# Condiciones para obtener factorizaciones únicas en la categoría $\mathbf{Rel}(D^{\#})$

# Conditions for uniqueness of factorizations on the $\mathbf{Rel}(D^{\#})$ category

David Fernando Méndez Oyuela

**Resumen** En este trabajo se analiza un posible vínculo entre la Teoría de Categorías y la Teoría de Factorizaciones Generalizadas desarrolladas por Anderson y Frazier. Específicamente bajo el contexto de trabajos previos, donde se analizan composiciones de relaciones y su vínculo con las $\tau$-factorizaciones.
**Palabras Claves** categorías, dominios integrales, $\tau$-factorizaciones

**Abstract** This paper analyzes a possible link between Category Theory and Generalized Factorization Theory developed by Anderson and Frazier. Specifically in the context of what has been worked on in previous works, where compositions of relations and their link with $\tau$-factorizations are analyzed.
**Keywords** categories, $\tau$-factorizations, integral domains

## 1. Introducción

Inspirados en los trabajos de McAdam y Swan (2004) y Anderson y cols. (1990), Anderson y Frazier (2011) desarrollaron el concepto de $\tau$-factorzación, el mismo fue estudiado en forma más amplia por, entre otros, Anderson y Ortiz Albino (2012) y Juett (2014), más adelante Ortiz desarrolló varios proyectos de investigación sobre el tema, para más detalles, ver por ejemplo Vargas (2014), Serna (2014), Molina (2016), Barrios (2016) y Calderón (2019). La maquinaria de la teoría de categorías ofrece una forma de determinar qué condiciones se deben dar para que dada una relación $\tau$ en un conjunto $D^{\#}$ (más adelante se especificará sobre esta notación) se pueden conseguir dos relaciones $\tau_1$ y $\tau_2$ tales que $\tau = \tau_1 \circ \tau_2$, cuestión que brinda información útil para los objetivos del estudio de Méndez Oyuela (2019). Se presen-

David Fernando Méndez Oyuela, M.S., M.Ed.
Profesor Titular II, Departamento de Matemática Pura, Universidad Nacional Autónoma de Honduras (UNAH), Tegucigalpa, Honduras, e-mail: david.mendez@unah.edu.hn

tan en la siguiente sección los conceptos necesarios para comprender este proceso, los mismos son basados en Castellini (2003) y Adamek y cols. (1990).

## 2. Conceptos básicos

**Definición 1** Una categoría es una cuarteta $\mathscr{A} = \{\mathscr{O}, \hom, id, \circ\}$ que consiste de:

1. una clase $\mathscr{O}$, cuyos miembros se llaman $\mathscr{A}$-objetos,
2. para cada par $(A,B)$ de $\mathscr{A}$-objetos, un conjunto $\hom(A,B)$ , cuyos miembros se llaman $\mathscr{A}$-morfismos de $A$ a $B$. Un $\mathscr{A}$-morfismo $f \in \hom(A,B)$ se suele denotar como $f : A \longrightarrow B$ ó $A \xrightarrow{f} B$,
3. para cada $\mathscr{A}$-objeto $A$, un morfismo $A \xrightarrow{id_A} A$, llamado la $A$-identidad en $A$,
4. una ley de composición, que asocia a cada $\mathscr{A}$-morfismo $A \xrightarrow{f} B$ y cada $\mathscr{A}$-morfismo $B \xrightarrow{g} C$ otro $\mathscr{A}$-morfismo $A \xrightarrow{g\circ f} C$ (llamado la composición de $f$ con $g$) con las siguientes condiciones:

   *a*) la composición es asociativa: dados los morfismos $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ y $C \xrightarrow{h} D$, la ecuación $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$ se satisface,
   *b*) $A$-identidades actúan como identidades respecto a la composición: dado el $\mathscr{A}$-morfismo $A \xrightarrow{f} B$, se tiene que $id_B \circ f = f$ y $f \circ id_A = f$,
   *c*) los conjuntos $\hom(A,B)$ son mutuamente exclusivos.

   Por simplicidad, cuando no hay ambigüedad sobre la categoría en cuestión, a los $\mathscr{A}$-objetos y $\mathscr{A}$-morfismos se les llama objetos y morfismos respectivamente. También una categoría $\mathscr{A} = \{\mathscr{O}, \hom, id, \circ\}$ se denota simplemente como $\mathscr{A}$.

