金融工程簡介
INTRO. TO FINANCIAL ENGINEERING

CH Sean Han
Dept of Quantitative Finance/Math
Fintech & Blockchain Program, NTHU

Outline

- 何謂金融工程
- 金融衍生品市場
- 遠期、期貨與交換
- 選擇權（Option）
- 離散二元樹模型 (Discrete Binomial Tree Model)
- Black-Scholes 偏微分方程式 (BS PDE)
- Black- Scholes 選擇權訂價公式 (BS Option Pricing Formula)

What is Financial Engineering (https://www.iaqf.org)

- Financial engineering is the application of mathematical methods to the solution of problems in finance.
- It is also known as financial mathematics, mathematical finance, and computational finance.
- Financial engineering draws on tools from applied mathematics, computer science, statistics, and economic theory.
- Quantitative analysis has brought innovation, efficiency and rigor to financial markets and to the investment process.
- As the pace of financial innovation accelerates, the need for highly qualified people with specific training in financial engineering continues to grow in all market environments.

Quiz

In fact…

- 金融工程，金融數學，數理金融，計算金融甚至計量財務金融等，在目前都可以視為是等義的專業領域

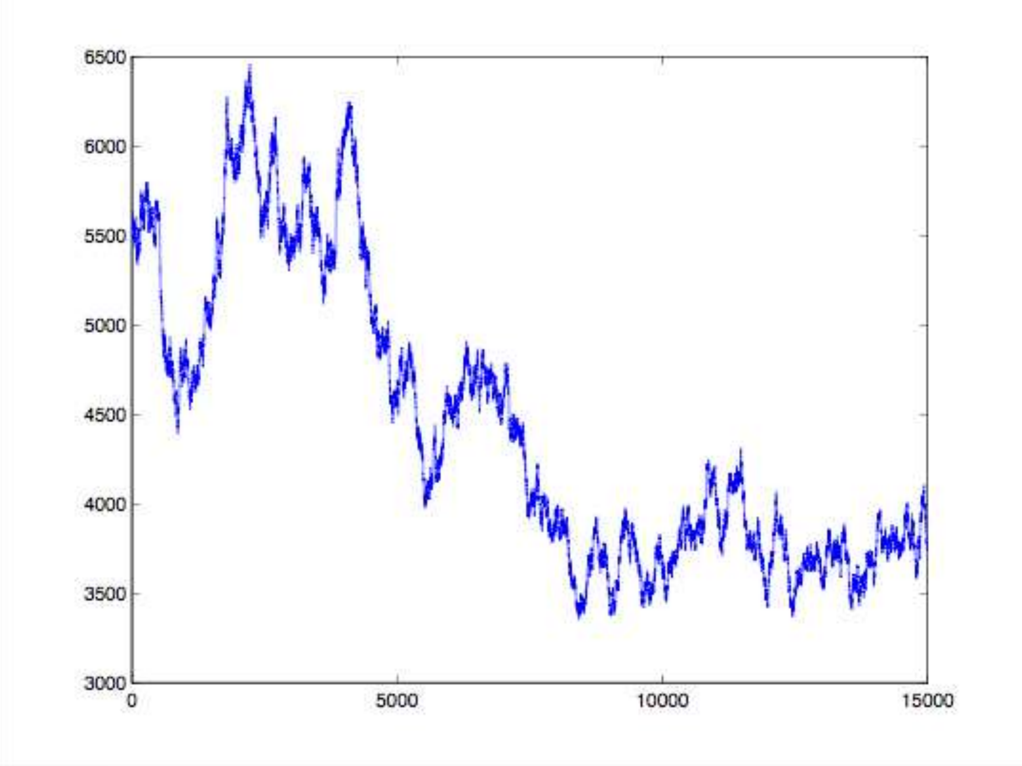
- 全球在計量財務金融專業領域

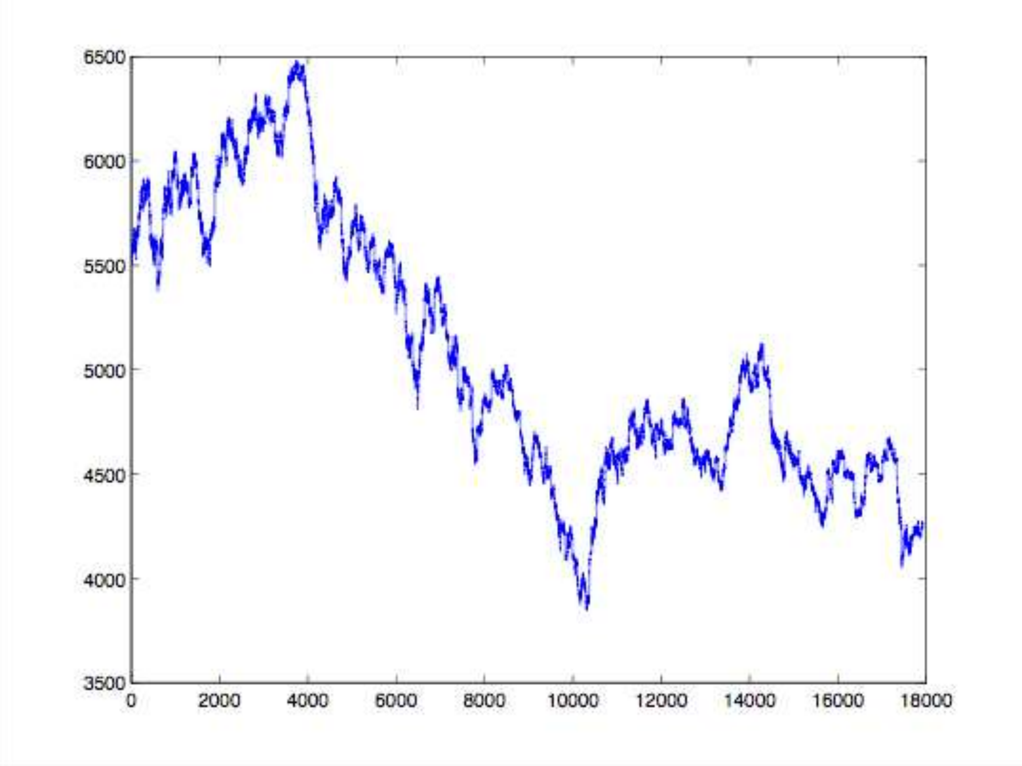
計量財務金融人才 QFFERS
專業能力

- 新金融商品的開發與評價
- 投資組合的建置
- 風險管理
- 情境模擬、壓力測試、回溯測試
- 量化交易
- 資料庫使用
- 程式能力、數據分析
- 金融科技

資產價格的動態行為：
真實 vs 模擬（幾何**布朗運動**）

Quiz





金融工程的歷史

Quiz

Nobel Prize Winners in Ecomoics

- 1990 – H. Markowitz, W. Sharpe, and M. Miller

  In 1952, Markowitz proposed a mean-variance analysis to study Portfolio Selection.

