

学校代码 10530

学 号 202331510117

分 类 号 O241.82

密 级 公 开

湘潭大学

博士 学位 论文

拓扑优化高效数值算法分析、实现及应用研究

学位申请人 何亮

指导老师 魏华祎 教授

学院名称 数学与计算科学学院

学科专业 数学

研究方向 微分方程数值方法及应用

二〇二六年五月二十四日

拓扑优化高效数值算法分析、实现及 应用研究

学 位 申 请 人 _____
何亮

导 师 姓 名 及 职 称 _____
魏华伟 教授

学 院 名 称 _____
数学与计算科学学院

学 科 专 业 _____
数学

研 究 方 向 _____
微分方程数值方法及应用

学 位 申 请 级 别 _____
理学博士

学 位 授 予 单 位 _____
湘潭大学

论 文 提 交 日 期 _____
二〇二六年五月二十四日

Candidate _____ Liang He _____

Supervisor _____ Professor _____

College _____ School of Mathematics and Computational Science _____

Program _____ Mathematics _____

Specialization _____ Numerical Methods and Applications
for Differential Equations _____

Degree _____ Doctor of Science _____

University _____ Xiangtan University _____

Date _____ May 24, 2026 _____

湘潭大学

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的研究成果。除了文中特别加以标注引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

作者签名： 日期： 年 月 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权湘潭大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

涉密论文按学校规定处理。

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

摘要

检查

关键词: 有限元方法;

Abstract

balabala

Key Words: Finite element method;

目录

| | |
|---|----|
| 摘要 | I |
| Abstract | II |
| 第 1 章 引言 | 1 |
| 第 2 章 拓扑优化模型与数值基础 | 2 |
| 2.1 主要符号表与基本函数空间 | 2 |
| 2.1.1 主要符号表 | 2 |
| 2.1.2 函数空间 | 2 |
| 2.2 变密度拓扑优化的连续数学模型 | 2 |
| 2.2.1 材料密度与材料属性插值 | 2 |
| 2.2.2 变密度拓扑优化的一般形式 | 4 |
| 2.3 变密度拓扑优化的典型问题 | 5 |
| 2.3.1 体积分数约束下的柔顺度最小化问题 | 6 |
| 2.3.2 柔顺机构设计问题 | 7 |
| 2.3.3 应力约束下的拓扑优化问题 | 8 |
| 2.4 敏感度分析理论与方法 | 8 |
| 2.4.1 敏感度分析一般框架 | 9 |
| 2.4.2 典型拓扑优化问题的敏感度推导 | 11 |
| 2.5 拓扑优化中的数值优化算法 | 15 |
| 2.5.1 优化准则法 | 16 |
| 2.5.2 移动渐近线方法 | 17 |
| 2.6 正则化与长度尺度控制：过滤与投影 | 20 |
| 2.6.1 灵敏度过滤方法 | 20 |
| 2.6.2 密度过滤方法 | 21 |
| 2.6.3 投影方法 | 21 |
| 2.7 拓扑优化的基本流程 | 23 |
| 第 3 章 任意次多单元族拉格朗日有限元拓扑优化比较研究 | 24 |
| 3.1 引言 | 24 |
| 3.2 线弹性问题的连续模型与变分形式 | 24 |
| 3.2.1 线弹性理论的基本假设 | 24 |
| 3.2.2 线弹性问题的强形式 | 26 |
| 3.2.3 线弹性问题的弱形式与变分原理 | 26 |
| 3.3 线弹性问题的任意次多单元族拉格朗日有限元方法 | 28 |

| | | |
|--------------|--------------------------------------|-----------|
| 3.3.1 | 单纯形单元上拉格朗日有限元空间构造 | 28 |
| 3.3.2 | 张量积形单元上拉格朗日有限元空间构造 | 31 |
| 3.3.3 | 线弹性的有限元离散 | 34 |
| 3.3.4 | 算例验证 | 36 |
| 3.4 | 不同设计变量表征下的优化问题描述 | 39 |
| 3.4.1 | 单元密度表征 | 39 |
| 3.4.2 | 节点密度表征 | 40 |
| 3.4.3 | 柔顺机构设计问题 | 41 |
| 3.5 | 不同设计变量表征下的正则化策略 | 43 |
| 3.5.1 | 单元密度表征 | 43 |
| 3.5.2 | 节点密度表征 | 44 |
| 3.6 | 数值算例 | 44 |
| 3.6.1 | 算例设置与统一框架 | 44 |
| 3.6.2 | 基准比较：数值病态与最小尺度控制 | 46 |
| 3.6.3 | 核心对比：表征方法与单元阶次 | 48 |
| 3.6.4 | 算例推广：不同边界载荷 | 54 |
| 3.6.5 | 算例推广：三维问题 | 54 |
| 3.6.6 | 算例推广：柔顺机构设计 | 54 |
| 第 4 章 | 基于高阶有限元的多分辨率高精度拓扑优化 | 55 |
| 4.1 | 引言 | 55 |
| 4.2 | 设计模型与分析模型 | 55 |
| 4.2.1 | 模型的定义与二分性 | 55 |
| 4.2.2 | 单分辨率框架的局限与精度错配 | 56 |
| 4.3 | 多分辨率拓扑优化计算框架 | 58 |
| 4.3.1 | 多分辨率空间离散策略 | 58 |
| 4.3.2 | 多分辨率框架下的优化问题列式 | 59 |
| 4.3.3 | 基于子单元的刚度矩阵数值积分 | 60 |
| 4.3.4 | 灵敏度分析 | 61 |
| 4.4 | 设计变量到物理密度的映射机制 | 62 |
| 4.4.1 | 基于灵敏度过滤的恒等映射 | 62 |
| 4.4.2 | 基于密度过滤的线性映射 | 63 |
| 4.4.3 | 基于 Heaviside 投影的非线性映射 | 64 |
| 4.5 | 应力约束拓扑优化问题 | 66 |
| 4.6 | 数值算例 | 66 |
| 4.6.1 | 算例设置与统一框架 | 66 |
| 4.6.2 | 多分辨率数值验证：构型一致性与收敛行为 | 67 |

| | |
|---|-----------|
| 4.6.3 映射机制对优化结果与收敛行为的影响 | 71 |
| 第 5 章 拓扑优化中的任意次胡张混合有限元方法研究 | 77 |
| 第 6 章 拓扑优化软件平台的开发及应用 | 78 |
| 参考文献 | 79 |
| 致谢 | 82 |
| 个人简历、在学期间发表的学术论文及研究成果 | 83 |

第1章 引言

第 2 章 拓扑优化模型与数值基础

2.1 主要符号表与基本函数空间

2.1.1 主要符号表

2.1.2 函数空间

2.2 变密度拓扑优化的连续数学模型

连续体拓扑优化的原始形式是寻找最优材料分布的整数规划问题，即确定设计域上的离散示性函数 $\chi(\mathbf{x}) \in \{0, 1\}$ ，以最小化目标泛函 [3]。然而，该问题在数学上通常具有柯西不稳定性，直接求解易导致网格依赖与棋盘格等数值不稳定现象 [10]。

为克服这一困难并利用基于梯度的优化算法，变密度法采用了松弛策略，引入连续密度变量 $\rho(\mathbf{x}) \in [0, 1]$ 替代离散变量，将组合优化转化为连续型的分布参数优化问题。本节将详细阐述基于该策略的连续数学模型，包括材料属性插值方案、状态方程的变分形式以及一般形式的优化列式。

2.2.1 材料密度与材料属性插值

在变密度拓扑优化中，材料密度与材料物理属性之间的插值模型是连接数学优化算法与物理力学分析的桥梁。我们需要建立一个从无量纲的密度场到具有物理量纲的材料张量场的映射关系。

