

# Forecast financial crisis in brasilian stock market using Naive Bayes - CCAPM

Marcos J Ribeiro  
FEARP-USP

19 de Maio de 2020

# 1 Literatura Empírica

Diferentes abordagens empíricas podem ser empregadas para se tentar prever crises financeiras. As três principais são: (i) Modelo Multilogit; (ii) Métodos de *Machine Learning* ou *Deep Learning*; (iii) Equação da Lei de Energia Periódica Logarítmica (LEPL). Em geral, os pesquisadores se debruçam sobre a tarefa de criar um *Early Warning System* (EWS) para crises financeiras, utilizando um desses três métodos. O objetivo é prever crises financeiras para que os formuladores de políticas econômicas possam tentar mitigar seus possíveis efeitos adversos.

Nos métodos (i) e (ii) é construído uma variável dependente categórica, que indica quais os períodos de crise, pós crise e "tranquilos". Em seguida seleciona-se um conjunto de variáveis de controle e estima-se o modelo. Tal modelo deve fornecer um vetor de probabilidades, que quando ultrapassa algum limite definido pelo pesquisador significa que o período é de crise. Utilizando a primeira abordagem [Bussiere e Fratzscher \(2006\)](#) desenvolveram um EWS para prever crises cambiais em um grupo de 20 países emergentes. Os resultados apresentados por eles mostraram que no período de 1993 a 2001 o modelo desenvolvido previu a maioria das crises cambiais.

[Coudert e Gex \(2008\)](#) adotaram procedimento semelhante, ao tentar prever crises no mercado de ações e também no cambial. Porém, os autores inovaram ao adicionar junto as variáveis de controle indicadores de aversão ao risco. A pesquisa de [Coudert e Gex \(2008\)](#) abrangeu países desenvolvidos e subdesenvolvidos, no período de 1995 a 2005. E foram estimadas diferentes especificações do modelo Multilogit, sendo que em cada diferente especificação foi adicionado um indicador de aversão ao risco junto com os outros controles. Os resultados encontrados para o mercado cambial exibiram pouca capacidade preditiva. Em contrapartida, no mercado de ações o modelo estimado apresentou bons resultados, principalmente o modelo cujo indicador de aversão ao risco foi o PCA<sup>1</sup>.

Embora o modelo Multilogit tenha apresentado bom desempenho na tarefa de prever crises financeiras, várias pesquisas tem demonstrado que algoritmos de *Machine Learning* e *Deep Learning* também tem boa performance, e em alguns casos, superior ao Multilogit. Na pesquisa de [Chatzis et al. \(2018\)](#) o EWS global para crises no mercado de ações foi elaborado utilizando essa abordagem, e dados de 39 países entre 1996 e 2017. Segundo os autores, dentre os vários algoritmos testados dois tiveram melhor desempenho, redes neurais profundas e XGBoost. Já [Bluwstein et al. \(2020\)](#) utilizaram uma base de dados mais ampla, com 17 países e horizonte temporal de 146 anos. Os autores demonstraram que algoritmos de *Machine Learning* são bastante promissores na tarefa de prever crises.

Já o método (iii) foi elaborado por [Sornette et al. \(1996\)](#) e consite em ajustar uma equação que quantifica a LEPL para dados financeiros. O objetivo é que tal equação capture o comportamento de bolhas especulativas e forneça o período no qual é mais provável que se ocorra um colapso no mercado financeiro<sup>2</sup>. [Cajueiro et al. \(2009\)](#), por exemplo, utilizou esse método em dados de preços intradiários de várias ações do mercado brasileiro. O objetivo foi prever um "momento crítico", ou seja, o fim de uma bolha especulativa ou uma queda acentuada nos preços das ações. Os resultados apresentados por [Cajueiro et al. \(2009\)](#) mostraram ser possível prever tal "momento crítico".

---

<sup>1</sup>Baseando-se na teoria de preços de arbitragem (APT) de [Ross \(1976\)](#), [Coudert e Gex \(2008\)](#) criaram um indicador de aversão ao risco utilizando análise dos componentes principais (PCA) em oito prêmios de risco. Os prêmios de risco foram escolhidos de modo a representar mudanças no mercado de renda fixa.

<sup>2</sup>Mais detalhes podem ser vistos em [Geraskin e Fantazzini \(2013\)](#).

