

Unidad 4: Teoría de la firma – Tecnología, beneficio y costos

Apuntes del profesor (material complementario)

Instituto Tecnológico de Santo Domingo (INTEC)

Microeconomía II (ECO304)

Prof. Briam Guerrero

Basado en: Varian (2016). *Intermediate Microeconomics*, Caps. 19-21

Objetivos de aprendizaje

Al final de las dos sesiones usted debe ser capaz de:

1. Entender el **conjunto de producción** y la **función de producción** como descripción de la tecnología de la firma.
2. Interpretar isoquantes, producto marginal, tasa técnica de sustitución (TRS), rendimientos a escala y producto marginal decreciente.
3. Formular y resolver el problema de **maximización de beneficios** de corto y largo plazo para una firma competitiva.
4. Derivar condiciones de primer orden del tipo $pMP_i = w_i$ y usarlas para interpretar demanda de factores y oferta de output.
5. Plantear y resolver el problema de **minimización de costos**, usando isoquantes e isocostos, y derivar demandas condicionadas de factores.
6. Construir e interpretar la **función de costo** $c(w, y)$ en ejemplos clave (sustitutos perfectos, proporciones fijas, Cobb-Douglas).
7. Relacionar rendimientos a escala con el comportamiento de los **costos medios** y la diferencia entre corto y largo plazo.
8. Aplicar conceptos a ejemplos numéricos (Ejemplos 1–3 de las diapositivas) y resolver los ejercicios de práctica (Ej. 1–3) con interpretación económica.

Nota

Transiciones:

- Consumidor → firma: sustituir “utilidad” por “beneficio” y “restricción presupuestaria” por “tecnología”.
- Tecnología → beneficio: primero mostrar isoquantes y luego superponer isobeneficios (igual que curvas de indiferencia + recta presupuestaria).
- Beneficio → costos: mostrar que maximizar beneficio es dual a minimizar costos para un nivel de producción dado.

1. Tecnología de producción (Cap. 19)

Conjunto de producción y función de producción

La **tecnología** de una firma describe qué combinaciones de insumos permiten producir qué cantidades de output.

- Insumos: $x = (x_1, \dots, x_n)$ (trabajo, capital, materias primas, etc.).
- Output: $y \in \mathbb{R}_+$.

Conjunto de producción:

$$Y = \{(x, y) : \text{es tecnológicamente posible producir } y \text{ usando } x\}.$$

Función de producción: si para cada vector de insumos consideramos el *máximo* output posible, definimos:

$$y = f(x_1, \dots, x_n).$$

Es la “frontera eficiente” del conjunto de producción (análoga a la frontera de posibilidades de producción, pero para una sola firma).

Nota

Al revisar la **Figura 19.1** (conjunto de producción en 2D), importante recordar:

- La región “bajo” la función de producción son combinaciones factibles pero *ineficientes*.
- La curva es el “frente” tecnológico: cualquier punto por encima es inalcanzable dado el estado de la tecnología.

Isoquantes

Para una tecnología con dos insumos x_1, x_2 , fijamos un nivel de output y y miramos el conjunto:

$$\{(x_1, x_2) : f(x_1, x_2) = y\},$$

que es la **isoquanta** asociada a y .

- Cada isoquanta muestra combinaciones de insumos que producen el mismo nivel de output.
- Isoquantes “más alejadas del origen” representan niveles más altos de producción.

Ejemplos útiles:

- **Proporciones fijas** (Leontief): $f(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$. Isoquantes en forma de “L” (Fig. 19.2).
- **Sustitutos perfectos**: $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$. Isoquantes lineales (Fig. 19.3).
- **Cobb–Douglas**: $f(x_1, x_2) = Ax_1^\alpha x_2^\beta$. Isoquantes convexas (Fig. 19.4).

Nota

Conectar explícitamente con el capítulo de preferencias:

- Isoquantes \leftrightarrow curvas de indiferencia.
- Output $y \leftrightarrow$ utilidad u .

La diferencia es que ahora las curvas representan niveles de producción, no bienestar.