设设计域为一个有界开集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 。引入一个材料密度函数

$$\rho : \Omega \rightarrow [0, 1], \quad \rho \in L^\infty(\Omega), \quad 0 \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1 \text{ a.e. in } \Omega$$

其中 $\rho(\mathbf{x}) = 1$ 表示该点为实体材料， $\rho(\mathbf{x}) = 0$ 表示空洞， $0 < \rho(\mathbf{x}) < 1$ 表示中间密度的材料。这种允许密度值在 $[0, 1]$ 区间连续变化的参数化方法，使得结构的拓扑和形状在优化过程中平滑地演变。

为了建立宏观结构性能与微观材料密度之间的联系，需要定义材料的本构属性及其对密度函数 $\rho(\mathbf{x})$ 的依赖关系。在线弹性小变形理论框架下（见第 3.2.1 节），材料的应力–应变关系可由四阶弹性刚度张量 \mathbb{C} 所表征：

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}(\rho)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}),$$

材料插值模型的核心目标在于构造从标量密度场 $\rho(\mathbf{x})$ 到张量场 $\mathbb{C}(\rho(\mathbf{x}))$ 的映射

$$\rho(\mathbf{x}) \mapsto \mathbb{C}(\rho(\mathbf{x})),$$

并要求插值得到的刚度张量保持线弹性问题适定性所需的基本性质（对称性与强椭圆性）。

对于各向同性材料，根据第 3.2.1 节的各向同性假设，弹性刚度张量 \mathbb{C} 可由杨氏模量 E 和泊松比 ν 这两个标量参数完全描述。本文中，通常假设泊松比 ν 在优化过程中为常数 ν_0 ，而将杨氏模量 E 视为密度 ρ 的函数：

$$E = E(\rho), \quad \nu = \nu_0,$$

在此设定下，弹性刚度张量 \mathbb{C} 可写作

$$\mathbb{C}(\rho) = \mathbb{C}(E(\rho), \nu_0),$$

从而材料插值问题可等价地理解为构造标量函数 $E(\rho)$ 的问题。基于线弹性刚度张量的性质，可形式化地认为

$$E(\rho) \in L^\infty(\Omega), \quad \mathbb{C}(\rho) \in L^\infty(\Omega, \mathbb{S}).$$

在众多材料插值方案中，SIMP 模型是应用最为广泛的一类幂律插值 [1]。其基本思想是将杨氏模量 $E(\mathbf{x})$ 表示为相对于实体材料杨氏模量 E_0 的幂函数：

$$E(\rho(\mathbf{x})) = \rho(\mathbf{x})^p E_0, \quad \rho(\mathbf{x}) \in [0, 1],$$

其中 $p > 1$ 为惩罚因子，惩罚因子的引入旨在显著削弱中间密度单元的刚度贡献，使得在优化过程中中间密度配置在能量上处于劣势，从而驱动最优密度场向接近 0–1 的分布收敛，以获得拓扑清晰的结构。

然而，标准 SIMP 模型在 $\rho(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ 时给出 $E(\rho(\mathbf{x})) \rightarrow 0$ 。在有限元离散中，若简单采用 $E = 0$ 对应空洞区域，则局部刚度矩阵可能退化为奇异矩阵，导致整体刚度矩阵病态甚至不可逆，进而引发数值不稳定。为避免该问题，并在物理上为“空洞”区域保留极小但非零的刚度，以维持数值稳定性，工程上通常采用修正的 SIMP 模型 [27]，对杨氏模量设置一个正的下限 $E_{\min} > 0$ 。修正 SIMP 插值可写为

$$E(\rho(\mathbf{x})) = E_{\min} + \rho(\mathbf{x})^p (E_0 - E_{\min}),$$

其中 $E_{\min} \ll E_0$ 为非常小的正数。这样，即使在 $\rho(\mathbf{x}) = 0$ 的区域，材料也保有微

小的刚度 E_{\min} ，从而保证整体刚度矩阵在数值上保持良好的条件数。

除 SIMP 外，文献中还提出了多种替代性材料插值模型。例如，RAMP 模型 [23] 采用有理函数形式：

$$E(\rho(\mathbf{x})) = E_{\min} + \frac{\rho(\mathbf{x})(E_0 - E_{\min})}{1 + q(1 - \rho(\mathbf{x}))},$$

其中 $q > 0$ 为控制参数。与 SIMP 相比，RAMP 在惩罚行为、插值函数的凸性/凹性以及对中间密度的敏感性等方面呈现不同特征，在某些情形下有利于改善优化问题的数值性质和收敛特性。

需要指出的是，尽管采用了惩罚型材料插值，在实际优化迭代过程中（尤其是中间阶段以及收敛解附近）通常仍会出现一定比例的中间密度区域，即所谓“灰度区域”。这些灰度区域在物理解释上对应“局部材料尺度未明确”的状态，可能造成：

- 制造层面的问题，如加工难度增大、制造成本上升或成形不确定性提高；
- 数值层面的典型不稳定现象，如棋盘格、网格依赖性和局部极值等。

因此，如何在保持结构性能的同时抑制过度的灰度区域、提高拓扑的清晰性与可制造性，并兼顾数值稳定性，是变密度方法理论研究和工程应用中必须审慎处理的重要问题。

2.2.2 变密度拓扑优化的一般形式

设设计域为有界开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ，边界 $\partial\Omega$ 根据具体物理边界可分解为狄利克雷边界 Γ_D 与诺伊曼边界 Γ_N ，记状态变量为位移场

$$\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{V},$$

其中 \mathcal{V} 为适当的向量值函数空间， $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ 表示满足齐次位移边界条件的测试函数空间。设计变量为标量密度场

$$\rho : \Omega \rightarrow [0, 1], \quad \rho \in \mathcal{X} \subset L^\infty(\Omega),$$

其中可行设计集合 \mathcal{X} 的典型形式为

$$\mathcal{X} = \{\rho(\mathbf{x}) \in L^\infty(\Omega) : 0 \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1 \text{ a.e. in } \Omega\}.$$

在变密度方法框架下，结构优化可以抽象为以下偏微分方程（PDE）约束优化

问题：

$$\begin{aligned} & \min_{\rho, \mathbf{u}} \quad \mathcal{J}(\mathbf{u}, \rho) \\ \text{subject to} \quad & a_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_0, \\ & \mathcal{G}_i(\rho, \mathbf{u}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \rho \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

其中各项含义说明如下：

- 目标泛函 $\mathcal{J}(\mathbf{u}, \rho)$: 用于衡量结构性能的泛函

$$\mathcal{J} : \mathcal{V} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

其具体形式随所考虑的优化问题而定。本文主要讨论柔顺度最小化与柔顺机构设计等典型目标。

- 状态方程 $a_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v})$: 由密度场 ρ 决定的物理场平衡方程的弱形式。双线性型 $a_\rho(\cdot, \cdot)$ 通过材料刚度张量 $\mathbb{C}(\rho)$ 依赖于材料密度函数 $\rho(\mathbf{x})$, 线性泛函 $\ell(\cdot)$ 则对应外载荷与边界条件的作用。
- 约束条件 $\mathcal{G}_i(\rho, \mathbf{u}) \leq 0$: 用于刻画体积、质量、位移、应力等工程与物理要求。本文中主要考虑体积分数约束与应力约束等典型不等式约束。
- 设计变量可行集合 \mathcal{X} : 限制密度函数 $\rho(\mathbf{x})$ 的取值范围与基本正则性，确保优化问题在数学上具备合理性。

