台中一中寒假數學讀書會-圖論

許博翔

January 26, 2024

1 定義

定義 1.1. 一張**圖** (graph) G 是由**點** (vertex) 集 V 與**邊** (edge) 集 E 所組成，以有序對 $G=(V,E)$ 表示之 (或以 $V(G)$, $E(G)$ 分別表示 G 的點集與邊集)。E 中是由多個點對組成，若 $(u,v)\in E$(或寫 $uv\in E$)，代表 u,v 兩點在圖中有連邊，u,v 稱為這條邊的**端點** (endpoint)。

- $uv\in E$，若我們在乎 u,v 的順序 (即 uv 與 vu 代表不同的邊)，則稱 G 為**有向圖** (directed graph)，否則為**無向圖** (undirected graph)。
- 若 $\exists v\in V$ 使得 $vv\in E$，則稱之為**自環** (self loop)。
- 若 E 是多重集，則稱 G 為**多重圖** (multigraph)，出現了兩次以上的邊稱為**重邊** (multiple edges)。
- 沒有自環且沒有重邊的圖稱為**簡單圖** (simple graph)。

定義 1.2.

- 若 u,v 為某條邊的兩個端點，則稱 u 與 v **相鄰** (adjacent)，u,v 互為**鄰居** (neighbor)。
- 若兩條邊有共同的端點，則稱這兩條邊相鄰。

定義 1.3.

- $v\in V(G),\ N_G(v):=\{u|uv\in E(G)\}$，也就是在 G 中所有與 v 相鄰的點所組成的集合。

- $U \subseteq V(G),\ N_G(U) := \bigcup_{v \in U} N_G(v)$，也就是在 G 中所有與 U 中的點相鄰的點的集合。

定義 1.4.

- 若 $V(G) = V(G'),\ E(G) = E(G')$，則稱 G 與 G' **同構 (isomorphic)**，基本上我們只在乎圖中，點與點之間的相鄰關係，而不在乎圖畫出來長怎麼樣。
- 若 $V(G') \subseteq V(G),\ E(G') \subseteq E(G)$，則稱 G' 是 G 的**子圖 (subgraph)**。
- 若 G' 是 G 的子圖滿足 $V(G') = V(G)$，則稱 G' 是 G 的**生成子圖 (spanning subgraph)**。
- G' 是 G 的子圖，若每條兩端點都在 $V(G')$ 中的邊都在 $E(G')$ 中，則稱 G' 是 G 的**導出子圖 (induced subgraph)**。

定義 1.5. G 是無向簡單圖，若 $\forall u, v \in V(G),\ u \neq v$，$uv \in E(G)$，則稱 G 是**完全圖 (complete graph)**，以 $K_{|V|}$ 表示之。因此，$|E(K_n)| = \binom{n}{2}$。

定義 1.6. $S \subseteq V(G)$，若 S 中任兩點都沒有連邊，則稱 S 爲**獨立集 (independent set)**，以 $\alpha(G)$ 代表 G 的最大獨立集大小；若 S 中任兩點都有連邊，則稱 S 爲**團 (clique)**，以 $\omega(G)$ 代表 G 的最大點團大小。

定義 1.7.

- G 是無向圖，v 在 G 中的**度數 (degree)** 是指在 $E(G)$ 中與 v 相連的邊的個數 (自環會算兩次喔)，以 $\deg_G(v)$ 表示之。另外，$\delta(G) := \min_{v \in V(G)} (\deg_G(v))$，代表 G 中最小的頂點度數；$\Delta(G) := \max_{v \in V(G)} (\deg_G(v))$，代表 G 中最大的頂點度數。
- G 是有向圖，v 在 G 中的**入度 (in-degree)** 是指在 $E(G)$ 中指向 v 的邊的個數，以 $\mathrm{ideg}_G(v)$ 表示之；v 在 G 中的**出度 (out-degree)** 是指在 $E(G)$ 中從 v 指出去的邊的個數，以 $\mathrm{odeg}_G(v)$ 表示之。

定義 1.8. G 是無向圖，若 $\forall v \in V(G),\ \deg_G(v) = k$，則稱 G 是 **k-正則圖 (k-regular graph)**。

定義 1.9. 設 $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \in V(G)$，$v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}v_k \in E(G)$，則稱 $v_0v_1v_2\cdots v_k$ 是一條**路** (walk)，這條路的長度爲 k。