Tecnologías bien comportadas

Hipótesis estándar (no siempre se cumplen, pero son buena aproximación):

- 1. **Monotonía:** si aumentamos algún insumo sin reducir los demás, el output no disminuye.

$$x' \geq x \Rightarrow f(x') \geq f(x).$$

- 2. **Convexidad:** promedios de combinaciones de insumos producen \geq el promedio de outputs.

$$f(\theta x + (1 - \theta)x') \geq \theta f(x) + (1 - \theta)f(x'), \quad 0 < \theta < 1.$$

Consecuencias gráficas:

- Isoquantes “bien comportadas”: no se cruzan, son monótonas (hacia el origen = menos y), y convexas.

Producto marginal y TRS

Para una función $y = f(x_1, x_2)$:

- **Producto marginal** del factor 1:

$$MP_1(x_1, x_2) = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}.$$

Mide el incremento en output ante un incremento pequeño en x_1 , manteniendo x_2 fijo.

- **Tasa técnica de sustitución** (TRS) entre 1 y 2:

$$TRS_{12} = \left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{y \text{ fijo}} = -\frac{MP_1}{MP_2}.$$

Nota

Esta TRS es el análogo de la TMS del consumidor. Resaltar en la pizarra:

$$TMS_{1,2}^{\text{cons}} = -\frac{MU_1}{MU_2}, \quad TRS_{12} = -\frac{MP_1}{MP_2}.$$

Producto marginal decreciente y corto plazo

Producto marginal decreciente: para un input x_1 , manteniendo x_2 fijo, el MP_1 cae a medida que aumentamos x_1 .

- Económicamente: añadir más del mismo factor, sin aumentar los demás, genera cada vez menos output adicional.
- Gráficamente: la curva $y = f(x_1, \bar{x}_2)$ se aplana (Fig. 19.5).

Corto plazo: uno o más insumos fijos.

Largo plazo: todos los insumos son variables.

Rendimientos a escala

Para una función $f(x_1, x_2)$ y un escalar $t > 0$:

- **Rendimientos constantes a escala** (RCE): $f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2)$.
- **Rendimientos crecientes a escala** (RCE+): $f(tx_1, tx_2) > tf(x_1, x_2)$.
- **Rendimientos decrecientes a escala** (RDE): $f(tx_1, tx_2) < tf(x_1, x_2)$.

Nota

Insistir en la diferencia:

- Producto marginal decreciente: sólo un insumo aumenta, demás fijos.
- Rendimientos a escala: todos los insumos se multiplican por el mismo t .

2. Maximización de beneficio (Cap. 20)

Definición de beneficio y costos de oportunidad

Para una firma que produce y unidades del bien a precio p usando insumos $x = (x_1, \dots, x_n)$ a precios $w = (w_1, \dots, w_n)$:

$$\pi = py - \sum_{i=1}^n w_i x_i.$$

- El **beneficio económico** resta *todos* los costos de oportunidad de los factores, incluso si son propiedad del empresario.
- Una firma competitiva toma como dados p y w_i .

Corto plazo vs largo plazo

- **Corto plazo:** algunos factores fijos (x_2, x_3, \dots), la firma decide sólo un subset (por ejemplo, x_1).
- **Largo plazo:** todos los factores variables, la firma elige la combinación óptima (x_1, \dots, x_n).

Maximización de beneficio de corto plazo

Ejemplo tipo (como en las diapositivas):

$$\max_{x_1} \pi(x_1) = pf(x_1, \bar{x}_2) - w_1 x_1 - w_2 \bar{x}_2,$$

donde \bar{x}_2 es fijo.

FOC (si solución interior):

$$\frac{d\pi}{dx_1} = p \frac{\partial f(x_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} - w_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad pMP_1(x_1^*, \bar{x}_2) = w_1.$$

Regla: **valor del producto marginal (VPM) = costo del factor**. Si VPM > w_1 , subir x_1 aumenta beneficio; si VPM < w_1 , conviene reducir x_1 .

Isobeneficios y condición de tangencia

El beneficio puede escribirse como:

$$\pi = py - w_1 x_1 - w_2 x_2.$$

Fijando un nivel de beneficio π y despejando y :

$$y = \frac{\pi}{p} + \frac{w_1}{p} x_1 + \frac{w_2}{p} x_2.$$

- Son **rectas isobeneficio** en el plano x_1-y o en el plano $x-y$.
- Slope (respecto a x_1 y y) = w_1/p .

Gráficamente:

- Dibuje la función de producción en el plano x_1-y .
- Dibuje rectas isobeneficio con distintas π .
- La recta de isobeneficio *más alta* que toca la curva de producción determina el máximo beneficio (Fig. 20.1).

