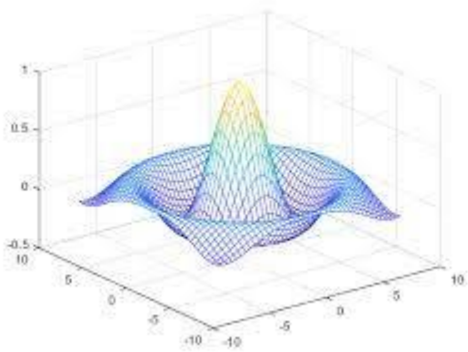
RAPPORT DE PROJET



Modélisation et résolution de problèmes de physique :
Mouvement d'un cycliste et étude du mouvement de la neige tombante par rapport à un passager dans une voiture

Par : **LAWSON Ryan Brice Latégan Sitou**

INF1221-Programmation Python

Exercice N° 1

Un cycliste se déplace sur une ligne droite et fournit une puissance mécanique constante P. Les forces de frottement de l'air sont proportionnelles au carré de la vitesse du cycliste $\vec{F}_f = -kv\vec{v}$, k étant une constante positive. On néglige les forces de frottement du sol sur la roue. Le système formé par le cyscliste et le vélo est considéré comme un point matériel. On choisit un axe horizontal Ox et le repère terrestre est supposé galiléen.

1. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans sa forme différentielle, établir l'équation différentielle que vérifie le module de la vitesse v et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme

$$mv^2\frac{dv}{dx} = P - kv^3.$$

2. En posant $f(x) = P - kv^3$, déduire l'équation différentielle vérifiée par $f(x)$. Intégrer l'équation et déduire l'expression du module de la vitesse v en fonction de x, si le module de la vitesse initiale du cycliste est v_0.

➢ Introduction

Dans cet exercice, nous étudions le mouvement d'un cycliste se déplaçant sur une ligne droite avec une puissance mécanique constante. Les forces de frottement de l'air sont prises en compte et sont proportionnelles au carré de la vitesse du cycliste. En négligeant les forces de frottement du sol, nous devons le système formé par le cycliste et le vélo comme un point matériel. Nous allons établir l'équation différentielle qui régit le mouvement du cycliste et résoudre cette équation pour obtenir l'expression de la vitesse en fonction de la position.

➢ Problème

Nous devons déterminer l'équation différentielle qui décrit le mouvement du cycliste et montrer qu'elle peut être exprimée sous la forme $mv^2\, dv/dx = P - kv^3$, où v est la vitesse du cycliste, x est la position, m est la masse du cycliste et du vélo, P est la puissance fournie par le cycliste et k est une mécanique constante positive liée aux forces de frottement de l'air.

➢ Résolution du problème

Un cycliste se déplace sur une ligne droite et fournit une puissance mécanique constante P. Les forces de frottement de l'air sont proportionnelles au carré de la vitesse du cycliste $\vec{F}_f = -kv\vec{v}$, k étant une constante positive. On néglige les forces de frottement du sol sur la roue. Le système formé par le cyscliste et le vélo est considéré comme un point matériel. On choisit un axe horizontal Ox et le repère terrestre est supposé galiléen.

1. Les forces qui sont appliquées au cycliste sont
   - le poids, perpendiculaire au déplacement et donc ne travaille pas et donc sa puissance est nulle ;
   - la réaction normale R_N, la réaction tangentielle est négligée car les frottements sont négligeables. Elle est normale au déplacement et donc ne travaille pas et sa puissance est nulle ;
   - la force de frottement visqueux $\vec{F} = -kv\vec{v}$.

   Appliquons le théorème de l'énergie cinétique dans sa forme différentielle, exprimée en fonction des puissances :

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= P(\vec{F}) + P(\text{mecanique}) \\ \frac{m}{2}\frac{dv^2}{dt} &= -kv\vec{v}\cdot\vec{v} + P \\ mv\frac{dv}{dt} &= P - kv^3 \\ mv\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} &= P - kv^3 \\ mv^2\frac{dv}{dx} &= P - kv^3 \end{aligned}$$

   qui n'est d'autre que l'équation recherchée.