- **路徑** (path)：頂點不重複的路。以 P_n 代表長度爲 n 的路徑。以 u-v 路徑代表從 u 走到 v 的路徑。
- **圈** (cycle)：$v_0 = v_k$ 的路徑。以 C_n 代表長度爲 n 的圈。
- **行跡** (trail)：邊不重複的路。
- **迴路** (circuit)：$v_0 = v_k$ 的行跡。

範例 1.10. 設 $\delta(G) \geq 2$，證明 G 中必存在長度至少是 $\delta(G)$ 的路徑與長度至少是 $\delta(G)+1$ 的圈。

定義 1.11.

- G 是無向圖，G 是**連通的** (connected) 是指 $\forall u, v \in V(G)$，都存在一條 u-v 路徑。
- G 是有向圖，G 是**強連通的** (strongly connected) 是指 $\forall u, v \in V(G)$，都存在一條 u-v 路徑。
- G 是有向圖，G 是**單連通的** (unilaterally connected) 是指 $\forall u, v \in V(G)$，都存在一條 u-v 路徑或 v-u 路徑。
- G 是有向圖，G 是**弱連通的** (weakly connected) 是指將 G 的有向邊全部替換成無向邊後的無向圖是連通的。

定義 1.12. 設 G' 是無向圖 G 的導出子圖，若 G' 連通且不存在 $v \in V(G) \setminus V(G')$ 使得 $V(G') \cup \{v\}$ 的導出子圖連通，則稱 G' 是 G 的一個**連通塊** (connected components)。
也可以用類似的方法定義強、單、弱連通塊。我們會把強連通塊以 **SCC(strongly connected components)** 表示。

定義 1.13. 若從 G 中移除一條邊 e 會讓 G 的連通塊數量增加，則稱 e 爲**橋** (bridge/cut-edge)。

定理 1.14. **歐拉迴路 (Euler circuit)** 是指一條經過所有邊的迴路。

- 無向連通圖 G 有歐拉迴路若且唯若 $\forall v \in V(G),\ 2|\deg(v)$。
- 有向弱連通圖 G 有歐拉迴路若且唯若 $\forall v \in V(G),\ \mathrm{ideg}(v) = \mathrm{odeg}(v)$。

範例 1.15 (經典題). 證明存在長度 $n^m + m - 1$ 的 n 元字串滿足所有 m 個字元的字串都是其子字串。

範例 1.16 (2021 4P M6). 設 m 與 n 都是正整數。試決定最小的正整數 s，使得存在 $m \times n$ 的長方形陣列，其中每一個元素均爲正整數，並滿足下列所有條件：

- 每一列均含有 n 個相異的連續正整數，次序不計。
- 每一行均含有 m 個相異的連續正整數，次序不計。
- 每一個元素都小於或等於 s。

定義 1.17. **哈密頓路徑/圈 (Hamiltonian path/cycle)** 是指一條經過所有頂點的路徑/圈。
(目前沒有快速的方法可以判斷一張圖有沒有哈密頓路徑/圈，這已經被證明是一個 NPC 問題)

定理 1.18 (Dirac's theorem). 若 $|V(G)| \geq 3$ 且 $\delta(G) \geq \dfrac{|V(G)|}{2}$，則 G 有哈密頓圈。

定理 1.19 (Ore's theorem). 若 $|V(G)| \geq 3$ 且 $\forall uv \notin E(G)$，有 $\deg(u) + \deg(v) \geq |V(G)|$，則 G 有哈密頓圈。

定理 1.20 (Nash-Williams theorem). 有 $2k+1$ 個點的 k-正則圖有哈密頓圈。

定理 1.21 (Chvátal-Erdos theorem). 若 $\kappa(G) \geq \alpha(G)$，則 G 有哈密頓圈。($\kappa(G)$ 的定義在後面的 section)

定義 1.22. 設 G 爲有向圖，且 $\forall u, v \in V(G),\ u \neq v$，$uv \in E(G), vu \in E(G)$ 恰一個成立，則稱 G 爲**競賽圖 (tournament)**。

