Macroeconomía II (ECO306)

U.1 Incertidumbre, Expectativas y Metodos de Solución DSGE

Briam E. Guerrero B.

Instituto Tecnológico de Santo Domingo (INTEC)

2026 T1

Contenido de la Unidad

Sección 1

Incertidumbre y Aversion al Riesgo

Motivacion: Decisiones Bajo Incertidumbre

- En macroeconomia moderna, las decisiones de los agentes ocurren en un **entorno incierto**
- El consumidor no conoce con certeza:
  - Su ingreso futuro
  - Los retornos de sus inversiones
  - Los precios futuros
- Las decisiones son **contingentes** en el estado del mundo que se realice

Intuición

Cuando compramos un seguro de auto, estamos eligiendo diferentes niveles de consumo dependiendo de si ocurre un accidente o no.

El Valor Esperado

Definición: Valor Esperado

El resultado promedio que obtendremos si repetimos una apuesta infinitas veces.

Para una variable discreta con n estados posibles:

$$\mathbb{E}[w] = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot w_i$$

donde:

- p_i = probabilidad de que ocurra el estado i
- w_i = resultado (pago) en el estado i
- $\sum_i p_i = 1$

Ejemplo: Apuesta con Cartas

Estructura de la apuesta:

- Apuesta: la proxima carta NO es corazon
- Si ganas: +\$2.50 por cada \$1 apostado
- Si pierdes: −\$0.40
- Dotacion inicial: \$100

Calculo del valor esperado:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{Ganancia}] &= \frac{3}{4}(2.5) - \frac{1}{4}(0.4) \\ &= 1.875 - 0.1 = \$1.775\end{aligned}$$

Atención

Esta apuesta tiene valor esperado positivo. Un agente neutral al riesgo siempre apostaria. Pero un agente averso al riesgo podria no hacerlo.

Comodidades Contingentes

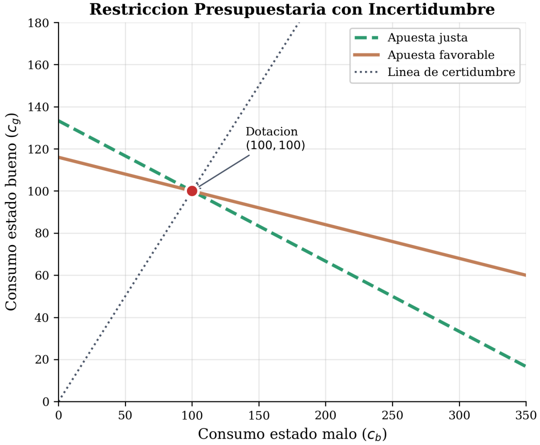
Definimos el consumo en cada estado:

- c_g = consumo si ganas
- c_b = consumo si pierdes

La **restriccion presupuestaria** relaciona el consumo en ambos estados:

$$c_g = \bar{c} - \frac{p_b}{p_g}(c_b - \bar{c})$$

donde p_b/p_g es el *precio relativo* de consumo en el estado malo.



Apuestas Actuarialmente Justas

Definición: Apuesta Actuarialmente Justa

Una apuesta cuya ganancia monetaria esperada es exactamente cero.

Para nuestra apuesta de cartas, seria justa si:

$$\frac{3}{4} \cdot d - \frac{1}{4} \cdot 0.4 = 0$$

Resolviendo: $d = 0.133$

La pendiente de la recta presupuestaria justa es:

$$-\frac{p_b}{p_g} = -\frac{\pi_g}{\pi_b} = -\frac{0.75}{0.25} = -3$$

Recta de Probabilidad Justa

La pendiente de la restriccion presupuestaria para una apuesta justa es igual al negativo del ratio de probabilidades.

Aversion al Riesgo

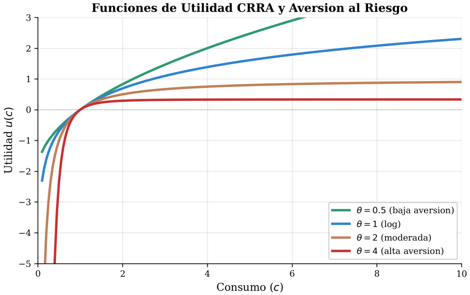
Definición: Actitudes hacia el Riesgo

- **Averso al riesgo:** Prefiere el valor esperado con certeza a la apuesta
- **Neutral al riesgo:** Indiferente
- **Amante del riesgo:** Prefiere la apuesta

Matematicamente, para utilidad CRRA:

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \quad \theta > 0$$

Si $\theta > 0$: averso al riesgo (la mayoria).