En el punto de tangencia:

pendiente de la función de producción = pendiente de la isobeneficio.

$$MP_1 = \frac{w_1}{p} \quad \Rightarrow \quad pMP_1 = w_1.$$

Comparativa estática: demanda del factor y oferta de output

Si el precio del factor w_1 sube:

- Las isobeneficio se hacen más empinadas.
- En el nuevo óptimo, la firma elige un x_1^* menor.
- \Rightarrow la **demanda de factor** es decreciente en su precio (Fig. 20.2).

Si el precio del output p sube:

- Las isobeneficio giran de modo que un mismo aumento en y incrementa más el beneficio.
- La firma elige mayor uso de insumos y mayor y^* .
- \Rightarrow podemos interpretar la reacción de $y^*(p)$ como una **curva de oferta** de la firma.

Maximización de beneficio de largo plazo

Caso general:

$$\max_{x_1, x_2} \pi = pf(x_1, x_2) - w_1x_1 - w_2x_2.$$

FOC (si interior):

$$pMP_1(x^*) = w_1, \quad pMP_2(x^*) = w_2.$$

Interpretación:

- El último dólar gastado en cada factor debe generar el mismo incremento en beneficio.
- Esto se puede ver como una combinación de:
 - Minimización de costos para un dado y .
 - Selección del nivel y donde $p \geq C'(y)$.

Beneficio y rendimientos a escala

- Si la tecnología tiene **RCE** y mercados competitivos:
 - El beneficio máximo (económico) suele ser $\pi = 0$.
 - Todos los factores reciben su remuneración de mercado. No hay “renta pura” de la tecnología.
- Si hay **rendimientos crecientes a escala**:
 - Teóricamente, la firma podría aumentar su escala y su beneficio sin límite.
 - Esto suele ser incompatible con competencia perfecta (apunta hacia monopolio natural).

Rentabilidad revelada (WAPM)

Si observamos que la firma elige (y^t, x^t) frente a (y^s, x^s) con precios (p^t, w^t) y (p^s, w^s) , las condiciones de maximización implican restricciones del tipo:

$$p^t y^t - w^t x^t \geq p^s y^s - w^s x^s, \quad p^s y^s - w^s x^s \geq p^t y^t - w^t x^t.$$

Sumando y reordenando se llega a una desigualdad del tipo:

$$\Delta p \Delta y - \Delta w \Delta x \geq 0,$$

que es una versión de **WAPM** (Weak Axiom of Profit Maximization). En clase basta un comentario conceptual; los detalles algebraicos se pueden dejar para un curso más avanzado.

3. Minimización de costos (Cap. 21)

Problema de minimización

Dado un nivel de output objetivo y , precios de factores w_1, w_2 y tecnología $f(x_1, x_2)$:

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2 \quad \text{s.a.} \quad f(x_1, x_2) \geq y.$$

- **Demanda condicionada de factores:** $x_i^c(w_1, w_2, y)$.
- **Función de costo:**

$$c(w_1, w_2, y) = w_1 x_1^c(w_1, w_2, y) + w_2 x_2^c(w_1, w_2, y).$$

Isoquatas e isocostos

- **Isoquanta** de nivel y : combinaciones de x_1, x_2 que producen exactamente y .
- **Isocosto**:

$$C = w_1 x_1 + w_2 x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{C}{w_2} - \frac{w_1}{w_2} x_1.$$

- Pendiente del isocosto: $-\frac{w_1}{w_2}$.

Óptimo: isoquanta de y tangente al isocosto más bajo. (Fig. 21.1).

Condición de tangencia:

$$-\frac{MP_1}{MP_2} = -\frac{w_1}{w_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{MP_1}{w_1} = \frac{MP_2}{w_2}.$$

Nota

Interpretación intuitiva: el último dólar gastado en cada factor debe aportar el mismo producto marginal. Si un dólar en trabajo produce más que un dólar en capital, conviene sustituir capital por trabajo (hasta igualar).

Ejemplos de función de costo

Sustitutos perfectos. $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, nivel objetivo y .