- 1997 – M. Scholes and R. Merton

  In 1973, Black and Scholes solved the option pricing problem.

金融衍生商品
(Financial Derivative Products)
簡介

Quiz

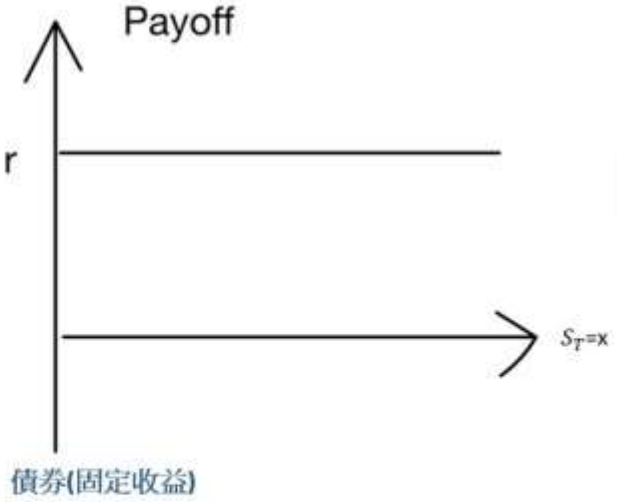
何謂金融衍生品？

- 定義：由某些標的資產（變數）所衍生出來的金融契約。（註：可用收益形式或報酬（函數）了解這些商品。）

- 這些資產具風險性，例如股價、大盤指數、利率、匯率，但也可以是氣溫、降雨量、電影票房、波動率等變數。

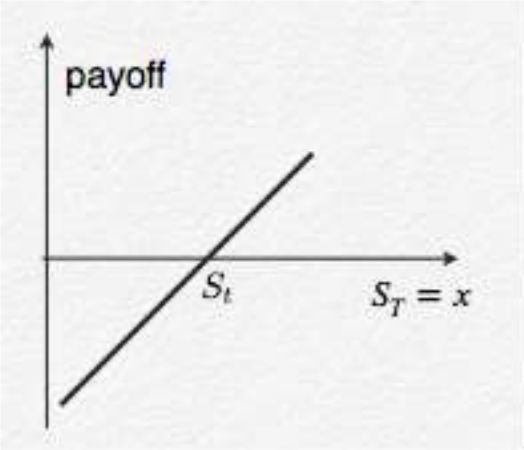
用函數瞭解金融商品--報酬函數

債券市場



債券報酬(收益)函數圖

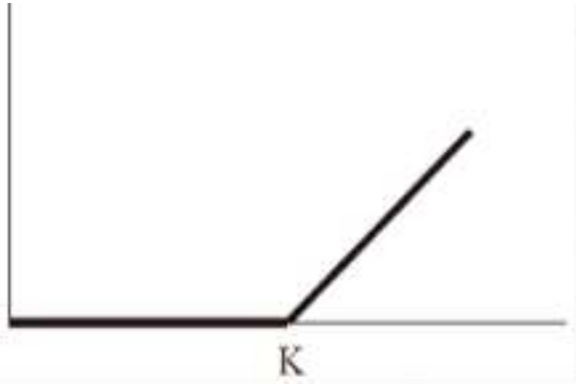
股票市場



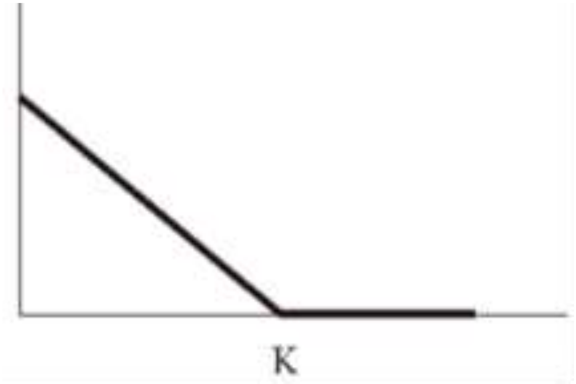
股票報酬(收益)函數圖

用函數瞭解金融商品--報酬函數

衍生品市場



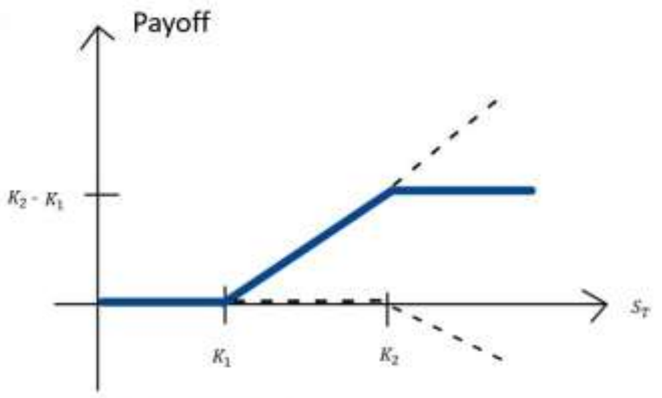
買權(Call Option)
報酬(收益)函數圖



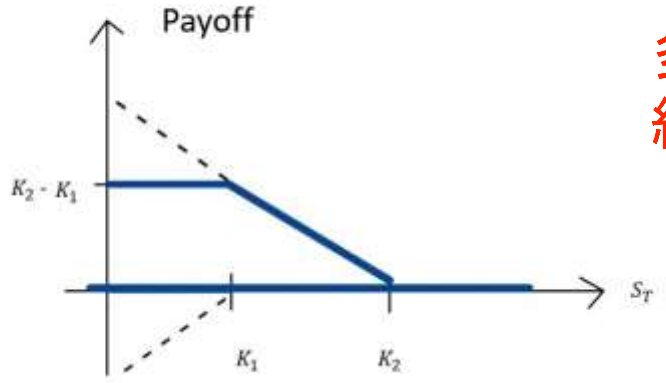
賣權(Put Option)
報酬(收益)函數圖

多元組合策略—可跨市場套利

Quiz

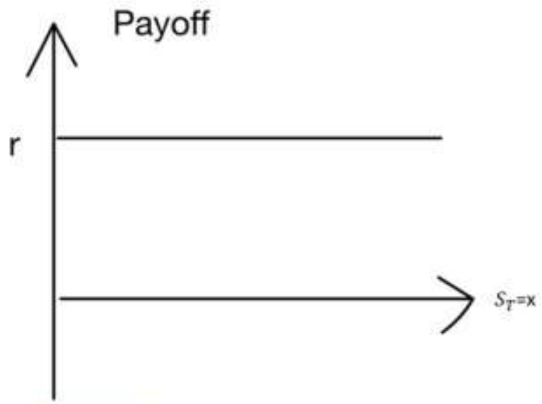


Bull Spread Calls



Bear Spread Puts

多元選擇權報酬函數
組合出固定收益函數



債券(固定收益)

衍生品的分類

Quiz

- 線性：遠期、期貨、交換
- 非線性：選擇權

遠期(Forward)契約--(1/2)

- 遠期契約 (forward contract) 規範了交易雙方，在事前不須支付交易費用的情形下，可以用一個先約定的價格 K，在未來某一個時間點 T，來買或賣某個標的資產 (underlying asset)，記做 S。

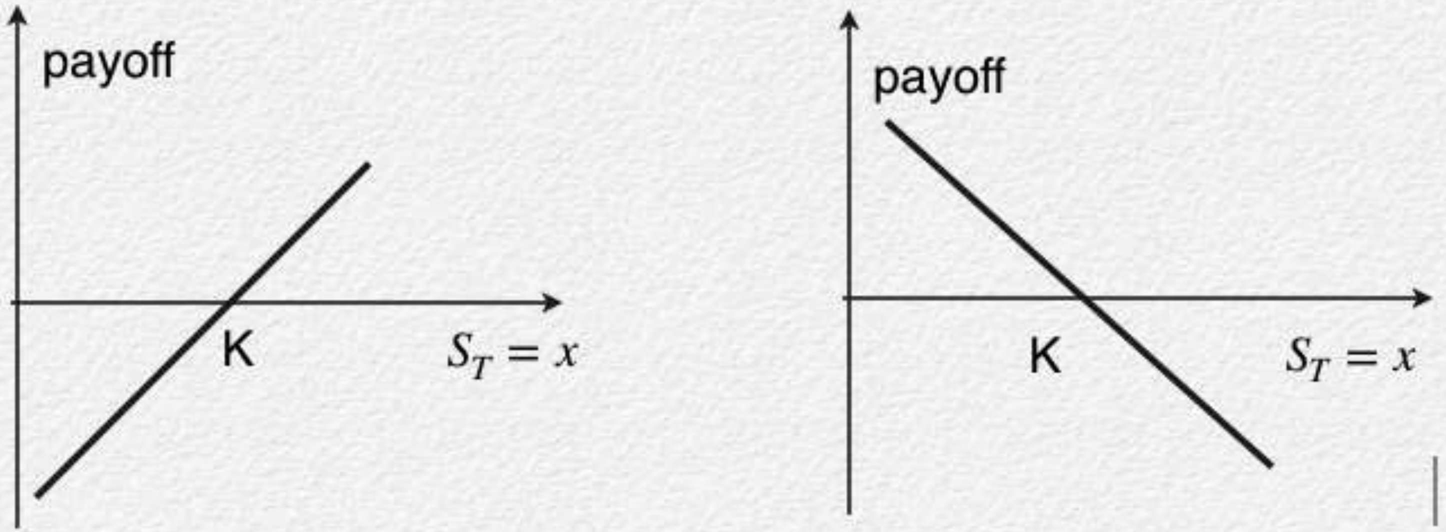


圖 3-1：遠期買（賣）方的線性報酬函數如左（右）

遠期(Forward)契約--(2/2)

- T-遠期價格 (T-forward price)，記做 For(t,T) ，定義為某一個履約價 K，它使得該遠期契約在起始時間 t 的價值為 0 。