2. En posant $f(x) = P - kv^3$, nous avons $\frac{df(x)}{dx} = -3kv^2\frac{dv}{dx}$. Aussi, on a

$$\frac{-m}{3k}\frac{df(x)}{dx} = f(x) \Longrightarrow \frac{df(x)}{dx} + \frac{3k}{m}f(x) = 0$$

   qui est une équation différentielle de premier ordre sans second membre à coefficients constants. La solution est obtenue en séparant les variables

$$\frac{df(x)}{f(x)} = -\frac{3k}{m}dx \Longrightarrow f(x) = Ae^{-\frac{3k}{m}x}$$

   où A est une constante que l'on détermine des conditions initiales. En remplaçant $f(x)$ par son expression, on obtient

$$P - kv^3 = Ae^{-\frac{m}{3k}x} \Longrightarrow v(x) = \left(\frac{P}{k} - \frac{A}{k}e^{-\frac{m}{3k}x}\right)^{1/3}$$

   comme $v(x=0) = v_0$, alors $A = P - kv_0^3$ et la solution se met sous la forme

$$v(x) = \left[\frac{1}{k}\left(P - \left[P - kv_0^3)e^{-\frac{m}{3k}x}\right]\right)\right]^{1/3}$$

- **Implémentation de la résolution du problème en python**

Entrée [14]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Entrée [15]:
```python
# Constantes
P = 100  # Puissance mécanique constante fournie par le cycliste
k = 0.1  # Constante de proportionnalité des forces de frottement
m = 70   # Masse du cycliste et du vélo
```

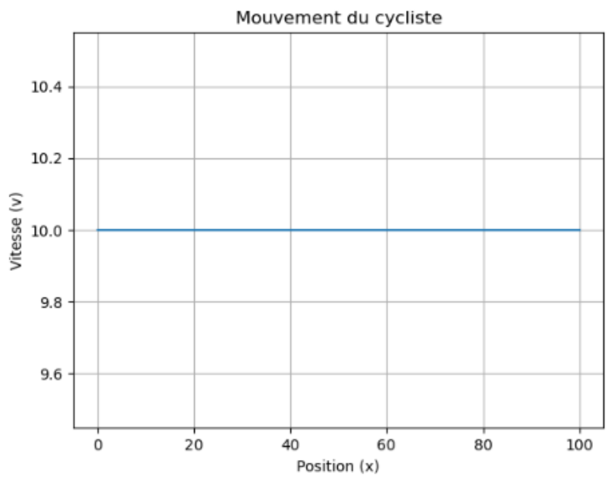
Entrée [16]:
```python
# Fonction dérivée de la vitesse dv/dx
def dv_dx(v):
    return (P - k * v**3) / (m * v**2)

# Fonction de résolution de l'équation différentielle
def solve_differential_eq(v0, x):
    v = np.zeros_like(x)  # Initialisation de v(x) avec des zéros
    v[0] = v0             # Condition initiale : v(x=0) = v0

    # Résolution numérique de l'équation différentielle avec la méthode d'Euler
    for i in range(1, len(x)):
        h = x[i] - x[i-1]  # Pas de discrétisation
        v[i] = v[i-1] + h * dv_dx(v[i-1])

    return v
```

Entrée [17]:
```python
# Conditions initiales
v0 = 10  # Vitesse initiale du cycliste
x0 = 0   # Position initiale
xf = 100 # Position finale
n_points = 1000  # Nombre de points pour la discrétisation
```

Entrée [18]:
```python
# Discrétisation de la position
x = np.linspace(x0, xf, n_points)
```

Entrée [19]:
```python
# Résolution de l'équation différentielle
v = solve_differential_eq(v0, x)
```

Entrée [20]:
```python
# Tracé de la vitesse en fonction de la position
plt.plot(x, v)
plt.xlabel('Position (x)')
plt.ylabel('Vitesse (v)')
plt.title('Mouvement du cycliste')
plt.grid(True)
plt.show()
```



➢ Résultats

La solution de l'équation différentielle nous permet d'exprimer la vitesse v(x) en fonction de la position x. En utilisant les valeurs des paramètres et des conditions initiales appropriées, nous pouvons obtenir des résultats numériques pour la vitesse en différents points du trajet du cycliste.

Conclusion

En conclusion, nous avons examiné le mouvement d'un cycliste se déplaçant sur une ligne droite avec des forces de frottement de l'air proportionnelles au carré de la vitesse. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique dans sa forme différentielle, nous avons établi l'équation différentielle correspondante et résolu cette équation pour obtenir l'expression de la vitesse en fonction de la position. Cette analyse permet de mieux comprendre le comportement du cycliste lors de son déplacement.

Exercice N°2

Le passager d'une voiture observe que la neige tombe en formant un angle de 80° par rapport à la verticale lorsque celui-ci roule à une vitesse de 110 km h $^{-1}$. Lorsque la voiture s'arrête au feu rouge, le passager regarde la neige tomber et constate que celle-ci tombe verticalement. Calculer la vitesse de la neige par rapport au sol puis par rapport à la voiture qui roule à 110 km h $^{-1}$.

