За игрой в карты с чертиком Визинга

Б.РАБЕРН, Л.РАБЕРН

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ РАССКАЖЕМ о двух классических результатах теории графов – теоремах Кёнига [1] и Визинга [2]. Стандартные доказательства этих теорем можно прочитать, например, в книге [3]. Мы же получим доказательства из анализа выигрышных стратегий в некоторой карточной игре. Для начала давайте познакомимся с игрой.

Правила карточной игры

Зададимся произвольным натуральным числом k, которое будет в дальнейшем означать количество стопок карт в игре. Игру с данным k будем называть k-игрой.

В игре будут участвовать *игрок* и *чертик*. Перед началом чертик выбирает число $m \geq k$, определяющее число различных достоинств карт (скажем, если $m = 3$, у нас будут карты трех достоинств; назовем их 1-карты, 2-карты и 3-карты). Затем чертик создает km карт для игры: k штук 1-карт, k штук 2-карт , …, k штук m-карт. После этого чертик раскладывает карты в k стопок таким образом, чтобы в каждой стопке была хотя бы одна карта и при этом каждая стопка содержала не более одной карты каждого достоинства. Обозначим число карт в i-й стопке через n_i, тогда последовательность $(n_1,\ldots,n_k)$, описывающую число карт во всех стопках, назовем *раскладом* игры. Оставшиеся карты, не вошедшие в стопки, образуют *колоду*. (Считаем, что все карты в стопках и в колоде всегда видны игрокам.)

Например, рассмотрим игру с $k = 3$, картами 4 достоинств, т.е. с $m = 4$, и раскладом $(1,1,3)$. Чертик кладет одну карту в первую стопку, одну во вторую, три – в третью, остальные карты останутся в колоде. На рисунке 1 изображено возможное начальное состояние этой игры.

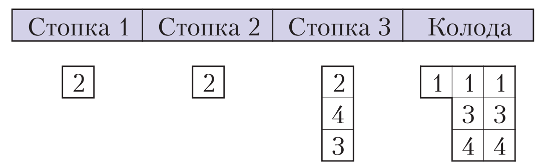

Рис. 1

Ход игрока. Игрок выбирает некоторую стопку, в которой есть a-карта, но нет b-карты, и меняет a-карту на b-карту из колоды (отметим, что b-карта в колоде найдется, так как b-карт всего k штук). Иными словами, игрок может поменять любую карту в любой из стопок на карту из колоды, если только это не приведет к тому, что в стопке окажутся две карты одного достоинства.

Выигрыш. Игрок побеждает, если перед началом своего очередного хода он может, выбирая из каждой стопки по одной карте, набрать k карт различных достоинств. Такой набор будем называть *выигрышным* набором.

Чертик усложняет игру: ему разрешено перемещать определенным образом карты после каждого хода игрока. Существует или нет выигрышная стратегия у игрока, зависит от того, как именно может действовать чертик.

Для начала рассмотрим «крайние» случаи.

Ленивый чертик. После каждого хода ленивый чертик ничего не делает.

Может ли игрок выиграть? Конечно. Достаточно пройтись по стопкам и, если в

Перевод с английского П.Панюниной.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20231001

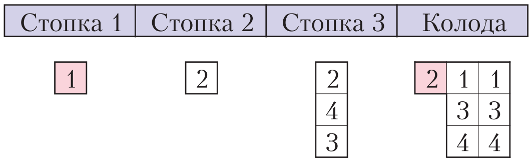

Рис. 2

стопке с номером i нет i-карты, поменять какую-либо карту из этой стопки на i-карту из колоды (так как всего в игре k штук i-карт, то такая карта в колоде найдется).

В приведенном на рисунке 1 примере игроку для выигрыша достаточно заменить 2-карту в первой стопке на 1-карту в колоде (рис. 2). Теперь есть выигрышный набор, и ленивый чертик проигрывает.

Вредный чертик. После каждого хода вредный чертик отменяет то, что только что сделал игрок. Тем самым, если игрок поменял в некоторой стопке a-карту на b-карту из колоды, то вредный чертик меняет ее обратно.

Ясно, что с таким чертиком игрок победить не сможет, если только начальная позиция уже не была выигрышной для игрока.

Некоторые интересные чертики

Игры с ленивым и вредным чертиками оказались скучными. Рассмотрим более содержательные примеры чертиков. Забегая вперед, скажем, что выигрышные стратегии в играх с этими чертиками и приведут нас к доказательству теорем Кёнига и Визинга.

Чертик Кёнига. Пусть игрок поменял a-карту из i-й стопки на b-карту из колоды. Отвечая на этот ход, чертик Кёнига либо не делает ничего, либо выбирает стопку, отличную от i-й, которая содержит b-карту, но не содержит a-карту, и меняет ее на a-карту из колоды.

