Ecole Supérieure des Sciences de l'Assurance et des Risques (**ESSFAR**)
CONCOURS D'ENTREE EN MASTER 1
Session de Septembre 2019
Epreuve de Mathématiques
Durée : 04 heures
Documents autorisés : Calculatrices non programmables

Exercice 1. *(Calcul différentiel)* **5 points**

1. *On définit les fonctions* f_1 *et* f_2 *de* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *vers* $\mathbb{R}$ *par* $f_1(x,y) = \frac{x(\sin y - y)}{x^2+y^2}$ *et* $f_2(x,y) = \frac{x^4+y^2}{x^2+y^2}$
   (a) *La fonction* f_1 *est-elle prolongeable par continuité en (0, 0) ? (1 pt)*
   (b) *La fonction* f_2 *est-elle prolongeable par continuité en (0, 0) ? (1 pt)*
2. *Soit* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \; si \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$.
   g est-elle différentiable en (0, 0) ? (1 pt)
3. *On définit la fonction h de* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *par* $h(x,y) = x(\ln x)^2 + xy^2$.
   (a) *Déterminer les points critiques de h. (1 pt)*
   (b) *Etudier la nature de chaque point critique de h. (1 pt)*

Exercice 2. *(Mesure et Intégration)* **5 points**
On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, *(*λ*, mesure de Lebesgue); pour* $A \subset \mathbb{R}$ *et* $a \in \mathbb{R}$ *on note :* $A + a = \{x + a \;\; tels \;\; que \;\; x \in A\}$. *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *fixé.*

1. *Montrer que si A est un borelien de* $\mathbb{R}$*, alors* $A + a$ *est un borelien de* $\mathbb{R}$*. (1 pt)*
2. *Montrer que :* $\tau_a = \{A \subset \mathbb{R} \;\; tel \;\; que \;\; A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ *est une tribu sur* $\mathbb{R}$*. (1 pt)*
3. *Montrer que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \tau_a$ *puis que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \tau_a$*. (1 pt)*
4. *Pour* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *on pose* $\mu(A) = \lambda(A + a)$*. Montrer que* μ *est une mesure sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *. (1 pt)*
5. *En déduire que pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *, on a :* $\lambda(A + a) = \lambda(A)$ *(invariance de la mesure de Lebesgue par translation. (1 pt)*

Exercice 3. *(Statistique)* **5 points**
Une enquête effectuée au près du comptoir de 150 coopératives agricoles a permis d'étudier l'arrivée dans le temps des usagers de ces coopératives. Pendant l'unité de temps, soit une heure, on a noté :

Nombre d'usagers arrivés (X)	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Nombre de coopératives	*37*	*46*	*39*	*19*	*5*	*3*	*1*

1. *Quels sont : la population étudiée, l'unité statistique et le caractère étudié. De quel type de caractère s'agit-il ? (1 pt)*
2. *Calculer la moyenne et la variance de X. (1.5 pt)*
3. *Tester l'ajustement de X à une loi de Poisson. (2.5 pts)*

Exercice 4. *(Probabilité)* **5 points**
Soit X une v.a.r continue qui suit la loi de pareto de paramètres α *et* θ*,* $VP(\alpha, \theta)$*, de densité de probabilité*

$$f_{\alpha,\theta}(x) = \begin{cases} kx^{-\alpha} & si \; x \geq \theta \\ 0 & sinon \end{cases}$$

avec $\alpha > 1$ *et* $\theta > 0$.

1. *Calculer la constante k. (0.5 pt)*
2. *Déterminer la fonction de répartition de X. (1 pt)*
3. *Calculer* $E(X)$ *et* $V(X)$*. On trouvera une condition sur* α*. (1.5 pt)*
4. *Déterminer la loi de la v.a.r* $U = (\alpha - 1)\ln\frac{X}{\theta}$*. On déterminera sa fonction de répartition puis sa densité de probabilité. (1 pt)*
5. *Soit* $X_1, X_2, ..., X_n$ *n v.a.r indépendantes suivant toutes la même loi* $VP(\alpha, \theta)$*. Déterminer et identifier la loi de* $Z_n = \min_i X_i$*. (1 pt)*