

CONCOURS D'ENTREE EN 1ère ANNEE – SESSION DE SEPTEMBRE 2021

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée 3h00 - Coefficient 4

EXERCICE 1 : 5 Points

Afin d'équiper les élèves des groupes scolaires de la commune, une municipaliste achète auprès d'un grossiste des stylos-billes de trois marques différentes A, B et C.

40% des stylos commandés sont de marque A, et 15% de ces stylos sont défectueux.

35% des stylos commandés sont de marque B, et 10% de ces stylos sont défectueux.

25% de ces stylos commandés sont de marque C, et 5% de ces stylos sont défectueux.

On choisit au hasard un stylo dans le stock de la municipalité.

1- Construire un arbre pondéré décrivant la situation étudiée. 1 pt

2- Déterminer la probabilité que le stylo choisi soit défectueux. 2pt

3-Le stylo choisi est en bon état de fonctionnement. Quelle est la probabilité, au centième près, qu'il soit de marque C ? 2 pt

EXERCICE 2 : 5 Points

Le tableau ci-dessous représente la taille x (en centimètres) et la pointure y (en centimètres) de 10 élèves choisis au hasard dans une classe de terminale.

x	150	159	158	160	165	168	170	172	175	171
y	40	41	43	43	42	44	44	44.5	44.5	44

- 1- Construire le nuage de points de cette série statistique. **1 pt**
- 2- Déterminer les coordonnées du point moyen G et le placer dans le même repère. **0.75pt**
- 3- Calculer la covariance de la série (x;y) et les variances de x et de y. **0.75pt**
- 4- Calculer le coefficient de corrélation linéaire. **1pt**
- 5- Utiliser la méthode des moindres carrés pour déterminer une équation cartésienne de l'ajustement linéaire de y en x. **1pt**
- 6- En déduire la peinture d'un élève dont la taille est de 163 cm. **0.5pt**

EXERCICE 3 : 5 Points

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 0$; $U_1 = 1$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n$.

- 1) Calculer les termes U_2 ; U_3 ; U_4 de la suite (U_n) **0.75pt**
- 2) a- A l'aide du raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 4U_n + 1$. **0.5pt**
 b- Montrer que pour tout entier naturel n, U_n est un entier naturel. **0.5pt**
- 3) Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $V_n = U_n + \frac{1}{3}$.
 a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme V_0 et la raison. **0.5pt**
- 4- Soit la fonction f définie par $f(x) = (2x + 1)e^{-x} + 1$.

On considère les équations différentielles (E) et (E') suivantes :

$(E') : 3y'' + 2y' - y = 0 \quad \text{et} \quad (E) : 3y'' + 2y' - y = -8e^{-x} - 1$

- a) Vérifier que f est solution de (E). **0.5pt**
- b) Montrer qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si g-f est solution de (E') **1.25pt**
- c) Résoudre alors l'équation (E') et en déduire les solutions de (E). **1 pt**

EXERCICE 4 : 5 Points

On désigne par g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

On note (C) la courbe représentative de g dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j})

(Unité graphique : 4cm)

- 1-a)** Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. **1 pt**
- b)** Construire la courbe de (C) et ses asymptotes éventuelles. **1pt**
- 2-** On considère les points M et M' de la courbe (C) d'abscisses respectives x et -x
 - a)** Déterminer les coordonnées du point A milieu du segment $[MM']$. **0.5pt**
 - b)** Que représente le point A pour la courbe (C)? **0.25pt**
- 3-** soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On désigne par D_n le domaine du plan limité par la droite d'équation $y=1$, la courbe (C) et les droites d'équations $x=0$ et $x=n$. A_n désigne l'aire du domaine D_n exprimée en unité d'aire.
 - a)** Calculer A_n en fonction de n. **0.5pt**
 - b)** Etudier la convergence de la suite (A_n) **0.5pt**

4-

- a) Déterminer les réels a et b tels que $\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{ae^x}{1+e^x} + \frac{be^x}{(1+e^x)^2}$ **0.5pt**
- b) Exprimer en fonction de α , $V(\alpha) = \int_{\alpha}^0 \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2} dx$. **0.5 pt**
- c) Calculer la limite $V(\alpha)$ lorsque α tend $-\infty$. **0.25pt**