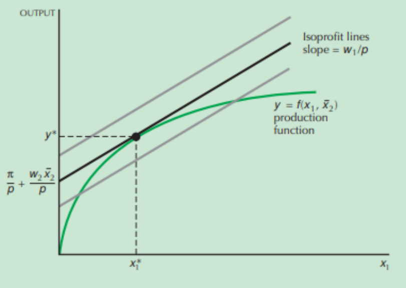
Supongamos que x_2 es fijo y sólo elegimos x_1.

$$\max_{x_1} \ \pi(x_1) = pf(x_1, x_2) - w_1 x_1 - w_2 x_2.$$

- FOC:

$$p\, MP_1(x_1^*, x_2) = w_1.$$

- Regla: **valor del producto marginal** $=$ **costo marginal del factor**.



Varian (2016), Figura 20.1. Maximización del beneficio de corto plazo.

Isobeneficios y condición de tangencia

- Escribimos el beneficio como:

$$\pi = py - w_1 x_1 - w_2 x_2.$$

- Fijando π, despejamos y:

$$y = \frac{\pi}{p} + \frac{w_2}{p} x_2 + \frac{w_1}{p} x_1.$$

- Son **isobeneficios**: rectas con pendiente w_1/p.
- Beneficio máximo: isobeneficio **más alto** que toca la función de producción (tangencia).
- Condición:

$$MP_1 = \frac{w_1}{p}.$$

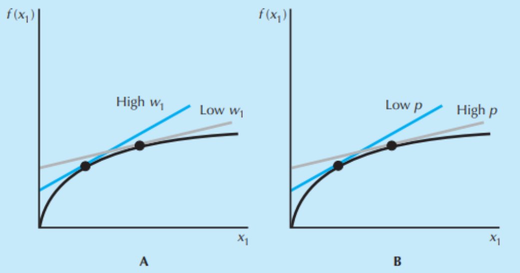
Estática comparativa: demanda de factores y oferta

- Si w_1 sube $\Rightarrow$ isobeneficios más empinados.
- La tangencia se mueve hacia valores más bajos de x_1:

$$x_1^* \downarrow \quad \Rightarrow \quad \text{demanda del factor 1 decreciente en } w_1.$$

- Si p sube $\Rightarrow$ isobeneficios "giran" y la firma elige más x_1 y **más** y:

$$p \uparrow \Rightarrow x_1^* \uparrow, y^* \uparrow .$$



Varian (2016), Figura 20.2. Demanda del factor y oferta de output.

Maximización de beneficio en el largo plazo

- Todos los factores son variables.
- Problema:

$$\max_{x_1, x_2} \; \pi = pf(x_1, x_2) - w_1 x_1 - w_2 x_2.$$

- FOC (si interior):

$$pMP_1(x^*) = w_1, \qquad pMP_2(x^*) = w_2.$$

- Geométricamente: isocuantas de producción y plano de costos; no necesitamos detalle gráfico ahora (lo retomamos con costos).

Beneficio y rendimientos a escala

- Si la tecnología tiene **RCE** y la firma es competitiva:
  - El beneficio máximo es **cero** (beneficio económico).
  - Pero todos los factores reciben su retribución: no es "malo".
- Si hay **rendimientos crecientes a escala**:
  - La función de beneficio puede crecer sin límite $\Rightarrow$ el modelo competitivo "explota".
  - Esto sugiere problemas para la competencia perfecta (natural monopolies, etc.).
- **RDE**: normalmente beneficio positivo para tamaños "intermedios".

Rentabilidad revelada (WAPM)

- Observamos dos situaciones de mercado: t y s.

$$(p^t, w^t, y^t, x^t), \quad (p^s, w^s, y^s, x^s).$$

- Si la firma maximiza beneficio, entonces:

$$p^t y^t - w^t x^t \geq p^t y^s - w^t x^s,$$

$$p^s y^s - w^s x^s \geq p^s y^t - w^s x^t.$$

- Sumando y reordenando se obtiene:

$$\Delta p \, \Delta y - \Delta w \, \Delta x \geq 0.$$

- Esto impone restricciones sobre cómo pueden reaccionar x y y a cambios de precios si la firma se comporta "bien" (WAPM).

