ESSFAR
ECOLE SUPERIEURE DES SCIENCES DE LA FINANCE, DE L'ASSURANCE ET DES RISQUES

Concours d'entrée en L3
Session de Septembre 2019 **Épreuve de Mathématiques** Durée 4h

Note : Dans chaque exercice, les questions numérotées $1, 2\cdots$ sont indépendantes

Exercice 1. *6 pts*

1. Soit (u_n) une suite à termes positifs. Montrer que la convergence de la série de terme général (u_n) implique celle de la série de terme général $\left(\frac{1}{n}\sqrt{u_n}\right)$ et que la réciproque est fausse.

2. Montrer que si la série de terme général (v_n) est une série alternée et $(|v_n|)$ une suite décroissante convergeant vers 0, alors la série de terme général (v_n) est convergente.

3. Représenter le domaine
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \leq 1,\ y \leq 1,\ x + y \geq 1\right\}$$
et calculer
$$I = \int\int_D (x+y)dxdy$$
.

4. a, b et c sont trois réels. Déterminer le rayon R et le domaine A de convergence de la série entière de coefficient $a_n = e^{an^2+bn+c}$.

Exercice 2. *6 pts*

1. $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une application. Relier deux à deux les propriétés suivantes par l'implication nécessaire.

   A) v est continue.

   B) v admet les dérivées continues dans toutes les directions.

   C) v est différentiable.

   D) v est de classe C^1.

2. On définit $V = \left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},\ a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R},\ a - d = 0\right\}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, par $g(M, N) = trace(MJN)$.

   (a) Montrer que g est bilinéaire. Est-elle symétrique? Antisymétrique?

   (b) Déterminer une base B de V.

   (c) Déterminer la matrice dans la base B de la forme quadratique q définie par $q(M) = g(M, M)$.

   (d) Déterminer le noyau, le rang et la signature de q.

Exercice 3. *8 pts*

1. On tire de façon aléatoire sur une cible circulaire de rayon α, sur laquelle des cercles de rayons $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha}{2}$ et $\frac{3\alpha}{4}$ ont été déssinés. Ces cercles délimitent 4 régions différentes. On suppose que la flèche atteint la cible.

   Calculer la probabilité d'atteindre chaque région.

2. On suppose que le poids d'un nouveau né est une variable aléatoire normalement distribuée d'écart-type 0.5 kg. Le poids moyen des 49 nouveaux nés au mois de mars dans un hôpital a été de 3.6 kg.
   (a) Déterminer un intervalle de niveau de confiance 95% pour le poids moyen d'un nouveau né dans cet hôpital là.
   (b) Quel serait le niveau de confiance d'un intervalle de confiance d'amplitude 0.1 kg centré en 3.6 kg pour ce poids moyen?

3. Considérer le vecteur aléatoire (X, Y) de loi jointe donnée par la densité de probabilité

$$f(x, y) = 2e^{-x-y} 1_{0<x<y}.$$

   (a) Déterminer les densités marginales f_X et f_Y de X et Y.
   (b) Déterminer les fonctions de répartition F_X et F_Y de X et Y.
   (c) X et Y sont-elles indépendantes?

4. On considère deux variables aléatoires X de loi uniforme sur $[0, 1]$ et Y à valeurs dans $\{-1, +1\}$. On suppose que

$$P(Y = +1 | X = x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{5}{6} & \text{si} \quad x \in]\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

   Calculer $P(X \in [a, b], Y = +1)$ en fonction de a et b vérifiant $0 < a < b < 1$.