Probabilités pour l'Informatique Enseignant : Brice OLIVIER
TD3 - Couples de variables aléatoires (5 points)
Ensimag 2A - Apprentissage
1er semestre 2016 - 21/10/2016

Enoncé Soit un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité $f_{XY}(x, y) = Ax$, définie sur le triangle ayant pour sommet $(1, 0)$, $(0, 0)$ et $(0, 1)$.

Q1.1) Quel est le support X ?

Q1.2) Quel est le support de Y ?

Q1.3) Quel est le support de (X, Y) ?

Q2) Que vaut la constante A ?

Q3.1) Quelle est la densité marginale de X, $\forall x \in [0, 1]$?

Q3.2) Vérifier le résultat obtenu.

Q3.3) Quelle est la densité marginale de Y, $\forall y \in [0, 1]$?

Q3.4) Vérifier le résultat obtenu.

Q4) Est-ce que $X \perp Y$?

Q5.1) Quelle est la loi de $X|Y = y$?

Q5.2) Vérifier le résultat obtenu.

Q5.3) Quelle est la loi de $Y|X = x$?

Q5.4) Vérifier le résultat obtenu.

Q6) Simuler le couple (X, Y)

Q1) Etant donné que le couple de variables aléatoires (X, Y) doit être défini sur le triangle de sommets $(1, 0), (0, 0), (0, 1)$, on a la contrainte suivante : $0 \leq x + y \leq 1$. Il vient donc $0 \leq x \leq 1 - y \leq 1$.

Donc la densité de la loi jointe peut se ré-écrire $f_{XY}(x, y) = Ax\mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq 1-y \leq 1\}}$

Q2) $f_{XY}(x, y)$ étant une densité de probabilités, on a la propriété suivante :

$$\int_{X \in \mathfrak{X}} \int_{Y \in \mathfrak{Y}} f_{XY}(x, y) \, dx \, dy = 1 \tag{1}$$

Il suffit donc d'intégrer $f_{XY}(x,y)$ sur (X,Y) :

$$\begin{aligned}
\int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{1-x} Ax\,dx\,dy &= 1 \\
\int\limits_{x=0}^{1} \left[Axy\right]_{y=0}^{1-x}\,dx &= 1 \\
\int\limits_{x=0}^{1} Ax - Ax^2\,dx &= 1 \\
\left[\frac{1}{2}Ax - \frac{1}{3}Ax^2\right]_0^1 &= 1 \\
\frac{1}{2}A - \frac{1}{3}A &= 1 \\
A &= 6
\end{aligned} \tag{2}$$

Q3) Afin de calculer la densité marginale de X, $\forall x \in [0,1]$, on intègre $f_{XY}(x,y)$ par rapport à Y sur $[0, 1-x]$.

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int\limits_{y=0}^{1-x} f_{XY}(x,y)\,dy \\
&= \int\limits_{y=0}^{1-x} 6x\,dy \\
&= \left[6xy\right]_{y=0}^{1-x} \\
&= 6x(1-x)
\end{aligned} \tag{3}$$

Puis, on vérifie qu'il s'agit bien d'une fonction de densité en calculant que l'intégrale X sur $\mathbb{R}$ donne 1.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{X\in\mathbb{R}} f_X(x)\,dx &= \int\limits_{x=0}^{1} 6x(1-x)\,dx \\
&= \int\limits_{x=0}^{1} 6x - 6x^2\,dx \\
&= \left[3x^2 - 2x^3\right]_{x=0}^{1} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{4}$$

Même principe pour la densité marginale de Y.

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int\limits_{x=0}^{1-y} f_{XY}(x,y)\,dy \\
&= \int\limits_{x=0}^{1-y} 6x\,dx \\
&= \left[3x^2\right]_{x=0}^{1-y} \\
&= 3(1-y)^2
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Puis, on vérifie qu'il s'agit bien d'une fonction de densité en calculant que l'intégrale Y sur $\mathbb{R}$ donne 1.

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{Y\in\mathbb{R}} f_Y(x)\,dy &= \int\limits_{y=0}^{1} 3(1-y)^2\,dy \\
&= \int\limits_{y=0}^{1} 3y^2 - 6y + 3\,dy \\
&= \left[y^3 - 3y^2 + 3y\right]_{y=0}^{1} \\
&= 1
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Q4) $X \perp Y$ si $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. On calcule donc :

$$
\begin{aligned}
f_X(x)f_Y(y) =& 6x(1-x)3(1-y)^2 \\
=& 18x(1-x)(1-y)^2 \\
\neq& 6x \\
f_X(x)f_Y(y) \neq& f_{XY}(x,y)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Donc $X \perp Y$.

Q5) Pour calculer la densité conditionnelle de $X|Y = y$, on calcule :

$$\begin{aligned} f_{X|Y=y}(x) &= \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{6x}{3(1-y)^2} \\ &= \frac{2x}{(1-y)^2} \end{aligned} \tag{8}$$

Puis, on vérifie qu'il s'agit bien d'une densité.

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{1-y} f_{X|Y=y}(x)\,dx = \int_{x=0}^{1-y} \frac{2x}{(1-y)^2}\,dx \\ =&\frac{1}{(1-y)^2}\int_{x=0}^{1-y} 2x\,dx \\ =&\frac{1}{(1-y)^2}\left[x^2\right]_{x=0}^{1-y} \\ =&1 \end{aligned} \tag{9}$$

Même principe pour le calcul de la densité conditionnelle de $Y|X = x$, on calcule :

$$\begin{aligned} f_{Y|X=x}(y) &= \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{6x}{6x(1-x)} \\ &= \frac{1}{1-x} \end{aligned} \tag{10}$$

Puis, on vérifie qu'il s'agit bien d'une densité.

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{1} f_{Y|X=x}(x)\,dx = \int_{y=0}^{1-x} \frac{1}{1-x}\,dx \\ =\left[\frac{y}{1-x}\right]_{x=0}^{1-x} \\ =1 \end{aligned} \tag{11}$$

Q6) Pour simuler un couple de variables aléatoires, deux méthodes :

- On sait directement simuler le couple (X, Y)
- On ne sait pas simuler le couple (X, Y), auquel cas on va d'abord simuler X puis $Y|X = x$ et obtenir (X, Y) en multipliant les deux premières simulations (ou de manière équivalente, on peut simuler Y puis $X|Y$).

Dans notre cas, il est facile de simuler $f_X Y(x, y)$, car la densité du couple ne dépend que de x. On peut donc simplement calculer la fonction de répartion du couple :

$$\begin{aligned} F_{XY}(x,y) &= \int\limits_{a=0}^{x} \int\limits_{b=0}^{y} f_{XY}(a,b)\, da\, db \\ &= \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{1-x} 6a\, da\, db \\ &= \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{1-x} 6a\, da\, db \end{aligned} \tag{12}$$