Cualquier combinación con $x_1 + x_2 = y$ es factible. El costo es:

$$C = w_1 x_1 + w_2 x_2.$$

Si $w_1 < w_2$, el factor 1 es más barato por unidad de output (porque 1 unidad de input produce 1 unidad de output).

$$\Rightarrow x_1^* = y, \quad x_2^* = 0, \quad C = w_1 y.$$

Si $w_2 < w_1$, análogo:

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = y, \quad C = w_2 y.$$

En general:

$$c(w_1, w_2, y) = \min\{w_1, w_2\} y.$$

Proporciones fijas. $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$, nivel objetivo y .

Para producir y , necesitamos:

$$x_1 \geq y, \quad x_2 \geq y.$$

En el óptimo, no habrá insumo “sobrante”:

$$x_1^* = x_2^* = y.$$

Costo mínimo:

$$c(w_1, w_2, y) = w_1 y + w_2 y = (w_1 + w_2) y.$$

Cobb–Douglas. Caso general:

$$f(x_1, x_2) = Ax_1^\alpha x_2^\beta.$$

Del problema de costo mínimo se obtiene (sin detallar todas las cuentas en clase de Micro 2):

$$c(w_1, w_2, y) = K \cdot w_1^{\alpha/(\alpha+\beta)} w_2^{\beta/(\alpha+\beta)} y^{1/(\alpha+\beta)},$$

donde K es una constante que depende de A, α, β . El mensaje clave:

- El costo mínimo es **homogéneo de grado 1** en w_1, w_2 (si duplicas todos los precios de insumos, se duplican los costos).
- La elasticidad del costo respecto a cada precio refleja el peso del input en la tecnología.

WACM y pendiente de las demandas de factores

Si comparamos las elecciones de factores con dos vectores de precios (w_1^s, w_2^s) y (w_1^t, w_2^t) para un mismo nivel y , la minimización de costos implica restricciones del tipo:

$$\Delta w_1 \Delta x_1 + \Delta w_2 \Delta x_2 \leq 0,$$

lo que sugiere que, en promedio, la demanda de cada factor se mueve en dirección opuesta a cambios en su precio. Ésta es la versión de **WACM** (Weak Axiom of Cost Minimization).

Rendimientos a escala y costos medios

Sea $C(y)$ la función de costo total (a precios de insumos fijos):

- Si hay **RCE**:

$$C(y) \propto y \quad \Rightarrow \quad AC(y) = \frac{C(y)}{y} = \text{constante}.$$

- Si hay **rendimientos crecientes a escala**:

$$C(y) \text{ crece más lento que } y \quad \Rightarrow \quad AC(y) \text{ decrece.}$$

- Si hay **rendimientos decrecientes a escala**:

$$C(y) \text{ crece más rápido que } y \quad \Rightarrow \quad AC(y) \text{ crece.}$$

Costo de corto plazo y de largo plazo

- **Largo plazo:** todos los insumos variables $\Rightarrow C_{LP}(y)$ es el *mínimo posible* para cada y .
- **Corto plazo:** uno o más insumos fijos $\Rightarrow C_{CP}(y) \geq C_{LP}(y)$.

Gráficamente, $C_{LP}(y)$ “envuelve” por debajo a las curvas de costo de corto plazo (C_{CP}) asociadas a distintas capacidades de planta.

Costos fijos y cuasi-fijos

- **Costo fijo:** se paga incluso si $y = 0$ (ej.: arriendo del local).
- **Costo cuasi-fijo:** sólo se paga si $y > 0$, pero no depende de y (ej.: encender la planta, costos administrativos mínimos).

Tienen implicaciones para:

- Decisión de *cerrar temporalmente* en el corto plazo.
- Forma de la curva de costo medio (AC) y de la curva de oferta en el corto plazo.

4. Ejemplos numéricos de las diapositivas

Ejercicio 1 – Ejemplo 1: Cobb–Douglas y rendimientos a escala

Considere la tecnología:

$$f(x_1, x_2) = Ax_1^{0.3}x_2^{0.7},$$

donde $A > 0$ es una constante.

- Determine el tipo de **rendimientos a escala**.
- Calcule los productos marginales MP_1 y MP_2 .
- Calcule la TRS TRS_{12} y comente su forma.

Respuesta

(a) Rendimientos a escala.