Problema de minimización de costos

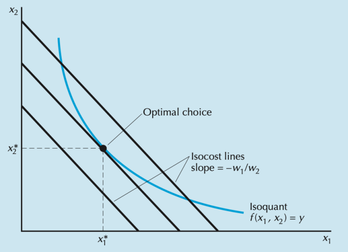
- Ahora fijamos el nivel de output y y queremos encontrar la combinación de insumos **más barata**:

$$\min_{x_1, x_2} \; w_1 x_1 + w_2 x_2 \quad \text{s.a.} \quad f(x_1, x_2) \geq y.$$

- Solución: $(x_1^*(w_1, w_2, y), x_2^*(w_1, w_2, y))$.
- Funciones:
  - **Demanda condicionada de factores**: $x_i(w_1, w_2, y)$.
  - **Función de costo**: $c(w_1, w_2, y) = w_1 x_1^* + w_2 x_2^*$.

Isoquanta e isocostos

- **Isoquanta** de output y: combinaciones de (x_1, x_2) que producen y.
- **Línea de isocosto**:
$$C = w_1 x_1 + w_2 x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{C}{w_2} - \frac{w_1}{w_2} x_1.$$
- Pendiente:
$$\text{slope isocosto} = -\frac{w_1}{w_2}.$$
- Óptimo: isoquanta de y tangente a la isocosto más baja.



Varian (2016), Figura 21.1. Minimización de costos.

Condición de tangencia y demanda condicionada

En el óptimo interior:

$$\text{pendiente isoquanta} = \text{pendiente isocosto}.$$

- Es decir:

$$-\frac{MP_1}{MP_2} = -\frac{w_1}{w_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{MP_1}{w_1} = \frac{MP_2}{w_2}.$$

- Interpretación: el último dólar gastado en cada insumo produce la misma contribución marginal al output.
- A partir de esta condición y la restricción $f(x_1, x_2) = y$ se obtienen las **demandas condicionadas** de factores.

Ejemplos de función de costo

- **Sustitutos perfectos**: $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

$$c(w_1, w_2, y) = \text{mín}\{w_1, w_2\}\, y.$$

- **Proporciones fijas**: $f(x_1, x_2) = \text{mín}\{x_1, x_2\}$.

$$c(w_1, w_2, y) = (w_1 + w_2)\, y.$$

- **Cobb-Douglas** (caso genérico):

$$f(x_1, x_2) = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \quad \Rightarrow \quad c(w_1, w_2, y) = K \cdot w_1^{\alpha/(\alpha+\beta)} w_2^{\beta/(\alpha+\beta)}\, y^{1/(\alpha+\beta)},$$

donde K es una constante que no necesitamos detallar en clase.

Costos revelados y WACM

- Observamos dos situaciones de precios de factores, manteniendo y fijo:

$$(w_1^s, w_2^s) \to x^s, \qquad (w_1^t, w_2^t) \to x^t.$$

- Si la firma minimiza costos, entonces:

$$w_1^t x_1^t + w_2^t x_2^t \leq w_1^t x_1^s + w_2^t x_2^s,$$

$$w_1^s x_1^s + w_2^s x_2^s \leq w_1^s x_1^t + w_2^s x_2^t.$$

- Sumando y reordenando:

$$\Delta w_1 \Delta x_1 + \Delta w_2 \Delta x_2 \leq 0.$$

- Interpretación: en promedio, las demandas de factores se mueven en **sentido opuesto** a sus precios (WACM).