2.3 变密度拓扑优化的典型问题

前一节建立了变密度拓扑优化的通用数学模型。然而，针对不同的工程需求，目标泛函 $\mathcal{J}(\mathbf{u}, \rho)$ 和约束条件 $\mathcal{G}_i(\mathbf{u}, \rho)$ 的具体形式各不相同。不同的物理目标不仅决定了结构的最终拓扑构型，也对数值优化算法的稳定性与收敛速度提出了不同的挑战。

本节将详细阐述三类最具代表性的拓扑优化问题：最小柔顺度问题（追求结构刚度最大化）、柔顺机构设计问题（追求特定输出位移最大化）以及应力约束问题（追求结构强度满足要求）。这三类问题涵盖了从单目标凸规划到多目标非线性规划的典型特征，也是检验高效数值算法性能的标准基准问题。

2.3.1 体积分数约束下的柔顺度最小化问题

柔顺度度量了外载荷对结构所作的功，因此可以视作“柔软程度”的量化指标。对于给定的 (ρ, \mathbf{u}) ，其连续形式可定义为

$$c(\mathbf{u}, \rho) := \ell(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \, ds,$$

对于线弹性结构，在平衡状态下，外力所做的功等于两倍的结构应变能，因此柔顺度也可以写成应变能的形式：

$$c(\mathbf{u}, \rho) = 2 \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbb{C}(\rho) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} \right) = \int_{\Omega} (\mathbb{C}(\rho) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x}.$$

其中 $C(\rho)$ 表示由第 2.2.1 节材料插值模型确定的密度相关弹性刚度张量。

设设计域体积为

$$|\Omega| = \int_{\Omega} 1 \, d\mathbf{x},$$

给定体积分数上限 $V_f \in (0, 1]$ ，密度场 ρ 的体积分数定义为

$$V(\rho) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

体积分数约束要求材料平均用量不超过给定体积分数，即

$$V(\rho) \leq V_f,$$

等价地，可以写成不等式约束

$$g_V(\rho) := V(\rho) - V_f \leq 0.$$

将状态方程视作一种从设计变量到位移解的映射，即对每个给定的 $\rho \in \mathcal{X}$ ，存在唯一的位移解 $\mathbf{u}_\rho \in \mathbf{V}$ 满足线弹性变分问题

$$a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$$

其中 \mathbf{V} 为试探函数框架， \mathbf{V}_0 为满足齐次位移边界条件的测试函数空间，其具体定

义见第 3.2.3 节。由此，体积分数约束下的柔顺度最小化问题可以表述为

$$\begin{aligned} \min_{\rho} \quad & c(\rho) = \int_{\Omega} (\mathbb{C}(\rho) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\rho})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\rho}) \, d\mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & a_{\rho}(\mathbf{u}_{\rho}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \\ & g_V(\rho) \leq 0, \\ & \rho \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

在材料插值采用 SIMP 等惩罚型模型的设定下，双线性型 $a_{\rho}(\cdot, \cdot)$ 对位移变量 \mathbf{u} 是连续且一致强椭圆的，从而对固定的 ρ 线弹性边值问题在位移空间上是良定的；但由于刚度张量 $\mathbb{C}(\rho)$ 非线性依赖于密度场 ρ ，整体优化问题在设计变量空间上通常是高度非凸的，这也是拓扑优化中局部极值、网格依赖性等数值现象的重要来源。

2.3.2 柔顺机构设计问题

在变密度拓扑优化框架下，柔顺机构设计的目标不再是提高结构整体刚度，而是通过合理分配材料，使在给定输入激励作用下，输出端在指定方向上的位移响应尽可能大，同时保持结构的完整性与一定的刚度水平。为了与第 2.3.1 节中的柔顺度最小化问题保持一致，并出于模型与推导上的简洁性考虑，本文中柔顺机构设计一律基于小变形线弹性假设，忽略几何与材料非线性效应。

设设计域为有界开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ，其边界 $\partial\Omega$ 分解为互不交叠的三部分

$$\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}},$$

其中 Γ_{in} 与 Γ_{out} 分别表示机构的输入和输出端口所在的边界子集。为刻画线弹性响应，仍定义与密度场 ρ 相关的双线性型

$$a_{\rho}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} (\mathbb{C}(\rho) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x},$$

同时为了避免出现“机制”解，即在输入端施加载荷后结构整体刚度趋于零而产生不受控的大位移，并在连续模型中显式体现输入致动器和输出工件的刚度特性，柔顺机构设计中通常在输入端和输出端引入弹簧（或等效刚度元件）进行正则化。记输入端与输出端的特征方向向量分别为 \mathbf{d}_{in} 与 \mathbf{d}_{out} ，并给定输入/输出弹簧刚度 k_{in} 和 k_{out} ，其中 $\mathbf{d}_{\text{in}}, \mathbf{d}_{\text{out}} \in \mathbb{R}^d$ 为给定单位向量，用于提取输入/输出沿指定方向的位移分量， $k_{\text{in}}, k_{\text{out}}$ 分别等效描述应变基致动器与外部工件的线性刚度 [3]。可在弱形式中定义附加双线性型

$$s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := k_{\text{in}} \int_{\Gamma_{\text{in}}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{d}_{\text{in}})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}_{\text{in}}) \, ds + k_{\text{out}} \int_{\Gamma_{\text{out}}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{d}_{\text{out}})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}_{\text{out}}) \, ds,$$

给定输入端的等效体力 \mathbf{b} 和边界载荷密度 \mathbf{g}_{in} , 可定义输入载荷对应的线性泛函

$$\ell_{\text{in}} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \ell_{\text{in}}(\mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{\text{in}}} \mathbf{g}_{\text{in}} \cdot \mathbf{v} \, ds,$$

其中 ℓ_{in} 描述了输入致动器对任意位移 \mathbf{v} 所作的外功。于是, 对每个给定的密度场 $\rho \in \mathcal{X}$, 柔顺机构的位移场 $\mathbf{u}_{\rho} \in \mathbf{V}$ 由下述变分问题唯一确定:

$$a_{\rho}(\mathbf{u}_{\rho}, \mathbf{v}) + s(\mathbf{u}_{\rho}, \mathbf{v}) = \ell_{\text{in}}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0,$$

在材料插值 $\mathbb{C}(\rho)$ 满足一致强椭圆性、且 $k_{\text{in}}, k_{\text{out}} > 0$ 的条件下, 上述双线性型对位移变量是连续且强椭圆的, 从而该状态方程对每个固定 ρ 是良定的。

柔顺机构设计的核心指标是输出端在指定方向上的位移。为此, 引入输出位移泛函

$$\ell_{\text{out}} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \ell_{\text{out}}(\mathbf{u}) := \int_{\Gamma_{\text{out}}} \mathbf{d}_{\text{out}} \cdot \mathbf{u} \, ds,$$

其中 ℓ_{out} 用于测量输出端沿方向 \mathbf{d}_{out} 的位移响应, 并将输出位移定义为

$$u_{\text{out}}(\rho) := \ell_{\text{out}}(\mathbf{u}_{\rho}),$$

则 $u_{\text{out}}(\rho)$ 为给定密度场下输出弹簧的标量位移。引入与第 2.3.1 节相同的体积分数约束函数 $g_V(\rho) \leq 0$, 于是体积分数约束下柔顺机构设计问题的连续优化模型可表述为

$$\begin{aligned} \max_{\rho} \quad & u_{\text{out}}(\rho) = \ell_{\text{out}}(\mathbf{u}_{\rho}) \\ \text{subject to} \quad & a_{\rho}(\mathbf{u}_{\rho}, \mathbf{v}) + s(\mathbf{u}_{\rho}, \mathbf{v}) = \ell_{\text{in}}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0, \\ & g_V(\rho) \leq 0, \\ & \rho \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