範例 1.23. 競賽圖必有哈密頓路徑。

習題 1.24. 競賽圖有哈密頓圈若且唯若其強連通。

習題 1.25. n 座城市兩兩之間有各自的旅行時間，且不存在兩個相同的旅行時間。Alice 和 Bob 打算要不重複的經過所有城市並停在最後一個城市，Alice 和 Bob 不一定從相同的城市出發，Alice 每回合會選擇沒去過的城市中旅行時間最短的過去、Bob 則是選擇沒去過的城市中旅行時間最長的。Alice 的總旅行時間是否一定不小於 Bob 的？

2 k 分圖

定義 2.1. 若可以將 $V(G)$ 分割成 k 個部份，滿足同個部份間的兩點都不相鄰，則稱 G 爲 k **分圖 (k-partite graph)**。(二分圖的英文爲 **bipartite graph**)

定義 2.2. G 是一個 k 分圖滿足任意兩不同部份的點都相鄰，則稱 G 爲**完全 k 分圖 (complete k-partite graph)**，設這 k 個部份分別有 $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 個點，則以 $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ 表示之。

習題 2.3. G 是二分圖若且唯若 G 沒有奇圈 (有奇數條邊的圈)。

定義 2.4. 設完全 k 分圖 G 有 n 個點，其中 k 個部份的點數分別爲 $\lfloor\frac{n}{k}\rfloor, \lfloor\frac{n+1}{k}\rfloor, \ldots, \lfloor\frac{n+k-1}{k}\rfloor$，則稱 G 爲 n 個點 k 部份的**圖蘭圖 (Turan's graph)**，以 $T_{n,k}$ 表示之。

習題 2.5. 設 n/k 的商爲 q，餘數爲 r

$$\begin{aligned}|E(T_{n,k})| &= \binom{r}{2}(q+1)^2 + r(k-r)(q+1)q + \binom{k-r}{2}q^2 \\ &= k^2q^2 - kq^2 + 2kqr - 2qr + r^2 - r.\end{aligned}$$

定理 2.6. $T_{n,k}$ 是唯一有最多條邊的 n 個點的 k 分圖。

定理 2.7 (Turan's theorem). $T_{n,k}$ 是唯一有最多條邊且沒有 K_{k+1} 子圖的 n 個點的圖。

習題 2.8. 有 n 顆電池其中 k 顆是有電的，有台機器人需要兩顆有電的電池才能動，每回合可以選擇兩顆電池放進機器人來看是否都是有電的，至少要試幾次才能保證讓機器人動起來？

3 匹配

定義 3.1.

- **匹配 (matching)**：多條互不相鄰的邊所形成的集合。
- 一個點 v 被一個匹配 M 匹配到 (saturated) 是指 v 是 M 中某條邊的端點。
- **最大匹配 (maximum matching)**：在一張圖中有最多邊數的匹配，以 $\nu(G)$ 代表最大匹配的大小。
- **完美匹配 (perfect matching)**：所有的點都有被匹配到。

定義 3.2. 若 $C \subseteq V(G)$ 滿足 $E(G \setminus C) = \emptyset$，則稱 C 爲**點覆蓋 (cover)**。以 $\tau(G)$ 代表最小點覆蓋大小。

性質 3.3. $\nu(G) \leq \tau(G) \leq 2\nu(G)$。

定理 3.4 (Hall's theorem). 設二分圖 G 的兩部份分別爲 A, B，若 $\forall A' \subseteq A,\ |A'| \leq |N_G(A')|$，則存在匹配可以匹配到 A 中所有的點。

推論 3.5. k-正則的二分圖必有完美匹配。

習題 3.6. 9×9 的棋盤，每一格放著 A, B, C 其中一種石頭，A, B, C 各放了 27 個。已知可以將這些石頭重新排列放在棋盤上，滿足每顆石頭與原本的位置的曼哈頓距離都不超過 d，使得原本放 A 的位置都放 B、放 B 的位置都放 C、放 C 的位置都放 A。證明可以將這些石頭重新排列如下，滿足每顆石頭與原本的位置

的曼哈頓距離都不超過 $d+2$。

A	B	C	A	B	C	A	B	C
B	C	A	B	C	A	B	C	A
C	A	B	C	A	B	C	A	B
A	B	C	A	B	C	A	B	C
B	C	A	B	C	A	B	C	A
C	A	B	C	A	B	C	A	B
A	B	C	A	B	C	A	B	C
B	C	A	B	C	A	B	C	A
C	A	B	C	A	B	C	A	B

