Ecole Supérieure des Sciences de l'Assurance et des Risques (**ESSFAR**)
CONCOURS D'ENTREE EN L3
Session de Septembre 2021
Epreuve d'Analyse, Algèbre, Probabilité et Statistique
Durée : 04 heures
Documents autorisés : Calculatrices non programmables + table de la loi normale

Exercice 1. 10 points

1. **(Problème de Monty Hall)** *: Un jeu télévisé se déroule à chaque fois de la façon suivante : on présente trois boîtes fermées à un candidat, dont l'une contient 10.000 FCFA , et seul le présentateur sait laquelle. Le candidat choisit une boîte mais, avant qu'il ait pu l'ouvrir, le présentateur l'interrompt, et ouvre l'une des deux autres boîtes, qu'il sait vide. Le candidat peut alors maintenir son choix, ou ouvrir la boîte restante. L'une de ces options est-elle meilleure que l'autre ? Expliquer.*
2. **(Des boules dans deux urnes)** *: On dispose de deux urnes* U_1 *et* U_2. *L'urne* U_1 *contient* n *boules rouges et* m *boules bleues, avec* $m, n \geq 1$. *L'urne* U_2 *contient* 4 *boules rouges et* 5 *boules bleues. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.*
   (a) *On tire au hasard et simultanément deux boules de* U_1. *Quelle est la probabilité* $\alpha(n, m)$ *qu'elles soient de la même couleur ?*
   (b) *Même question si on effectue le tirage avec remise : on note* $\beta(n, m)$ *la nouvelle probabilité.*
   (c) *Démontrer que* $\beta(n, m) > \alpha(n, m)$
   (d) *On tire une boule de* U_2 *que l'on met dans* U_1 *puis on tire une boule de* U_1. *Quelle est la probabilité* $\delta(n, m)$ *qu'elle soit rouge*
3. **(Les assurés d'une compagnie)** *: Une compagnie d'assurance automobile a classé ses assurés en trois classes d'âges. Classe 1 : moins de 25 ans, classe 2 : de 25 à 50 ans et classe 3 : plus de 50 ans. Le tableau ci-dessous donne deux informations : la proportion d'assurés appartenant à chaque classe et la probabilité qu'un assuré donné déclare au moins un accident au cours d'une année (estimation à partir d'une étude statistique des années précédentes).*

Classe	*Proportion*	*Probabilité*
1	*0.25*	*0.12*
2	*0.53*	*0.06*
3	*0.22*	*0.09*

   Un assuré est tiré au hasard dans le fichier de la compagnie et s'avère ayant déclaré au moins un accident en cours d'année. Quelle est la probabilité qu'il ait moins de 25 ans ?
4. **(Taille des pygmées)** *: On suppose que la taille, en centimètres, d'un pygmée âgé de 25 ans est une variable aléatoire normale de paramètres* $\mu = 140$ *et* $\sigma^2 = 36$.
   (a) *Quel est le pourcentage de pygmées de 25 ans ayant une taille supérieure à 150 cm ?*
   (b) *Parmi les pygmées mesurant plus de 145 cm, quel pourcentage dépasse 150 cm ?*

Exercice 2. 5 points

1. *Calculer* $\iint_D (x+y)dxdy$ *où* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 1, y \leq 1, x + y \geq 1\}$.
2. *Calculer* $\iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$ *où* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$.
3. *Calculer* $\iiint_D xyzdxdydz$ *où* $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$.
4. *Calculer* $I = \int_\gamma (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ *où* γ *est le bord orienté du domaine délimité par les courbes d'équations* $y = x^2$ *et* $x = y^2$.
5. *Soit le champ de vecteur* V *défini par* $V(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$. *Calculer sa circulation le long du cercle de centre O et de rayon 1.*

Exercice 3. 5 points

1. *On considère le système suivant dépendant du paramètre* m $\begin{cases} 3mx + 2y - 2z = 1 \\ -mx + my + z = m \\ mx + y + mz = 1 \end{cases}$
   (a) *Pour quelles valeurs de m ce système admet-il une unique solution.*
   (b) *pour chacune des valeurs de m, donner la solution du système.*
2. *On considère le système linéaire suivant :* $\begin{cases} x + y + z = a \\ +2x + y + 3z = b \\ x - y + 2z = c \end{cases}$
   (a) *Exprimer x , y e z en fonction de a, b et c.*
   (b) *Montrer que la matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *est inversible et déterminer* A^{-1}
   (c) *Calculer les déterminants des matrices* A *et* A^{-1}.