- 假設交易的雙方不存在違約風險(或稱為信用風險（ credit risk ）)，因此遠期通常在 OTC 店頭市場中存在，由彼此認識的交易雙方，或藉由金融機構作為中介達成交易的協議 。

無套利評價法
(No-Arbitrage Evaluation）

- 無套利評價方法假設金融市場是有效率的，並不存在「套利」(arbitrage)或稱作「免費午餐」(free lunch)的機會。
- 不允許任一交易策略，在期初成本為 0 的情況下，其投資組合在往後任何時間的總價值，會是一個正數。
- 通常也假設無摩擦(frictionless) 的市場條件：資產不支付股利(dividend) ，無交易手續費(transaction fee)，無交易稅賦(tax)，可放空交易(short selling)，可連續交易，可買或賣任何單位的標的資產等，除非另外說明。放空交易指投資人可以用預借的方式賣出資產，以後再買進還回。

遠期契約評價公式

Quiz

在此基礎上，假設 S_t 表示在 t 時的標的資產（如股票、黃金、利率、匯率等）價格，遠期契約的到期日為 T，以連續複利計算的無風險年利率為 r（存放款利率假設相同），則該遠期契約的價值為

$$For_S(t,T) = S_t e^{r(T-t)} \text{。}$$

在往後 Black-Scholes 訂價理論中，我們會學習使用另一種較廣義的「風險中立評價法」(risk-neutral evaluation)來推論出遠期契約的價值；以及由價值函數(value function)所滿足的偏微分方程式(partial differential equation)求解，也可推得遠期價值的公式。

期貨--線性衍生品

- 期貨是一紙契約預先規範了交易雙方，在事前支付保證金的情形下，可以用一個先約定的價格，在未來某一個時間點（稱作到期日），來買進或賣出某個標的資產 。

- 可視為常數與變數間的交換，是一種**線性契約**。

老祖宗就已經使用！

期貨契約的內容

1. 標的物
2. 數量：以「口」(contract) 作為基本的交易單位。
3. 交割月份
4. 交割方式

期貨市場的功能

Quiz

- **避險(Hedging)**的功能：提供標的物商品的持有者，可以轉嫁因價格變動而產生的風險，這是期貨契約形成的原始動機。

- **投機(Speculation)**的功能：提供承擔市場風險的能力，和交易對手互換風險，可活絡市場。

- **價格發現(Price Discovery)**：由於期貨價格、交易量等市場訊息，及時地被揭露出來，投資人可由此判斷，隱含於價格的未來風險資訊內涵。

交換(SWAP)