定理 3.7 (Petersen's theorem)**.** 對於任意的 $2k$-正則圖，必存在 2-正則生成子圖。

範例 3.8 (2020 IMO P3)**.** 有 $4n$ 個鵝卵石的重量分別爲 $1, 2, 3, \ldots, 4n$，每個鵝卵石被塗上 n 種顏色之一，而每種顏色的鵝卵石都有 4 個。證明我們可以將鵝卵石分成兩堆，滿足：

1. 兩堆有一樣的重量。
2. 每堆中有每種顏色的鵝卵石各兩顆。

定理 3.9 (Konig theorem)**.** 設 G 是二分圖，則 $\nu(G) = \tau(G)$。

定義 3.10. $q(G) := G$ 中大小是奇數的連通塊的數量。

定理 3.11 (Tutte's theorem)**.** G 有完美匹配 $\iff \forall S \subseteq V(G),\ q(G \setminus S) \leq |S|$。

定理 3.12 (Petersen theorem)**.** 沒有橋的 3-正則圖有完美匹配。

4 塗色

定義 4.1.

- 合法的點塗色：將一張圖的每個頂點塗成多種顏色之一，滿足任意兩相鄰頂點的顏色不相同。

- 合法的邊塗色：將一張圖的每條邊塗成多種顏色之一，滿足任意兩相鄰邊的顏色不相同。

定義 4.2.

- $\chi(G)$(chromatic number)：一個 G 的合法點塗色至少需要塗多少種顏色。
- $\chi'(G)$(edge chromatic number)：一個 G 的合法邊塗色至少需要塗多少種顏色。

性質 4.3. $\chi(G) \geq \dfrac{|V(G)|}{\alpha(G)}$。

定義 4.4. 若對於 G 所有的子圖 H，都有 $\delta(H) \leq H$，則稱 G 爲 k-**退化的 (degenerate)**。以 $dg(G)$ 代表最小的 k 使得 G 是 k-退化的。

性質 4.5. $\chi(G) \leq 1 + dg(G)$。

定理 4.6 (Vizing's theorem)**.** G 是簡單圖，則

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

範例 4.7 (台大羽球老師教我的知識)**.** $\chi'(K_{2n}) = 2n - 1$。

定理 4.8 (Brooks theorem)**.** 若連通圖 G 不是完全圖或奇圈，則

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

習題 4.9. 若 G 是二分圖，則

$$\chi'(G) = \Delta(G)$$

5 樹

定義 5.1. G 是無向圖，以下敘述等價：

- G 是一棵樹 (tree)。
- G 是 $n - 1$ 條邊的連通圖。

- G 有 $n-1$ 條邊且沒有圈。
- G 是沒有圈的連通圖。
- G 連通但少了任一條邊都不連通。
- 對於 G 的任意兩點 u, v，都存在唯一一條 u-v 路徑。

定義 5.2. 森林 (forest)：沒有圈的圖，每個連通塊都是一棵樹。

範例 5.3. 若 $\delta(G) \geq d$，則任何 $d+1$ 點的樹都是 G 的子圖。

習題 5.4. 找出所有 n 使得對於任何 n 個點的樹，我們都能一直拔偶數度數的點 (並把相連的邊也同時拔掉) 拔到整個圖沒有點。

範例 5.5 (2020 IMO P4)**.** 在一個山坡上有 $n^2 (n \geq 2)$ 個纜車站，由甲乙兩家公司負責營運。兩家公司各營運了 k 台纜車，每台纜車只停起站 (海拔比較低的) 與終點站 (海拔比較高的)，滿足任意兩台相同公司的纜車有不同的起站與終點站，並且有比較低起站的有比較低的終點站。我們說兩站被一家公司相連是指可以從其中一站搭若干台該公司的纜車到另一站。給定 n，找出最小的 k 使得必定存在兩個站同時被甲乙兩家公司相連。

習題 5.6 (2020 ISL C4)**.** 給定正整數 $n \geq 2$，S 是一個集合滿足 $\forall k = 2, 3, \ldots, n$，存在 $x, y \in S$ 使得 $|x-y| = F_k$。求 $|S|$ 的最小可能值。($F_0 = 0, F_1 = 1, F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$)

6 割與流

定義 6.1.