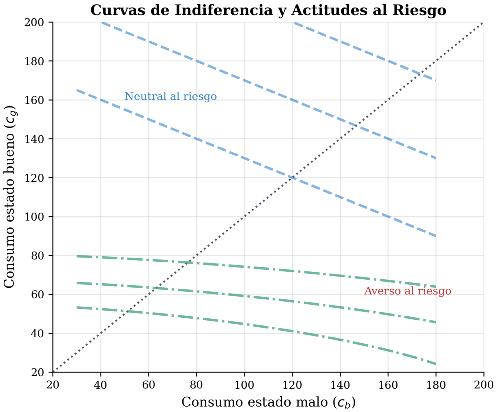


Curvas de Indiferencia con Incertidumbre

La linea de certidumbre es donde $c_g = c_b$.

Para un agente averso al riesgo:

- Curvas de indiferencia convexas
- Tangente a la linea de certidumbre tiene pendiente $-\pi_g/\pi_b$
- Si la apuesta es justa, elige NO apostar



Aplicacion: El Mercado de Seguros

Consideremos un seguro contra incendio:

- Probabilidad de incendio: p
- Prima por \$1 de cobertura: r
- Perdida en caso de incendio: L

Seguro actuarialmente justo:

$$r = p$$

Un agente averso al riesgo **siempre** comprara seguro completo si es actuarialmente justo.

Resultado Clave

Si $r > p$ (seguro no justo), el agente averso al riesgo aun comprara seguro, pero no cobertura completa. La demanda de seguro depende del grado de aversion al riesgo.

Prima de Riesgo y Diversificacion

Definición: Prima de Riesgo

Retorno adicional requerido para compensar por el riesgo:

$$RP = \mathbb{E}[R] - r_f$$

donde r_f es la tasa libre de riesgo.

Definición: Diversificacion

Estrategia de invertir en multiples activos para reducir el riesgo total del portafolio sin sacrificar retorno esperado.

Intuición

La diversificacion funciona porque los retornos de diferentes activos no estan perfectamente correlacionados. Esto es fundamental para entender los mercados financieros y la valoracion de activos en modelos DSGE.

Sección 2

Expectativas Adaptivas y Racionales

El Rol de las Expectativas

Las expectativas son **fundamentales** en macroeconomia:

- Determinan el consumo hoy (ingreso futuro esperado)
- Afectan la inversion (retornos esperados)
- Influyen en precios de activos
- Son clave para la politica monetaria

El gran debate de los 1970s-80s:

- Expectativas Adaptativas (Keynesianos)
- Expectativas Racionales (Lucas, Sargent)

Atención

Una teoria incorrecta de expectativas puede llevar a conclusiones de politica economica erroneas, como el caso de la Curva de Phillips en los 1970s.

Expectativas Adaptivas

Definición: Expectativas Adaptivas

Los agentes forman expectativas basandose unicamente en realizaciones pasadas de la variable.

Formulacion matematica:

$$\mathbb{E}_t[x_{t+1}] = \mathbb{E}_{t-1}[x_t] + \theta(x_t - \mathbb{E}_{t-1}[x_t])$$

donde $0 < \theta < 1$ es la velocidad de ajuste.