## 2 Aversão ao risco no Modelo CCAPM

Suponha que o investidor aja livremente e pode comprar ativos no período  $t$  pelo preço  $p_t$ , e vendê-los em  $t + 1$  e obter a renda bruta<sup>3</sup>  $x_{t+1} = p_{t+1} + d_{t+1}$ , onde  $d_{t+1}$  é o dividendo pago pelo ativo. Seja  $e_t$  a renda não financeira desse investidor e  $\xi$  a quantidade de ativos que ele escolhe comprar. Logo, seu problema consiste em maximizar sua utilidade, que é do tipo von Neumann-Morgenstern, ou seja, aditivamente separável.

$$\begin{aligned} \underset{\xi}{Max} \quad & u(c_t) + \delta E_t[u(c_{t+1})] \\ c_t = & e_t + p_t \xi \\ c_{t+1} = & e_{t+1} + x_{t+1} \xi \end{aligned} \tag{1}$$

Neste modelo  $\delta$  pode ser entendido como o fator de desconto subjetivo, que por sua vez, captura as preferências de consumo do investidor pelo presente. Note que, se  $\delta$  for igual a zero o investidor é impaciente, ou seja, irá preferir consumir mais no presente do que no futuro.

Ao derivar a função objetivo em relação a  $\xi$  e igualar a zero obtém-se a condição de primeira ordem para o consumo e escolha de portfólio.

$$p_t = E_t \left[ \delta \frac{u'_t(c_{t+1})}{u'_t(c_t)} x_{t+1} \right] \tag{2}$$

Isso quer dizer que o investidor continuará comprando e vendendo ativos até o ponto em que a perda marginal seja igual ao ganho marginal. A equação 2 pode ser reescrita como:

$$p_t = E_t(m_{t+1} x_{t+1}) \tag{3}$$

onde:

$$m_{t+1} \equiv \delta \left[ \frac{u'_t(c_{t+1})}{u'_t(c_t)} \right] \tag{4}$$

é a taxa marginal de substituição do consumo intertemporal, também conhecido por SDF (*Stochastic Discount Factor*).

Na ausência de risco, dividindo ambos os lados da equação 3 por  $p_t$  obtém-se o retorno bruto do ativo livre de risco.

$$R_{t+1}^f = \frac{1}{E_t(m_{t+1})} \tag{5}$$

Três conclusões derivam da equação 5: (i) quanto menor a taxa de impaciência  $\delta$ , maior será a taxa de juros real; (ii) aumentos no consumo estão associados a maior taxa de juros; (iii) se a função de utilidade for do tipo CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*),  $u(c_t) = c_t^{1-\gamma}/(1-\gamma)$ , então a taxa de juros será sensível ao coeficiente de aversão ao risco  $\gamma$  (Cochrane, 2009).

Por definição, o prêmio de risco é a diferença entre o retorno esperado do ativo de risco e o ativo livre de risco,  $E_t(R_{t+1}) - R_{t+1}^f$ . Logo, considerando a equação 5 e o fato de que  $1 = E_t(m_{t+1} R_{t+1})$  tem-se que:<sup>4</sup>

$$E_t(R_{t+1}) - R_{t+1}^f = -Cov(m_{t+1}, R_{t+1}) R_{t+1}^f \tag{6}$$

<sup>3</sup>A renda bruta pode ser considerada estocástica, uma vez que o investidor não sabe qual será o rendimento futuro dos seus investimentos.

<sup>4</sup>Note que  $Cov_t(m_{t+1}, R_{t+1}) = 1 - E_t(m_{t+1})E_t(R_{t+1})$ .

Assumindo que há  $i = 1, 2, \dots, N$  ativos de risco na economia, pode-se reescrever a equação 6 da seguinte forma:

$$E_t(R_{t+1}^i) - R_{t+1}^f = \left( \frac{-Cov_t(m_{t+1}, R_{t+1}^i)}{Var_t(m_{t+1})} \right) \left( \frac{Var_t(m_{t+1})}{E_t(m_{t+1})} \right), \quad \forall i$$

$$E_t(R_{t+1}^i) - R_{t+1}^f = \lambda_m \beta_{i,m} \quad (7)$$

onde:

$$\beta_{i,m} = \left( \frac{-Cov_t(m_{t+1}, R_{t+1}^i)}{Var_t(m_{t+1})} \right) \quad (8)$$

$$\lambda_m = \left( \frac{Var_t(m_{t+1})}{E_t(m_{t+1})} \right) \quad (9)$$

Aqui,  $\lambda_m$  é considerado o preço do risco ou aversão ao risco<sup>5</sup>, comum a todos os ativos  $i$ . E  $\beta_{i,m}$  é a quantidade de risco de cada ativo  $i$ .