- 如果從 G 中任意移除少於 k 個點與其相連的邊，G 仍是連通的，則稱 G 是 **k-連通的 (k-connected)**。
- 如果從 G 中任意移除少於 k 條邊，G 仍是連通的，則稱 G 是 **k-邊連通的 (k-connected)**。

定義 6.2.

- $\kappa(G) :=$ 最大的 k 使得 G 是 k-連通的。
- $\kappa'(G) :=$ 最大的 k 使得 G 是 k-邊連通的。

習題 6.3.

$$\kappa(G) \le \kappa'(G) \le \delta(G).$$

範例 6.4. 設 G 點雙連通且 $\delta(G) \ge 3$，則存在一個 G 的生成樹 T 與 $u, v, w \in V(G)$，滿足 $uv, uw \in E(G),\ vw \notin E(G)$，使得 v, w 都是 T 中的葉子。

定理 6.5 (Mader)**.** 設 G 的平均度數至少為 $4k$，則 G 有 k-連通的子圖。

定義 6.6.

- 設 $S, T \subseteq V(G)$，定義 S-T 路徑為起點在 S 中終點在 T 中且中間的點在 $V(G) - S - T$ 中的路徑。
- 若 $C \subseteq V(G)$ 滿足在 $G - C$ 中，不存在 S-T 路徑，則稱 C 為 **S, T-割 (S, T-cut)**。
- 若 $C \subseteq V(G) - s - t$ 滿足在 $G - C$ 中，不存在 s-t 路徑，則稱 C 為 s, t-割。

定義 6.7.

- $\kappa(S, T) := \min\limits_{\{C\text{是}S\text{-}T\text{割}\}}(|C|)$，稱為 **$S, T$-最小割 ($S, T$-min cut)**。
- $\kappa(s, t) := \min\limits_{\{C\text{是}s\text{-}t\text{割}\}}(|C|)$。
- $\lambda(S, T) :=$ 最多有多少條互斥的 S-T 路徑，稱為 **S, T-最大流 (S, T-max flow)**。
- $\lambda(s, t) :=$ 最多有多少條除了端點外都互斥的 s-t 路徑。

定理 6.8 (Menger's theorem)**.** 對於不相鄰的兩點 s, t，都有

$$\kappa(s, t) = \lambda(s, t)$$

定理 6.9 (Menger's theorem)**.**

$$\kappa(S,T)=\lambda(S,T)$$

定義 6.10. 當我們將 C 改成定義在 $E(G)$ 上時，也可以類似的定義 $\kappa'(S,T),\kappa'(s,t)$ 與 $\lambda'(S,T),\lambda'(s,t)$。

定義 6.11. H 是一張圖，其中 $V(H)=E(G)$，$uv\in E(H)\iff u,v$ 這兩條邊在 G 中有共同的端點，稱 H 爲 G 的**線圖 (line graph)**，以 $H=L(G)$ 表示之。

將 Menger's theorem 套用到 $L(G)$ 上，即可得到以下定理：

定理 6.12 (邊版本的 Menger's theorem)**.** 對於任意兩點 (可以相鄰)s,t，都有

$$\kappa'(s,t)=\lambda'(s,t)$$

定理 6.13 (Global Version of Menger's theorem)**.** G 是 k-連通的 $\iff$ 對於任意兩點 s,t，都有 k 條內部頂點互不相同的路徑。

定理 6.14 (Global Version of Menger's theorem)**.** G 是 k-邊連通的 $\iff$ 對於任意兩點 s,t，都有 k 條邊互不相同的路徑。

定理 6.15 (Dirac's theorem)**.** 若 G 是 k-連通的 $(k\geq 2)$，則任意 k 點都存在一個圈同時通過這 k 點。

其實 Menger's theorem 也可以推廣到帶權有向圖上，定義如下：

定義 6.16. $w:E(G)\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ 稱爲**邊權 (edge weight)** 或**容量 (capacity)**，$f:E(G)\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ 滿足 $f(e)\leq w(e)$ 且對於每個 $v\in V(G)-s-t$ 都有 $\sum\limits_{uv\in E(G)} f(uv)=\sum\limits_{vw\in E(G)} f(vw)$，稱 f 爲**流 (flow)**。這張圖 G 稱爲**網路 (network)**。

定義 6.17. 定義 G' 爲 $E(G')=\{uv|uv\in E(G)\text{ or }vu\in E(G)\}$，並定義 $w':E(G')\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ 爲 $w'(uv)=w(uv)-f(uv)+f(vu)$。這張圖稱爲 G 的**剩餘網路**。