2.3.3 应力约束下的拓扑优化问题

2.4 灵敏度分析理论与方法

在拓扑优化的数值求解过程中, 灵敏度分析作为连接优化模型与迭代算法的关键环节, 直接影响算法的收敛速度和计算效率。前文已讨论了典型拓扑优化问题的数学建模, 本节将首先阐述灵敏度分析的一般框架, 然后推导典型拓扑优化问题中的灵敏度计算, 以为后续高效数值算法的实现提供理论支撑。

2.4.1 灵敏度分析一般框架

在使用基于梯度的优化算法求解变密度拓扑优化问题时，核心步骤是计算目标泛函和约束泛函对设计变量的灵敏度。灵敏度刻画了当设计变量发生微小改变时，目标或约束的变化率，从而为寻找最优设计提供方向。本节阐述一种计算灵敏度的通用高效方法，即伴随方法。为表述清晰，首先以单个目标泛函为例展开推导，其结论可直接推广至各类约束泛函。

根据第 2.2.2 节的描述，对每个给定的 ρ ，令 \mathbf{u}_ρ 为相应状态方程的解，则目标泛函可以写为 $\mathcal{J}(\mathbf{u}_\rho, \rho)$ 。若直接根据链式法则计算 $\mathcal{J}(\mathbf{u}_\rho, \rho)$ 关于 ρ 的导数，将不可避免地涉及状态解 \mathbf{u}_ρ 对设计变量的导数 $\partial \mathbf{u}_\rho / \partial \rho$ 。在有限元离散后，这对应于一个维度极高的稠密矩阵，显式构造和存储的计算代价非常昂贵。伴随方法的核心思想，是通过构造适当的拉格朗日泛函 \mathcal{L} 并引入伴随变量 $\boldsymbol{\lambda}$ ，消除对 $\partial \mathbf{u}_\rho / \partial \rho$ 的显式依赖，从而以与设计变量维数基本无关的代价获得完整的梯度信息。

基于泛函分析中的拉格朗日乘子理论 [11]，引入增广拉格朗日泛函：

$$\mathcal{L}(\rho, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) := \mathcal{J}(\mathbf{u}, \rho) + \mathcal{R}(\rho, \mathbf{u})(\boldsymbol{\lambda}),$$

其中残差算子定义为

$$\mathcal{R}(\rho, \mathbf{u})(\mathbf{v}) := a_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \ell(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0,$$

当 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\rho$ 满足状态方程时，有

$$\mathcal{R}(\rho, \mathbf{u}_\rho)(\mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0,$$

从而对任意伴随变量 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{V}_0$ 都有 $\mathcal{R}(\rho, \mathbf{u}_\rho)(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ 。因此， $\mathcal{J}(\mathbf{u}_\rho, \rho)$ 在方向 $\delta \rho$ 上的一阶变分 $\delta \mathcal{J}(\mathbf{u}_\rho, \rho)$ ，等于 \mathcal{L} 在点 $(\rho, \mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda})$ 的一阶变分 $\delta \mathcal{L}$ ，即

$$\delta \mathcal{J}(\mathbf{u}_\rho, \rho) = \delta \mathcal{L}(\rho, \mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda}),$$

该一阶变分即为目标泛函对设计变量 ρ 的 Fréchet 导数。

对 $\mathcal{L}(\rho, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ 作一阶变分，可写为

$$\delta \mathcal{L}(\rho, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \rho}[\delta \rho] + \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{u}}[\delta \mathbf{u}] + \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}}[\delta \boldsymbol{\lambda}],$$

其中各项为 \mathcal{L} 对相应变量的 Gâteaux 导数 [11]。结合 \mathcal{L} 与 \mathcal{R} 的定义，可分别写为

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \rho}[\delta \rho] = \frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{u}, \rho)}{\partial \rho}[\delta \rho] + \frac{\partial \mathcal{R}(\rho, \mathbf{u})(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \rho}[\delta \rho],$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{u}}[\delta \mathbf{u}] &= \frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{u}, \rho)}{\partial \mathbf{u}}[\delta \mathbf{u}] + \frac{\partial \mathcal{R}(\rho, \mathbf{u})(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{u}}[\delta \mathbf{u}], \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}}[\delta \boldsymbol{\lambda}] &= \mathcal{R}(\rho, \mathbf{u}_\rho)(\delta \boldsymbol{\lambda}) = a_\rho(\mathbf{u}, \delta \boldsymbol{\lambda}) - \ell(\delta \boldsymbol{\lambda}),\end{aligned}$$

特别地，当 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\rho$ 满足状态方程时，有 $\mathcal{R}(\rho, \mathbf{u}_\rho)(\delta \boldsymbol{\lambda}) = 0$ ，从而 $\frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}}[\delta \boldsymbol{\lambda}] = 0$ 。

为了消除未知状态扰动 $\delta \mathbf{u}$ 的依赖，引入伴随变量 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{V}_0$ ，并要求其满足

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{u}}[\delta \mathbf{u}] = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathbf{V}_0,$$

由拉格朗日泛函的定义可得

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{u}}[\delta \mathbf{u}] = \frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{u}_\rho, \rho)}{\partial \mathbf{u}}[\delta \mathbf{u}] + \frac{\partial \mathcal{R}(\rho, \mathbf{u}_\rho)(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{u}}[\delta \mathbf{u}],$$

在变密度线弹性问题中， $\mathcal{R}(\rho, \mathbf{u})(\mathbf{v}) := a_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \ell(\mathbf{v})$ ，从而

$$\frac{\partial \mathcal{R}(\rho, \mathbf{u}_\rho)(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{u}}[\delta \mathbf{u}] = a_\rho(\delta \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}),$$

因此，伴随变量 $\boldsymbol{\lambda}$ 应满足如下伴随方程：求 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{V}_0$ ，使得

$$a_\rho(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) = -\frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{u}_\rho, \rho)}{\partial \mathbf{u}}[\mathbf{v}], \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$$

一旦对给定的设计变量 ρ 求解状态方程得到 \mathbf{u}_ρ ，再求解上述伴随方程得到对应的伴随解 $\boldsymbol{\lambda}$ ，则目标泛函 $\mathcal{J}(\mathbf{u}_\rho, \rho)$ 在方向 $\delta \rho$ 上的一阶变分可以写为

$$\delta \mathcal{L}(\rho, \mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \rho}[\delta \rho] = \frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{u}_\rho, \rho)}{\partial \rho}[\delta \rho] + \frac{\partial \mathcal{R}(\rho, \mathbf{u}_\rho)(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \rho}[\delta \rho],$$

该表达式即为 $\mathcal{J}(\mathbf{u}_\rho, \rho)$ 关于设计变量 ρ 在方向 $\delta \rho$ 上的 Gâteaux 导数，它已经不再包含对未知状态扰动 $\delta \mathbf{u}$ 的依赖，只涉及给定的状态解 \mathbf{u}_ρ 、伴随解 $\boldsymbol{\lambda}$ 以及状态算子对 ρ 的显式依赖结构。

在变密度拓扑优化中，可以将上述线性泛函理解为在设计域上对某个局部函数的积分，该局部函数刻画了每一点密度微小变化对全局目标的影响，通常称为灵敏度密度函数。伴随方法的核心优势在于其计算效率：无论设计变量 ρ 的离散维度多高（例如有限元离散后，每个单元或每个节点都对应一个设计变量），计算整个灵敏度场的主成本仅在于求解一次原问题的状态方程和一次伴随方程，而与设计变量的个数基本无关。这一性质使伴随方法成为大规模变密度拓扑优化中进行灵敏度分析的标准工具与首选方法。