Теорема 1. *У игрока есть выигрышная стратегия против чертика Кёнига для любой k-игры.*

Доказательство. Допустим, чертик начал k-игру с раскладом $(n_1,\ldots,n_k)$. Рассмотрим максимальный набор карт различного достоинства, который игрок может собрать, взяв не более одной карты из каждой стопки. Если этот набор содержит k карт, то этот набор – выигрышный. В противном случае есть стопка, скажем с номером i, из которой игрок не выбирал карт для максимального набора. Найдется число $b \le m$ такое, что в нашем максимальном наборе нет b-карты. В i-й стопке нет b-карты (иначе мы бы добавили ее к максимальному множеству, что противоречило бы максимальности). Но в i-й стопке есть хотя бы одна карта – пусть это a-карта. Тогда игрок может заменить a-карту из этой стопки на b-карту из колоды.

Чертик в ответ либо не делает ничего, либо меняет b-карту из некоторой другой стопки на a-карту из колоды, а значит, не сможет помешать игроку перед началом следующего хода увеличить предыдущий максимальный набор на b-карту из i-й стопки.

Повторяя этот процесс, игрок может добиться, чтобы в максимальном наборе стало k карт, и, таким образом, выиграть. Теорема доказана.

Чертик Визинга. Рассмотрим теперь игру с чертиком Визинга. Допустим, игрок поменял a-карту из i-й стопки на b-карту из колоды. В ответ чертик Визинга либо ничего не делает, либо выбирает стопку, отличную от i-й, которая содержит b-карту, но не содержит a-карту, и меняет b-карту на a-карту из колоды или выбирает стопку, отличную от i-й, которая содержит a-карту, но не содержит b-карту, и меняет a-карту на b-карту из колоды.

Теорема 2. *У игрока есть выигрышная стратегия против чертика Визинга для любой k-игры с раскладом $(n_1,\ldots,n_k)$, в котором не более чем одно n_i равно 1.*[1]

Доказательство. Предположим, что у игрока есть стратегия получить перед своим ходом позицию, в которой найдется некоторое непустое подмножество S из $s \le k-1$ стопок и такой выбор s карт различных достоинств (скажем, это a_1-,…, a_s-карты) по одной карте из каждой стопки из S, что карты этих достоинств не

[1] По сути стратегия игрока частично основана на доказательствах теоремы Визинга из [4] и [5].

встречаются в стопках не из S. Такую позицию мы назовем *приводимой* по следующей причине.

Пусть T – множество всех стопок, не принадлежащих S, и пусть их $t = k - s$ штук. Игрок может мысленно удалить все a_1-,…, a_s-карты из колоды и сыграть t-игру со стопками из T (при этом если чертик в каком-то ответном ходе задействовал стопку из S, то можем считать, что в нашей t-игре он ничего не сделал). Отметим, что расклад в t-игре удовлетворяет условию теоремы 2. Если игроку удастся выиграть в t-игре, т.е. набрать из стопок T карты различного достоинства, то, объединив эти карты с картами $a_1, \ldots, a_s$ из S, он добьется выигрыша в исходной k-игре. Иначе, играя в t-игру, игрок снова дойдет до приводимой позиции и т.д., пока не придет к 1-игре, которая, очевидно, выигрышная.

Покажем, что в любой игре игрок действительно может дойти до приводимой позиции.

Предположим, что есть не более $k-1$ достоинств, появляющихся на картах в стопках. По условию теоремы 2 в стопках находится не менее $2(k-1)+1 = 2k-1$ карт. Из принципа Дирихле получаем, что какое-то достоинство, скажем a-карта, появляется в трех или более стопках. Поскольку всего в стопках не более $k-1$ достоинств, игрок может выбрать достоинство b, не появляющееся ни в одной стопке, и поменять местами a-карту в одной из стопок на b-карту из колоды. Поскольку ни одна другая стопка не содержит b-карту, после ответа чертика b-карта останется в стопке, а кроме того, в стопках все еще останется по крайней мере одна a-карта. Таким образом, игрок увеличил количество достоинств, появляющихся на картах в стопках.

Он может повторять эту процедуру до тех пор, пока в стопках не появится не менее k различных достоинств.

Теперь покажем, что любая позиция с k или более различными достоинствами карт, появляющимися в стопках, либо является приводимой, либо уже выигрышная (т.е. игрок сразу может выбрать выигрышный набор из k карт).

Предположим, у нас есть такая позиция, и пусть A – множество из k различных достоинств, появляющихся в стопках. Выберем наименьшее непустое подмножество B из A такое, что достоинства из B появляются не более чем в $|B|$ стопках. Мы можем это сделать, поскольку A само является таким подмножеством.

Если $|B| = 1$, то пусть c – единственная стопка, содержащая карту достоинства из B. Тогда наша позиция приводимая, где $S = \{c\}$.