Equivalentemente (sustituyendo hacia atras):

$$\mathbb{E}_t[x_{t+1}] = \theta \sum_{i=0}^{\infty} (1-\theta)^i x_{t-i}$$

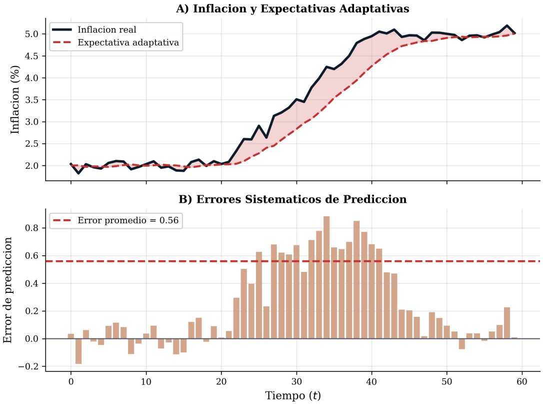
Problemas con Expectativas Adaptivas

Errores sistematicos:

- Los agentes cometen errores persistentes
- No utilizan toda la informacion disponible
- Inconsistente con optimizacion

Ejemplo del trigo:

Si el gobierno anuncia un impuesto futuro, los agentes con expectativas adaptativas ignorarian esta informacion.



La Curva de Phillips y su Fracaso

Con expectativas adaptivas, la **Curva de Phillips** sugeria un trade-off estable:

$$\pi_t = \pi_t^e - \alpha(u_t - u^*)$$

Implicacion de politica:
El gobierno puede reducir desempleo permanentemente a cambio de mayor inflacion.

Milton Friedman (1968):
Predijo que esto fallaria; la estanflacion de los 1970s le dio la razon.

Critica de Lucas

Las relaciones empiricas entre variables macro **no son estables** ante cambios de politica si los agentes forman expectativas racionalmente.

Expectativas Racionales

Definición: Expectativas Racionales (Muth, 1961)

Las expectativas de los agentes coinciden, en promedio, con las predicciones del modelo economico relevante, dado el conjunto de informacion disponible.

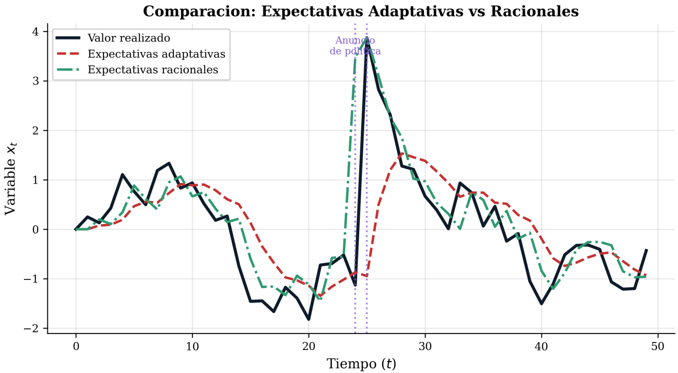
Formulacion matematica:

$$x_t = \mathbb{E}_t[x_t] + \epsilon_t, \quad \mathbb{E}_t[\epsilon_t] = 0$$

Implicaciones clave:

- Los errores de prediccion son **no sistematicos**
- Los agentes usan **toda la informacion** disponible
- Consistente con optimizacion individual

Comparacion: Adaptivas vs Racionales



Los agentes racionales ajustan inmediatamente; los adaptativos reaccionan tras observar cambios.

Expectativas Racionales: Propiedades

Ley de Expectativas Iteradas:

$$\mathbb{E}_t[\mathbb{E}_{t+1}[x_{t+2}]] = \mathbb{E}_t[x_{t+2}]$$

Interpretacion:
No es racional esperar que mis expectativas futuras sean diferentes de mis expectativas actuales.

Martingala

Bajo expectativas racionales, el error de prediccion sigue un proceso martingala:

$$\mathbb{E}_t[\epsilon_{t+1}] = 0$$

Los errores son impredecibles.

Sección 3

Framework DSGE

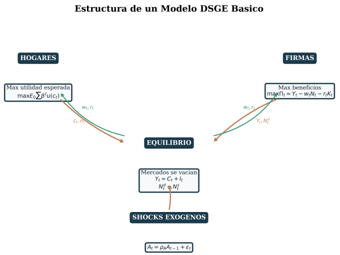
Que es un Modelo DSGE?

