Project 3: 2.4 证明

设有矩阵 A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & x_{1c} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & x_{ic} & \cdots & x_{in} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & y_{(i+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & y_{mn} \end{bmatrix}$$

当 A 的第 c 列，即 $x_{1c} \sim x_{ic}$ 全为 0 时，则有非零向量 x:

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ x \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

即 x 的第 c 行为非零实数，其余各行均为 0，使得

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 0 + \cdots + \begin{bmatrix} x_{1c} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e_c + \cdots + \begin{bmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ y_{mn} \end{bmatrix} \cdot 0 = 0$$

当 A 的第 c 列不全为 0 时，则有非零向量 x:

$$x = \begin{bmatrix} -x_{1c} \\ \vdots \\ -x_{ic} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

使得

$$
\begin{aligned}
Ax &= \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot -x_{1c} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot -x_{ic} + \begin{bmatrix} x_{1c} \\ \vdots \\ x_{ic} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1 + \cdots + \begin{bmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{in} \\ \vdots \\ y_{mn} \end{bmatrix} \cdot 0 \\
&= \begin{bmatrix} -x_{1n} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -x_{ic} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} x_{1c} \\ \vdots \\ x_{ic} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0
\end{aligned}
$$

即总是存在向量 x, 使得 $Ax = 0$ 成立, 故矩阵 A 不可逆, 即 A 为奇异矩阵。

补证

当 $Ax = 0$ 成立时，其中 x 为非零向量，若 A 可逆，则有

$$A^{-1}Ax = Ix = x = 0$$

与前提 x 为非零向量矛盾，故 A 不可逆。