- 交換契約是衍生性金融商品的一種，交易雙方約定在未來某幾個時間點上，彼此互換某些標的資產，也可以用現金結算的方式進行交割。

- 交換契約可以想成數個遠期契約的組合，其共同的標的資產可以是貨幣（匯率）、利率、商品、以及權益等商品。

- 最大的交換契約市場當屬利率交換(Interest Rate Swap, IRS)，根據國際清算銀行(Bank of International Settlement, BIS)截至 2013 年中的統計，IRS 的名目金額達到 426 兆美元之譜。

利率交換(Interest Rate Swap)

Quiz

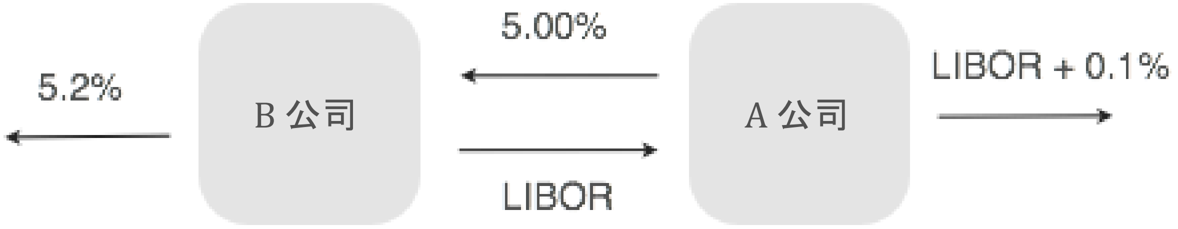
- 定義為買賣雙方在一約定的期限內，彼此交換所得到的收款利息（資產）或是貸款利息（負債）。
- 可利用交換合約轉換資產
- 可利用交換合約轉換負債
- 利率交換不僅是投資避險的工具，也是市場衡量違約風險的指標，其固定利率與相同期限之政府公債殖利率的利差(Swap Spread)，在市場上被用來衡量信用風險溢酬(Credit Spread)，以估計標的資產的違約機率。

範例--交換合約轉換資產

譬如 A、B 雙方簽訂一個 3 年期交換契約，每半年支付一次。A 方同意以每年 5% 的固定利率， 支付利息給 B 方；且 B 方同意以六個月期 LIBOR 浮動利率，支付相同名目本金的利息給 A 方。

註1、LIBOR 是倫敦同業拆款利率 (London Interbank Offered Rate)
註2、1個基本點 (basis point; bp)為 1% 的百分之一

利用交換合約轉換負債



- 假設 A 公司有一筆 1 億美元貸款，利率為 LIBOR+0.1%
- 在 A 公司於取得交換合約後，將產生現金流量如下：
  1. 公司支付 LIBOR+0.1% 予其債權人
  2. 公司依照合約條件收取 LIBOR
  3. 公司按照合約條件支付 5%
- 上述現金流量之淨結果為5.1%之利率支出。

- 假設 B 公司有一筆 3 年期，本金為 1 億美元之貸款，利率為 5.2%
- 在 B 公司於取得交換合約後，將產生現金流量如下：
  1. 公司支付 5.2% 予其債權人
  2. 公司依照合約條件支付 LIBOR
  3. 公司按照合約條件收取 5%
- 上述現金流量之淨結果為 LIBOR+0.2% 之利率支出。

選擇權--非線性衍生品

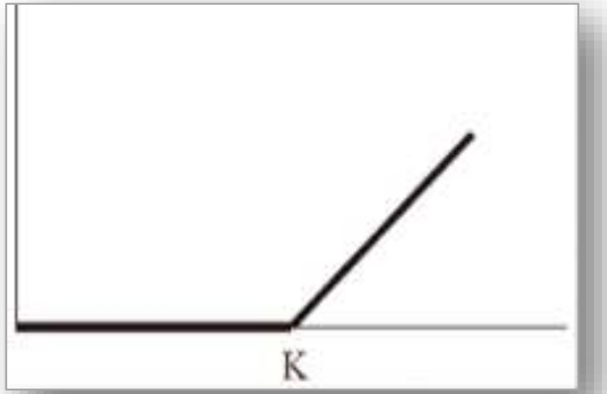
- 選擇權是一紙契約預先規範了受益的形式，使得契約持有人**有權利，但非義務**，在某日得以履行約定並支取所實現的報酬。

Quiz

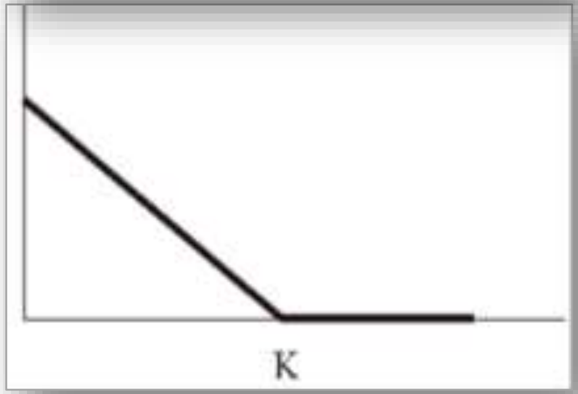
- （歐式）買權 (European call option) 契約規範了買方有權利，但非義務，可以在某固定的到期日 (maturity, expiration date) ，以一個預先決定好了的履約價格 ，來買進標的資產。

- （歐式）賣權 (European put option) 契約規範了買方有權利，但非義務，可以在某固定的到期日 (maturity, expiration date) ，以一個預先決定好了的履約價格 ，來賣出標的資產。

歐式買/賣權報酬函數



買權(Call Option)



賣權(Put Option)