Dynamic **S**tochastic **G**eneral **E**quilibrium:

- **Dinamico:** Decisiones intertemporales
- **Estocastico:** Shocks aleatorios
- **General:** Multiples mercados
- **Equilibrio:** Todos los mercados se vacian

Caracteristicas distintivas:

- Microfundamentacion explicita
- Expectativas racionales
- Consistencia interna



Optimizacion del Hogar

El hogar representativo maximiza:

$$\max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}\}} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, n_t)$$

sujeto a la restriccion presupuestaria:

$$c_t + k_{t+1} = w_t n_t + (1 + r_t - \delta) k_t$$

Parametros clave:

- $\beta \in (0, 1)$: Factor de descuento (paciencia)
- $\delta \in (0, 1)$: Tasa de depreciacion del capital
- $u(\cdot)$: Funcion de utilidad instantanea

La Ecuacion de Euler

La condicion de primer orden intertemporal:

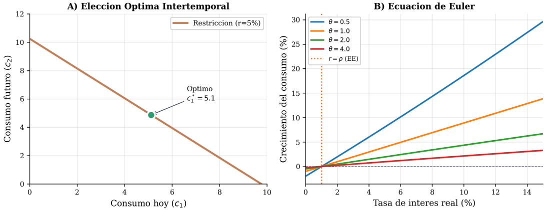
$$u'(c_t) = \beta \mathbb{E}_t[(1 + r_{t+1})u'(c_{t+1})]$$

Para utilidad CRRA:

$$c_t^{-\theta} = \beta \mathbb{E}_t[(1 + r_{t+1})c_{t+1}^{-\theta}]$$

En estado estacionario:

$$1 + r = \frac{1}{\beta}$$



Comportamiento de las Firmas

Firma representativa con tecnologia Cobb-Douglas:

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

Maximizacion de beneficios:

$$\max_{K_t, N_t} \; A_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} - w_t N_t - r_t K_t$$

Condiciones de primer orden:

$$w_t = (1-\alpha) A_t \left(\frac{K_t}{N_t} \right)^{\alpha}$$

$$r_t = \alpha A_t \left(\frac{N_t}{K_t} \right)^{1-\alpha}$$

Equilibrio de Mercado

Market Clearing:

- **Bienes:** $Y_t = C_t + I_t$
- **Trabajo:** $N_t^d = N_t^s$
- **Capital:** $K_t^d = K_t^s$

Acumulacion de capital:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t$$

Sistema de Equilibrio

El modelo se reduce a un sistema de ecuaciones en diferencias estocasticas que describe la evolucion de todas las variables endogenas.

Shocks Exogenos

El motor del ciclo economico son los shocks estocasticos.

Shock tecnologico (RBC):

$$\ln A_t = \rho_A \ln A_{t-1} + \epsilon_t^A, \quad \epsilon_t^A \sim N(0, \sigma_A^2)$$

Parametros del proceso:

- ρ_A: Persistencia del shock
- σ_A: Volatilidad del shock

Otros shocks comunes:

- Preferencias
- Politica monetaria
- Gasto publico
- Mark-up de precios

Sección 4

Metodos de Solucion DSGE

El Problema de Solucion

Muchos modelos DSGE toman la forma:

$$y_t = x_t + a\mathbb{E}_t[y_{t+1}]$$

donde y_t depende de una variable exogena x_t y de las expectativas sobre su propio valor futuro.

Ejemplos:

- Ecuacion de Euler para consumo
- Curva IS dinámica
- Valoracion de activos

Solucion Forward (Iteracion hacia Adelante)

Bajo expectativas racionales, sustituimos repetidamente:

$$\begin{aligned} y_t &= x_t + a\mathbb{E}_t[y_{t+1}] \\ &= x_t + a\mathbb{E}_t[x_{t+1}] + a^2\mathbb{E}_t[y_{t+2}] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} a^k \mathbb{E}_t[x_{t+k}] + a^N \mathbb{E}_t[y_{t+N}] \end{aligned}$$

Con la condicion terminal:

$$\lim_{N\to\infty} a^N \mathbb{E}_t[y_{t+N}] = 0$$

La solucion es:

$$y_t = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \mathbb{E}_t[x_{t+k}]$$

Ejemplo: Precios de Activos

Un activo paga dividendos D_t y tiene precio P_t. Condicion de no arbitraje:

$$P_t = \frac{D_t + \mathbb{E}_t[P_{t+1}]}{1 + r}$$

Aplicando sustitucion repetida:

$$P_t = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + r} \right)^{k+1} \mathbb{E}_t[D_{t+k}]$$

Valor Fundamental

El precio de un activo es el valor presente descontado de sus dividendos futuros esperados.