**Observación 1** Dada una categoría $\mathscr{A} = (\mathscr{O}, \hom, id, \circ)$, entonces se tienen las siguientes observaciones:

1. Aunque la notación que se usa para los $\mathscr{A}$-morfismos es la misma que se usa para funciones, no necesariamente un $\mathscr{A}$-morfismo es una función (ver Ejemplos).
2. La clase $\mathscr{O}$ de $\mathscr{A}$-objetos es denotada por $Ob(\mathscr{A})$. Obsérvese la distinción al mencionar conjuntos y clases, esto se hace para evitar dificultades técnicas en términos de paradojas que se pueden presentar si ambos se consideran como un mismo ente. Se denomina clase a una colección de conjuntos y conglomerado a una colección de clases. La palabra colección se usa como término primitivo para hablar en general de la noción de conjuntos.
3. La clase de todos los $\mathscr{A}$-morfismos (denotada por $Mor(\mathscr{A})$) está definida como la unión de todos los conjuntos $\hom(A,B)$ en $\mathscr{A}$.
4. Si $A \xrightarrow{f} B$ es un $\mathscr{A}$-morfismo, a $A$ se le llama el dominio de $f$ (denotado por $Dom(f)$) y a $B$ el codominio de $f$ (denotado por $Codom(f)$). Obsérvese que la condición (c) garantiza que cada $\mathscr{A}$-morfismo tiene un único dominio y un único

codominio. Sin embargo, esta condición está dada solamente por razones técnicas pues cuando las demás condiciones se satisfacen, es ”fácil” forzar la condición (c) reemplazando cada morfismo $f \in \hom(A,B)$ por una tripleta $(A, f, B)$, por esta razón, cuando se desea comprobar que un objeto es una categoría, se hace caso omiso de la condición (c).

5. La composición, $\circ$, es una operación binaria parcial en la clase $Mor(\mathscr{A})$. Es decir, para cada par $(f,g)$ de morfismos, $f \circ g$ está definida si y solo si el dominio de $f$ coincide con el codominio de $g$.
6. Si más de una categoría se está involucrando, es conveniente introducir subíndices, por ejemplo: $\hom_{\mathscr{A}}(A,B)$.
   Se considera ahora una serie de ejemplos para comprender la definición del concepto de categoría.

**Ejemplo 1** 1. La categoría **Set**, cuya clase de objetos es la clase de conjuntos, $\hom(A,B)$ es el conjunto de todas las funciones de $A$ a $B$, $id_A$ es la función identidad en $A$ y $\circ$ es la composición usual de funciones.
2. La categoría **Vec**, cuya clase de objetos son todos los espacios vectoriales, $\hom(V,W)$ es el conjunto de todas las transformaciones lineales de $V$ a $W$, $id_V$ es la transformación lineal identidad y $\circ$ es la composición de transformaciones lineales.
3. La categoría **Grp**, cuyos objetos son todos los grupos, los morfismos son los homomorfismos entre grupos, $id_G$ es el homomorfismo identidad y $\circ$ es la composición de homomorfismos.
4. La categoría **Top**, cuyos objetos son todos los espacios topológicos, los morfismo son las funciones continuas entre espacios topológicos, la identidad es la función continua identidad(entre el mismo espacio topológico) y $\circ$ la composición de funciones continuas.
5. La categoría **Rel**, cuyos objetos son los conjuntos y los morfismos son relaciones binarias entre conjuntos, la identidad es la relación identidad y $\circ$ es la composición de relaciones. El lector notará que ésta es la categoría de interés en este estudio.

Debido a que en muchas categorías los morfismos son funciones, se adopta la notación que usualmente se utiliza para éstas. Al morfismo $h = g \circ f$ a veces se denota como $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ o diciendo que el diagrama triangular

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Similarmente, al decir que el diagrama cuadrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

conmuta, esto implica que $g \circ f = k \circ h$.
Los siguientes conceptos relacionados a morfirmos son necesarios para comprender la "estructura de factorización" que permitirá decidir cuando un morfismo $f$ se puede factorizar como $f = g \circ h$, con particular interés en el caso de la categoría **Rel**.

