Ecole Supérieure des Sciences de la Finance de l'Assurance et des Risques
Epreuve de Mathématiques
Concours d'entrée en Licence 3 de Septembre 2020

***Exercice* 1. *6 points*.**

1. *On lance trois dés parfaitement équilibrés. Montrer que la On désigne par* Ω *l'ensemble des suites* (a_1, a_2, a_3) *de 3 nombres compris entre* 1 *et* 6
   (a) *Vérifier que :* $a_1 + a_2 + a_3 > 10 \Leftrightarrow (7 - a_1) + (7 - a_2) + (7 - a_3) \leq 10$
   (b) *Déduire de 1) que probabilité que la somme des points amenés dépasse dix est égale à la probabilité que cette somme ne dépasse pas dix.*
   (c) *Déterminer la probabilité que le résultat* (a_1, a_2, a_3) *dans cet ordre soit les termes d'une suite strictement croissante et minorée par* 2.
2. *On classe les gérants de portefeuilles en deux catégories, les bien informés et les autres. Lorsqu'un gérant bien informé achète une valeur boursière pour son client, on peut montrer par une étude préalable que la probabilité que le cours de cette valeur monte est de* 0.8. *Si le gérant est mal informé, la probabilité que le cours descende est de* 0.6. *On sait par ailleurs que si l'on choisit au hasard un gérant de portefeuille, il y a une chance sur 10 que celui-ci soit un gérant bien informé.*
   Un client choisit au hasard un gérant dans l'annuaire, et lui demande d'acheter une valeur. Sachant que le cours de cette valeur est monté, déterminer la probabilité pour que le gérant soit mal informé.

***Exercice* 2. *4 points*.**

Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées.

1. *Soit* X *la variable aléatoire «épaisseur de la plaque en mm» ; on suppose que* X *suit une loi normale de paramètres* $m = 0.3$ *et* $\sigma = 0.1$.
   (a) *Calculez la probabilité pour que* X *soit inférieur à* $0.36mm$
   (b) *Calculer la probabilité pour que* X *soit compris entre* 0.25 *et* 0.35 *mm*.
2. *L'utilisation de ces plaques consiste à en empiler* n*, numérotées de* 1 *à* n *en les prenant au hasard : soit* X_i *la variable aléatoire «épaisseur de la plaque numéro* i *en mm» et* Z *la variable aléatoire «épaisseur des* n *plaques en mm».*
   Pour $n = 20$*, quelle est la loi de* Z*, son espérance et sa variance ?*
3. *On effectue un contrôle de fabrication sur des pièces dont une proportion* $p = 0.02$ *est défectueuse. On contrôle un lot de* 1000 *pièces : Déterminer la probabilité pour que le nombre de pièces défectueuses parmi* 1000 *soit compris (au sens large) entre* 18 *et* 22.

***Exercice* 3. *5 points*.**

1) *Soit la fonction* f *définie de* $\mathbb{R}^2$ *vers* $\mathbb{R}$ *par* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   b) *Soit* $u = (a, b)$ *un vecteur quelconque de* $\mathbb{R}^2$. f *admet-elle une dérivée dans la direction de* u *? Déterminer sa valeur le cas échéant.*
   b) f *est-elle différentiable en* $(0,0)$ *? Déterminer sa différentielle le cas échéant.*
2) *Soient* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *et la fonction* g *définie de* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ *vers* $\mathbb{R}$ *par* $g(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{a}{xy}$. *On admet que* g *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
   a) *Déterminer les points critiques de* g.
   b) *Déterminer la nature de chaque pint critique.*
   c) g *est-elle majorée sur* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ *?*
3) *La fonction* h *définie de* $\mathbb{R}^2$ *vers* $\mathbb{R}$ *par* $h(x,y) = \frac{y\ln(1+x^2)}{x(x^2+y^2)}$ *admet-elle une limite au point* $(0,0)$ *? Justifier votre réponse.*

Exercice* 4. *5 points

Soit M *la matrice réelle* 3×3 *suivante :* $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. M *est-elle inversible ?*
2. *Déterminer les valeurs propres de* M.
3. *Montrer que* M *est-ele diagonalisable.*
4. *Déterminer une base de vecteurs propres et* P *la matrice de passage.*
5. *On a* $D = P^{-1}MP$ *, pour* $k \in \mathbb{N}$*, exprimer* M^k *en fonction de* D^k*, puis calculer* M^k.

NB : Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction. D'autre part, l'essentiel n'est pas de tout faire, mais de bien faire tout ce que l'on peut faire.