Ecole Supérieure des Sciences de l'Assurance et des Risques (**ESSFAR**)
CONCOURS D'ENTREE EN L3
Session de Juillet 2020
Epreuve d'Analyse, Algèbre, Probabilité et Statistique
Durée : 04 heures
Documents autorisés : Calculatrices non programmables + table de la loi normale

Exercice* 1.** *(Probabilité et statistique)* ***3 points
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. On rappelle qu'un événement quasi-impossible c'est tout événement $A \in \mathcal{F}$ tel que $P(A) = 0$.

1. *Montrer que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = P(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}})A_n$.*
2. *Montrer que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = P(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}})A_n$.*
3. *On lance indéfiniment un dé parfaitement équilibré. Montrer que l'événement " Ne jamais obtenir d'as" est un événement quasi-impossible.* .

Exercice* 2.** *(Probabilité et statistique)* ***3 points
Le nombre de Camerounais qui réussissent à l'examen du baccalauréat au cours d'une année et qui, après 5 années d'études supérieures deviennent fonctionnaire de la Banque mondiale suit une loi de Poisson de paramètre 2. Ces derniers sont supposés répartis équitablement entre les deux sexes. Soit X le nombre de filles parmi ces fonctionnaires et Y le nombre de garçons. On pose $Z = X + Y$.

1. *On suppose que $Z = n$: déterminer les lois de $X|Z = n$ et de $Y|Z = n$.*
2. *Etablir les lois de probabilité de X et de Y..*

Exercice* 3.** *(Probabilité et statistique)* ***2 points
On suppose que 3 entreprises X, Y et Z fabriquant trois types de microprocesseurs utilisés dans les ordinateurs se partagent le marché à raison de 25% pour X, 35% pour Y, 40% pour Z. Les pourcentages de commandes non conformes sont : 5% pour les microprocesseurs de X, 4% pour ceux de Y et 2% pour ceux de Z. Dans un lot constitué de microprocesseurs dans les proportions indiquées pour X, Y et Z, on prélève un microprocesseur qui s'avère présenter un défaut de fabrication, c'est-à-dire non conforme.

Quelle est la probabilité qu'il soit du type X ?.

Exercice* 4.** *(Probabilité et statistique)* ***2 points
(Contrôle avant la mise sur le marché). Une tablette de chocolat doit peser 100 grammes avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins. Elle est donc mise sur le marché si sa masse est comprise entre 98 et 102 grammes. La masse (exprimée en grammes) d'une tablette de chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Le réglage des machines de la chaîne de fabrication permet de modifier la valeur de σ.

1. *Calculer la probabilité de l'événement " La tablette est mise sur le marché ".*
2. *On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet événement atteigne 0.97. Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité de l'événement "la tablette est mise sur le marché" soit égale à 0,97.*

Exercice* 5.** *(Analyse)* ***6 points

1. *On définit la fonction g de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2},\ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$.*
   (a) *Vérifier que g est continue en (0, 0).*
   (b) *Etudier la différentiabilité de g sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et déterminer sa différentielle en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.*
   (c) *g admet-elle en (0, 0) la dérivée suivant tout vecteur non nul ?*
   (d) *g est-elle différentiable en (0, 0) ? Si oui déterminer sa différentielle en (0, 0).*
2. *On définit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x,y) = (x + 2y + y^2)e^{2x}$*
   (a) *Montrer que f admet un point critique $A(x_0, y_0)$ et déterminer sa nature.*
   (b) *Soit $x \in \mathbb{R}$. Etudier la fonction $y \mapsto f(x,y)$ puis comparer $f(x, y_0)$ et $f(x,y)$.*
   (c) *Etudier la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$ et comparer $f(x_0, y_0)$ et $f(x, y_0)$. Tirer une conclusion.*

3. *Soit la fonction h définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par $h(x,y) = 2x^2y+2x^2+y^2$. Déterminer les points critiques de h ainsi que la nature de chaque point critique.*

Exercice* 6.** *(Algèbre)**4 points

Soit $a \in \mathbb{R}$, notons A la matrice suivante $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{bmatrix}$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par la donnée de u_0, u_1 et la relation de récurrence suivante, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$.

1. *Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?*
2. *Lorsque A est diagonalisable, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.*
3. *On suppose A diagonalisable. On note U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$*
   (a) *Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et de A.*
   (b) *Exprimer U_n en fonction de U_0 et de A.*