**Definición 2** Sea $\mathscr{X}$ una categoría.

1. Un morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ en $\mathscr{X}$ es llamado un isomorfismo, si existe un morfismo $Y \xrightarrow{g} X$ tal que $g \circ f = id_X$ y $f \circ g = id_Y$.
2. Un morfismo $M \xrightarrow{m} X$ en $\mathscr{X}$ es llamado monomorfismo, si para todo $f, g : Y \longrightarrow M$ morfismos en $\mathscr{X}$, tales que si $m \circ f = m \circ g$ , entonces $f = g$. También se dice que el par $(M, m)$ (o simplemente $m$) es un subobjeto de $X$.
3. Un morfismo $X \xrightarrow{e} E$ en $\mathscr{X}$ es llamado epimorfismo, si para todo $f, g : E \longrightarrow Y$ morfismos en $\mathscr{X}$ tales que $f \circ e = g \circ e$, entonces $f = g$.
4. Un morfismo $M \xrightarrow{m} X$ en $\mathscr{X}$ es llamado sección, si existe un morfismo $X \xrightarrow{f} M$ tal que $f \circ m = id_M$.
5. Un morfismo $X \xrightarrow{e} E$ en $\mathscr{X}$ es llamado retracción, si existe un morfismo $E \xrightarrow{g} X$ tal que $e \circ g = id_E$.
6. Una familia de morfismos con dominio común $\left(X \xrightarrow{f_i} Y_i\right)_{i \in I}$, indexada por una clase $I$, es llamada una fuente (source). Similarmente para morfismos de codominio común se define un sumidero (sink).
7. Una fuente $\left(X \xrightarrow{f_i} Y_i\right)_{i \in I}$ es llamada mono-fuente (monosource) si por cada par de morfismos $h, k : Z \longrightarrow X$, $f_i \circ h = f_i \circ k$, para cada $i \in I$ implica que $h = k$. Similarmente, para sumideros se define el concepto de epi-sumidero (episink).

Mediante el uso de estos conceptos se puede introducir ahora la teoría de estructuras de factorización para sumideros. Se asume que todos los objetos y morfismos pertenecen a una categoría arbitraria pero fija $\mathscr{X}$.

**Definición 3** Sea $\mathbf{E}$ un conglomerado de sumideros y sea $\mathscr{M}$ una clase de morfismos. Se dice que $(\mathbf{E}, \mathscr{M})$ es una estructura de factorización (para sumideros) en la categoría $\mathscr{X}$ y que $\mathscr{X}$ es una $(\mathbf{E}, \mathscr{M})$-categoría (para sumideros) si:

1. tanto $\mathbf{E}$ como $\mathscr{M}$ son cerrados bajo composiciones con isomorfismos, en particular, esto para $\mathbf{E}$ significa que si $\left(X_i \xrightarrow{e_i} Y\right)_{i \in I}$ es un sumidero en $\mathbf{E}$ y $Y \xrightarrow{h} Z$ es un isomorfismo, entonces el sumidero $\left(X_i \xrightarrow{h \circ e_i} Z\right)_{i \in I}$ está en $\mathbf{E}$;

2. $\mathscr{X}$ tiene $(\mathbf{E},\mathscr{M})$-factorizaciones (de sumideros); es decir, cada sumidero $\mathbf{s}$ en $\mathscr{X}$ tiene una factorización $\mathbf{s} = m \circ \mathbf{e}$ donde $\mathbf{e} \in \mathbf{E}$ y $m \in \mathscr{M}$;
3. $\mathscr{X}$ tiene una única $(\mathbf{E},\mathscr{M})$-propiedad de diagonalización; es decir, si $Y \xrightarrow{s} Z$ y $M \xrightarrow{m} Z$ son $\mathscr{X}$-morfismos con $m \in \mathscr{M}$ y $\mathbf{e} = \left(X_i \xrightarrow{e_i} Y\right)_{i \in I}$ y $\mathbf{r} = \left(X_i \xrightarrow{r_i} M\right)_{i \in I}$ son sumideros en $\mathscr{X}$ con $\mathbf{e} \in \mathbf{E}$, tales que $m \circ \mathbf{r} = s \circ \mathbf{e}$ , entonces existe un único morfismo diagonal $Y \xrightarrow{d} M$ tal que para cada $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "e_i"] \arrow[d, "r_i"'] & Y \arrow[d, "s"] \arrow[dl, "d"'] \\ M \arrow[r, "m"'] & Z \end{tikzcd}$$

Cabe destacar que cualquier $(\mathbf{E},\mathscr{M})$-categoría para sumideros es también una $(\mathscr{E},\mathscr{M})$-categoría para morfismos individules, donde $\mathscr{E}$ consiste de todos los morfismos (que se pueden ver como sumideros con un solo morfismo) que pertenecen a $\mathbf{E}$. En la Sección 3 se hará el estudio sobre esta estructura de factorización aplicada particularmete a la categoría **Rel**.

## 3. Estructura de factorización en la categoría $\mathbf{Rel}(D^{\#})$

Como se introdujo en la sección anterior, dada la categoría **Rel**, formada por conjuntos y relaciones entre ellos, se puede construir una $(\mathbf{E},\mathscr{M})$-estructura de factorización para conglomerados de sumideros, donde $\mathbf{E}$ es un conglomerado de sumideros y $\mathscr{M}$ una clase de morfismos, además en particular también se tiene una $(\mathscr{E},\mathscr{M})$-estructura de factorización donde $\mathscr{E}$ es el conjunto de sumideros singuletes(vistos como conglomerados con un solo elemento). En Castellini (2003) (tomando únicamente los puntos de más interés para este estudio) se prueba el siguiente resultado donde especifica qué propiedades se tienen cuando una categoría tiene una $(\mathbf{E},\mathscr{M})$-estructura de factorización.