Rendimientos a escala y costos medios

- Sea $C(y)$ el costo total mínimo para producir y (a precios fijos).
- **Rendimientos crecientes a escala** $\Rightarrow$ costos medios decrecientes:

$$\text{IRS} \Rightarrow AC(y) = \frac{C(y)}{y} \downarrow .$$

- **RCE** $\Rightarrow$ costos medios constantes.
- **RDE** $\Rightarrow$ costos medios crecientes.
- Conectan con la forma de la curva de oferta y con problemas de competencia perfecta.

Costos de corto plazo y de largo plazo

- **Largo plazo**: todos los insumos son variables $\Rightarrow$ costo mínimo "pleno".
- **Corto plazo**: al menos un insumo fijo $\Rightarrow$ costos fijos que no dependen de y.
- Propiedad:

$$C_{LP}(y) \leq C_{CP}(y) \quad \forall y.$$

Costos fijos y cuasi-fijos

- **Costo fijo**: se paga incluso si $y = 0$ (ej.: alquiler del local).
- **Costo cuasi-fijo**: sólo se paga si $y > 0$, pero es independiente del nivel de y (ej.: encender la planta, publicidad mínima).
- Tienen implicaciones para:
  - Decisión de **cerrar o producir** en el corto plazo.
  - Forma de la curva de costo medio (AC).

Ejemplo 1: tecnología Cobb-Douglas y rendimientos a escala

Datos:

$$f(x_1, x_2) = Ax_1^{0,3}x_2^{0,7}.$$

- (a) ¿Qué tipo de rendimientos a escala tiene esta tecnología?
- (b) Calcule MP_1 y MP_2.
- (c) Calcule la TRS.

Ejemplo 2: beneficio de corto plazo con producto marginal decreciente

Suponga:

$$y = f(x_1, x_2) = 10\sqrt{x_1}, \quad x_2 \text{ fijo.}$$
$$p = 5, \quad w_1 = 2.$$

- (a) Escriba el beneficio como función de x_1.
- (b) Encuentre el x_1^* que maximiza el beneficio.
- (c) Verifique que se cumple $pMP_1 = w_1$ en el óptimo.

Ejemplo 3: minimización de costos con sustitutos perfectos

Datos:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad y = 100, \quad w_1 = 3, \; w_2 = 5.$$

- (a) Resuelva el problema de minimización de costos.
- (b) Calcule la función de costo $c(w_1, w_2, y)$.
- (c) ¿Qué ocurre si w_1 y w_2 se intercambian?

Ejercicios de práctica (para casa / en pizarra)

Ej. 1 (tecnología):

- (a) Para $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$, determine el tipo de rendimientos a escala.
- (b) ¿Existe producto marginal decreciente en x_1?

Ej. 2 (beneficio):

- Una firma con $y = \sqrt{x_1}$, $p = 4$, $w_1 = 1$.
- (a) Encuentre x_1^* que maximiza beneficio.
- (b) ¿Qué pasa si p cae a 3? (discuta con isobeneficios).

Ej. 3 (costo):

- Para $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$, derive $c(w_1, w_2, y)$.

Resumen de la unidad

- **Tecnología** (Cap. 19):
  - Conjunto de producción, función de producción, isoquantas.
  - MP, TRS, producto marginal decreciente, rendimientos a escala.
- **Beneficio** (Cap. 20):
  - Beneficio = ingreso – costo; competitividad $\Rightarrow$ toma precios como dados.
  - Regla de oro: $pMP_i = w_i$.
  - RCE $\Rightarrow$ beneficio económico cero; WAPM/revelado.
- **Costos** (Cap. 21):
  - Problema de minimización de costos; isocostos + isoquantas.
  - Función de costo y demandas condicionadas.
  - WACM, relación entre rendimientos a escala y costos medios, corto vs largo plazo.

¿Qué sigue?

- Con estos bloques, ya podemos:
  - Derivar **curvas de oferta** de la firma.
  - Enlazar con **equilibrio competitivo**.
  - Volver a conectar con **elección intertemporal** y **oferta de trabajo**.