Esta formula es la base de la teoria moderna de valoracion de activos.

Solucion Backward

Reescribiendo la ecuacion original:

$$y_t = ay_{t+1} + a\epsilon_{t+1}$$

donde $\epsilon_{t+1} = y_{t+1} - \mathbb{E}_t[y_{t+1}]$.

Iterando hacia atras:

$$y_t = a^{-1}y_{t-1} - a^{-1}x_{t-1} - \epsilon_t$$

La solucion:

$$y_t = -\sum_{k=0}^{\infty} a^{-k}\epsilon_{t-k} - \sum_{k=1}^{\infty} a^{-k}x_{t-k}$$

Atención

Esta solucion es **indeterminada**: cualquier proceso $\{\epsilon_t\}$ con $\mathbb{E}_{t-1}[\epsilon_t] = 0$ la satisface.

Eligiendo la Solucion Correcta

Si $|a| < 1$:

- Solucion forward converge
- Solucion backward explota
- Usamos la forward
- Solucion **determinada**

Si $|a| > 1$:

- Solucion forward explota
- Solucion backward converge
- Usamos la backward
- Solucion **indeterminada**

Principio de Blanchard-Kahn

Para una solucion unica y estable, el numero de eigenvalues inestables debe igualar el numero de variables forward-looking.

Burbujas Racionales

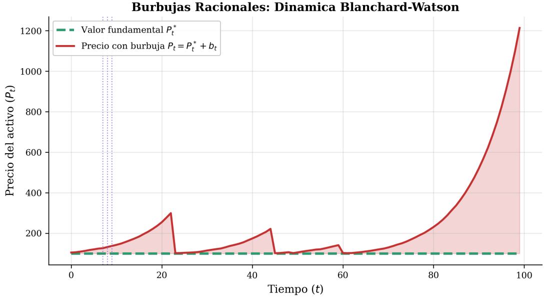
Si la condicion terminal no se cumple, pueden existir **burbujas racionales**.

Sea $y_t = y_t^* + b_t$ donde y_t^* es la solucion fundamental. Entonces:

$$b_t = a\mathbb{E}_t[b_{t+1}]$$

Blanchard-Watson (1982):

$$b_{t+1} = \begin{cases} (aq)^{-1} b_t + e_{t+1} & \text{prob } q \\ e_{t+1} & \text{prob } 1-q \end{cases}$$

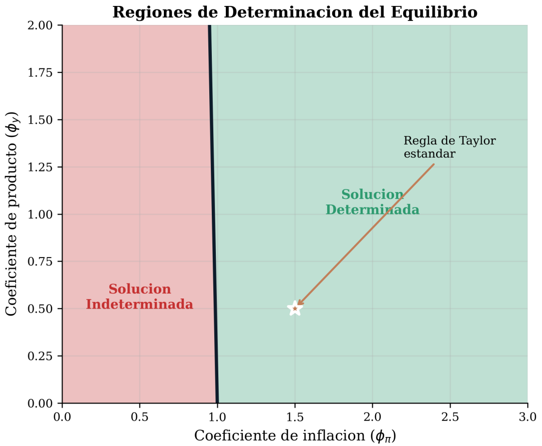


Regiones de Determinacion

En modelos con politica monetaria, la determinacion depende de los parametros de la regla de politica.

Principio de Taylor:
Para evitar indeterminacion, el banco central debe responder mas que uno-a-uno a la inflacion:

$$\phi_\pi > 1$$



Sección 5

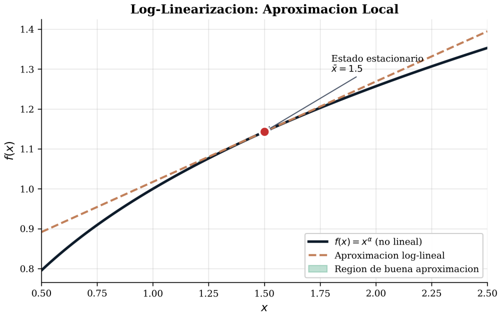
Log-Linearizacion

Por Que Log-Linearizar?

