Ecole Supérieure des Sciences de l'Assurance et des Risques (**ESSFAR**)
CONCOURS D'ENTREE EN MASTER 1
Session de Septembre 2022
Epreuve de Mathématiques
Durée : 04 heures
Documents autorisés : Calculatrices non programmables+ table de la loi normale

Exercice 1. *(Calcul différentiel)* ***6 points***

1. *On se propose d'étudier la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(2x-2y)}{x-y} \text{ si } x \neq y \\ 2 \text{ si } x = y. \end{cases}$
   (a) *Soit la fonction* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $u(t) = \begin{cases} \frac{\sin 2t}{t} \text{ si } t \neq 0 \\ 2 \text{ si } t = 0 \end{cases}$
      i. *Montrer que* u *est continue.*
      ii. *Montrer que* u *est (partout) dérivable et donner l'expression de la (fonction) dérivée* $u' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(on pourra utiliser un développement de Taylor convenable).*
      iii. *Montrer que* u *est de classe* $\mathcal{C}^1$.
   (b) f *possède-elle les propriétés suivantes ?*
      i. f *est continue.*
      ii. f *est différentiable.*
      iii. f *est de classe* $\mathcal{C}^1$.
2. *Soit la fonction* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie pour tout point* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *par* $g(x,y) = x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2)$.
   (a) *Montrer que* g *admet quatre points critiques.*
   (b) *Montrer que* g *n'admet pas d'extrêmum en* $(0,0)$.
   (c) *En se servant du développent de Taylor à l'ordre 2 en* $(4,0)$, *montrer que* g *admet un minimum local en* $(4,0)$.

Exercice 2. *(Mesure et Intégration)* ***4 points***

1. *On définit sur* $\mathbb{R}$ *la suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 1}$ *par* $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3}\ln(1+\frac{x}{n}), & si \quad x \in [1,+\infty] \\ 0 \quad sinon \end{cases}$.
   (a) *Montrer que la suite* $(f_n)_{n\geq 2}$ *converge* λ*-p-p vers une fonction* f *que l'on déterminera.*
   (b) *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, f_n *est-elle* λ*-intégrable ?*
   (c) *Déterminer en vérifiant les hypothèses du théorème utilisé la limite* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int f_n d\lambda$.
2. *On définit sur* $\mathbb{R}$ *la suite de fonctions* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par la relation* $h_n(x) = \frac{ne^{-|x|}}{x}\sin(\frac{x}{n})$
   (a) *Montrer que la suite* $(h_n)_{n\geq 2}$ *converge* λ*-p-p vers une fonction* h *que l'on déterminera.*
   (b) *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$, h_n *est intégrable au sens de Lebesgue.*
   (c) *Montrer clairement que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int h_n d_\lambda = \int (\lim\limits_{n\to+\infty} h_n) d\lambda$.
   (d) *Calculer cette limite commune.*

Exercice 3. ***10 points***
Les questions ci-dessous sont indépendantes

1. *On considère un couple de variables aléatoires continues* (X,Y) *dont la densité jointe est donnée par* $f(x,y) = \begin{cases} k(\frac{1}{x^2}+y^2) \text{ si } 1 \leq x \leq 5 \text{ et } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
   (a) *Montrer que* $k = \frac{15}{64}$
   (b) *Calculer les densités marginales de* X *et de* Y.
   (c) *Les variables* X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*
   (d) *Déterminer la densité marginale de* X *sachant que* $Y = 0$.
   (e) *Calculer la covariance de* X *et* Y

2. *On cherche un parapluie qui, avec la probabilité $\frac{p}{7}$ se trouve dans un quelconque des 7 étages d'un immeuble. On a exploré en vain les 6 premiers étages. Quelle est la probabilité $f(p)$ que le parapluie se trouve au 7 eme étage ?*
3. *Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne 20 et d'écart type 5.*
   (a) *Calculer le pourcentage des valeurs dépassant 12*
   (b) *Calculer le pourcentage des valeurs comprises entre 12 et 29*
   (c) *Déterminer la valeur dépassée par 40% des valeurs de cette variable aléatoire.*