2.4.2 典型拓扑优化问题的灵敏度推导

柔顺度目标函数的灵敏度

考虑体积分数约束下的柔顺度最小化问题，记对给定的密度场 $\rho \in \mathcal{X}$, $\mathbf{u}_\rho \in \mathbf{V}$ 为线弹性问题变分形式的解，即满足

$$a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$$

在平衡状态下，柔顺度 $c(\rho)$ 可以写作外载功

$$c(\rho) = \mathcal{J}(\mathbf{u}_\rho, \rho) := \ell(\mathbf{u}_\rho),$$

于是目标泛函 $\mathcal{J}(\mathbf{u}_\rho, \rho)$ 对位移 \mathbf{u} 的导数为

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{u}_\rho, \rho)}{\partial \mathbf{u}}[\mathbf{v}] = \ell(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$$

且对密度 ρ 没有显式依赖，即

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{u}_\rho, \rho)}{\partial \rho}[\delta \rho] = 0$$

根据第 2.4.1 节给出的伴随方法一般框架，对应的伴随方程为

$$a_\rho(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) = -\frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{u}_\rho, \rho)}{\partial \mathbf{u}}[\mathbf{v}], \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$$

代入上式可得

$$a_\rho(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) = -\ell(\mathbf{v}) = -a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$$

利用双线性型 $a_\rho(\cdot, \cdot)$ 的对称性与强椭圆性，得到伴随解的唯一性，并可判断

$$\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{u}_\rho$$

这表明，对于柔顺度最小化问题，伴随场与位移场仅相差一个负号，无需额外求解新的边值问题，从而进一步降低了灵敏度分析的代价。这种伴随解与状态解的强关联性，正是柔顺度最小问题自伴随性质的体现 [3]。

下面利用一般形式的灵敏度表达式计算柔顺度目标的密度导数。由残差算子

$$\mathcal{R}(\rho, \mathbf{u})(\mathbf{v}) := a_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \ell(\mathbf{v}),$$

可知其对 ρ 的 Gâteaux 导数为

$$\frac{\partial \mathcal{R}(\rho, \mathbf{u}_\rho)(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \rho}[\delta \rho] = \frac{\partial a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \rho}[\delta \rho] = \int_{\Omega} (\mathbb{C}'(\rho)[\delta \rho] : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) \, d\mathbf{x},$$

其中 $\mathbb{C}'(\rho)[\delta \rho]$ 表示刚度张量对密度的方向导数。注意到在每一点 $\mathbf{x} \in \Omega$ 上, $\mathbb{C}'(\rho)[\delta \rho](\mathbf{x})$ 关于 $\delta \rho(\mathbf{x})$ 是线性的, 可写为

$$\mathbb{C}'(\rho)[\delta \rho](\mathbf{x}) = \mathbb{C}'(\rho(\mathbf{x})) \delta \rho(\mathbf{x}),$$

代入并利用伴随解 $\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{u}_\rho$, 得到

$$\frac{\partial \mathcal{R}(\rho, \mathbf{u}_\rho)(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \rho}[\delta \rho] = - \int_{\Omega} (\mathbb{C}'(\rho) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho) \delta \rho \, d\mathbf{x}.$$

另一方面, 柔顺度目标对 ρ 无显式依赖, 即 $\partial \mathcal{J}(\mathbf{u}_\rho, \rho)/\partial \rho[\delta \rho] = 0$ 。由 2.4.1 节的结论, 得到柔顺度目标在方向 $\delta \rho$ 上的一阶变分:

$$\delta c(\rho) = \delta \mathcal{J}(\mathbf{u}_\rho, \rho) = \frac{\partial \mathcal{R}(\rho, \mathbf{u}_\rho)(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \rho}[\delta \rho] = - \int_{\Omega} (\mathbb{C}'(\rho) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho) \delta \rho \, d\mathbf{x},$$

并与一般形式

$$\delta c(\rho) = \int_{\Omega} \frac{\delta c}{\delta \rho}(\mathbf{x}) \delta \rho(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

对比, 即可写出柔顺度关于密度场的灵敏度密度函数为

$$\frac{\delta c}{\delta \rho}(\mathbf{x}) = -(\mathbb{C}'(\rho(\mathbf{x})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho(\mathbf{x}))) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho(\mathbf{x})),$$

采用 SIMP 插值杨氏模量

$$\mathbb{C}(\rho(\mathbf{x})) = E(\rho(\mathbf{x})) \mathbb{C}_0,$$

其中 \mathbb{C}_0 为实体材料的刚度张量, $E(\rho)$ 为等效杨氏模量, 则

$$\mathbb{C}'(\rho(\mathbf{x})) = E'(\rho(\mathbf{x})) \mathbb{C}_0,$$

从而灵敏度密度可具体写为

$$\frac{\delta c}{\delta \rho}(\mathbf{x}) = -E'(\rho(\mathbf{x})) (\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho(\mathbf{x}))) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho(\mathbf{x})).$$

体积分数约束函数的灵敏度

由第 2.3.1 节可知，体积分数约束采用归一化体积函数

$$V(\rho) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad |\Omega| = \int_{\Omega} 1 d\mathbf{x},$$

并记约束函数

$$g_V(\rho) := V(\rho) - V_f \leq 0,$$

由于 $g_V(\rho)$ 仅通过线性泛函依赖于密度场 ρ ，且与位移场 \mathbf{u}_ρ 无关，其灵敏度可以直接由 Gâteaux 导数给出，而不需要引入伴随场。

对任意方向扰动 $\delta\rho \in \mathcal{X}$ ，体积分数约束在方向 $\delta\rho$ 上的一阶变分为

$$\delta g_V(\rho) = \frac{\partial g_V(\rho)}{\partial \rho} [\delta\rho] = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \delta\rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

等价地，也可以写成

$$\delta g_V(\rho) = \int_{\Omega} \frac{\delta g_V}{\delta \rho}(\mathbf{x}) \delta\rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

对比可得体积分数约束关于密度场的灵敏度密度函数为常数：

$$\frac{\delta g_V}{\delta \rho}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\Omega|}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

柔顺机构输出位移目标的灵敏度

考虑第 2.3.2 节中的柔顺机构设计问题。对给定的密度场 $\rho \in \mathcal{X}$ ，位移场 $\mathbf{u}_\rho \in \mathbf{V}$ 由下述变分问题唯一确定：

$$a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{v}) + s(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{v}) = \ell_{\text{in}}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0,$$

柔顺机构的性能指标取为输出端沿指定方向的位移

$$u_{\text{out}}(\rho) := \ell_{\text{out}}(\mathbf{u}_\rho), \quad \ell_{\text{out}}(\mathbf{u}) := \int_{\Gamma_{\text{out}}} \mathbf{d}_{\text{out}} \cdot \mathbf{u} ds,$$

即目标泛函记为

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}_\rho, \rho) := u_{\text{out}}(\rho) = \ell_{\text{out}}(\mathbf{u}_\rho),$$

在连续模型中 \mathcal{J} 对密度场 ρ 没有显式依赖，仅通过位移场 \mathbf{u}_ρ 间接依赖于 ρ ，因此

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{u}_\rho, \rho)}{\partial \rho} [\delta\rho] = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{u}_\rho, \rho)}{\partial \mathbf{u}} [\mathbf{v}] = \ell_{\text{out}}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$$

按照一般伴随框架，将柔顺机构的状态方程写成残差算子

$$\mathcal{R}(\rho, \mathbf{u})(\mathbf{v}) := a_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \ell_{\text{in}}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$$

并构造拉格朗日泛函

$$\mathcal{L}(\rho, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) := \mathcal{J}(\mathbf{u}, \rho) + \mathcal{R}(\rho, \mathbf{u})(\boldsymbol{\lambda}), \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{V}_0$$