- 性質上，歐式選擇權是「路徑獨立」(path independent) 的選擇權

「路徑相依」(path-dependent) 選擇權

- 若是契約報酬與到期日前的資產價格有關，則稱為「路徑相依」 (path-dependent) 的選擇權，例如美式選擇權 (American option)，亞式選擇權 (Asian option)，以及許多其它被統稱為新奇選擇權 (exotic option) 的契約，如障礙選擇權（ barrier option ） 等。
- 選擇權契約的價格也稱做權利金或貼水 (premium)。本書第五章會有深入的介紹。這些金融契約除了內容的形式非常具有彈性之外，「客製化」(tailor made) 的金融商品設計，使得金融機構可以提供多樣性的服務，讓消費者的金融風險，例如高科技或石化產業的匯率風險，得以轉嫁出去。

兩個問題：訂價與避險

- 選擇權契約的買方應該支付多少錢，這屬於「訂價」問題 (pricing problem)。

Quiz

- 選擇權契約的賣方在取得了權利金之後，要如何支付未來可能的報酬呢？這屬於「避險」問題(hedging problem)。
- 上述兩個問題的解答都會涉及先前討論之「套利」(arbitrage) 的觀念。

買賣權價平 (Put-Call Parity)

以 S_t， C_t 與 P_t 分別表示在 t 時的現貨（如股價） ，其歐式買權與賣權的價格。在此假設它們的到期日 T 與履約價 K 均為相同，並且資產 S 不支付股利，無風險利率為 r。買賣權的價平關係如下

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}。$$

這個關係的證明可以利用「無套利評價法」推論出來

補充資料：一紙複雜的合約

- 範例介紹 - 外匯結構型商品
- TRF (Target Redemption Forward)

第一節 USD/JPY 看漲目標贖回型

A 方：	[redacted]
B 方：	[redacted]
交易日：	2013 年 8 月 28 日
補付金：	10000 美元，A 方須在 2013 年 8 月 30 日支付 B 方補付金
即期匯率參考價：	97.003
每個月的美元名目本金：	100,000 美元
全部的美元名目本金：	1,200,000 美元
USDJPY 的買方：	A 方
USDJPY 的賣方：	B 方
交割日：	每個比價日之後的兩個商業日
槓桿比率：	2.00 倍
執行價匯率：	97.60
觸及生效匯率：	89.00
內在價值目標獲利：	1 美元對應 4 日圓乘以每月的名目本金
每個月的內在價值(MIV)：	在每個比價日期， MIV = Max(USDJPY 的比價匯率 – 執行價匯率，0)
累計的內在價值(CIV)：	在第 j 個月份的比價日[CIV_j]的定義為從第一個月份的比價日起的每個月內在價值的累計至第 j 個月份。 $CIV_j = \Sigma_{(i=1\ to\ j)}$(每個月的內在價值)
USDJPY 的比價匯率：	在比價日當天的東京時間 14:00，從路透社買賣報價的中間匯率當作比價匯率(如果無法得到路透社的報價，則由評價代理人單方以可靠的推測以及合理的商業慣例的方式來決定比價匯率)

比價時程表：

到期日	交割日
2013 年 9 月 26 日	2013 年 9 月 30 日
2013 年 10 月 28 日	2013 年 10 月 30 日
2013 年 11 月 27 日	2013 年 12 月 2 日
2013 年 12 月 26 日	2013 年 12 月 30 日
2014 年 1 月 27 日	2014 年 1 月 29 日
2014 年 2 月 25 日	2014 年 2 月 27 日
2014 年 3 月 27 日	2014 年 3 月 31 日
2014 年 4 月 25 日	2014 年 4 月 30 日
2014 年 5 月 28 日	2014 年 5 月 30 日
2014 年 6 月 26 日	2014 年 6 月 30 日
2014 年 7 月 28 日	2014 年 7 月 30 日
2014 年 8 月 27 日	2014 年 8 月 29 日

觸及失效事件：

當累計的內在價值大於或等於內在價值目標獲利，則觸及失效事件發生。如果觸及失效事件沒有發生，則在每個比價日根據下列情況進行結算：

1. 如果每個月的比價匯率大於或等於執行價匯率，B 方在比價日之後的兩個商業日，收到等同於

（每個月的美元名目本金）×（USDJPY 比價匯率-執行價匯率）÷ USDJPY 的美元金額

2. 如果每個月的比價匯率小於履約價且大於或等於觸及生效價，不進行結算

3. 如果每個月的比價匯率小於觸及生效價，B 方在比價日之後的兩個商業日，支付等同於

（每個月的美元名目本金）×（槓桿比率）×（執行價匯率-USDJPY 比價匯率）÷ USDJPY 的美元金額

如果發生觸及失效事件，則剩餘的結構型合約觸及失效。雙方對剩餘合約不再有結算交割的義務。對此最後的結算，B 方在比價日之後的兩個商業日，收到等同於

（每個月的美元名目本金）×（USDJPY 比價匯率-執行價匯率）÷ USDJPY 的美元金額

(二)損益圖：(交易日當天的即期匯率參考價 97.003)

