Ecole Supérieure des Sciences de la Finance de l'Assurance et des Risques
Epreuve de Mathématiques
Concours d'entrée en Master 1 de Septembre 2020

Exercice 1. 4 points.

1. *Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   - (a) *Soit $u = (a,b)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. f admet-elle en (0, 0) une dérivée dans la direction de u ? Déterminer sa valeur le cas échéant.*
   - (b) *f est-elle différentiable en $(0,0)$? Déterminer sa différentielle le cas échéant.*
2. *Soit la fonction g définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y$. On admet que g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.*
   - (a) *Déterminer les points critiques de g.*
   - (b) *Déterminer la nature de chaque point critique.*

Exercice 2. 6 points.

1. *Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$.*
   - (a) *Montrer que si $\sum_{n\geq 0} \int |f_n| d\mu < +\infty$, alors, on a $\sum_{n\geq 0} \int f_n d\mu = \int \left(\sum_{n\geq 0} f_n \right) d\mu$*
   - (b) *On considère l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$*
     - i. *Déterminer une suite (f_n) de fonctions intégrables sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ vérifiant $\sum_{n\geq 0} f_n = \frac{\ln x}{1-x}$.*
     - ii. *Calculer I.*
2. *On définit sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation* $h_n(x) = \begin{cases} e^{-nx} sinx & si \ x \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$
   - (a) *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, h_n est intégrable au sens de Lebesgue et calculer $u_n = \int h_n d\lambda$.*
   - (b) *Montrer clairement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.*
3. *On définit la suite de fonction $(h_n)_{n\geq 1}$ sur $[0,1]$ par* $h_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & si \quad x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & sinon \end{cases}$
   - (a) *Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n\geq 1}$ converge λ- presque partout vers une fonction h que l'on déterminera.*
   - (b) *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1_{[0,1]} h_n$ est λ-intégrable.*
   - (c) *Déterminer en vérifiant les hypothèses du théoème utilisé la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n = \int 1_{[1,+\infty[} h_n d\lambda$*

Exercice 3. 6 points.
F*ormule de Poincaré et application :*

1. *Soit (Ω, F, P) un espace probabilisé, soient $A_1, ...$ et A_n n événements :*
   montrer que $P\left(\bigcup_{m=1}^{n} A_m \right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} p_k$ *où pour tout k,* $p_k = \sum_{1\leq i_1 < ... < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k})$
2. *Un facteur possède n lettres adressées à n destinataires distincts. Il est totalement ivre et poste au hasard une lettre par boîte.*
   - (a) *Quelle est la probabilité d'obtenir la bonne répartition ?*
   - (b) *Quelle est la probabilité qu'une lettre au moins arrive à la bonne adresse ?*
   - (c) *Quelle est la probabilité qu'aucune lettre n'arrive à la bonne destination ?*
   - (d) *Quel est le nombre d_n de manières différentes de poster les lettres de telle sorte qu'aucune n'arrive à destination ?*

Exercice 4. 4 points.

Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées.

1. *Soit X la variable aléatoire «épaisseur de la plaque en mm» ; on suppose que X suit une loi normale de paramètres $m = 0.3$ et $\sigma = 0.1$.*

(a) *Calculez la probabilité pour que X soit inférieur à $0.36mm$*

(b) *Calculer la probabilité pour que X soit compris entre 0.25 et 0.35 mm.*

2. *L'utilisation de ces plaques consiste à en empiler n, numérotées de 1 à n en les prenant au hasard : soit X_i la variable aléatoire «épaisseur de la plaque numéro i en mm» et Z la variable aléatoire «épaisseur des n plaques en mm».*
   Pour $n = 20$, quelle est la loi de Z, son espérance et sa variance ?
3. *On effectue un contrôle de fabrication sur des pièces dont une proportion $p = 0.02$ est défectueuse. On contrôle un lot de 1000 pièces : Déterminer la probabilité pour que le nombre de pièces défectueuses parmi 1000 soit compris (au sens large) entre 18 et 22.*