Agora considere que a utilidade seja do tipo CRRA, isso faz com que  $m_{t+1} = \delta(c_{t+1}/c_t)^{-\gamma}$ . Então, utilizando a expansão de Taylor em  $u'(c_{t+1})$  em torno de  $c_t$  obtém-se:

$$\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \approx 1 + \frac{u''(c_t)(c_{t+1} - c_t)}{u'(c_t)} \quad (10)$$

substituindo essa expressão na equação 6 e dividindo e multiplicando o lado direito por  $Var_t(g_{t+1})$  obtém-se<sup>6</sup>:

$$E_t(R_{t+1}) - R_{t+1}^f = \gamma Var_t(g_{t+1}) \left( \frac{Cov_t(g_{t+1}, R_{t+1})}{Var_t(g_{t+1})} \right) \quad (11)$$

sendo que  $g_{t+1} = (c_{t+1} - c_t)/c_t$  é a taxa de crescimento do consumo. Logo, a equação 7 pode ser reescrita em termos de  $g_{t+1}$

$$E(R_{t+1}^i) - R_{t+1}^f = \lambda_{g_{t+1}} \beta_{i,g_{t+1}} \quad (12)$$

em que:

$$\beta_{i,g_{t+1}} = \left( \frac{Cov_t(g_{t+1}, R_{t+1})}{Var_t(g_{t+1})} \right) \quad (13)$$

e

$$\lambda_{g_{t+1}} = \gamma Var_t(g_{t+1}) \quad (14)$$

Nota-se pela equação 12 que tanto aumentos na volatilidade quanto na aversão ao risco aumentam o prêmio de risco. Pelo lado da volatilidade, em períodos de alto consumo os ativos de risco que tem alta correlação com o consumo oferecem retornos maiores, o que por sua vez aumenta o prêmio de risco. Já a aversão ao risco altera o prêmio de risco de acordo com a variância da taxa de crescimento do consumo e do parâmetro  $\gamma$ .

<sup>5</sup>Embora esta definição também seja utilizado para  $\gamma$ , se trata de parâmetros distintos.

<sup>6</sup>Supõe-se que  $E_t[u'(c_{t+1})] \approx u'(c_t)$ .

## Referências

- Bluwstein, K., Buckmann, M., Joseph, A., Kang, M., Kapadia, S., e Simsek, Ö. (2020). Credit growth, the yield curve and financial crisis prediction: evidence from a machine learning approach.
- Bussiere, M. e Fratzscher, M. (2006). Towards a new early warning system of financial crises. *Journal of International Money and Finance*, 25(6):953–973.
- Cajueiro, D. O., Tabak, B. M., e Werneck, F. K. (2009). Can we predict crashes? the case of the brazilian stock market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 388(8):1603–1609.
- Chatzis, S. P., Siakoulis, V., Petropoulos, A., Stavroulakis, E., e Vlachogiannakis, N. (2018). Forecasting stock market crisis events using deep and statistical machine learning techniques. *Expert Systems with Applications*, 112:353–371.
- Cochrane, J. H. (2009). *Asset pricing: Revised edition*. Princeton university press.
- Coudert, V. e Gex, M. (2008). Does risk aversion drive financial crises? testing the predictive power of empirical indicators. *Journal of Empirical Finance*, 15(2):167–184.
- Geraskin, P. e Fantazzini, D. (2013). Everything you always wanted to know about log-periodic power laws for bubble modeling but were afraid to ask. *The European Journal of Finance*, 19(5):366–391.
- Ross, S. A. (1976). The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*, 13(3):341–360.
- Sornette, D., Johansen, A., e Bouchaud, J.-P. (1996). Stock market crashes, precursors and replicas. *Journal de Physique I*, 6(1):167–175.