(三)說明：

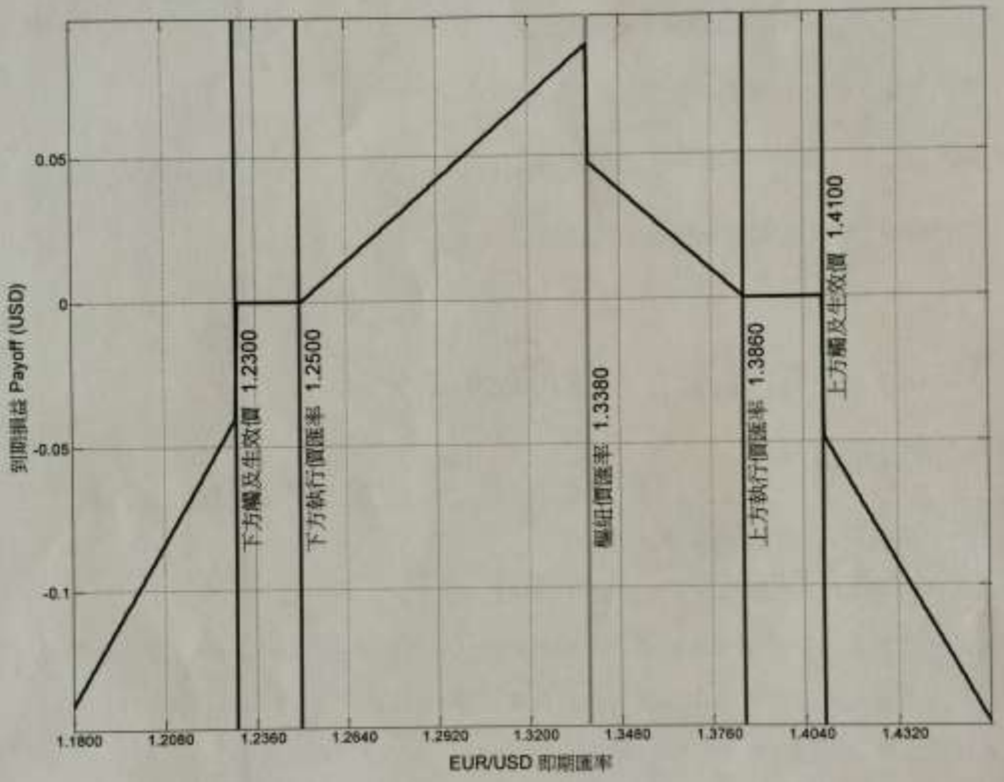
看漲型的到期損益被**執行價匯率**與**觸及生效匯率**分成三個區間：

1.虧損區間，當比價匯率＜觸及生效匯率

2.無損益區間，當觸及生效匯率＜比價匯率≦執行價匯率，不結算，損益為零

3.獲利區間，當比價匯率＞執行價匯率

(二)損益圖：(交易日當天的即期匯率參考價 1.3380)



現代金融衍生品市場：
1+1/4 個世紀的發展歷程

Dollar amount in 2015 is nearly $0.6 trillion.

1848: 芝加哥交易所（CBT）
1973: 芝加哥選擇權交易所（CBOE）

圖 2:2 美國芝加哥選擇權交易所 (CBOE) 歷年的交易量

台灣的新金融市場

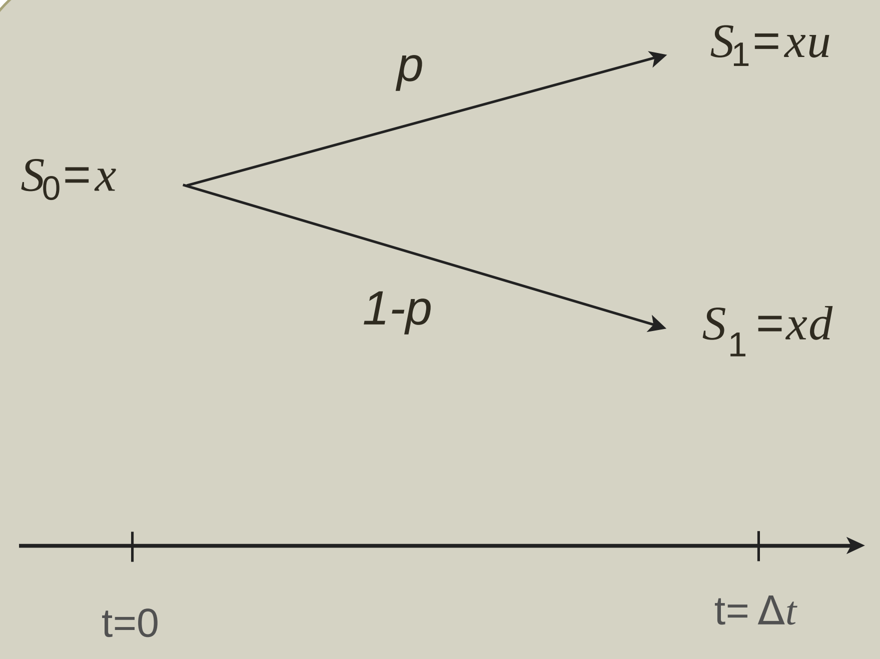
圖 2:3 台灣的金融衍生品市場歷年的交易量

離散二元樹模型 (Discrete Binomial Tree Model)

二元樹模型Binomial Tree Model (1/3)

- 單期二元樹模型
  - 假設風險性標的資產的起始股價是S_0=x，經過了以Δt為單位的一個期間之後，股價$S_1=S_{\Delta t}$。若不是以機率0<p<1上漲成為xu，就是以機率1-p下跌成為xd。無風險性資產的起始債券價格是 1，以無風險利率r連續複利，一期後累積的本利和是$e^{r\Delta t}$ 。

- 現考慮一歐式買權契約，履約價為K ，一期後到期，則期初時該選擇權的價值P_0為何？



股價的單期二元樹模型

二元樹模型Binomial Tree Model (2/3)

- **無套利評價法**：
  - 假設在期初時，投資組合是由α單位的股票和β單位的債券所構成，使得在期末時，投資組合的價值會滿足以下方程式

$$\alpha S_1 + \beta e^{r\Delta t} = (S_1 - K)^+$$

  - 也就是

$$\alpha x d + \beta e^{r\Delta t} = (xd - K)^+$$
$$\alpha x u + \beta e^{r\Delta t} = (xu - K)^+$$

  - 因此得到

$$\alpha = \frac{(xu-K)^+ - (xd-K)^+}{x(u-d)}, \quad \beta = \frac{(xu-K)^+ - \alpha x u}{e^{r\Delta t}}$$

  - 進而得到

$$P_0 = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u-d} e^{-r\Delta t}(xu-K)^+ + \frac{u - e^{r\Delta t}}{u-d} e^{-r\Delta t}(xd-K)^+$$

二元樹模型Binomial Tree Model (3/3)

- **風險中立評價法：** Quiz
  - 進一步假設 $0 < d < e^{r\Delta t} < u$ 且令 $0 < p^\star = \dfrac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} < 1$
  - 則
$$\begin{aligned} P_0 &= e^{-r\Delta t}\left(p^\star (xu - K)^+ + (1 - p^\star)(xd - K)^+\right) \\ &= E^\star\left\{e^{-r\Delta t}(S_1 - K)^+ | S_0 = x\right\} \end{aligned}$$
  - 其中 $p^\star$ 稱作風險中立機率。

二元樹模型參數估計

- 服從幾何布朗運動的股價可以表示為

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t$$

- 離散化後得到

$$S_T = S_t e^{(\mu-\sigma^2/2)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}Z}, \quad Z \sim N(0,1)$$