Evaluamos $f(tx_1, tx_2)$ para $t > 0$:

$$f(tx_1, tx_2) = A(tx_1)^{0.3}(tx_2)^{0.7} = At^{0.3}x_1^{0.3}t^{0.7}x_2^{0.7} = At^{0.3+0.7}x_1^{0.3}x_2^{0.7} = t^1 f(x_1, x_2).$$

Luego:

$$f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2),$$

lo cual corresponde a **rendimientos constantes a escala**.

(b) Productos marginales.

Derivamos con respecto a cada insumo:

$$MP_1(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1} = A \cdot 0.3x_1^{0.3-1}x_2^{0.7} = 0.3Ax_1^{-0.7}x_2^{0.7}.$$

$$MP_2(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2} = Ax_1^{0.3} \cdot 0.7x_2^{0.7-1} = 0.7Ax_1^{0.3}x_2^{-0.3}.$$

Ambos productos marginales *depende* de los niveles de insumo y caen cuando aumenta su propio input (si el otro se mantiene fijo) por los exponentes negativos.

(c) TRS.

$$TRS_{12} = -\frac{MP_1}{MP_2} = -\frac{0.3Ax_1^{-0.7}x_2^{0.7}}{0.7Ax_1^{0.3}x_2^{-0.3}} = -\frac{0.3}{0.7} \cdot x_1^{-0.7-0.3}x_2^{0.7+0.3} = -\frac{3}{7} \cdot x_1^{-1}x_2^1.$$

Simplificando:

$$TRS_{12} = -\frac{3}{7} \cdot \frac{x_2}{x_1}.$$

Interpretación:

- Su valor absoluto es $\frac{3}{7} \cdot \frac{x_2}{x_1}$. A medida que aumenta x_1 (manteniendo x_2 fijo), $|TRS_{12}|$ se reduce: es más difícil sustituir capital por trabajo sin perder output.
- La TRS *depende* de la relación x_2/x_1 , lo cual genera isoquantes convexas (no lineales).

Ejercicio 2 – Ejemplo 2: beneficio de corto plazo con producto marginal decreciente

Suponga que la tecnología en el corto plazo viene dada por:

$$y = f(x_1, x_2) = 10\sqrt{x_1},$$

donde x_2 está fijo e incorporado en la constante 10. El precio del output es $p = 5$ y el salario del factor 1 es $w_1 = 2$.

- Escriba el beneficio de corto plazo como función de x_1 , ignorando el costo de x_2 (término constante).
- Encuentre el nivel x_1^* que maximiza el beneficio.
- Verifique que en el óptimo se cumple $pMP_1 = w_1$.

Respuesta

(a) Beneficio como función de x_1 .

Beneficio:

$$\pi(x_1) = py - w_1x_1 - (\text{costo fijo de } x_2).$$

Si ignoramos el costo fijo de x_2 (es constante respecto a x_1), podemos escribir:

$$\pi(x_1) = pf(x_1) - w_1x_1 = 5 \cdot 10\sqrt{x_1} - 2x_1 = 50\sqrt{x_1} - 2x_1.$$

(b) Maximizar la función de beneficio.

Tomamos la derivada:

$$\frac{d\pi}{dx_1} = 50 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_1}} - 2 = \frac{25}{\sqrt{x_1}} - 2.$$

FOC:

$$\frac{25}{\sqrt{x_1}} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{\sqrt{x_1}} = 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x_1} = \frac{25}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1^* = \left(\frac{25}{2}\right)^2 = \frac{625}{4} = 156.25.$$

Comprobamos que es un máximo: la segunda derivada

$$\frac{d^2\pi}{dx_1^2} = -\frac{25}{2}x_1^{-3/2} < 0$$

para $x_1 > 0$, por lo que se trata de un máximo.

(c) Verificación de la condición $pMP_1 = w_1$.

Producto marginal:

$$MP_1(x_1) = \frac{df(x_1)}{dx_1} = 10 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_1}} = \frac{5}{\sqrt{x_1}}.$$

Valor del producto marginal:

$$pMP_1(x_1) = 5 \cdot \frac{5}{\sqrt{x_1}} = \frac{25}{\sqrt{x_1}}.$$

En el óptimo, teníamos:

$$\frac{25}{\sqrt{x_1^*}} = 2 \Rightarrow pMP_1(x_1^*) = 2 = w_1.$$

Por tanto, se verifica la condición de primer orden

$$pMP_1 = w_1$$

en el punto que maximiza el beneficio, como predice la teoría.