Los modelos DSGE son sistemas de ecuaciones **no lineales** que generalmente no tienen solucion analitica.

Estrategia:

1. Encontrar el estado estacionario
2. Aproximar las ecuaciones alrededor de el
3. Resolver el sistema lineal resultante



Tecnica de Log-Linearizacion

Definimos la desviacion porcentual del estado estacionario:

$$\hat{x}_t \equiv \frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}} \approx \ln x_t - \ln \bar{x}$$

Reglas utiles:

$$\begin{aligned} x_t y_t &\approx \bar{x}\bar{y}(1 + \hat{x}_t + \hat{y}_t) \\ x_t^{\alpha} &\approx \bar{x}^{\alpha}(1 + \alpha \hat{x}_t) \\ \mathbb{E}_t[x_{t+1}] &\approx \bar{x}(1 + \mathbb{E}_t[\hat{x}_{t+1}]) \end{aligned}$$

Ejemplo: Ecuacion de Euler Log-Linealizada

Partimos de:

$$c_t^{-\theta} = \beta \mathbb{E}_t[(1 + r_{t+1})c_{t+1}^{-\theta}]$$

Aplicando log-linearizacion:

$$\hat{c}_t = \mathbb{E}_t[\hat{c}_{t+1}] - \frac{1}{\theta}(\hat{r}_{t+1} - r)$$

Intuición

El consumo hoy aumenta cuando se espera que el consumo futuro sea mayor, y disminuye cuando la tasa de interes aumenta. La magnitud depende inversamente de la aversion al riesgo.

De Forma Estructural a Forma Reducida

Supongamos que x_t sigue un AR(1):

$$x_t = \rho x_{t-1} + \epsilon_t, \quad |\rho| < 1$$

Entonces: $\mathbb{E}_t[x_{t+k}] = \rho^k x_t$

Sustituyendo en la solucion:

$$\begin{aligned} y_t &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k \rho^k x_t \\ &= \frac{1}{1 - a\rho} x_t \end{aligned}$$

Forma Reducida

$$y_t = \frac{1}{1 - a\rho} x_t$$

Esta es la **policy function** que relaciona las variables endogenas con las exogenas.

Sección 6

Calibracion e Impulso-Respuesta

Calibracion de Parametros

Calibracion Estandar: Modelo RBC

Parametro	Descripcion	Valor	Justificacion
β	Factor de descuento	0.99	Tasa real ~4% anual
α	Participacion del capital	0.33	Share del capital
δ	Tasa de depreciacion	0.025	10% anual
ρ_A	Persistencia tecnologica	0.90	Estimaciones VAR
σ_A	Volatilidad del shock	0.01	Volatilidad PIB
θ	Aversion al riesgo	2.0	Literatura estandar

Fuentes para Calibracion

Datos macroeconomicos:

- Ratios de estado estacionario (K/Y, C/Y)
- Tasas de interes promedio
- Horas trabajadas promedio

Estimaciones microeconometricas:

- Elasticidades de Frisch
- Aversion al riesgo
- Tasas de depreciacion

Literatura previa:

- Valores estandar aceptados
- Analisis de sensibilidad

Principio Clave

Los parametros deben tener una interpretacion economica clara y ser consistentes con evidencia micro y macro.

Funciones Impulso-Respuesta (IRFs)

Definición: Funcion Impulso-Respuesta

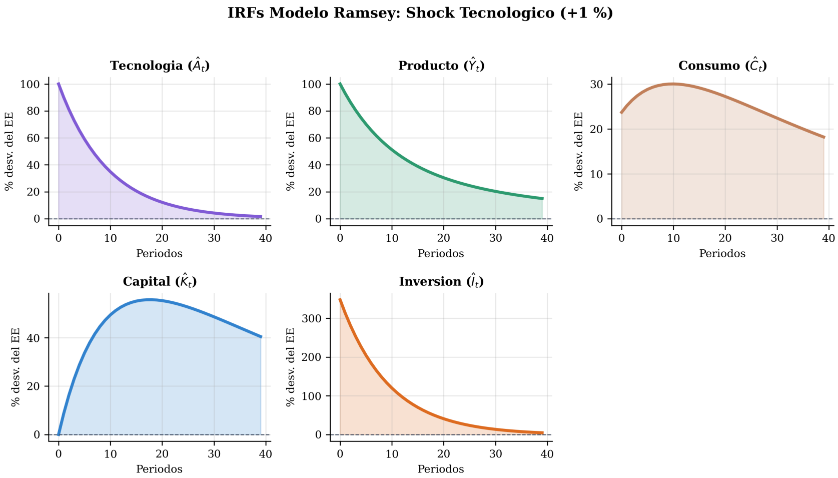
Muestra como las variables del modelo responden a un shock unitario a lo largo del tiempo, partiendo del estado estacionario.

