建筑结构力学分析计算内核开发项目验收报告

魏华祎

2023 年 12 月 28 日

1 项目计划目标、任务和考核指标

1.1 项目计划目标

1.2 任务和考核指标

2 课题执行情况评价

3 研究基础

4 主要研究内容

4.1 任意次有限元求解线弹性方程

4.2 桁架结构求解模块

4.3 三维梁单元结构求解模块

4.3.1 模型假设

Timoshenko 梁理论有如下假设:

- 变形前垂直梁中心线的平剖面,变形后仍然为平面(刚性横截面假定);
- 梁受力发生变形时,横截面依然为一个平面,但不再垂直于中性轴,即考虑剪切变形和转动惯量的影响。

4.3.2 数学模型

Timoshenko 梁的应变能分为两部分:一是轴向变形产生的,二是由于剪切变形产生的,

$$\Lambda = \frac{1}{2}\int_z\int_{S(z)} E\varepsilon_z^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\int_z\int_{S(z)} \frac{G}{k}(\gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中,$S(z)$ 表示中轴线上 z 点对应的截面(xy 平面),k 是剪切修正系数。

4.3.3 全局到局部的坐标变换

给定空间中的一个梁单元 $e := (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1)$,其长度记为 l,则其单位切向量为

$$\boldsymbol{t} := \frac{\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0}{l}$$

给定梁的任一截面 S,可以指定一个单位法向 $\boldsymbol{n}_x$ 做为 S 的第一方向(局部的 x 方向),通过叉乘运算可以确定另外一个方向 $\boldsymbol{n}_y = \boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}_x$,则可以用标架 $(\boldsymbol{n}_x, \boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{t})$ 建立梁的局部坐标系,原点选为梁中点 $\boldsymbol{c} := \frac{\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_1}{2}$。我们用 $|S|$ 表示截面 S 的面积。

局部坐标系的坐标向量为 $(\boldsymbol{n}_x, \boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{t})$,则全局到局部坐标系的变换矩阵为

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_x^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{n}_y^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

设全局的平动位移为 $\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,转动位移为 $\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_x & \theta_y & \theta_z \end{bmatrix}^{T}$,则在局部坐标系下的平动位移和转动位移分别为

$$\bar{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{d}, \quad \bar{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\theta}.$$

同时有

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{d}}, \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\theta}}.$$

4.3.4 位移-应变关系

在局部坐标系下计算梁截面上的任一点 (x, y, z) 处的位移,由于

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \bar{u}(z) - y\bar{\theta}_z(z) \\ v(x,y,z) &= \bar{v}(z) + x\bar{\theta}_z(z) \\ w(x,y,z) &= \bar{w}(z) - x\bar{\theta}_y(z) + y\bar{\theta}_x(z) \end{aligned}$$

则应变的计算对应的矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} & y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} & -x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} & 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} & 0 & 0 & 0 & -1 & -y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \\ 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} & 0 & 1 & 0 & x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}(z) \\ \bar{v}(z) \\ \bar{w}(z) \\ \bar{\theta}_x(z) \\ \bar{\theta}_y(z) \\ \bar{\theta}_z(z) \end{bmatrix} = \mathcal{B}\bar{\boldsymbol{u}}$$

取线性拉格朗日基

$$\phi_0 = \frac{1-\xi}{2}, \phi_1 = \frac{1+\xi}{2}, (-1 \le \xi \le 1)$$

其中,

$$\xi = \frac{2z - z_0 - z_1}{l}$$

先排 $\boldsymbol{x}_0$ 的 6 个自由度,再排 $\boldsymbol{x}_1$ 上的 6 个自由度,可得相应的向量基函数矩阵

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_0 & \boldsymbol{\Phi}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_0\boldsymbol{I}_6 & \phi_1\boldsymbol{I}_6 \end{bmatrix}$$

可得应变矩阵 $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{B} = \mathcal{B}\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{B}_1 \end{bmatrix}$$

4.3.5 应变-应力关系

应力-应变关系遵循 Hooke 定律:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

即:

$$\begin{bmatrix}\sigma_z\\\tau_{zx}\\\tau_{zy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E&0&0\\0&\frac{G}{k}&0\\0&0&\frac{G}{k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_z\\\gamma_{zx}\\\gamma_{zy}\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 是材料的弹性系数常数。

4.3.6 梁的刚度矩阵

根据梁的应变能、位移-应变以及应变-应力的关系,可得刚度矩阵计算公式为:

$$\boldsymbol{K}=\int_z\int_{S(z)}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

由此可得刚度矩阵为:

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{00}&\boldsymbol{K}_{01}\\\boldsymbol{K}_{10}&\boldsymbol{K}_{11}\end{bmatrix}$$

其中,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_{00}&=\int_z\int_{S(z)}\boldsymbol{B}_0^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\\boldsymbol{K}_{11}&=\int_z\int_{S(z)}\boldsymbol{B}_1^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\\boldsymbol{K}_{01}&=\int_z\int_{S(z)}\boldsymbol{B}_0^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

横截面面积为 $A=\int_S\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

注意:这里假设截面 S 沿中轴线形状不变,因此面积是常数,惯性矩、惯性积和极惯性矩为:

$$\begin{aligned}I_{xx}&=\int_S y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_{yy}=\int_S x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\I_{xy}&=\int_S xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\J&=\int_S(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

4.3.7 实验结果

5 预研内容

5.1 板壳结构求解模块

5.1.1 引言

SHELL63 是 ANSYS 中的一个四节点有限元壳体单元,适用于模拟各种薄厚壳体结构。

5.1.2 全局到单元局部坐标系推导

5.2 断裂模拟的自适应有限元方法

5.3 任意次混合有限元求解线弹性方程

6 主要成果及工作总结