Interpretación económica: la firma elige el nivel de x_1 donde el valor del producto marginal de una unidad adicional de trabajo es exactamente igual al salario. Más trabajo sería “más caro de lo que rinde”; menos trabajo dejaría dinero sobre la mesa.

Ejercicio 3 – Ejemplo 3: minimización de costos con sustitutos perfectos

Considere la tecnología:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

que produce unidades de output a partir de dos insumos perfectamente sustituibles. Para producir $y = 100$ unidades, los precios de los insumos son $w_1 = 3$ y $w_2 = 5$.

- Plantee el problema de minimización de costos.
- Encuentre la combinación de insumos que minimiza el costo y el costo mínimo.
- ¿Qué ocurriría si se intercambiaron los precios, es decir, $w_1 = 5$ y $w_2 = 3$?

Respuesta

(a) Problema de minimización.

Queremos producir $y = 100$ minimizando el costo:

$$\min_{x_1, x_2} 3x_1 + 5x_2 \quad \text{s.a.} \quad x_1 + x_2 \geq 100, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

En el óptimo no habrá exceso de insumos (no tendría sentido usar más de lo necesario si los insumos son costosos), así que podemos imponer la restricción como igualdad:

$$x_1 + x_2 = 100.$$

(b) Solución óptima y costo mínimo.

La tecnología dice que 1 unidad de cada insumo produce 1 unidad de output. Dado que los insumos son perfectos sustitutos, la firma usará **sólo el factor más barato por unidad**.

- Como $w_1 = 3 < w_2 = 5$, el insumo 1 es más barato.

- Por tanto, en el óptimo:

$$x_1^* = 100, \quad x_2^* = 0.$$

Costo mínimo:

$$C^* = 3 \cdot 100 + 5 \cdot 0 = 300.$$

Función de costo para esta tecnología:

$$c(w_1, w_2, y) = y \cdot \min\{w_1, w_2\} \Rightarrow c(3, 5, 100) = 100 \cdot 3 = 300.$$

(c) Intercambio de precios.

Si $w_1 = 5$ y $w_2 = 3$, ahora el factor 2 es más barato. La firma usará sólo el factor 2:

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 100, \quad C^* = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 100 = 300.$$

Conclusión: la elección del insumo cambia completamente (de usar sólo 1 a usar sólo 2), pero el costo mínimo $c(w_1, w_2, y)$ es el mismo si simplemente intercambiamos w_1, w_2 . Esto refleja que lo relevante para el costo es el *mínimo* de los precios de insumos en una tecnología de sustitutos perfectos.

5. Ejercicios de práctica de las diapositivas (con solución)

Ejercicio 4 – Ejercicio 1: tecnología y rendimientos a escala

Considere la tecnología:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2.$$

- Determine el tipo de **rendimientos a escala**.
- Analice si el producto marginal del factor 1 es decreciente cuando aumentamos x_1 manteniendo x_2 fijo.

Respuesta

(a) Rendimientos a escala.

Evaluamos:

$$f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^2(tx_2) = t^2x_1^2 \cdot tx_2 = t^3x_1^2x_2 = t^3f(x_1, x_2).$$

Entonces:

$$f(tx_1, tx_2) = t^3f(x_1, x_2).$$

Si multiplicamos todos los insumos por t , el output se multiplica por t^3 . Comparando con t :

- Si $t > 1$, $t^3 > t$, de modo que la producción aumenta más que proporcionalmente.

Por tanto, la tecnología presenta **rendimientos crecientes a escala**.

(b) Producto marginal de x_1 .

El producto marginal del factor 1 es:

$$MP_1(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1x_2.$$

Fijando x_2 y aumentando x_1 , tenemos:

$$MP_1(x_1, x_2) = 2x_1x_2$$

que *aumenta* linealmente con x_1 . No es decreciente; al contrario, es crecientemente grande a medida que crece x_1 .

- Esto es consistente con los **rendimientos crecientes a escala**: más insumo hace que cada unidad adicional sea más productiva.
- En este ejemplo, la ley de producto marginal decreciente no se cumple.

Ejercicio 5 – Ejercicio 2: beneficio con tecnología $y = \sqrt{x_1}$

Suponga una firma con tecnología:

$$y = f(x_1) = \sqrt{x_1},$$

precio del output $p = 4$ y salario del insumo 1 $w_1 = 1$.