Interpretacion:

$$IRF_y(h) = \mathbb{E}_t[y_{t+h}|\epsilon_t = 1] - \mathbb{E}_t[y_{t+h}|\epsilon_t = 0]$$

- Respuesta **contemporanea**: $IRF_y(0)$
- **Persistencia**: velocidad de retorno al EE
- **Amplificacion**: magnitud maxima de respuesta

IRFs: Shock Tecnologico en Modelo Ramsey



Interpretacion de las IRFs

Shock tecnologico positivo (+1 %):

- Producto aumenta inmediatamente
- Consumo sube suavizado (Euler)
- Capital se acumula gradualmente
- Inversion responde mas que el consumo

Resuelto via Blanchard-Kahn: los eigenvalores determinan la dinamica de transicion.

Intuición

La persistencia del shock ($\rho_A = 0.9$) genera dinamicas graduales. El capital actua como propagador interno: amplifica y extiende los efectos del shock a lo largo del tiempo.

Sección 7

Implementacion en Python

Python para DSGE: Herramientas

Librerias principales:

- `numpy`: Algebra lineal
- `scipy`: Optimizacion, ecuaciones
- `matplotlib`: Visualizacion

Librerias especializadas:

- `gEcon`: Modelos DSGE
- `statsmodels`: Series de tiempo
- `sympy`: Algebra simbolica

Imports basicos

```python
import numpy as np
from scipy import linalg
import matplotlib.pyplot as plt

# Parametros
beta = 0.99
alpha = 0.33
delta = 0.025
rho_A = 0.90
```

Solucion Blanchard-Kahn en Python

Resolver modelo Ramsey via eigenvalores

```python
# B = transition matrix [k_hat, a_hat, c_hat]
eigenvalues, V = np.linalg.eig(B)
idx = np.argsort(np.abs(eigenvalues))
eigenvalues, V = eigenvalues[idx], V[:, idx]

# Policy: c_hat = P @ [k_hat, a_hat]
W = np.linalg.inv(V)
W_u = W[n_s:, :]  # unstable rows
P = -np.linalg.solve(W_u[:, n_s:],
                     W_u[:, :n_s]).real.flatten()
# State transition: s_{t+1} = M @ s_t
M = B_ss + B_sp @ P.reshape(1, n_s)
```

Simulacion de IRFs desde el Modelo Resuelto

Calcular IRFs propiamente

```python
s = np.zeros((T, 2))  # estados [k_hat, a_hat]
s[0] = [0, 1.0]       # shock tecnologico +1%

for t in range(T):
    c_hat[t] = P @ s[t]                  # policy function
    y_hat[t] = s[t,1] + alpha * s[t,0]   # produccion
    i_hat[t] = (y_hat[t] - cy*c_hat[t]) / iy
    if t < T-1:
        s[t+1] = M @ s[t]           # transicion estados
```

Resumen de la Unidad

Conceptos clave:

1. Incertidumbre y aversion al riesgo
2. Expectativas adaptivas vs racionales
3. Framework DSGE basico
4. Metodos de solucion (forward/backward)
5. Log-linearizacion
6. Calibracion e IRFs

Para la proxima clase:

- Modelo RBC completo
- Estimacion por metodo de momentos
- Introduccion al modelo NK

Recursos:

- Scripts Python en GitHub
- Romer, Cap. 5-7
- Gali (2015), Cap. 1-3

Gracias

Preguntas?

briam.guerrero@intec.edu.do