**Proposición 1** *Si $\mathscr{X}$ es una $(\mathbf{E},\mathscr{M})$-categoría(para sumideros) entonces $\mathbf{E}$ y $\mathscr{M}$ tienen las siguientes propiedades:*

1. *$\mathscr{M}$ consiste de monomorfismos y $\mathbf{E}$ contiene todos los epi-sumideros extremales.(Un epimorfismo $X \xrightarrow{e} E$ es extremal si cuando se factoriza como $e = m \circ f$, con m monomorfismo, entonces m es isomorfismo).*
2. *$\mathscr{M}$ contiene todos los isomorfismos y es cerrado bajo composición.*
3. *$\mathbf{E}$ es cerrado bajo composición, en el sentido que si $\left(X_i \xrightarrow{e_i} Y\right)_{i \in I}$ es un sumidero en $\mathbf{E}$ y el morfismo $Y \xrightarrow{f} Z$(visto como un sumidero singulete) pertenece a $\mathbf{E}$ entonces el sumidero $\left(X_i \xrightarrow{f \circ e_i} Z\right)_{i \in I}$ también está en $\mathbf{E}$.*

4. *Las $(\mathbf{E},\mathscr{M})$-factorizaciones son esencialmente únicas, esto es, si $((e_i)_{i\in I},m)$ y $((f_i)_{i\in I},n)$ son dos $(\mathbf{E},\mathscr{M})$-factorizaciones para el mismo sumidero, entonces existe un isomorfismo h tal que para cada $i\in I$, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "e_i"] \arrow[d, "f_i"'] & M \arrow[d, "m"] \arrow[dl, "h"'] \\ N \arrow[r, "n"'] & X \end{tikzcd}$$

*conmuta.*
5. *$\mathscr{M}\cap\mathbf{E}$ consiste de todos los isomorfismos.*
6. *$\mathscr{M}$ es cerrado bajo primeros factores relativos a $\mathscr{M}$, es decir, si $n\circ m\in\mathscr{M}$ y $n\in\mathscr{M}$, entonces $m\in\mathscr{M}$, en consecuencia, si $(e,n)$ es la $(\mathbf{E},\mathscr{M})$-factorización de $m\in\mathscr{M}$, entonces e debe ser un isomorfismo.*
7. *Si $\mathbf{E}$ es un conglomerado de episumideros, entonces $\mathbf{E}$ es cerrado bajo segundos factores relativos a $\mathbf{E}$, es decir, si $g\circ f\in\mathbf{E}$ y $f\in\mathbf{E}$ entonces $g\in\mathbf{E}$.*

Cabe destacar que en el caso de este estudio, se trabaja con una subcategoría de **Rel**, que tiene por objetos a todos los subconjuntos de $D^{\#}$, donde $D$ es un dominio integral arbitrario, $D^{\#}$ es el conjunto de elementos distintos de cero y no invertibles de $D$ y cuyos morfismos son todas las relaciones binarias entre subconjuntos de $D^{\#}$, se denota esta subcategoría como $\mathbf{Rel}(D^{\#})$.
Para poder utilizar el resultado anterior al caso particular de $\mathbf{Rel}(D^{\#})$, se necesita comprender todos los conceptos involucrados aplicados a dicha categoría. Se procede a analizar entonces cada concepto. Se caracterizan primero los conceptos de monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo en $\mathbf{Rel}(D^{\#})$. Los siguientes conceptos y resultados están basados en el trabajo de Faynzilberg (1998).

**Definición 4** Dado un morfismo $\tau\in\mathbf{Rel}(D^{\#})$.

1. La imagen de $\tau$ se define como $Im\tau=\{b\in B : \exists a\in A, \text{ con } a\tau b\}$. Obsérvese que $Im\tau\subseteq Codom\tau$.
2. La coimagen de $\tau$ se define como $Coim\tau = Im\tau^{-1}$.
3. $\tau$ es una correspondencia si $Coim\tau = Dom\tau$.
4. $\tau$ es una función parcial si para todo $x\in Dom\tau$, $\text{card}\tau[x]\leq 1$. (donde $\text{card}\tau[x]$ respresenta la cardinalidad del conjunto $\tau[x]=\{y\in Codom\tau : x\tau y\}$).
5. $\tau$ es sobreyectiva si $Im\tau = Codom\tau$.
6. $\tau$ es inyectiva si para todo $x\in Codom\tau$, $\text{card}\tau^{-1}[x]\leq 1$.
7. $\tau$ es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.
8. $\tau$ es una función si $\tau$ es una función parcial y una correspondencia.

