Grenoble INP ENSIMAG	**PROBABILITES POUR L'INFORMATIQUE** **Apprentissage 2A** **2012-2013** **Durée : 2h** **Documents et matériel autorisés : polys d'exercices, notes de cours, poly de proba 1A, poly de stat 2A, poly de remise à niveau en maths, calculatrice.** Ce sujet comporte 2 pages d'énoncé

Ce devoir est composé de 3 exercices indépendants que vous pouvez traiter dans n'importe quel ordre.
Le barème est donné à titre indicatif, et est susceptible d'être modifié.
Il sera grandement tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction (justification des réponses) dans la notation. Tout résultat manifestement erroné et non signalé entraînera la note de 0 à la question toute entière.

EXERCICE 1 Générateurs aléatoires (4 pts)

On considère un générateur congruentiel linéaire de la forme $x_{i+1} = \quad (ax_i + 5) \quad \text{mod} \quad 56$, avec $x_0 = 0$.

1. Donner une valeur de *a* telle que ce générateur soit de pleine période. Justifier votre choix de *a* en vous appuyant sur des propriétés de divisibilité.
2. En comptant x_0 : quel est le nombre de valeurs différentes $\text{card}\left(\{x_i\}_{i=0}^{+\infty}\right)$ simulées par votre générateur (au bout d'un nombre d'itérations infini) - au minimum ? Au maximum ?

EXERCICE 2 Étude de la loi d'un couple de variables aléatoires (8 pts)

On considère un couple de variables aléatoires ayant pour densité $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} A(1-x)\dfrac{y^2}{x^3} \text{ si } 0 < y \leq x < 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

où *A* est une quantité inconnue, à déterminer.

1. Déterminer la valeur de la constante *A* de sorte que $f_{X,Y}(x,y)$ soit une densité sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la densité marginale de *X* et de *Y*.
3. Déterminer la densité de la loi conditionnelle de *X* |*Y*=*y* et de *Y* | *X*=*x*.
4. Calculer $E[Y|X = x]$.
5. *X* et *Y* sont-elles indépendantes ?
6. Donner un algorithme pour simuler *X* en utilisant la méthode par rejet.
7. Donner un algorithme pour simuler *X* en utilisant la méthode par inversion.
8. Donner un algorithme pour simuler le couple (*X*,*Y*).

EXERCICE 3 Modélisation de la chaîne de recyclage du verre (8 pts)

Un objet en verre est susceptible, après utilisation, d'être recyclé en un autre objet. La stratégie de recyclage d'une agglomération conduit à ce qu'une bouteille de verre ait une probabilité 0,25 d'être recyclée en une autre bouteille, 0,25 en un pot de yaourt, 0,25 en un pot de confiture et 0,25 en un bocal alimentaire. Chaque pot de yaourt, de confiture et bocal alimentaire est systématiquement recyclé en une bouteille.

1. Modéliser les transformations d'un objet initial donné par un processus aléatoire. Donner la loi jointe de ce processus (nom de la loi, expression mathématique, paramètres – certains d'entre eux pouvant être donnés dans l'énoncé et d'autres pas).
2. Tracer le graphe représentant les transitions possibles entre les états de l'objet.
3. Y-a-t-il des états périodiques ? Des états transitoires ?
4. On part d'un grand nombre initial de bouteilles de verre (uniquement). On applique la stratégie ci-dessus en circuit fermé : toute bouteille est recyclée en un objet parmi les 4 types ci-dessus, et tout objet des 3 autres types que les bouteilles est recyclé en bouteille. Montrer qu'après un grand nombre de cycles, on peut donner une approximation de la proportion de bouteilles parmi tous les objets. Quelle est cette proportion ?
5. Le coût de recyclage d'un objet quelconque en l'un des objets suivants est respectivement de : bouteille 2 centimes, pot de yaourt 1 centime, pot de confiture 2 centimes, bocal alimentaire 3 centimes. Quel est le coût moyen de recyclage d'un objet (en un autre objet de type aléatoire) après un grand nombre de cycles ?
6. On a considéré en question 4 que l'état initial des objets avant leur premier recyclage était nécessairement une bouteille. On considère que cet objet est initialement : une bouteille, un pot de yaourt, un pot de confiture, un bocal alimentaire avec des probabilités respectives
$$\pi_0 = (\pi_0(1),...,\pi_0(4)).$$
Écrire une fonction ***simul*** en pseudo-code permettant de simuler l'état initial d'un objet suivant cette loi. La fonction prendra en argument le vecteur π_0 et retournera une quantité aléatoire dont la loi sera π_0. On considère que l'on dispose d'une fonction ***runif*** qui simule des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur [0,1].
7. Écrire une fonction en pseudo-code permettant de simuler la suite des états d'un objet initial (dont le type aléatoire suit la loi π_0) en utilisant les probabilités de recyclage données dans l'énoncé. Cette fonction prendra en argument le nombre de pas de temps n de simulation, π_0 et les probabilités de recyclage (organisées sous forme de matrice P), et retournera une liste d'états simulés consécutivement. Toute simulation devra utiliser la fonction ***simul*** de la question 6 uniquement.
Indication : ce code devrait contenir 4 à 6 lignes.