- 對應二元樹上漲、下跌的股價，我們可以得到

$$S_{t\pm\Delta t} = S_t e^{(\mu-\sigma^2/2)\Delta t\pm\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

- 亦即

$$u = e^{(\mu-\sigma^2/2)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{(\mu-\sigma^2/2)\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

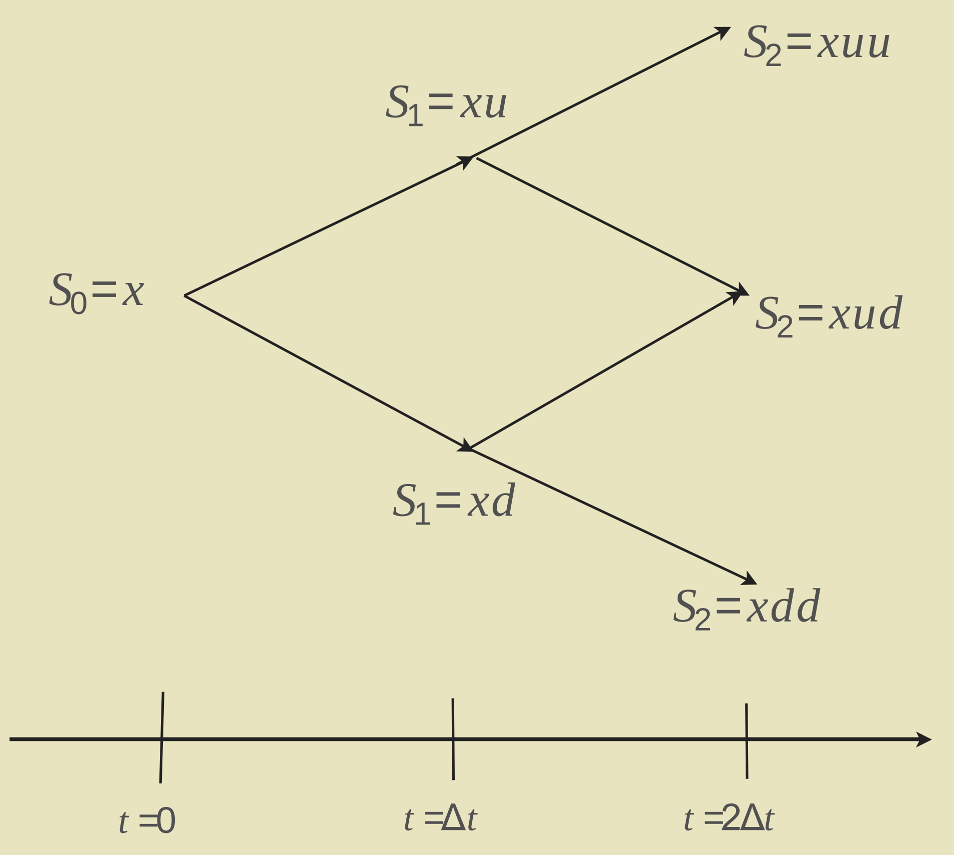
兩期二元樹模型

- 仿照單期的模型，我們先算在第一個節點的歐式選擇權價值：

$$P_1(S_1 = xu) = E^\star\left\{e^{-r\Delta t}(S_2 - K)^+ | S_1 = xu\right\}$$
$$P_1(S_1 = xd) = E^\star\left\{e^{-r\Delta t}(S_2 - K)^+ | S_1 = xd\right\}$$

- 進一步推算在起始節點的價值：

$$\begin{aligned}
&P_0(S_0 = x) \\
&= p^\star e^{-r\Delta t} P_1(S_1 = xu) + (1 - p^\star) e^{-r\Delta t} P_1(S_1 = xd) \\
&= E^\star\left\{e^{-r\Delta t} E^\star\left\{e^{-r\Delta t}(S_2 - K)^+ | S_1\right\} | S_0 = x\right\} \\
&= E^\star\left\{e^{-2r\Delta t}(S_2 - K)^+ | S_0 = x\right\}, \text{ by Markov property}
\end{aligned}$$



股價的兩期二元樹模型

伊藤公式 (Ito’s Formula)

布朗運動的定義

- 考慮連續時間下的隨機過程。若隨機過程$\{W_t\}_{t\geq 0}$滿足下列性質，則此過程稱為韋納過程(Wiener process)或是布朗運動。

1. 樣本路徑(sample path)連續
2. $W_0 = 0$ *（起始位置為 0）*
3. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ for $0 < s < t$（增量服從常態分配）
4. 若$0 \leq s \leq t \leq u \leq v, W_t - W_s \perp W_u - W_v$（兩時間上不重疊的增量是互為獨立的）

伊藤公式(1/3)

- 假設兩個一維度的布朗運動W_{1t}與W_{2t}互為獨立，則：

➲表 2-1　隨機微積分的運算表

$\cdot$	dt	dW_{1t}	dW_{2t}
dt	0	0	0
dW_{1t}	0	dt	0
dW_{2t}	0	0	dt

伊藤公式(2/3)

- 伊藤公式一(Itô’s Formula I)：
  - 給定（無限可微分）函數$f(x)$與布朗運動W_t，則

$$df(W_t) = f'(W_t)dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)dt$$

- 範例2.3：使用伊藤公式計算 $d{W_t}^2$
  - 解法：令$f(x) = x^2$，應用公式一可得出$d{W_t}^2 = 2W_t dW_t + dt$

伊藤公式一(Ito’s Formula Ⅰ)證明

- 根據泰勒展開式，

$$df(W_t) = f(W_t + dW_t) - f(W_t)$$

$$= f'(W_t)\,dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)(dW_t)^2 + o\big((dW_t)^2\big)$$

$$= f'(W_t)\,dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)\,dt + o(dt)$$

$$= f'(W_t)\,dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)\,dt$$

伊藤公式二 (3/3)

- 給定函數$f(t,x)$ ，布朗運動W_t，與伊藤過程S_t， $dS_t = \alpha(t,S_t)dt + \beta(t,S_t)\,dW_t$， 則

$$df(t,S_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,S_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,S_t)\beta^2(t,S_t)\,dt$$

- 範例2.4：令股價 S_t 服從$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$，計算折現後股價的動態行為，也就是$de^{-rt}S_t$，其中$e^{-rt}$是折現因子(discounting factor)。