Considérese el siguiente ejemplo para comprender la definición:

**Ejemplo 2** En $D^{\#}=\mathbb{Z}^{\#}$ considérense las siguientes relaciones, como morfismos en $\mathbf{Rel}(\mathbb{Z}^{\#})$ tales que $\tau_1 : \{2,3\}\longrightarrow\mathbb{Z}^{+}$, $\tau_2 : \mathbb{Z}^{\#}\longrightarrow\mathbb{Z}^{\#}$ y definidos como:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \{(2,2),(2,3),(3,5),(3,7)\} \\ \tau_2 &= \left\{(n,2n) : n \in \mathbb{Z}^{\#}\right\} \end{aligned} \tag{1}$$

Luego se tiene para $\tau_1$ que $Dom\tau_1 = \{2,3\}$, $Codom\tau_1 = \mathbb{Z}^+$, $Im\tau_1 = \{2,3,5,7\} \subset \mathbb{Z}^+$ y $Coim\tau_1 = \{2,3\}$. Además $\tau_1$ es una correspondencia, no es una función parcial puesto que $(2,2)$ y $(2,3) \in \tau_1$, entonces card$\tau_1[2] = 2$, no es sobreyectiva puesto que $\{2,3,5,6\} = Im\tau_1 \neq Codom\tau_1 = \mathbb{Z}^{\#}$ y es inyectiva puesto que card$\tau_1^{-1}[x] = 1$ para todo $x \in Codom\tau_1$. Similarmente $Dom\tau_2 = \mathbb{Z}^{\#}$, $Codom\tau_2 = \mathbb{Z}^{\#}$, $Im\tau_2 = \mathbb{Z}^{\#} \setminus \{2\}$ y $Coim\tau_2 = \mathbb{Z}^{\#}$ . Se tiene entonces que $\tau_2$ es una correspondencia, es función parcial puesto que para todo entero $x \in \mathbb{Z}^{\#}$ se tiene que card$\tau_2[x] = 1$ cuando $x$ es par y card$\tau_2[x] = 0$ cuando $x$ es impar, no es sobreyectiva pues que $\left\{2n : n \in \mathbb{Z}^{\#}\right\} = Im\tau_2 \neq Codom\tau_2 = \mathbb{Z}^{\#}$ y es inyectiva puesto que para todo $y \in Codom\tau$ se tiene que card$\tau^{-1}[x] = 1$ cuando $x$ es par(le corresponde su mitad) y card$\tau^{-1}[x] = 0$ cuando $x$ es impar. En base a los conceptos definidos se obtiene el siguiente resultado:

**Proposición 2** *Dada una relación $\tau$ en **Rel**$(D^{\#})$.*

1. *$\tau^{-1} \circ \tau = id_{Dom\tau}$ si y solo si $\tau$ es una correspondencia inyectiva.*
2. *$\tau \circ \tau^{-1} = id_{Codom\tau}$ si y solo si $\tau$ es una función parcial sobreyectiva.*

*Demostración.* (1) $(\Longrightarrow)$ Por definición se tiene que $Coim\tau \subset Dom\tau$, falta ver la otra contenencia. Para ello, sea $y \in Dom\tau$, como $\tau^{-1} \circ \tau = id_{Dom\tau}$ se tiene que $y id_{Dom\tau} y$ si y solo si $y\tau^{-1} \circ \tau y$, así que existe $x \in D^{\#}$ tal que $y\tau x$ y $x\tau^{-1}y$, luego $y \in Im\tau^{-1} = Coim\tau$, por tanto $\tau$ es una correspondencia. Ahora supóngase que $\tau^{-1}[x] = \{y_1, y_2\}$ con $y_1, y_2 \in Dom\tau$ y $y_1 \neq y_2$, entonces $y_1\tau x$ y $y_2\tau x$ luego $x\tau^{-1}y_2$ y entonces $y_1\tau^{-1} \circ \tau y_2$, pero como $\tau^{-1} \circ \tau = id_{Dom\tau}$ se tiene que $y_1 id_{Dom\tau} y_2$ y por tanto $y_1 = y_2$ y así card$\tau^{-1}[x] \leq 1$.
$(\Longleftarrow)$ Como $Dom\tau = Coim\tau$, $id_{Dom\tau} \subset \tau^{-1} \circ \tau$ pues si $x \in Dom\tau$ y existe $y \in Codom\tau$ tal que $x\tau y$, así $y\tau^{-1}x$ y luego $x\tau^{-1} \circ \tau x$. Por otro lado, dados $x, y \in Dom\tau^{-1} \circ \tau$ tales que $x\tau^{-1} \circ \tau y$ entonces existe $z \in Codom\tau$ tal que $x\tau z$ y $z\tau^{-1}y$, así $z\tau^{-1}x$, pero como $\tau$ es inyectiva, card$\tau^{-1}[z] \leq 1$ para todo $z \in Codom\tau$, por tanto $x = y$ y entonces $x\tau^{-1} \circ \tau x$ y luego $\tau^{-1} \circ \tau \subset id_{Dom\tau}$.
(2) La demostración es análoga a la parte (1), intercambiando los roles de $\tau$ y $\tau^{-1}$.

