CONCOURS D'ENTREE EN 1ère ANNEE – SESSION JUILLET 2022

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée 3h00

EXERCICE 1 (4 points)

Le rang $x_i = 1$ est donné pour l'année 1998. La consommation est exprimée en milliers d'euros.

Année	1998	2000	2001	2002	2004
Rang de l'année x_i	1	3	4	5	7
Consommation en milliers d'euros y_i	28,5	35	52	70,5	100,5

1. Représenter le nuage de points $P_i(x_i\,;\,y_i)$ dans un repère orthogonal du plan (on prendra 1 cm comme unité en abscisses et 1cm pour 10 000 € en ordonnées). **0,5pt**

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage ; le placer dans le repère précédent. **0,5pt**

3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire et conclure. **0,5pt**

4. Un nouvel ajustement de type exponentiel semble encore plus adapté.

a. Recopier et compléter le tableau suivant sachant que $z = \ln y$. Les résultats seront arrondis au centième. **1pt**

xi	1	3	4	5	7	8
$z_i = \ln y_i$	3,35	...	...	...	...	4,94

b. Déterminer l'équation réduite de la droite de régression de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés à l'aide de la calculatrice; cette équation est de la forme $z = cx + d$; on donnera les arrondis des coefficients c et d à 10^{-2}. **1pt**

En déduire que : $y = 20{,}49\ e^{0,23x}$. **0,25pt**

c. Estimer alors, à l'aide de ce nouvel ajustement, la consommation des ménages de cette ville en 2007 à 100 € près.
0,25pt

EXERCICE 2 **(5 points)**

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1) On lance deux dés ordinaires, on désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur la valeur absolue de la différence des deux numéros sortis.
a) Quelles sont les différentes valeurs possibles de X ? **0,5pt**
b) Définir la loi de probabilité de X. **0,75pt**
c) Calculer l'espérance mathématique E(X), la variance V(X) et l'écart type. **0,5pt×3=1,5pt**
2) Massangam est constituée de 60% de femmes et 40% d'hommes. 45% des femmes sont des commerçantes ainsi que 20% des hommes. On choisit au hasard un habitant de Massangam pour une réception au palais de l'unité.
a) Quelle est la probabilité p de choisir un commerçant ? (homme comme femme) **0,75pt**
b) Quelle est la probabilité d'avoir un homme sachant qu'il est commerçant. **0,75pt**
c) Quelle est la probabilité d'avoir une femme sachant qu'elle n'est pas commerçante. **0,75pt**

EXERCICE 3 **(4 points)**

Les parties I et II sont indépendantes.

I. On considère dans $\mathbb{C}^3$, le système d'inconnues x, y, z suivant $(S) : \begin{cases} x+y+z = 2i-1 \\ xy+yz+xz = -2(1+i) \\ xyz = 2 \end{cases}$

1-Montrer que $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ est solution du système (S) si et seulement si a, b et c sont racines d'un polynôme P du troisième degré dont le coefficient dominant est 1 que l'on déterminera. **0,5pt**

2- Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle et une seule que l'on déterminera. **0,5pt**

3- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ et en déduire les solutions du système (S) dans $\mathbb{C}^3$. **1,5pt**

II. En considérant l'équation : $z^5 - 1 = 0$, calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$ **1,5pt**

ESSFAR, une école de GEDUQUE SA, autorisation N°17-08298/L/MINESUP/SG/DDES/ESUP/SDA/AEO
Rue 1504, BP 35364, Yaoundé Omnisport Mfandena // Mail : contact@essfar.com
Web: www.essfar.com // Tel : 650 80 62 54 / 699 83 53 96 / 650 80 62 63 / 691 71 73 79

EXERCICE 4 (7points)

I- Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}, \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

1. Etudier la dérivabilité de f en 0. **0,5pt**
2. Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \ln x + x + 1$.

a) Etudier les variations de g. **0,75pt**

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β telle que : $0{,}27 < \beta < 0{,}28$ **0,75pt**

c) Donner le signe de $g(x)$ en fonction de x. **0,25pt**

3) a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$. **0,5pt**

b) Vérifier que $f(\beta) = -\beta$ **0,25pt**

c) Construire la courbe de f dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.
0,5pt

II- On définit la fonction h sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $[3,4]$.
0,25pt
2. Démontrer que $f(x) = 1$ si et seulement si $h(x) = x$.
0,25pt
3. Démontrer que pour tout x élément de $[3,4]$, $h(x)$ est aussi un élément de $[3,4]$.
0 ,5pt
4. Démontrer que $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout x élément de $[3,4]$.
0,5pt
5. Soit U la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = h(U_n), \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_n \in [3, 4]$.
0,5pt

b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.
0,5pt

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
0,5pt

ESSFAR, une école de GEDUQUE SA, autorisation N°17-08298/L/MINESUP/SG/DDES/ESUP/SDA/AEO
Rue 1504, BP 35364, Yaoundé Omnisport Mfandena // Mail : contact@essfar.com
Web: www.essfar.com // Tel : 650 80 62 54 / 699 83 53 96 / 650 80 62 63 / 691 71 73 79

d) Démontrer que la suite U est convergente et déterminer sa limite. **0,5pt**

e) Déterminer les entiers n pour lesquels U_n est une valeur approchée de α à 10^{-2}près. **0,5pt**

ESSFAR, une école de GEDUQUE SA, autorisation N°17-08298/L/MINESUP/SG/DDES/ESUP/SDA/AEO
Rue 1504, BP 35364, Yaoundé Omnisport Mfandena // Mail : contact@essfar.com
Web: www.essfar.com // Tel : 650 80 62 54 / 699 83 53 96 / 650 80 62 63 / 691 71 73 79