  - 解法：令$f(t,x) = e^{-rt}x$，應用公式二可得出

$$de^{-rt}S_t = \sigma e^{-rt}S_t dW_t$$

由此隨機微分方程可看出，折現後的股價是平賭(martingale)。

伊藤公式二(Ito’s Formula Ⅱ)證明

➢根據泰勒展開式，

$$df(t,X_t) = f(t+dt, X_t + dX_t) - f(t,X_t)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)(dX_t)^2$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(t,X_t)\,dt\,dX_t + o(dt) + o\big((dX_t)^2\big) + o\big((dt)(dX_t)\big)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)(dX_t)^2$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)\beta(t,X_t)^2\,dt$$

範例2.4計算

- $f(t,x) = e^{-rt}x \to \frac{\partial f}{\partial t} = -re^{-rt}x,\ \frac{\partial f}{\partial x} = e^{-rt},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow d(e^{-rt}S_t) &= -re^{-rt}S_t\,dt + e^{-rt}\,dS_t \\
&= -re^{-rt}S_t\,dt + e^{-rt}(rS_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t) \\
&= e^{-rt}\sigma S_t\,dW_t
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow e^{-rT}S_T - S_0 = \int_0^T e^{-rt}\sigma S_t\,dW_t$$

Black-Scholes 偏微分方程式: BS PDE

Black- Scholes PDE (1/4)

- Black-Scholes 模型是假設一個簡單的股票與現金存款賬戶(money market account)所構成的經濟體系，其中的股價S_t服從幾何布朗運動，

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t ,$$

- 起始股價是 $S_0 = x$。
- 存款賬戶的價值 B_t 服從一常微分方方程式 $dB_t = rB_t dt$，$B_0 = 1$， 因而 $B_t = e^{rt}$ 。
- 無套利訂價理論 (no arbitrage pricing theory) 是基於衍生品的價值 $P(t, S_t)$ ，必須等同於某一投資組合的價值。

Black- Scholes PDE (2/4)

- 在 Black-Scholes 模型的假設之下，$P(t, S_t)$ 由持有 α_t 單位的股票與 β_t 單位的現金賬戶所「複製(replication)」出來：

$$\alpha_t S_t + \beta_t e^{rt} = P(t, S_t) \qquad (2\text{-}1)$$

- 否則存在套利利機會。在自我融資的假設條件下，應用伊藤引理於 式 (2-1)，可以導出：

$$(\alpha_t \mu S_t + \beta_t r e^{rt})\, dt + \alpha_t \sigma S_t dW_t$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial P}{\partial x} dW_t \qquad (2\text{-}2)$$

- 其中，所有關於 P 的偏微分都是在變數 $(t, S_t = x)$ 上計算，將上 式中等號兩邊dW_t 的係數相等，我們可以得到：

$$\alpha_t = \frac{\partial P}{\partial x}(t, S_t) \qquad (2\text{-}3)$$

Black- Scholes PDE (3/4)

- 使得透過式 (2-1) 得到

$$\beta_t = (P(t, S_t) - \alpha_t S_t)e^{-rt} \qquad (2\text{-}4)$$

- 將 (2-3) 與 (2-4) 的結果代入 (2-2) 中，再讓等號兩邊 *dt* 項的係數相等可以得到：

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, S_t) + rS_t \frac{\partial P}{\partial x}(t, S_t) - rP(t, S_t) = 0$$

Black- Scholes PDE (4/4)

- 此方方程式對任何股價$S_t > 0$及$0 \leq t < T$都成立（按：數學上嚴謹的說法是 almost surely)。
- 因此，以變數 x 代表 S_t，選擇權價值函數 $P(t, x)$ 是以下的 Black-Scholes 偏微分方程式 (BS Pricing PDE)的解

$$\mathcal{L}_{BS} P\,(t, x) = 0 \qquad (2\text{-}5)$$

- 且期末條件 (terminal condition) 為 $P(T, x) = h(x)$。其中的偏微分算子：

$$\mathscr{L}_{BS}(\,\cdot\,) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + rx\frac{\partial}{\partial x} - r\right)(\,\cdot\,)$$

Black- Scholes 選擇權訂價公式

Black- Scholes Option Pricing Formula

Quiz

- 將一個歐式買權的價格，記為 $C_{BS}(t, x)$ 。根據式 (2-5)，它會滿足 $\mathcal{L}_{BS}C_{BS}(t, x) = 0,\ C_{BS}(T, x) = (x - K)^{+}$，其中 T 是到期日，K是履約價。事實上可以利用微分方程中變數變換的方式，將此 **Black-Scholes pricing PDE**轉換成為一個**熱傳導方程式**，接著利用熱核(heat kernel)對期末條件做卷積，就可以推出下列的封閉解。在此我們雖不提供上式的推導，但會在下一節當中以機率的方式進行推導。歐式買權存在一個封閉解函數型式如下：

$$C_{BS}(t, x; T, K) = x\,\mathcal{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2) \qquad (3\text{-}1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{x}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

$$\mathcal{N}(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_1} e^{-u^2/2}\,du.$$

買賣權價平Put-call parity

- 買權與賣權存在一個恆定關係，稱為買賣權價平(put-call parity) 如下：

$$C_{BS}(t, x) - P_{BS}(t, x) = x - Ke^{-r(T-t)}$$

- 此決定性關係可由偏微分方程式

$$\mathcal{L}_{BS}(C_{BS} - P_{BS})(t, x) = 0$$

配合期末的邊界條件 $(C_{BS} - P_{BS})(T, x) = x - K$ 解出

$$\boxed{(C_{BS} - P_{BS})(t, x) = x - Ke^{-r(T-t)}}$$

波動率的估計

Quiz

- 注意到從 Black-Scholes 公式當中，只**有一個無法直接觀察的參數**，也就是波動率 σ，一般在實務上有兩種方法可以從市場上估計波動率：

1. 直接法：給定一組標的物的歷史價格，我們可以用
   - Log return 的最大概似法，或是
   - 先計算其報酬率，然後算出標準差：該量稱之為「歷史波動率(historical volatility)」。本書第四章第三節有詳細的介紹。

2. 隱含法：給定選擇權市場中，關於某到期日T與某履約價K 之歐式買權（或賣權）的成交價格，利用 Black-Scholes 的評價公式反推出 σ，稱作「隱含波動率(implied volatility)」，通常也記做 $\sigma_{imp}(T, K)$。