引入伴随变量 $\boldsymbol{\lambda}$ 并令

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{u}}[\delta \mathbf{u}] = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathbf{V}_0$$

可得伴随问题：求 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{V}_0$ ，使

$$a_\rho(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) + s(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) = -\ell_{\text{out}}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$$

可见，伴随方程与原状态方程在算子形式上相同，只是右端载荷由输入载荷 ℓ_{in} 换成了与输出端位移相关的“虚拟载荷” $-\ell_{\text{out}}$ 。与柔顺度最小化问题不同，此时一般不再满足 $\boldsymbol{\lambda} = \pm \mathbf{u}_\rho$ ，因此柔顺机构设计问题不具自伴随性，需要额外求解一次伴随方程。

接下来计算目标泛函对密度场的导数。由

$$\mathcal{R}(\rho, \mathbf{u})(\boldsymbol{\lambda}) = a_\rho(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) + s(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) - \ell_{\text{in}}(\boldsymbol{\lambda})$$

可得其对 ρ 的 Gâteaux 导数为

$$\frac{\partial \mathcal{R}(\rho, \mathbf{u}_\rho)(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \rho}[\delta \rho] = \frac{\partial a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \rho}[\delta \rho] + \frac{\partial s(\mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \rho}[\delta \rho] - \frac{\partial \ell_{\text{in}}(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \rho}[\delta \rho],$$

在假设弹簧刚度 $k_{\text{in}}, k_{\text{out}}$ 、特征方向 $\mathbf{d}_{\text{in}}, \mathbf{d}_{\text{out}}$ 以及边界子集 $\Gamma_{\text{in}}, \Gamma_{\text{out}}$ 与设计变量无关的情况下，有

$$\frac{\partial \mathcal{R}(\rho, \mathbf{u}_\rho)(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \rho}[\delta \rho] = \frac{\partial a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \rho}[\delta \rho]$$

，根据

$$a_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbb{C}(\rho) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x},$$

其对 ρ 的 Gâteaux 导数形式与柔顺度目标的推导完全类似，利用

$$\mathbb{C}'(\rho)[\delta \rho](\mathbf{x}) = \mathbb{C}'(\rho(\mathbf{x})) \delta \rho(\mathbf{x}),$$

可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \rho}[\delta \rho] &= \int_{\Omega} (\mathbb{C}'(\rho)[\delta \rho] : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} (\mathbb{C}'(\rho(\mathbf{x})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho(\mathbf{x}))) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})) \delta \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x},\end{aligned}$$

当伴随方程满足时有

$$\delta u_{\text{out}}(\rho) = \delta \mathcal{J}(\mathbf{u}_\rho, \rho) = \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \rho}[\delta \rho] = \frac{\partial \mathcal{R}(\rho, \mathbf{u}_\rho)(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \rho}[\delta \rho],$$

从而得到

$$\delta u_{\text{out}}(\rho) = \int_{\Omega} (\mathbb{C}'(\rho) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) \delta \rho d\mathbf{x},$$

与一般形式

$$\delta u_{\text{out}}(\rho) = \int_{\Omega} \frac{\delta u_{\text{out}}}{\delta \rho}(\mathbf{x}) \delta \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

对比，可得到柔顺机构输出位移关于密度场的灵敏度密度函数为

$$\frac{\delta u_{\text{out}}}{\delta \rho}(\mathbf{x}) = (\mathbb{C}'(\rho(\mathbf{x})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho(\mathbf{x}))) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})),$$

采用 SIMP 材料插值时，灵敏度密度可具体写为

$$\frac{\delta u_{\text{out}}}{\delta \rho}(\mathbf{x}) = E'(\rho(\mathbf{x})) (\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\rho(\mathbf{x}))) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})).$$

2.5 拓扑优化中的数值优化算法

拓扑优化问题的求解算法主要有优化准则法 (Optimality Criteria, OC) 和数学规划法 (Mathematical Programming, MP) [29]。依据优化迭代过程中对灵敏度信息的依赖程度，数学规划法通常被划分为无梯度算法与基于梯度的算法两大类。无梯度算法 (如单纯形法、Powell 法及各类直接搜索法) [29] 虽然规避了复杂的灵敏度求解过程，但在面对拓扑优化通常涉及的数以万计甚至百万级设计变量时，其搜索效率显著下降，难以满足大规模问题的计算需求。相反，基于梯度的优化算法通过利用目标函数与约束函数的导数信息来构造搜索方向或近似子问题，具有极高的收敛效率，因此成为连续体拓扑优化领域的主流选择。该类方法的典型代表包括序列线性规划 (Sequential Linear Programming, SLP)、序列二次规划 (Sequential Quadratic Programming, SQP)、序列凸规划 (Sequential Convex Programming, SCP) 以及专门针对结构优化特点发展的移动渐近线法 (Method of Moving Asymptotes, MMA) 等 [4, 17, 24]。

2.5.1 优化准则法

优化准则法是一类基于极值条件显式更新设计变量的迭代算法 [20]。其基本思想是：针对给定的目标函数与约束条件，根据最优解应满足的 Karush–Kuhn–Tucker (KKT) 条件，推导出设计变量的“最优化准则”，并据此构造启发式的迭代更新格式。对于约束数目较少、结构较规整的拓扑优化问题（如单一体积分数约束下的柔顺度最小化），优化准则法具有物理概念直观、收敛速度快、计算代价低等优点，加之其易于程序实现，已被广泛应用于大规模拓扑优化问题中。

以单一体积分数约束下的拓扑优化问题为例，记设计变量为 $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_{N_d})^\top$ ，其中 N_d 是设计变量个数。目标函数为 $c(\boldsymbol{\rho})$ ，约束函数为 $g_V(\boldsymbol{\rho})$ ，定义拉格朗日函数为

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \lambda) = c(\boldsymbol{\rho}) + \lambda g_V(\boldsymbol{\rho}),$$

其中 λ 为与体积约束相关的拉格朗日乘子。由 KKT 条件中的驻点条件 $\partial \mathcal{L} / \partial \rho_i = 0$ 可推导出每个设计变量对应的“更新系数”：

$$B_i = -\frac{\partial c(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} \left(\lambda \frac{\partial g_V(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} \right)^{-1},$$

其中 B_i 反映了在当前迭代状态下，第 i 个设计变量对目标函数灵敏度与约束灵敏度的比值关系。

在此基础上，Bendsøe [2] 提出了经典的启发式更新方案，通过 B_i 来调整材料密度 ρ_i ，典型的更新公式可写为

$$\rho_i^{\text{new}} = \begin{cases} \max(0, \rho_i - m) & \text{如果 } \rho_i B_i^\eta \leq \max(0, \rho_i - m), \\ \min(1, \rho_i + m) & \text{如果 } \rho_i B_i^\eta \geq \min(1, \rho_i + m), \\ \rho_i B_i^\eta & \text{如果 其它情况,} \end{cases}$$

其中， ρ_i 是第 i 个设计变量； m 是移动限制，用于限制单步迭代中设计变量的更新幅度以保证数值稳定性； η 是阻尼系数，用于平滑收敛过程并抑制数值振荡。上述更新式在保证 $\rho_i \in [0, 1]$ 的同时，通过 B_i^η 的放大或缩小，实现材料在高效区域的集中与低效区域的剔除。实际实现中，常在 OC 更新中引入最小密度 $\rho_{\min} > 0$ ，将区间 $[0, 1]$ 替换为 $[\rho_{\min}, 1]$ ，以避免设计变量退化到完全空洞并提高数值稳定性。