Пусть теперь $|B| \geq 2$. Выберем произвольное b из множества B и уберем его, получив множество B'. Из условия минимальности множества B следует, что достоинства из B' появляются по крайней мере в $|B'| + 1 = |B|$ стопках. Следовательно, достоинства из B появляются в точности в $|B|$ стопках. Допустим, S – множество этих стопок. Покажем, что, выбирая из каждой стопки множества S по одной карте, можно набрать карты разных достоинств, отсюда и будет следовать, что позиция приводимая.

Мы можем сделать это, используя лемму Холла, известную также как теорема о свадьбах ([6], [7]).

Лемма Холла. *Пусть есть n юношей и n девушек. Предположим, что для каждой группы, состоящей из k девушек $(k = 1, 2, \ldots)$ имеется по крайней мере k юношей, имеющих друзей среди этих девушек. Тогда каждого юношу можно женить на девушке, с которой он дружит.*

Чтобы применить теорему Холла в нашем случае, будем считать, что множество стопок S – это юноши, а множество достоинств B – это девушки. Для каждой девушки b из B юноши, с которыми она дружит, будут стопки из S, содержащие b-карту.

Мы знаем, что $|S| = |B|$ и для любого подмножества C множества B достоинства из C присутствуют по крайней мере в $|C|$ стопках. Тем самым, для любой группы девушек существует группа юношей такого же размера, в которой у каждого юноши есть по крайней мере одна знакомая девушка. Значит, условия теоремы Холла

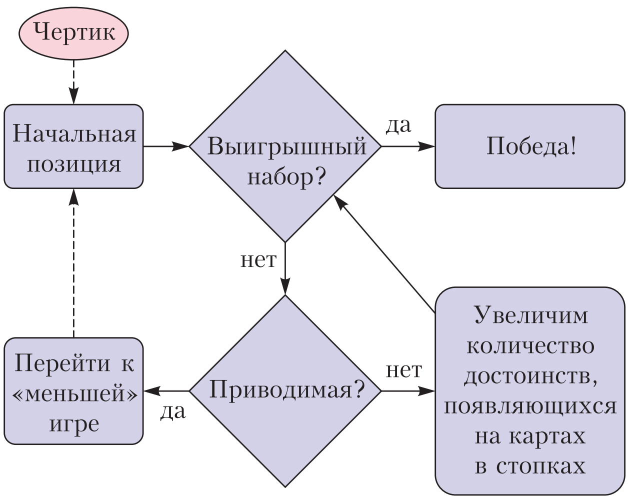

Рис. 3

выполнены и каждого юношу можно женить на девушке, с которой он дружит. Но это в точности и означает, что мы можем выбрать набор карт разных достоинств по одной карте из каждой стопки в S.

Если $|S| = k$, то это выигрышный набор. Если $|S| < k$, то позиция приводимая. Что и требовалось доказать.

Итак, у игрока есть выигрышная стратегия против чертика Визинга. На рисунке 3 показана схема этой стратегии.

Раскраска графов

Применим теперь полученные результаты для доказательства теорем о реберных раскрасках графов. Напомним некоторые необходимые нам понятия, связанные с графами.

Графом называется множество точек и линий, их соединяющих. Точки называются *вершинами*, а линии – *ребрами*. Будем рассматривать графы, в которых ни одно ребро не идет из вершины в нее саму и между любыми двумя вершинами проходит не более одного ребра. Две вершины, соединенные ребром, называют *соседними*. *Степенью вершины* называется число выходящих из нее ребер. *Путь* в графе – это последовательность ребер, в которой конец одного ребра является началом другого; *длиной пути* называют количество ребер в нем. *Циклом* в графе называется замкнутый путь.

Граф называется *двудольным*, если его вершины можно разделить на два множества так, чтобы никакие две вершины из одного множества не были соединены ребром. Нетрудно понять, что двудольный граф не содержит циклов нечетной длины.

Реберной раскраской графа называется назначение ребрам графа цветов таким образом, что смежные (т.е. выходящие из одной вершины) ребра получают разные цвета.

Классическая теорема Кёнига 1931 года (см. [1]) может быть сформулирована следующим образом.

Теорема Кёнига. *Если каждая вершина в двудольном графе имеет степень не более k, то граф имеет реберную раскраску с использованием не более k цветов.*

Теорема Визинга 1964 года (см. [2]) утверждает, что для произвольных графов нужен на один цвет больше.

Теорема Визинга. *Если каждая вершина в графе имеет степень не более k, то граф имеет реберную раскраску с использованием не более $k+1$ цветов.*

Доказательство обеих теорем можно свести к нашей игре с чертиком. Покажем, как это сделать.