- a) Escriba la función de beneficio $\pi(x_1)$.
- b) Encuentre el x_1^* que maximiza el beneficio.
- c) ¿Qué ocurre con x_1^* si el precio p cae a 3? Interprete.

Respuesta

(a) Beneficio como función de x_1 .

$$\pi(x_1) = py - w_1x_1 = 4\sqrt{x_1} - 1 \cdot x_1 = 4\sqrt{x_1} - x_1.$$

(b) Maximizar $\pi(x_1)$.

Derivamos:

$$\frac{d\pi}{dx_1} = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_1}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{x_1}} - 1.$$

FOC:

$$\frac{2}{\sqrt{x_1}} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{x_1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x_1} = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1^* = 4.$$

Segunda derivada:

$$\frac{d^2\pi}{dx_1^2} = -\frac{1}{\sqrt{x_1^3}} < 0$$

para $x_1 > 0$, luego es un máximo.

(c) Si p cae a 3.

Nueva función de beneficio:

$$\pi(x_1) = 3\sqrt{x_1} - x_1.$$

Derivada:

$$\frac{d\pi}{dx_1} = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_1}} - 1 = \frac{3}{2\sqrt{x_1}} - 1.$$

FOC:

$$\frac{3}{2\sqrt{x_1}} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2\sqrt{x_1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x_1} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1^* = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25.$$

Interpretación: cuando el precio p cae (de 4 a 3), la firma reduce su demanda del insumo x_1 (de 4 a 2.25) y también la cantidad producida. Esto es consistente con la idea de que la demanda de insumos y la oferta de output son crecientes en el precio de output: al caer p , la escala de operación se ajusta hacia abajo.

Ejercicio 6 – Ejercicio 3: función de costo con proporciones fijas

Para la tecnología de proporciones fijas:

$$f(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\},$$

derive la función de costo $c(w_1, w_2, y)$ para producir un nivel de output y .

Respuesta

La tecnología exige que, para producir y , se cumpla:

$$x_1 \geq y, \quad x_2 \geq y.$$

Dado que el costo es:

$$C = w_1x_1 + w_2x_2,$$

no tiene sentido usar más insumo del necesario (haría el costo mayor sin aumentar el output, dado que $y = \min\{x_1, x_2\}$).

Por tanto, en el mínimo de costo se cumplirá:

$$x_1^* = y, \quad x_2^* = y.$$

El costo mínimo es:

$$c(w_1, w_2, y) = w_1x_1^* + w_2x_2^* = w_1y + w_2y = (w_1 + w_2)y.$$

Interpretación: la firma necesita “paquetes” 1 a 1 de los insumos. Cada unidad de output requiere exactamente 1 unidad de x_1 y 1 unidad de x_2 . El costo por unidad de output es $w_1 + w_2$, independiente de la escala y (rendimientos constantes a escala).

Resumen

- La **tecnología de producción** se representa mediante el conjunto de producción y la función $y = f(x)$; las **isoquantes** juegan el mismo papel que las curvas de indiferencia para el consumidor.
- El **producto marginal** y la **TRS** describen cómo responde el output a cambios en los insumos y cómo pueden sustituirse entre sí.
- Los **rendimientos a escala** capturan qué ocurre al multiplicar todos los insumos por el mismo factor; se relacionan con la forma de los costos medios.
- La firma competitiva maximiza **beneficio** sujeta a la tecnología. Las condiciones $pMP_i = w_i$ resumen la regla óptima de uso de factores.
- La **maximización de beneficios** (primal) y la **minimización de costos** (dual) son dos caras de la misma moneda; la segunda da lugar a la **función de costo** $c(w, y)$.

- Para tecnologías estándar, la función de costo es homogénea de grado 1 en precios de insumos; la relación entre rendimientos a escala y $AC(y)$ ayuda a entender el tamaño eficiente de firma.
- La distinción entre **corto** y **largo** plazo (factores fijos vs todos variables) es esencial para interpretar las curvas de costo y la existencia de costos fijos y quasi-fijos.
- Los ejemplos numéricos y ejercicios muestran cómo aplicar la teoría a configuraciones concretas y sirven como base para derivar las **curvas de oferta** y el **equilibrio competitivo** en unidades posteriores.