

Exercice 1. 5 points

1. Soit $E = \mathbb{Z}$. On considère la tribu \mathcal{T} engendrée par les ensembles $S_n = \{n, n+1, n+2\}$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Quels sont les éléments de la tribu \mathcal{T} ?
2. Le but de cette question est de construire un espace mesurable (X, \mathcal{T}) et une application bijective $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ mesurable, mais dont la réciproque f^{-1} n'est pas mesurable. Pour cela, on pose $X = \mathbb{Z}$ et \mathcal{T} est la famille des parties A de \mathbb{Z} ayant la propriété suivante : pour tout entier $n \geq 1$, $2n \in A$ si et seulement si $2n+1 \in A$.
 - (a) Donner deux exemples d'éléments de \mathcal{T}
 - (b) Montrer que \mathcal{T} est une tribu.
 - (c) On définit pose $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ par $f(n) = n+2$. Démontrer que f est bijective et est mesurable.
 - (d) Montrer que f^{-1} n'est pas mesurable.

Exercice 2. 5 points.

1. Les fonctions suivantes admettent-elles des limites en M_0 ? Calculer ces limites le cas échéant.
 - (a) $f(x, y) = \frac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}$ en $M_0(0, 0)$;
 - (b) $f(x, y) = \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$ en $M_0(0, 0)$.
2. Soit la fonction f définie de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
 - (a) Montrer que f est continue en $(0, 0)$.
 - (b) f est-elle de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de $(0, 0)$?
 - (c) f est-elle différentiable au voisinage de $(0, 0)$? Déterminer sa différentielle en $(0, 0)$ le cas échéant.
3. Soient les fonctions f et h définies de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} par

$$f(x, y) = x^3 + y^3 \quad \text{et} \quad h(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2.$$

- (a) Déterminer les points critiques de f ainsi que la nature de chaque point critique.
- (b) Déterminer les points critiques de h ainsi que la nature de chaque point critique.

Exercice 3. 6,5 points.

1. Une urne contient 34 boules blanches et une boule noire toutes indiscernables au toucher.
 - (a) On tire successivement et avec remise 10 boules de cette urne et on note X le nombre de fois que la boule noire est tirée.
 - i. Déterminer la loi de probabilité de X
 - ii. Calculer la probabilité de ne pas tirer la boule noire au cours des 10 tirages
 - iii. Combien de tirages doit-on effectuer pour tirer la boule noire au moins une fois avec une probabilité supérieure ou égale à 0.6?
 - (b) On tire au hasard successivement sans remise jusqu'à tirer la boule noire et on note Y le nombre de boules blanches tirées.
Déterminer la loi de probabilité de Y puis calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.
 2. On suppose qu'un patient peut avoir une et une seule des 3 maladies A_1, A_2, A_3 : On considère une population de patients dans laquelle les pourcentages de personnes qui souffrent des maladies A_1, A_2 et A_3 sont respectivement : 50%, 25% et 25%. Le patient subit un test qui dans 25% des cas est positif pour A_1 , 50% pour A_2 et 90% pour A_3 . Etant donné qu'un patient ayant subi indépendamment 3 fois le test a eu 2 fois un test positif, calculer la probabilité qu'il soit atteint : (i) de A_1 (ii) de A_2 (iii) de A_3 :
-

Exercice 4. 3,5 points

1. Le salaire horaire moyen pour des responsables de la finance dans la région centrale Nord-Est sont normalement distribués, de moyenne 32,62 dollars, avec un écart type de 2,32 dollars.
 - (a) Quelle est la probabilité qu'un responsable gagne entre 30 et 35 dollars de l'heure ?
 - (b) Quelle est la probabilité qu'un responsable sélectionné aléatoirement gagne moins de 28 dollars de l'heure ?
 - (c) A combien devrait s'élever le salaire horaire pour qu'un responsable de la finance soit parmi les 10% les mieux payés ?
 2. Lors d'un procès en attribution de paternité, un expert témoigne que la durée de grossesse, en jours, est de loi approximativement normale de paramètres $m = 270$ et $\sigma^2 = 100$. L'un des pères possibles est en mesure de prouver son absence du pays pendant une période s'étendant entre le 290-ième et le 240-ième jour précédant l'accouchement. Quelle est la probabilité que la conception de l'enfant ait pu avoir lieu pendant la présence de cet homme au pays ?
-