Obsérvese que en la proposición, el hecho de que $\tau^{-1} \circ \tau = id_{Dom\tau}$ implica que $\tau$ es una sección y análogamente $\tau \circ \tau^{-1} = id_{Codom\tau}$ implica que $\tau$ es retracción. Con esto entonces se ha obtenido una parte para caracterizar los monomorfismos y epimorfismos en **Rel**$(D^{\#})$ puesto que toda sección es un monomorfismo y toda retracción es un epimorfismo.

## 4. Resultados de este estudio

Para completar el proceso, primero se define la siguiente función:

**Definición 5** Dada una relación $X \xrightarrow{\tau} Y$ en $\mathbf{Rel}(D^{\#})$ y $A \subseteq X$, se define la imagen de $A$ bajo $\tau$ como
$$Im_\tau(A) = \{b \in Y \,:\, \exists a \in A, a\tau b\}\,.$$
Si $\mathscr{P}(X)$ denota el conjunto potencia de $X$ y dado $A \in \mathscr{P}(X)$ , se define la función asociada a $\tau$ como,

$$\begin{aligned} f_\tau : \mathscr{P}(X) &\longrightarrow \mathscr{P}(Y) \\ A &\longmapsto Im_\tau(A). \end{aligned} \tag{2}$$

Se puede observar que $f_\tau$ está bien definida puesto que si $X \xrightarrow{\tau} Y$ es una relación en $\mathbf{Rel}(D^{\#})$, $A,B \in \mathscr{P}(X)$ son tales que $A = B$ entonces $Im_\tau(A) = Im_\tau(B)$. La siguiente proposición relaciona estos nuevos conceptos con los anteriores.

**Proposición 3** *Dada una relación $X \xrightarrow{\tau} Y$ en $\boldsymbol{Rel}(D^{\#})$. Si $f_\tau$ es inyectiva, entonces $\tau$ es una correspondencia. Análogamente, si $f_\tau$ es sobreyectiva, entonces $\tau$ es sobreyectiva.*

*Demostración.* Si se asume que $\tau$ no es una correspondencia, entonces existe $\emptyset \neq A \in \mathscr{P}(X)$ tal que $Im_\tau(A) = \emptyset$ . Pero $Im_\tau(\emptyset) = \emptyset$ y entonces $f_\tau$ no es inyectiva. Análogamente, asumir que $\tau$ no es sobreyectiva implica que existe $\emptyset \neq B \in \mathscr{P}(Y)$ tal que $Coim_\tau(B) = \emptyset$, pero $Coim_\tau(\emptyset) = \emptyset$ y luego $f_\tau(\emptyset) = f_\tau(B)$ y $f_\tau$ no es función, esto es una contradicción.

Obsérvese el comportamiento simétrico en la prueba, tal comportamiento es usual cuando se trabaja con monomorfismos y epimorfismos y se hace uso de ello en los siguientes resultados.

**Proposición 4** *Una relación $X \xrightarrow{\tau} Y$ en $\boldsymbol{Rel}(D^{\#})$ es un monomorfismo si y solo si $f_\tau$ es inyectiva. Análogamente, $\tau$ es epimorfismo si y solo si $f_\tau$ es sobreyectiva.*

*Demostración.* Se presenta el caso para monomorfismos, el otro caso es análogo.
($\Longrightarrow$) Sean $A,B \subseteq X$ tales que $Im_\tau(A) = Im_\tau(B)$ y $A \neq B$. Sin pérdida de generalidad, supóngase que existe $x \in A$ tal que $x \notin B$. Luego existe $y \in Im_\tau(A)$ tal que $x\tau y$ y como $Im_\tau(A) = Im_\tau(B)$ entonces existe $x' \in B$ tal que $x'\tau y$. Sean $X \xrightarrow{C_x} X$ y $X \xrightarrow{C_{x'}} X$ morfismos en $\mathbf{Rel}(D^{\#})$ tales que para todo $a \in X$, $aC_x x$ y $aC_{x'}x'$, es decir, morfismos constantes en $x$ y $x'$ respectivamente.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "C_x"] \arrow[r, shift right, "C_{x'}"'] & X \arrow[r, "\tau"] & Y \end{tikzcd}$$