定義 6.18. $C \subseteq E(G)$ 使得 $G-C$ 中沒有 s-t 路徑，則稱 C 爲 **s,t-割 (s,t-cut)**。

定理 6.19 (Max-flow min-cut theorem)**.**

$$\min_C(\sum_{e\in C} w(c)) = \max_f(\sum_{sv\in E(G)} f(sv))$$

習題 6.20 (2021 3JM3)**.** 給定正整數 n,k 滿足 $n \geq k+1$。在一個班上有 n 人，有些人之間是朋友，滿足每個人都跟至少 k 個人是朋友。一個邪惡的老師想要把班上分成兩部份，首先，他選擇兩個人並把他們分在兩邊，接著班上的同學每個人選擇要站在哪邊，大家都選邊站之後，站在不同邊的人立刻斷開有誼關係。證明老師一定可以斷開至少 k 對友誼關係。

7 平面圖 (Planar Graph)

定義 7.1. 若可以一張圖 G 的頂點與邊畫在平面上，滿足任意兩條邊不相交 (端點除外)，則稱 G 是平面圖。

定義 7.2. **細分 (subdivision)**：將一條邊 uv 加入新的點 w 變成 uw 和 wv。

定義 7.3. 細分圖：H 是 G 的細分圖若可以對 G 細分若干次變成 H。

以下皆設 $V=|V(G)|,\ E=|E(G)|$。

定理 7.4 (Euler's formula)**.** G 是平面圖，設 F 爲被邊切割出的區塊數量，則

$$V-E+F=2$$

引理 7.5. G 是平面圖，則

$$E \leq 3V-6$$

引理 7.6.

$$K_5,\ K_{3,3}\text{都不是平面圖。}$$

定理 7.7 (Kuratowski theorem)**.** G 是平面圖 $\iff$ G 沒有子圖是 K_5 或 $K_{3,3}$ 的細分圖。

推論 7.8. G 是平面圖，則

$$\delta(G) \leq 5$$

範例 7.9. G 是平面圖，則

$$\chi(G) \leq 5$$

定理 7.10 (四色定理). G 是平面圖，則

$$\chi(G) \leq 4$$

範例 7.11. G 是沒有三角形的平面圖，且 $\delta(G) \geq 3$，證明存在相鄰兩點 u, v 使得

$$\deg(u) + \deg(v) \leq 8$$

習題 7.12 (平面圖小遊戲). 在紙上有一張圖，滿足任意兩邊都不相交 (端點除外，這種圖稱爲平版圖)。每回合可以選兩個 degree 小於 k 的點將他們連起來，並在這條邊上點一個新的點，需滿足連起來之後仍是平版圖。找出所有 k 使得無論初始的圖爲何，也無論玩家如何畫，遊戲都可以在有限回合內結束。

8 習題

習題 8.1 (2019 IMOC). 2019 人兩兩之間都有一場比賽，每場比賽都有分出勝負。我們說 A 爆打 B 若 A 贏 B 或存在 C 使得 A 爆打 C 且 C 爆打 B。找出最小的 k 使得若每個人都至少贏 k 人，無論比賽結果如何，任意兩個人都互相爆打。

習題 8.2 (2019 ISL C8). n 個人參加羽球比賽，任意兩人之間都有打一場比賽，每場比賽都有分出勝負。有一個球迷睡過頭錯過了比賽，但他很好奇是否有羽球眞強者只輸至多一場比賽，他每回合可以選擇一場比賽問主辦單位比賽的結果。證明他可以花費至多 $4n$ 回合滿足他的好奇心。

習題 8.3 (2021 2J M6). 給定正整數 $k, n,\ k \leq n$，數奧國有 n 個村莊，有些村莊之間有聯絡道路。若從村莊 A 走到 B 至少要經過 r 條不同的聯絡道路，則定義兩村莊的距離爲 r。若村莊 A 無法走到村莊 B，則定義兩村莊的距離爲 ∞。皮皮

沒有數奧國的地圖，但他知道 n, k，他想知道數奧國是否連通。他每次打電話給薛姐可以選兩個村莊，並且問兩村莊的距離是大於、等於、或小於 k，證明皮皮可以打至多 $2n^2/k$ 通電話來達成他的目的。