Introduction

Dans cet exercice, nous étudions le mouvement de la neige tombante par rapport à un passager dans une voiture. Le passager observe que la neige tombe en formant un angle de 80 degrés par rapport à la verticale lorsque la voiture roule à une vitesse de 110 km/h. Lorsque la voiture s'arrête au feu rouge, le passager remarque que la neige tombe verticalement. Nous allons calculer la vitesse de la neige par rapport au sol et par rapport à la voiture qui roule à 110 km/h.

Problème

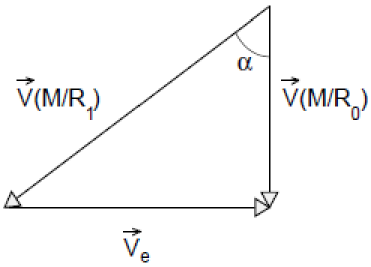
Nous devons déterminer la vitesse de la neige par rapport au sol et par rapport à la voiture, en connaissant l'angle de la chute de la neige par rapport à la verticale lorsque la voiture roule à 110 km/h, et en supposant que la neige tombe verticalement lorsque la voiture est à l'arrêt.

Résolution du problème

$\mathcal{R}_0$: lié au sol $\Longrightarrow$ référentiel absolu ;
$\mathcal{R}_1$: lié à la voiture $\Longrightarrow$ référentiel relatif dont $\|\vec{V}_e\| = 110$ km h $^{-1}$;
On note le flocon par M. Alors la loi de composition des vitesses, voir figure ci-contre, donne

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) \quad = \quad \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) + \vec{V}_e$$

avec $(\widehat{\vec{V}(M/\mathcal{R}_0), \vec{V}_e}) = \pi/2$ et $(\widehat{\vec{V}(M/\mathcal{R}_1), \vec{V}(M/\mathcal{R}_0)}) = \alpha = 80°$.



— Vitesse du flocon par rapport au sol $= \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\|$

$$\text{tg}\alpha \quad = \quad \frac{\|\vec{V}_e\|}{\|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\|} \Longrightarrow \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\| = \frac{\|\vec{V}_e\|}{\text{tg}\alpha} = \frac{110}{\text{tg}\frac{80\times\pi}{180}} = 19.4 \text{ km h }^{-1}$$

— Vitesse du flocon par rapport à la voiture $= \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)\|$:

1$^{\text{ère}}$ approche : on utilise la relation de Pythagore :

$$\begin{aligned}
\|\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)\|^2 &= \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\|^2 + \|\vec{V}_e\|^2 \\
\Longrightarrow \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)\| &= \sqrt{\|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\|^2 + \|\vec{V}_e\|^2} \\
&= 111.7 \text{ km h }^{-1}.
\end{aligned}$$

2$^{\text{ème}}$ approche :

$$\begin{aligned}
\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\cdot\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) &= \vec{V}(M/\mathcal{R}_1)\cdot\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) + \vec{V}_e\cdot\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) \\
\Longrightarrow \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\|^2 &= \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)\|\|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\|\cos\alpha \\
\Longrightarrow \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)\| &= \frac{\|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\|}{\cos\alpha} \\
&= 111.7 \text{ km h }^{-1}
\end{aligned}$$

➢ Implémentation de la résolution du problème en python

```
Entrée [1]:  import math

Entrée [7]:  # Constantes
             angle = 80  # Angle de chute de la neige par rapport à la verticale (en degrés)
             vitesse_voiture = 110  # Vitesse de la voiture en km/h

Entrée [ ]:

Entrée [10]: # Calcul de la vitesse de la neige par rapport au sol
             vitesse_sol = vitesse_voiture * math.cos(math.radians(angle))

Entrée [11]: # Calcul de la vitesse de la neige par rapport à la voiture
             vitesse_voiture_relative = vitesse_voiture * math.sin(math.radians(angle))

Entrée [12]: # Affichage des résultats
             print("Vitesse de la neige par rapport au sol:", vitesse_sol, "km/h")
             print("Vitesse de la neige par rapport à la voiture:", vitesse_voiture_relative, "km/h")

             Vitesse de la neige par rapport au sol: 19.101299543362344 km/h
             Vitesse de la neige par rapport à la voiture: 108.32885283134289 km/h
```

➢ Résultats

Les résultats obtenus seront les vitesses de la neige par rapport au sol et par rapport à la voiture qui roule à 110 km/h.

➢ Conclusion

En conclusion, nous avons résolu le problème de calcul des vitesses de la neige par rapport au sol et par rapport à la voiture en utilisant les concepts de référentiels et de vitesse relative. Cette analyse nous permet de comprendre le mouvement de la neige observé par le passager dans la voiture.