

### Consignes générales

- durée de l'examen : 2h
- tous documents papiers autorisés
- **calculatrice interdite**
- pour obtenir la totalité des points à chaque question, vous devez détailler vos calculs
- barème sur 30
- L'examen est volontairement très long, faites ce que vous savez faire en priorité!

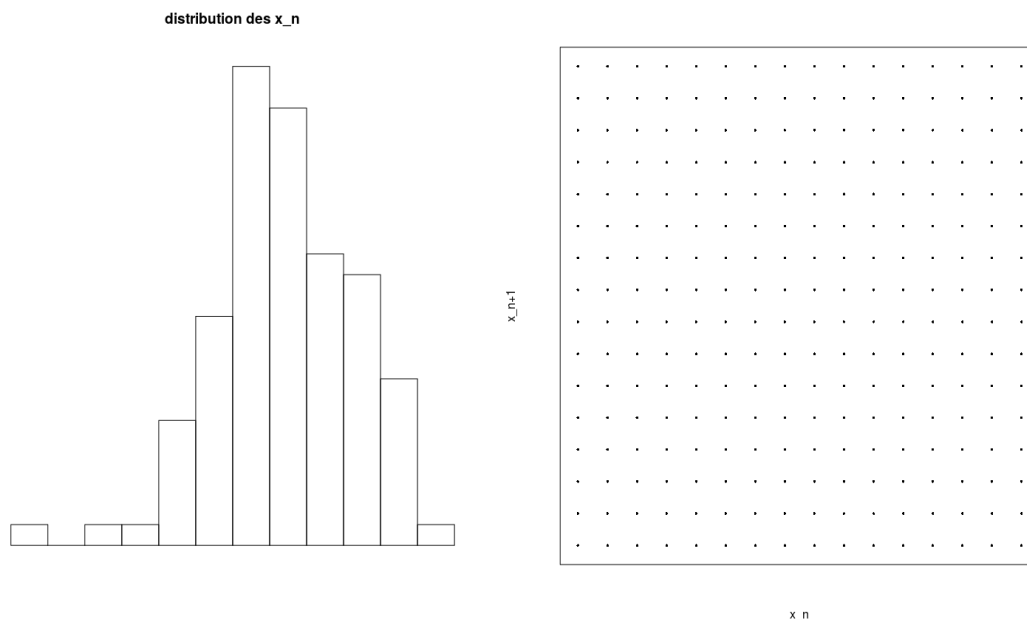
### Aides

- Si  $X \sim \text{Binom}(n, p)$ , alors  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$
  - $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- 

## Exercice 1 - Générateurs congruentiels linéaires (7 points)

On considère un générateur congruentiel linéaire de la forme  $x_{n+1} = (21x_n + 3) \bmod 10$ .

- a. Est-il de pleine période ? Justifiez. S'il ne l'est pas, proposez une valeur de  $a$  afin qu'il le soit.
- b. Donnez la séquence congruentielle linéaire de longueur 20 pour la graine  $x_0 = 0$ .
- c. Donner un générateur congruentiel linéaire donnant exactement les mêmes séquences congruentielles linéaires que celui ci-dessus quelque soit  $x_0$ .
- d. Quel peut être l'intérêt de choisir  $m$  tel que  $m = 2^e$ ,  $e \in \mathbb{N}$ .
- e. Soit les graphiques suivants obtenus à partir de simulations d'un générateur quelconque (qui n'est pas un générateur congruentiel linéaire) :



Que pouvez-vous dire sur ce générateur ?

- f. Listez les avantages et inconvénients des générateurs congruentiels linéaires de manière générale ?
- g. Quel peuvent être les avantages à utiliser des générateurs combinés comme vus en cours ?

## Exercice 2 - Etude de la loi d'un couple de variables aléatoires (8 points)

On considère un couple de variables aléatoires ayant pour fonction de répartition :

$$F_{XY}(x, y) = \frac{Ay^2(2x - 1)}{6x^2} \mathbb{1}_{\{0 < y \leq x < 1\}}$$

- a. Quel est le support de  $X$ ,  $Y$ ,  $(X, Y)$  ?
- b. Calculer  $f_{XY}(x, y)$
- c. Déterminer la valeur de la constante  $A$ .
- d. Déterminer la densité marginale de  $X$  et de  $Y$ .
- e. Déterminer la densité de la loi conditionnelle de  $X|Y = y$  et de  $Y|X = x$ .
- f.  $X \perp Y$  ?
- g. Proposer une simulation par inversion pour le couple  $(X, Y)$

## Exercice 3 - Etude du devenir de la forêt méditerranéenne (8 points)

A l'origine, la forêt méditerranéenne, sur roche calcaire à faible altitude, était dominée par des chênes. Mais l'action de l'homme a éradiqué ces forêts primitives pour leur substituer parcours pastoraux, vergers, etc. Puis l'abandon de toute activité agricole, au lieu de conduire à la restauration naturelle de ces chênaies, a bien souvent, après un état qualifié de "pelouse" par les biologistes, puis un autre qualifié de "garrigue", favorisé l'implantation d'une autre espèce, le pin d'Alep. Or, ces forêts de substitution, hautement inflammables, subissent de manière récurrente le passage du feu (incendies volontaires ou non) et sont donc condamnées à une perpétuelle reconstitution. Après un incendie, le terrain revient à l'état "pelouse".