Предположим, что из графа G удалена вершина v степени k и все исходящие из нее ребра, а ребра оставшегося графа покрашены в цвета 1, 2, …, m, где m не меньше k. Проверим, что можно продолжить эту раскраску ребер до раскраски ребер исходного графа G, используя только цвета 1, 2, …, m.

Для этого сыграем в k-игру с числом достоинств m. Для каждой вершины x, соседней с v, чертик создает стопку S_x, в которую он кладет карты с номерами цветов, которые не появляются на ребрах, исходящих из x. Если степень x в графе G равна d, то в S_x окажется $m+1-d$ карт, так как все ребра, исходящие из x, окрашены в некоторые цвета, а ребро, соединяющее вершины x и v, пока не окрашено.

Предположим, что S_x содержит a-карту, но не содержит b-карту. Это означает, что есть ребро, исходящее из x, окрашенное в цвет b, но нет ребер, окрашенных в цвет a. Рассмотрим максимальный по длине путь (без повторяющихся ребер), начинающийся в x, в котором чередуются ребра цвета b и ребра цвета a. Так как как из каждой вершины выходит не более одного ребра данного цвета, такой путь единственный.

Если мы поменяем цвета a и b ребер вдоль этого пути, то получим другую раскраску ребер графа G без вершины v, которая снова использует только цвета 1, 2, …, m. При этом в соответствующей стопке S_x a-карта заменяется на b-карту из колоды. Если путь не заканчивается в вершине, соседней с v, то никакая другая стопка не изменяется (т.е. чертик пропустил свой ход). Допустим, что путь все-таки заканчивается в соседней с v вершиной, и обозначим ее y. Тогда y – это не x, потому что из x не выходит ребер цвета a и выходит только одно ребро цвета b.

Если G – двудольный граф, то длина рассматриваемого пути четна, поскольку в противном случае этот путь вместе с ребром vx и ребром vy создали бы цикл нечетной длины. Следовательно, поскольку путь начинался с ребра цвета b, он должен заканчиваться ребром цвета a. Смена цветов вдоль пути соответствует замене в стопке S_y b-карты на a-карту из колоды.

Мы видим, что смена цветов ребер вдоль пути в двудольном графе соответствует ходу игрока, за которым следует ход чертика Кёнига.

Если G не является двудольным, то последнее ребро нашего пути может быть окрашено либо в цвет a, либо в цвет b и, следовательно, смена цветов ребер вдоль пути соответствует ходу игрока, за которым следует ход чертика Визинга.

Предположим теперь, что одна из теорем неверна.

Рассмотрим граф с минимальным числом вершин, для которого теорема неверна. Поскольку граф только с одной вершиной не имеет ребер, его можно раскрасить в ноль цветов. Следовательно, G имеет по крайней мере две вершины. Пусть v – вершина степени k и в G нет вершин степени больше k (так что k – максимальная степень вершин в G). Из условия минимальности на G следует, что удаление вершины v приведет к графу, который может быть раскрашен с использованием m цветов, где m равно k для теоремы Кёнига и m равно $k+1$ для теоремы Визинга. Тогда для каждого соседа x из v в стопке S_x есть $m+1-d$ карт, где d – количество соседей x. Поскольку $d \le k$, это не менее $m+1-k$ карт, т.е. по крайней мере одна карта для теоремы Кёнига и по крайней мере две карты для теоремы Визинга.

Сыграв в k-игру, игрок соберет выигрышный набор из k карт разного достоинства, взяв по одной карте из каждой стопки. Тогда раскраска ребер, исходящих из v, в цвета с номерами этих карт даст реберную раскраску G с использованием m цветов. Противоречие.

Следовательно, обе теоремы верны!

Литература

1. *D.König.* Grafok es matrixok. – Matematikai es Fizikai Lapok, vol.38, 1931, p.116–119.

2. *В.Г.Визинг.* Об оценке хроматического класса p-графа. Дискретный анализ. – Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1964, т.3, с.25–30.

3. *M.Stiebitz, D.Scheide, B.Toft and L.M.Favrholdt.* Graph Edge Coloring: Vizing's Theorem and Goldberg's Conjecture. – Wiley, 2012.

4. *A. Ehrenfeucht, V. Faber and H. A. Kierstead.* A new method of proving theorems on chromatic index. – Discrete Mathematics, vol. 52, 1984, no.2–3, p.159–164.

5. *A.Schrijver.* Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency. Vol.A. – Springer Verlag, 2003.

6. *P.Hall.* On representatives of subsets. – Journal of the London Mathematical Society, vol.10, 1935, p.26–30.

7. *М.Башмаков.* Паросочетания и транспортные сети. – «Квант», 1970, №4.

8. *L.Rabern.* A game generalizing Hall's theorem. – Discrete Mathematics, vol.320, 2014, p.87–91; arXiv:1204.0139.