Entonces por la definición de composición se tiene que para todo $a \in X$, $a\tau \circ C_x y$ y $a\tau \circ C_{x'} y$ luego $\tau \circ C_x = \tau \circ C_{x'}$, como $\tau$ es monomorfismo entonces $C_x = C_{x'}$ y por tanto $x = x'$. Esto contradice que $x \notin B$ y por tanto $A = B$, es decir que $f_\tau$ es una función inyectiva.
($\Longleftarrow$) Sean $W \xrightarrow{\tau_1} X$ y $W \xrightarrow{\tau_2} X$ morfismos en $\mathbf{Rel}(D^{\#})$ tales que $\tau \circ \tau_1 = \tau \circ \tau_2$.

$$W \underset{\tau_2}{\overset{\tau_1}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{\tau} Y$$

Si $a\tau_1 b$ para algún $b \in X$ entonces por la Proposición 3, como $\tau$ es una correspondencia, existe $x \in Y$ tal que $b\tau x$. Luego $a\tau \circ \tau_1 x$ y entonces $a\tau \circ \tau_2 x$, entonces existe $c \in X$ tal que $a\tau_2 c$ y $c\tau x$, esto brinda la existencia de tal composición. Se puede observar que si dado $A \subseteq W$ tal que $Im_{\tau\circ\tau_1}(A) = Im_{\tau\circ\tau_2}(A)$ entonces $Im_\tau(Im_{\tau_1}(A)) = Im_\tau(Im_{\tau_2}(A))$, esta igualdad se da porque

$$\begin{aligned} Im_\tau(Im_{\tau_1}(A)) &= \{x \in Y : \exists b \in Im_{\tau_1}(A), b\tau x\} \\ &= \{x \in Y : \exists b \in X, \exists a \in A : a\tau_1 b \text{ y } b\tau x\} \end{aligned} \tag{3}$$

y por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} Im_{\tau\circ\tau_1}(A) &= \{x \in Y : \exists a \in A, a\tau \circ \tau_1 x\}, \\ &= \{x \in Y : \exists a \in A, \exists b \in X : a\tau_1 b \text{ y } b\tau x\} \end{aligned} \tag{4}$$

como $f_\tau$ es inyectiva se tiene que $Im_{\tau_1}(A) = Im_{\tau_2}(A)$, para todo $A \subseteq W$, por lo tanto $\tau_1 = \tau_2$. Así, $\tau$ es un monomorfimo.

Las proposiciones anteriores se pueden resumir en el siguiente diagrama y análogamente para el caso en el que $\tau$ es epimorfismo.

$$\begin{tikzcd}
\tau \text{ monorfismo} \arrow[drr, Leftrightarrow] & \tau \text{ sección} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & \tau \text{ correspondencia inyectiva} \\
& & f_\tau \text{ inyectiva} \arrow[r, Rightarrow] & \tau \text{ correspondencia}
\end{tikzcd}$$

**Figura 1** Implicaciones sobre monomorfismos en **Rel**$(D^{\#})$

Con los resultados anteriores ya se puede dar una caracterización completa de los isomorfismos en **Rel**$(D^{\#})$, necesaria para dar las propiedades de una estructura de factorización.

**Proposición 5** *Una relación* $X \xrightarrow{\tau} Y$ *en* ***Rel***$(D^{\#})$ *es un isomorfismo si y solo si* $\tau$ *es una función biyectiva.*

*Demostración.* $(\Longrightarrow)$Si $X \xrightarrow{\tau} Y$ es un isomorfismo entonces es sección y retracción. Por la proposición 2 se tiene que $\tau$ es una función biyectiva.
$(\Longleftarrow)$Si $\tau$ es una función biyectiva, entonces existe la función inversa $\tau^{-1}$ que es tal que $\tau \circ \tau^{-1} = id_Y$ y $\tau^{-1} \circ \tau = id_X$. Por lo tanto $\tau$ es un isomorfismo.

