ESSFAR

ECOLE SUPERIEURE DES SCIENCES
DE LA FINANCE, DE L'ASSURANCE ET DES RISQUES

CONCOURS D'ENTREE EN L3

Session d'AOÛT 2018

Epreuve d'Analyse, Algèbre, Probabilité et Statistique

Durée : 04 heures

Documents autorisés : Calculatrices non programmables

Exercice 1. 6 points

1. Soit la suite de fonction (f_n) définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$.
   (a) Etudier la convergence simple de cette suite. **(1pt)**
   (b) Etudier la convergence uniforme de cette suite. **(1pt)**
2. Soit la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$.
   (a) Etudier la convergence simple de cette suite. **(1pt)**
   (b) Etudier la convergence uniforme de cette suite. **(1pt)**
3. On définit la fonction f par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.
   (a) Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière. **(0.5pt)**
   (b) Etudier la convergence de cette série au point $x = -R$. **(0.75pt)**
   (c) Etudier la convergence de cette série au point $x = R$. **(0.75pt)**

Exercice 2. 3.5 points

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier si A est inversible. **(0.75pt)**
   (b) Déterminer l'inverse de A le cas échéant. **(0.75pt)**

2. On définit les matrices M et N par $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier si M est diagonalisable ou non. **(0.75 pt)**

   (b) Si M est diagonalisable, déterminer une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $M^{-1}PM = D$. **(0.75 pt)**

   (c) Vérifier si N est diagonalisable ou non. **(0.75 pt)**

   (d) Si N est diagonalisable, déterminer une matrice de passage Q et une matrice diagonale Δ telles que $N^{-1}QN = \Delta$. **(0.75 pt)**

3. On définit la marice B par $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer les valeurs propres de la matrice B. **(0.75 pt)**

   (b) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la matrice B^n. **(0.75 pt)**

Exercice 3. 7 points

Le montant d'un sinistre sur un portefeuille d'assurances automobile est une v.a.r X, exprimée en milliers de francs, qui suit la loi normale de moyenne 178 et d'écart-type 10.

1. Calculer la probabilité que le montant d'un sinistre soit :

   (a) supérieur à 180 000. **(0.5 pt)**

   (b) supérieur à 190 000. **(0.5 pt)**

   (c) inférieur à 150 000. **(0.5 pt)**

   (d) compris entre 160 000 et 185 000. **(0.5 pt)**

2. Déterminer la valeur a telle que $P(X \geq a) = 0.8$. Interpréter. **(1 pt)**

3. Déterminer la valeur b telle que $P(X \leq b) = 0.95$. Interpréter. **(1 pt)**

4. Un sinistre est "coûteux" s'il est parmi les 10% ayant les montants les plus élévés. A partir de quel montant un sinistre est coûteux ? **(1 pt)**

5. Un sinistre est "peu coûteux" s'il est parmi les 20% ayant les montants les plus bàs. Jusqu'à quel montant un sinistre est peu couteux ? **(1 pt)**

6. Déterminer un intervalle centré sur 178 000 et ayant la probabilité 0.95 de contenir le montant d'un sinistre. **(1 pt)**

Exercice 4. 3.5 points

Le responsable du service de "Gestion de Ressouces Humaines" veut estimer la réaction des salariés à propos de la mise en place d'un système de rémunérations flexibles.

1. Il interroge au hasard et indépendamment un échantillon de 200 salariés d'une des usines du groupe. 80 sont favorables au nouveau système; déterminer un intervalle de confiance, de niveau de confiance 95 %, de p_1, proportion des salariés de cette usine favorables au nouveau système. **(1 pt)**

   table de valeur

2. Quelle doit être la taille de l'échantillon pour que l'intervalle de confiance de p_1 ait une largeur au plus égale à 0.02 ? On prendra pour p_1 la même estimation qu'à la question précédente. **(1 pt)**

3. En intérrogeant dans les mêmes conditions un échantillon de 100 salariés d'une autre usine du groupe, il obtient 48 opinions favorables. En notant p_2 la proportion des salariés de cette usine, favorables au nouveau système, tester les hypothèses $H_0 : p_1 = p_2$ contre $H_1 : p_1 \neq p_2$ au seuil $\alpha = 0.05$. **(1.5 pt)**