

CONCOURS D'ENTREE EN 1ère ANNEE – SESSION AVRIL 2022

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée 3h00

EXERCICE I (5 Points)

On considère la suite $(u_n), n \in \mathbb{N}^*$ définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (u_{n+1})^2 = 4u_n \end{cases}$.

1. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5 . Donner les résultats sous la forme 2^α . **1pt**
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n) - \ln 4$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme. **1.5pt**
3. Exprimer v_n en fonction de n . En déduire u_n et calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. **1.5pt**
4. Pour quelles valeurs de n a-t-on $u_n > 3,96$? **1pt**

Exercice 2 (5 Pts)

Le tableau suivant indique, pour une même distance les variations des quantités y_i d'essences consommées de certaines voitures suivant leurs puissances x_i (x_i est exprimé en chevaux et y_i en litres)

| | | | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| x_i | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| y_i | 10 | 12 | 20 | 23 | 26 | 30 | 32 | 35 |

1- Représenter graphiquement le nuage des points à cette série dans un repère orthogonal :

- 1cm sur l'axe des abscisses représente 1 cheval.
- 1cm sur l'axe des ordonnées représente 5 litres. **1 pt**

2- Calculer les coordonnées du point moyen G et placer ce point dans le même repère. **1pt**

- 3- a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r associée à cette série statistique. **1pt**
- b) Interpréter ce résultat. **0.5 pt**
- 4- Par la méthode des moindres carrés, donner la droite de régression de y en x . **1pt**
- 5- a) Donner une estimation de la quantité d'essence consommée par une voiture de puissance 12. **0.25 pt**
- b) Donner une estimation de la puissance d'une voiture qui a consommé 50 litres d'essence pour cette distance. **0.25 Pt**

Exercice 3 (5 points)

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire g **1.5point**

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln x - 2x^2 - 1$.

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g . Calculer $g'(x)$. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction g dans lequel on précisera la valeur exacte de l'extremum (aucune limite n'est demandée) **1p**

2. Dédurre du 1. que la fonction g est négative sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. **0.5pt**

Partie B : Étude d'une fonction (3.5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 1 - 2x - \frac{\ln x}{x}$.

On appelle C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. **0.25pt**

b. Déterminer la limite de la fonction f en 0. **0.25pt**

2. Soit D la droite d'équation $y = 1 - 2x$.

a. Démontrer que la droite D est asymptote à la courbe C . **0.5 pt**

b. Étudier la position de la courbe C par rapport à la droite D. **0.5pt**

3. a. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f .

Démontrer que pour tout x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. **0.5pt**

b. En utilisant la partie A déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f . **0.75pt**

4. Tracer la droite D et la courbe C dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. **0.75pt**

EXERCICE 4 5 pts

Un sac contient 8 jetons indiscernables au toucher dont 5 jetons de couleur noire. On tire simultanément 6 jetons du sac.

1- Calculer la probabilité d'obtenir exactement trois jetons noirs. **0.5 pt**

2- On répète 10 fois de suite de façons identiques et indépendantes le tirage simultané et au hasard de 6 jetons du sac.

Calculer la probabilité d'obtenir exactement 6 fois, 3 jetons noirs à l'issu de l'épreuve. **1.5 pt**

3- On tire n fois de suite et de façons identiques et indépendantes 6 jetons de l'urne.

Calculer la probabilité P_n de l'évènement E : « obtenir au moins une fois trois jetons de couleur noir ». **1.5 pt**

4- Déterminons le nombre minimum de fois qu'on peut répéter l'épreuve pour que la probabilité de E soit au moins égale 0.95. **1.5 pt**