

Exercice 1. 5 points

1. Calculer $\iint_D x dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, x - y + 1 \geq 0, x + 2y - 4 \leq 0\}$.
2. Calculer $\iint_D xy dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, xy + x + y \leq 1\}$.
3. On pose $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.
 - (a) Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$ on a : $\ln(1+x) = \int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy$.
 - (b) Montrer que $I = \iint_D \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} dx dy$ où $D = [0, 1] \times [0, 1]$.
 - (c) Montrer que $2I = \iint_D \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy$.
 - (d) En déduire la valeur de I .
4. Calculer $\iiint_B \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}} dx dy dz$ où $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Exercice 2. 4 points

Soit la matrice A suivante $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A .
2. Démontrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Donner en le justifiant, mais sans calcul, le polynôme minimal de A .
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. 10 points

Les quatre questions de cette deuxième partie sont indépendantes

Question 1

1. Montrer de deux manières différentes que pour tout entier naturel n , $2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$ (2pts)

Question 2 Un fabricant d'ordinateurs portables souhaite vérifier que la période de garantie qu'il doit associer au disque dur correspond à un nombre pas trop important de retours de ce composant sous garantie. Des essais en laboratoire ont montré que la loi suivie par la durée de vie, en années, de ce composant est la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{4}$.

1. Préciser la fonction de répartition de cette loi ainsi que son espérance $E(X)$ et son écart type $\sigma(X)$. (1pt)
2. Quelle est la probabilité qu'un disque dur fonctionne sans défaillance six ans au moins, sachant qu'il a fonctionné déjà cinq ans. (1pt)
3. Pendant combien de temps, 50% des disques durs fonctionnent-ils sans défaillance ? (1pt)
4. Donner la période de garantie optimum pour remplacer moins de 15% des disques durs sous garantie. (1pt)

Question 3 On classe les gérants de portefeuilles en deux catégories, les bien informés et les autres. Lorsqu'un gérant bien informé achète une valeur boursière pour son client, on peut montrer par une étude préalable que la probabilité que le cours de cette valeur monte est de 0,8. Si le gérant est mal informé, la probabilité que le cours descende est de 0,6. On sait par ailleurs que si l'on choisit au hasard un gérant de portefeuille, il y a une chance sur 10 que celui-ci soit un gérant bien informé. Un client choisit au hasard un gérant dans l'annuaire, et lui demande d'acheter une valeur. Sachant que le cours de cette valeur est monté, déterminer la probabilité pour que le gérant soit mal informé. (1,5pt)

Question 4 Le salaire horaire moyen pour des responsables de la finance dans la région centrale Nord-Est sont normalement distribués, de moyenne 32,62 dollars, avec un écart type de 2,32 dollars.

-
- (a) *Quelle est la probabilité qu'un responsable gagne entre 30 et 35 dollars de l'heure ?*
- (b) *Quelle est la probabilité qu'un responsable sélectionné aléatoirement gagne moins de 28 dollars de l'heure ?*
- (c) *A combien devrait s'élever le salaire horaire pour qu'un responsable de la finance soit parmi les 10% les mieux payés ?*
- (2.5pt)
-