基于上述更新公式，算法 2.1 给出了优化准则法求解单一约束的拓扑优化问题的伪代码描述。该伪代码体现了迭代过程的核心步骤，包括灵敏度计算、密度更新和收敛判断。

然而，优化准则法的主要局限性在于难以处理多约束问题。对于多约束情况，确定多个拉格朗日乘子需要求解复杂的非线性方程组，效率较低。另一方面，在非凸

算法 2.1 优化准则法求解单一约束的拓扑优化问题

输入: 初始设计变量 $\rho^{(0)}$ (满足 $\rho_{\min} \leq \rho_i^{(0)} \leq 1$)，移动限制 m ，阻尼系数 η ，收敛容差 ϵ ，最大迭代次数 MaxIter

输出: 优化后的设计变量 ρ

初始化：令迭代计数器 $k \leftarrow 0$

while 未达到收敛准则 **do**

根据当前设计变量 $\rho^{(k)}$ ，组装刚度矩阵并求解平衡方程，得到位移场 $\mathbf{U}^{(k)}$

计算目标函数 $c(\rho^{(k)})$ 和约束函数 $g_V(\rho^{(k)})$

计算目标函数的灵敏度 $\nabla c(\rho^{(k)})$ 和约束函数的灵敏度 $\nabla g_V(\rho^{(k)})$

(可选) 对灵敏度进行过滤或校正

采用二分法确保拉格朗日乘子 λ ，使得根据 OC 公式更新的 ρ^{new} 满足体积约束

(可选) 对 ρ^{new} 进行过滤或校正

令 $\rho^{(k+1)} \leftarrow \rho^{\text{new}}$ ，更新设计计数器 $k \leftarrow k + 1$

end while

的拓扑优化问题中，KKT 条件通常仅是局部最优解的必要条件，并不能保证获得全局最优解，这也使得其适用范围受到一定限制。因此，在处理更复杂的拓扑优化模型（如多物理场耦合、多约束问题）时，研究者往往采用 MMA 等数学规划算法。

2.5.2 移动渐近线方法

MMA 算法由 Svanberg 提出 [24]，属于 SCP 方法。该方法已成为求解数学规划类问题的主流算法，尤其在多约束和复杂目标函数的结构拓扑优化问题中，表现出极佳的适用性。MMA 的基本思想是：在每个迭代步，通过引入一组随迭代更新的“移动渐近线”参数，在当前设计点附近构造目标函数和约束函数的一族分离凸近似，将原始的非线性优化问题转化为一系列显式、具有严格凸性的优化子问题。每步迭代中构造的凸子问题可以在原变量空间中直接求解，也可以通过其对偶问题高效求解，从而得到新的设计变量。随着迭代的进行，这些人工构造的优化子问题在一定意义上逐渐逼近原问题，在满足相应收敛判据时，即可得到原问题的近似最优解。

一般形式的优化问题的数学模型可表示为：

$$\begin{aligned} & \min_{\rho} \quad f_0(\rho) \\ \text{subject to} \quad & f_i(\rho) \leq 0, \quad i = 1, \dots, N_g \\ & \rho_j^{\min} \leq \rho_j \leq \rho_j^{\max}, \quad j = 1, \dots, N_d \end{aligned}$$

其中, $\boldsymbol{\rho}$ 是设计变量向量, $f_0(\boldsymbol{\rho})$ 表示目标函数, $f_i(\boldsymbol{\rho}) \leq 0$ 为约束函数, ρ_j^{\min} 和 ρ_j^{\max} 分别为第 j 个设计变量的下限和上限, N_g 是约束函数个数。

在第 k 次迭代中, MMA 基于当前设计点 $\boldsymbol{\rho}^{(k)}$ 处的函数值 f_0 和一阶梯度 f_i , 引入一组渐近线参数 $L_j^{(k)}$ 和 $U_j^{(k)}$, 构造如下严格凸的近似子问题 [24]:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad & \tilde{f}_0^{(k)}(\boldsymbol{\rho}) + a_0 z + \sum_{i=1}^{N_g} \left(c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2 \right) \\ \text{subject to} \quad & \tilde{f}_i^{(k)}(\boldsymbol{\rho}) - a_i z - y_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, N_g \\ & \alpha_j^{(k)} \leq \rho_j \leq \beta_j^{(k)}, \quad j = 1, \dots, N_d \\ & y_i \geq 0, z \geq 0, \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{N_g})^\top$ 和 z 为非负辅助变量, 用于保证对原约束的凸近似及其可行性; a_0, a_i, c_i, d_i 为给定的非负参数; $\alpha_j^{(k)}, \beta_j^{(k)}$ 为第 j 个设计变量在第 k 次迭代中的局部移动界限, 由原始界限 $\rho_j^{\min}, \rho_j^{\max}$ 与移动渐近线 $L_j^{(k)}, U_j^{(k)}$ 综合确定。

在上述子问题中, 为了统一描述, 记 $f_0(\boldsymbol{\rho})$ 为目标函数, $f_1(\boldsymbol{\rho}), \dots, f_{N_g}(\boldsymbol{\rho})$ 为约束函数。对所有 $i = 0, 1, \dots, N_g$, 其近似函数 $\tilde{f}_i^{(k)}(\boldsymbol{\rho})$ 的形式统一写为:

$$\tilde{f}_i^{(k)}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{j=1}^{N_d} \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - \rho_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{\rho_j - L_j^{(k)}} \right) + r_i^{(k)},$$

其中, $L_j^{(k)}, U_j^{(k)}$ 分别为第 j 个设计变量在第 k 次迭代中的移动渐近线下界和上界; 系数 $p_{ij}^{(k)}, q_{ij}^{(k)}, r_i^{(k)}$ 由原函数 f_i 在当前设计点 $\boldsymbol{\rho}^{(k)}$ 处的函数值和梯度确定, 旨在使得 $\tilde{f}_i^{(k)}$ 在当前点附近对 f_i 给出一阶精度的凸近似。

近似函数的凸性与求解稳定性很大程度上取决于移动渐近线 $L_j^{(k)}$ 和 $U_j^{(k)}$ 的位置。对于不同的迭代步 k , 其更新规则如下:

- 当 $k = 0$ 和 $k = 1$ 时, 由于缺乏足够的迭代历史信息, 采用对称初始化策略:

$$\begin{aligned} L_j^{(k)} &= \rho_j^{(k)} - 0.5(\rho_j^{\max} - \rho_j^{\min}) \\ U_j^{(k)} &= \rho_j^{(k)} + 0.5(\rho_j^{\max} - \rho_j^{\min}) \end{aligned}$$

- 当 $k \geq 2$ 时, 利用前两步的迭代信息, 根据设计变量的震荡或单调特性自适应调整渐近线位置:

$$\begin{aligned} L_j^{(k)} &= \rho_j^{(k)} - \gamma_j^{(k)}(\rho_j^{(k-1)} - L_j^{(k-1)}) \\ U_j^{(k)} &= \rho_j^{(k)} + \gamma_j^{(k)}(U_j^{(k-1)} - \rho_j^{(k-1)}) \end{aligned}$$

其中, 参数 $\gamma_j^{(k)}$ 控制渐近线的缩放。

若设计变量出现震荡（即 $(\rho_j^{(k)} - \rho_j^{(k-1)})(\rho_j^{(k-1)} - \rho_j^{(k-2)}) < 0$ ），取 $\gamma_j^{(k)} = 0.7$ 使渐近线收缩，增加近似函数的曲率以稳定收敛；反之若变化趋势单调，取 $\gamma_j^{(k)} = 1.2$ 使渐近线扩张以加速收敛；否则取 $\gamma_j^{(k)} = 1.0$ 。此外，为避免数值不稳定，还需对计算出的 $L_j^{(k)}$ 和 $U_j^{(k)}$ 进行上下界截断处理，确保其处于合理范围内。

