**CONCOURS D'ENTREE EN 1ère ANNEE – SESSION AVRIL 2020**

**EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

**Deux exercices au choix – Durée 1h30**

## EXERCICE 1 5 pts

**1-** On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 0$ , $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_{n.}$$

Calculer $u_2 , u_3, u_4$ *de la suite* $(u_n)$. 0.25*3=0.75 pt

2- a) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4u_n + 1.$ 0.75 pt

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n$ est un entier naturel. 0.5 pt

c) Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, le PGCD de $u_n$ *et* $u_{n+1.}$ 1 pt

3- Soit $(V_n)$ la suite définie pour tout entier naturel n par : $V_n = u_n + \frac{1}{3}$

a) Montrer que $(V_n)$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme $V_0$ et la raison. 0.75 pt

b) Exprimer $V_n$ *puis* $u_n$ en fonction de n. 0.25*2 pt

c) Déterminer pour tout entier naturel, le PGCD de $4^n - 1$ *et* $4^{n+1} - 1.$ 0.5 pt

4- En calculant la différence $(4^{n+1} - 1) - (4^n - 1)$, retrouver le résultat obtenu au 3.c. 0.75 pt



ESSFAR, une école de GEDUQUE SA, autorisation N°17/08298/MINESUP/SG/DDES/ESUP/SDA/AEO
Rue 1504, BP 35364, Yaoundé Omnisport Mfandena
Web: www.essfar.com // Tel : (+237) 242 00 63 73 / 650 80 62 63 / 650 80 62 54

**EXERCICE 2 5points**

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $et\ D = P^{-1} \times A \times P$

1- Calculer $P^{-1}\ et\ D$. 0.5*2 pt

Démontrer que pour tout entier naturel n, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$. 1.5pt

2- En déduire l'expression de $A^n$ en fonction de n. 1 pt

3- calculer $A^2\ et\ A^3$. 0.75*2

**EXERCICE 3 5 pts**

**PARTIE A 1.5 pts**

Soit la fonction $V$ definie sur $]0\,;+\infty[\ par : V(x) = \frac{2lnx}{x^2+x}$

1-) Montrer que pour tout x supérieur ou égal à 1, $\frac{lnx}{x^2} \leq V(x) \leq \frac{lnx}{x}$ . 0.5pt

2-) Calculer $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{lnx}{x^2}\, dx\ et\ J = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{lnx}{x}\, dx$ ; 0.5pt

3-) En déduire un encadrement de $K = \int_1^{\frac{3}{2}} V(x)\ dx$ . 0.5pt

**PARTIE B 3.5 pts**

f désigne la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = x - \frac{e^x-1}{e^x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Unités sur les axes : 2cm.

**1-** Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation. 0.75pt

**2-** a-) Montrer que pour tout réel x, on a : $f(x) - (x-1) = \frac{2}{e^x+1} = \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}$ 0.25pt

b-) Montrer que les droites (D) et (D') d'équations respectives : y = x-1 et y = x+1 sont asymptotes a la courbe (C) de f. 0.5pt

c-) Tracer les droites (D) ; (D') et la courbe (C) de f dans le même repère. 0.5pt

**3-** a-) Montrer que f admet sur ℝ une reciproque $f^{-1}$ dont on donnera le tableau de variation. 0.5pt

b-) Tracer la courbe (C') de $f^{-1}$ dans le même repère que (C). 0.25pt

4-Soit a un réel supérieur ou égal à 1. $\mathcal{A}(a)$ L'aire en $cm^2$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations x=1 et x=a.

a-) Calculer $\mathcal{A}(a)$ et preciser $\mathcal{A}(2)$ a $10^{-2}\ pres$ . 0.5pt

b-) Calculer la limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$. 0.25pt



ESSFAR, une école de GEDUQUE SA, autorisation N°17/08298/MINESUP/SG/DDES/ESUP/SDA/AEO
Rue 1504, BP 35364, Yaoundé Omnisport Mfandena
Web: www.essfar.com // Tel : (+237) 242 00 63 73 / 650 80 62 63 / 650 80 62 54

**EXERCICE 4    5 pts**

Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher dont 5 boules de couleur noire. On tire simultanément 6 boules du sac.

**1-** Calculer la probabilité d'obtenir exactement trois boules noires. 0.5 pt

**2-** On répète 10 fois de suite de façons identiques et indépendantes le tirage simultané et au hasard de 6 boules du sac.

Calculer la probabilité d'obtenir exactement 6 fois, 3 boules noires à l'issu de l'épreuve. 1.5 pt

**3-** On tire n fois de suite et de façons identiques et indépendantes 6 boules de l'urne.

Calculer la probabilité $P_n$ de l'évènement E : « obtenir au moins une fois trois boules de couleur noire ». 1.5 pt

**4-** Déterminons le nombre minimum de fois qu'on peut répéter l'épreuve pour que la probabilité de E soit au moins égale à 0.95. 1.5 pt



ESSFAR, une école de GEDUQUE SA, autorisation N°17/08298/MINESUP/SG/DDES/ESUP/SDA/AEO
Rue 1504, BP 35364, Yaoundé Omnisport Mfandena
Web: www.essfar.com // Tel : (+237) 242 00 63 73 / 650 80 62 63 / 650 80 62 54