Ecole Supérieure des Sciences de l'Assurance et des Risques (**ESSFAR**)
CONCOURS D'ENTREE EN L3
Session de Juillet 2019
Epreuve d'Analyse, Algèbre, Probabilité et Statistique
Durée : 04 heures
Documents autorisés : Calculatrices non programmables

Exercice 1. 6 points

Le tableau suivant donne la répartition du nombre d'accidents enregistrés par jour sur un axe routier.

Nombre d'accidents (X)	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de jours	6	12	24	11	4	2	1

1. *Déterminer et tracer la fonction de répartition de X.*
2. *Déterminer le mode et les quartiles de X.*
3. *Calculer la moyenne et la variance de X. Arrondir les resultats à l'entier le plus proche.*
4. *Par quelle loi peut-on ajuster la distribution de X ? Justifier.*
5. *A l'aide d'un test du Chi-deux, vérifier au seuil $\alpha = 0.01$ que X suit effectivement cette loi.*

Exercice 2. 4 points

Une usine de pellicules de photo dispose de trois machines A, B et C qui fabriquent respectivement 20 %, 50 % et 30 % de la production totale. Les proportions de pellicules défectueuses fabriquées par les machines A, B ou C sont respectivement égales à 6 %, 5 % et 3 %. On tire au hasard une pellicule dans la production. Calculer :

1. *la probabilité que cette pellicule soit défectueuse.*
2. *la probabilité qu'elle provienne de la machine A sachant qu'elle est défectueuse.*
3. *la probabilité qu'elle provienne de la machine A sachant qu'elle est non déféectueuse.*
4. *On choisit 10 pelicules fabriquées par une seule machine. On constate qu'une pelicule est défectueuse parmi les 10. Calculer la probabilité que ces pellicules aient été fabriquées par la machine*
   (a) (i) A.
   (b) (ii) B
   (c) (iii) C.

Exercice 3. 6 points

1. *On considère la série entière de la variable réelle* $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right) x^n$.
   (a) *Déterminer son rayon de convergence R.*
   (b) *Etudier cette série pour $x = -R$.*
   (c) *Etudier cette série pour $x = R$.*
2. *Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par* $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   (a) *Montrer que f est continue en $(0,0)$.*
   (b) *f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $(0,0)$?*
   (c) *f est-elle différentiable au voisinage de $(0,0)$? Déterminer sa différentielle en $(0,0)$ le cas échéant.*
3. *On définit la fonction h de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $h(x,y) = x(\ln x)^2 + xy^2$.*
   (a) *Déterminer les points critiques de h.*
   (b) *Etudier la nature de chaque point critique de h.*

Exercice 4. 4 points

1. *Soit la matrice* $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$
   (a) *Vérifier si A est inversible.*
   (b) *Déterminer l'inverse de A le cas échéant.*

2. *On définit les matrices M et N par* $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ *et* $N = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) *Vérifier si M est diagonalisable ou non.*

   (b) *Si M est diagonalisable, déterminer une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $M^{-1}PM = D$.*

   (c) *Vérifier si N est diagonalisable ou non.*

   (d) *Si N est diagonalisable, déterminer une matrice de passage Q et une matrice diagonale Δ telles que $N^{-1}QN = \Delta$.*