Obsérvese que también se puede ahora determinar cuáles son los epimorfimos extremales en **Rel**$(D^{\#})$, dado un epimorfismo extremal $X \xrightarrow{e} E$ que se factoriza como $e = m \circ f$, con $m$ monomorfismo, entonces $m$ es isomorfismo, en **Rel**$(D^{\#})$ la definición entonces se traduce a:

Dada una relación $\tau$ en $D^{\#}$, $\tau$ es epimorfismo extremal si cuando $\tau = \tau_1 \circ \tau_2$ con $\tau_1$ una correspondencia inyectiva, se tiene que $\tau_1$ es una relación para la que $f_\tau$ es una función biyectiva. Se utiliza ahora la Proposición 1 para brindar propiedades que debe tener una estructura de factorización para la categoría $\mathbf{Rel}(D^{\#})$. Una $(\mathbf{E}, \mathscr{M})$-estructura de factorización en $\mathbf{Rel}(D^{\#})$ tiene que tener necesariamente las siguientes propiedades:

1. La familia $\mathscr{M}$ está formada por relaciones $\tau$ tales que $f_\tau$ es inyectiva.
2. La familia $\mathscr{M}$ contiene todas las relaciones $\tau$ que son funciones biyectivas y es cerrada bajo composiciones.
3. La familia $\mathbf{E}$ es cerrada bajo composiciones y contiene todos los epi-sumideros extremales(vistos como epi-sumideros singuletes), luego $\mathbf{E}$ contiene los epimorfismos extremales que se describieron anteriormente(ver párrafo anterior).
4. Las $(\mathbf{E}, \mathscr{M})$-factorizaciones son esencialmente únicas.
5. $\mathscr{M} \cap \mathbf{E}$ contiene todas las relaciones $\tau$ que son funciones biyectivas.
6. Si $\tau_1 \circ \tau_2 \in \mathscr{M}$ y $\tau_2 \in \mathscr{M}$ entonces $\tau_1 \in \mathscr{M}$. Además si $\tau = \tau_1 \circ \tau_2$ es la $(\mathbf{E}, \mathscr{M})$-factorización de $\tau \in \mathscr{M}$, entonces $\tau_1$ debe ser una función biyectiva.
7. Si $\tau_1 \circ \tau_2 \in \mathbf{E}$ y $\tau_2 \in \mathbf{E}$ entonces $\tau_1 \in \mathbf{E}$.

## 5. Conclusiones

Se han obtenido condiciones para que una relación $\tau$ en $D^{\#}$ tenga una factorización única de la forma $\tau_1 \circ \tau_2$. Esto contribuye al estudio de Méndez Oyuela (2019) en el sentido que se puede pensar específicamente en qué tipo de composiciones $\tau_1 \circ \tau_2$ son válidos los resultados allí obtenidos. Como trabajos futuros, es deseable obtener concretamente una familia de morfismos que tenga éstas propiedades para casos particulares de interés. Además, se pretende analizar si existe alguna interacción entre las condiciones brindadas y los tipos de relaciones que interesan en la teoría de $\tau$-factorizaciones.

## Referencias

Adamek, J., Herrlich, H., y Strecker, G. E. (1990). *Abstract and concrete categories*. Wiley.

Anderson, D. D., Anderson, D. F., y Zafrullah, M. (1990). Factorization in integral domains. *J. Pure Appl. Algebra*, *69*, 1–19. doi: 10.1016/0022-4049(90)90074-R

Anderson, D. D., y Frazier, A. M. (2011). On a general theory of factorization in integral domains. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, *41*(3), 660-705. doi: 10.1216/RMJ-2011-41-3-663

Anderson, D. D., y Ortiz Albino, R. M. (2012). Three frameworks for a general theory of factorization. *Arabian Journal of Mathematics*, *1*, 1-16. doi: DOI10.1007/s40065-012-0012-7

Barrios, R. M. (2016). *A type of a maximun common factor* (Master's thesis). Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez.

Calderón, J. E. (2019). *Imagen de los $\tau$-productos* (Master's thesis). Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez.

Castellini, G. (2003). *Categorical closure operators*. Springer Science & Business Media.

Faynzilberg, P. S. (1998). *Factorization and decomposition of relations.* Descargado de `https://ideas.repec.org/p/nwu/cmsems/1211.html`

Juett, J. R. (2014). Two counterexamples in abstract factorization. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, *44*(1), 139-155.

McAdam, S., y Swan, R. G. (2004). Unique comaximal factorization. *J. Algebra*, *276*, 180–192. doi: 10.1016/j.jalgebra.2004.02.007

Méndez Oyuela, D. F. (2019). Composición de relaciones y $\tau$-factorizaciones. *Revista SICES*, *2*, 44-50.

Molina, C. A. (2016). *On the number of $\tau_{(n)}$-factors* (Master's thesis). Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez.

Serna, C. A. (2014). *Factorizaciones donde cada factor de un elemento pertenece a solo una clase de equivalencia* (Master's thesis). Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez.

Vargas, A. G. (2014). $\tau$-*Multiplicative sets* (Master's thesis). Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez.