
Ecole Supérieure des Sciences de l'Assurance et des Risques (**ESSFAR**)
CONCOURS D'ENTREE EN L3
Session de Juin 2022
Epreuve d'Analyse, Algèbre, Probabilité et Statistique
Durée : 04 heures
Documents autorisés : Calculatrices non programmables + table de la loi normale

Exercice 1. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Partie I / 3 points

1. Alice et Bruno lancent le même dé parfaitement équilibré à tour de rôle et c'est Alice qui commence. Le gagnant est le premier à obtenir un « six ». Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 $A = \{\text{victoire d'Alice}\}$, $B = \{\text{victoire de Bruno}\}$ et $D = \{\text{Il n'y a pas de vainqueur}\}$.
2. Un test sanguin a une probabilité de 0.95 de détecter un certain virus lorsque celui ci est effectivement présent. Il donne néanmoins un faux résultat positif pour 1% des personnes non infectées. Si 0.5% de la population est porteuse du virus, quelle est la probabilité qu'une personne ait le virus sachant qu'elle a un test positif ?

Partie II / 3.5 points

1. A partir de 7h, les bus passent toutes les 15 minutes à un arrêt donné. Un usager se présente entre 7h et 7h30 à cet arrêt, l'heure exacte de son arrivée étant une variable uniforme sur cette période. Trouver la probabilité qu'il doive attendre moins de 5 minutes, puis plus de 10 minutes.
2. Une compagnie aérienne a observé que 5% des personnes ayant réservé pour un vol ne voyagent pas. La compagnie a vendu 100 billets pour un avion de 95 places. Quelle est la probabilité que chaque voyageur ait un siège disponible au cours du vol ?

Partie III / 3.5 points

Le salaire horaire moyen pour des responsables de la finance dans la région centrale Nord-Est sont normalement distribués, de moyenne 32,62 dollars, avec un écart type de 2,32 dollars.

1. Quelle est la probabilité qu'un responsable gagne entre 30 et 35 dollars de l'heure ?
2. Quelle est la probabilité qu'un responsable sélectionné aléatoirement gagne moins de 28 dollars de l'heure ?
3. A combien devrait s'élever le salaire horaire pour qu'un responsable de la finance soit parmi les 10% les mieux payés ?

Exercice 2. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Partie I / 3 points

On pose $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ et $g(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$.

1. Déterminer les points critiques de f et de g .
2. En reconnaissant le début du développement d'un carré, étudier les extrema locaux de f .
3. En étudiant les valeurs de g sur deux droites vectorielles bien choisies, étudier les extrema locaux de g .

Partie II / 4 points

1. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
 - (a) Montrer que f admet une dérivée suivant tout vecteur en $(0, 0)$.
 - (b) f est-elle continue en $(0, 0)$?
2. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on pose $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
 - (a) f admet-elle un prolongement continu à \mathbb{R}^2 ?
 - (b) f admet-elle un prolongement \mathcal{C}^1 à \mathbb{R}^2 ?
 - (c) f admet-elle un prolongement \mathcal{C}^2 à \mathbb{R}^2 ?

Partie III / 3 points

Calculer les intégrales doubles suivantes

1. $I_1 = \iint_D xy dx dy$ avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, xy + x + y \leq 1\}$.
 2. $I_2 = \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy$ avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1\}$.
 3. $I_3 = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.
-