CONCOURS D'ENTREE EN 1ère ANNEE – SESSION JUILLET 2021

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée 3h00

EXERCICE I : (4 Points)

f est l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^3 - 2(2+3i)z^2 + (-6+11i)z + 7 + i$$

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une racine imaginaire pure z_1 que l'on déterminera. (**0.75pt**)
2. 2.1. Déterminer trois nombres complexes $a, b\ et\ c$ tels que : pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$, $f(z) = (z-i)(az^2 + bz + c)$ (**1pt**)

   2.2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. On appelle $z_2\ et\ z_3$ les autres solutions telles que $|z_3| > |z_2|$ (**0.75pt**)
3. Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$). A, B et C sont les points du plan d'affixes respectives $z_A = i, z_B = 1 + i\ et\ z_C = 3 + 4i$.

S est la similitude directe plane qui laisse invariant le point A et transforme C en B.

3.1. Déterminer l'écriture complexe associée à S. (**1pt**)

3.2. Déterminer les éléments géométriques de S. (**0.5pt**)

EXERCICE II : (6 Points)

A/ Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^3 + ax + b$ avec a et b réels.

1- Etudier suivant les valeurs de a les variations de P et dresser son tableau de variation. (**1pt**)

2- On suppose a strictement négatif.

a) Démontrer que le polynôme p admet une unique racine réelle si $4a^3 + 27b^2 > 0$ (**0,75pt**)

b) Démontrer que le polynôme p admet trois racines réelles si et seulement si $4a^3 + 27b^2 < 0$ (**0,75pt**)

ESSFAR, une école de GEDUQUE SA, autorisation N°17-08298/L/MINESUP/SG/DDES/ESUP/SDA/AEO
Rue 1504, BP 35364, Yaoundé Omnisport Mfandena // Mail : contact@essfar.com
Web: www.essfar.com // Tel : (+237) 242 00 63 73 / 650 80 62 54 / 699 83 53 96 / 650 80 62 63 / 691 71 73 79

c) Démontrer que le polynôme p admet deux racines réelles distinctes α *et* β que l'on déterminera telles que $P(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)$ si $4a^3 + 27b^2 = 0$ (**1pt**)

B/ Dans cette partie $P(x) = x^3 - 2x + 4$

1- Démontrer que P admet une racine réelle. (**0,5pt**)

2- a) Démontrer que si U et V sont deux nombres complexes tels que $U^3 + V^3 = -4 \text{ et } UV = \frac{2}{3}$ alors $U + V$ est une racine de P. (**1pt**)

b) En déduire que $U^3 \text{ et } V^3$ sont solutions de l'équation $x^2 + 4x + \frac{8}{27} = 0$ (**1pt**)

EXERCICE III : (5 Points)

La famille Youta possède une imprimerie. Le nombre de livres imprimés lors des années précédentes est donné par le tableau suivant :

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de livres imprimés par milliers y_i	15,35	15,81	16,44	16,75	17,19	17,30

1- Ecrire une équation de la droite de régression de y en x. On suppose que cette tendance reste observée. **2pts**

2- On constate à partir de 2012 que la production baisse chaque année de 4% et l'imprimerie sera déclarée en faillite lorsque la production passera en dessous de 6000 livres.
En quelle année sera déclarée la faillite de cette imprimerie? **3pts**

ESSFAR, une école de GEDUQUE SA, autorisation N°17-08298/L/MINESUP/SG/DDES/ESUP/SDA/AEO
Rue 1504, BP 35364, Yaoundé Omnisport Mfandena // Mail : contact@essfar.com
Web: www.essfar.com // Tel : (+237) 242 00 63 73 / 650 80 62 54 / 699 83 53 96 / 650 80 62 63 / 691 71 73 79

EXERCICE IV : (5Points)

Une urne contient deux boules noires et une boule blanche. On tire au hasard une boule de l'urne. Si la boule tirée est blanche le jeu est terminé. Si elle est noire on remet dans l'urne et on procède à un nouveau tirage d'une boule. Si la nouvelle boule tirée est blanche, le jeu est terminé sinon elle est remise dans l'urne et on procède à un nouveau tirage d'une boule, et ainsi de suite. Mais on effectue au plus n tirages $(n \geq 2)$. C'est-à-dire au $n^{ième}$ tirage le jeu est terminé quel que soit la boule tirée.

Soit X la variable aléatoire qui détermine le nombre de tirages effectués par un joueur pour que le jeu se termine.

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité

1- a) Définir la loi de probabilité de la variable aléatoire X (on exprimera P_i= P(X=i) en fonction de i). (**1.5pt**)
   b)Vérifier que $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$ (**1.5pt**)

2- Montrer que l'espérance mathématique est $E(X) = \frac{1}{3} f'_n\left(\frac{2}{3}\right) + n(\frac{2}{3})^n$ sachant que l'on a la fonction $f_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$ avec n un nombre entier strictement positif. (**2pts**)

ESSFAR, une école de GEDUQUE SA, autorisation N°17-08298/L/MINESUP/SG/DDES/ESUP/SDA/AEO
Rue 1504, BP 35364, Yaoundé Omnisport Mfandena // Mail : contact@essfar.com
Web: www.essfar.com // Tel : (+237) 242 00 63 73 / 650 80 62 54 / 699 83 53 96 / 650 80 62 63 / 691 71 73 79