Pendant un laps de temps de 20 années, les biologistes considèrent qu'un terrain a les probabilités d'évolution suivantes :

- une chênaie a 1 chance sur 5 d'être défrichée pour l'agriculture.
- une terre agricole a 3 chances sur 10 d'être abandonnée.
- une pelouse a 6 chances sur 10 d'évoluer vers de la garrigue.
- la garrigue a 8 chances sur 10 d'évoluer vers une pinède.
- une pinède a une chance sur 10 d'évoluer en chênaie, et une chance sur 4 de brûler.

- a. Quels sont les sous-entendus de l'énoncé ?
- b. Ecrire la matrice de transition  $A$  entre états et le graphe associé.
- c. Après avoir rappelé définitions des quatre termes suivant, trouver les classes d'états qui *communiquent*. Lesquelles sont *transitoires*, *récurrentes*, *absorbantes* ?

- d. Après avoir rappelé les définitions des deux termes suivant, listez les états *périodiques* et *apériodiques* ?
- e. Existe-t'il une loi à l'équilibre  $\Pi^*$  ? Justifiez à partir des propriétés du cours.
- f. On se propose de calculer la loi à l'équilibre  $\Pi^*$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi^{(n)} = \Pi^*$ . Pour cela, il convient de résoudre le système suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A^t \Pi^* = \Pi^* \\ \sum_{k=1}^5 \Pi_k^* = 1 \\ \begin{cases} \Pi_1^* = 0.7\Pi_1^* + 0.2\Pi_5^* \\ \Pi_2^* = 0.3\Pi_1^* + 0.4\Pi_2^* + 0.25\Pi_4^* \\ \Pi_3^* = 0.6\Pi_2^* + 0.2\Pi_3^* \\ \Pi_4^* = 0.3\Pi_3^* + 0.65\Pi_4^* \\ \Pi_5^* = 0.1\Pi_4^* + 0.8\Pi_5^* \\ \Pi_1^* + \Pi_2^* + \Pi_3^* + \Pi_4^* + \Pi_5^* = 1 \end{cases} \end{cases}$$

- g. Confirmez votre résultat en vérifiant que  $A^t \Pi^* = \Pi^*$ .
- f. Quelle interprétation pouvez-vous faire de la loi à l'équilibre ?

## Exercice 4 - Etude de la convergence du nombre d'abonnés à un blog (7 points)

Je viens d'ouvrir un blog pour les étudiants Ensimag (en nombre  $N_{max}$ ) avec une newsletter à laquelle les visiteurs peuvent s'abonner. Il y a  $N_0 = 0$  abonnés au début. Chaque mois, je gagne des abonnés avec une probabilité  $p$ , j'en perds avec une probabilité  $1 - p$ . Si j'ai  $N_i$  abonnés au mois  $i$  et que j'en perds, chacun des  $N_i$  se désabonne avec une probabilité  $p_{des}$  d'ici le mois  $i + 1$ . Si j'en gagne, chacun des  $N_{max} - N_i$  non abonnés s'abonne avec une probabilité  $p_{ab}$  d'ici le mois  $i + 1$ . La finalité est d'étudier la convergence du nombre d'abonnés au blog.

### Convention(s) :

- Il est possible de se trouver dans un état "*gagner des abonnés*" et de ne pas en gagner. Idem pour "*perdre des abonnés*".
- a. Modélisez le problème en définissant des variables aléatoires, en donnant leur loi, leur support et le domaine de définition de leur(s) paramètre(s).
- b. Exprimez votre modèle à l'aide d'un graphe.
- c. Calculer  $P(N_1 = 0)$  et  $P(N_1 = 1)$ .
- d. Dédurre une formule générale pour  $P(N_1 = k)$ .
- e. Donner les formules pour  $P(N_{i+1} = N_i)$ ,  $P(N_{i+1} < N_i)$  et  $P(N_{i+1} > N_i)$ .
- f. En utilisant le théorème des probabilités totales ainsi que la propriété Markovienne de premier ordre, exprimer  $P(N_i = m)$  sans faire de calcul.
- g. Expliquez pourquoi il vaudrait mieux préférer une approche par simulation pour répondre à ce genre de question plutôt que l'approche déterministe que nous avons tenté d'effectuer ?