为了避免子问题求解过程中设计变量过于接近渐近线而导致数值奇异（即分母趋近于零），同时限制单步更新幅度以保证近似的有效性（类似信赖域策略），MMA 显式定义了第 k 次迭代的局部移动界限 $\alpha_j^{(k)}$ 和 $\beta_j^{(k)}$ 。其选取规则如下：

$$\begin{aligned}\alpha_j^{(k)} &= \max \left\{ \rho_j^{\min}, L_j^{(k)} + 0.1(\rho_j^{(k)} - L_j^{(k)}), \rho_j^{(k)} - 0.5(\rho_j^{\max} - \rho_j^{\min}) \right\} \\ \beta_j^{(k)} &= \min \left\{ \rho_j^{\max}, U_j^{(k)} - 0.1(U_j^{(k)} - \rho_j^{(k)}), \rho_j^{(k)} + 0.5(\rho_j^{\max} - \rho_j^{\min}) \right\}\end{aligned}$$

上述界限实际上隐含了三重约束：首先，设计变量必须位于原始物理界限 $[\rho_j^{\min}, \rho_j^{\max}]$ 内；其次，单步更新幅度不能超过总设计域的 50%；最后，更新后的变量与渐近线之间必须保留至少 10% 的相对距离，即满足：

$$-0.9(\rho_j^{(k)} - L_j^{(k)}) \leq \rho_j - \rho_j^{(k)} \leq 0.9(U_j^{(k)} - \rho_j^{(k)})$$

这一机制有效地保证了凸近似子问题在数值求解时的非奇异性和稳定性。

MMA 通过计算系数 $p_{ij}^{(k)}$ 和 $q_{ij}^{(k)}$ 来拟合原函数的梯度信息。为保证近似函数 $\tilde{f}_i^{(k)}$ 在当前设计点 $\rho^{(k)}$ 处与原函数 f_i 具有一阶一致性（即函数值相等、梯度相等），并保证严格凸性，需对梯度的正负部分进行分离。记当前设计点处偏导数的正部与负部为：

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial \rho_j} \right)^+ = \max \left(\frac{\partial f_i}{\partial \rho_j}, 0 \right), \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial \rho_j} \right)^- = \max \left(-\frac{\partial f_i}{\partial \rho_j}, 0 \right)$$

则系数 $p_{ij}^{(k)}$ 和 $q_{ij}^{(k)}$ 计算如下：

$$\begin{aligned}p_{ij}^{(k)} &= (U_j^{(k)} - \rho_j^{(k)})^2 \left[1.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial \rho_j} \right)^+ + 0.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial \rho_j} \right)^- + \frac{10^{-5}}{\rho_j^{\max} - \rho_j^{\min}} \right] \\ q_{ij}^{(k)} &= (\rho_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2 \left[0.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial \rho_j} \right)^+ + 1.001 \left(\frac{\partial f_i}{\partial \rho_j} \right)^- + \frac{10^{-5}}{\rho_j^{\max} - \rho_j^{\min}} \right]\end{aligned}$$

上述构造中引入的小量保证了即使某分量梯度为零，系数 $p_{ij}^{(k)}$ 与 $q_{ij}^{(k)}$ 仍严格为正，从而确保了子问题的严格凸性。最后，常数项 $r_i^{(k)}$ 由条件 $\tilde{f}_i^{(k)}(\rho^{(k)}) = f_i(\rho^{(k)})$ 唯一确定。

算法 2.2 MMA 求解带约束的拓扑优化问题

输入: 初始设计变量 $\rho^{(0)}$ (满足 $\rho_j^{\min} \leq \rho_j^{(0)} \leq \rho_j^{\max}$)，目标函数 $f_0(\rho)$ 与约束函数 $f_i(\rho) \leq 0$ ，设计变量上下界 $\rho_j^{\min}, \rho_j^{\max}$ ，MMA 参数 (如 a_0, a_i, c_i, d_i 及初始渐近线设置等)，收敛容差 ϵ ，最大迭代次数 MaxIter

输出: 优化后的设计变量 ρ

初始化：令迭代计数器 $k \leftarrow 0$ ，给定初始移动渐近线 $L_j^{(0)}, U_j^{(0)}$

while 未达到收敛准则 **do**

 在当前设计变量 $\rho^{(k)}$ 下求解状态方程，得到物理场 (如位移场)

 计算目标函数 $f_0(\rho^{(k)})$ 与约束函数 $f_i(\rho^{(k)})$

 计算目标函数的灵敏度 $\nabla f_0(\rho^{(k)})$ 与约束函数的灵敏度 $\nabla f_i(\rho^{(k)})$

 (可选) 对灵敏度进行过滤或投影

 根据 $\rho^{(k)}$ 及其若干步的迭代信息，更新第 k 步的移动渐近线 $L_j^{(k)}, U_j^{(k)}$

 由原始界限 $\rho_j^{\min}, \rho_j^{\max}$ 与 $L_j^{(k)}, U_j^{(k)}$ 构造局部设计变量界限 $\alpha_j^{(k)}, \beta_j^{(k)}$

 利用当前点的函数值、梯度以及渐近线信息，计算系数 $p_{ij}^{(k)}, q_{ij}^{(k)}, r_i^{(k)}$ ，得到分离的凸近似函数

$$\tilde{f}_i^{(k)}(\rho), \quad i = 0, 1, \dots, N_g$$

 在 $\alpha_j^{(k)} \leq \rho_j \leq \beta_j^{(k)}$ 内，以 $\tilde{f}_i^{(k)}$ 为目标与约束构造 MMA 子问题，采用合适的数值方法 (如原始-对偶牛顿算法) 求解该凸子问题，得到新的最优设计变量 ρ^{new}

 (可选) 对 ρ^{new} 进行过滤或投影

 令 $\rho^{(k+1)} \leftarrow \rho^{\text{new}}$ ，更新迭代计数器 $k \leftarrow k + 1$

end while

2.6 正则化与长度尺度控制：过滤与投影

连续体拓扑优化问题旨在无限维函数空间中寻找最优材料分布 $\rho(\mathbf{x})$ 。然而，原问题通常缺乏松弛条件，导致在数学上是不稳定的。这在数值求解中表现为网格依赖性，即随着网格细化，解会出现无限精细的微结构，且目标函数无法收敛为了获得网格无关的可制造设计，必须引入正则化手段来控制结构中的最小长度尺度。目前，基于卷积算子的过滤技术是最主流的方法 [22]。

2.6.1 灵敏度过滤方法

灵敏度过滤由 Sigmund [21] 提出。虽然它本质上是一种启发式方法，缺乏严格的数学变分基础，但其物理直观清晰，能够有效消除棋盘格现象。在连续域 Ω 上，该方法通过对目标泛函的梯度场进行卷积平滑来修正搜索方向。

定义修正后的灵敏度场 $\widetilde{\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \rho}}$ 为原始灵敏度场 $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \rho}$ 的加权平均：

$$\widetilde{\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \rho}} = \frac{1}{\max\{\gamma, \rho(\mathbf{x})\}\psi(\mathbf{x})} \int_{\Omega} w(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|) \rho(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \rho} d\mathbf{y},$$

式中, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ 为空间坐标向量; γ 为防止奇异的小正数; $\psi(\mathbf{x})$ 为归一化因子, 定义为卷积核在设计域内的积分:

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} w(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|) d\mathbf{y},$$

其中 $w(r)$ 为具有紧支集的卷积核函数, 通常采用线性衰减的锥形函数 [5, 6]:

$$w(r) = \max\{0, r_{\min} - r\},$$

其中 $r = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ 表示两点间的欧几里得距离, r_{\min} 为预设的过滤半径。该积分形式表明, 某点处的修正灵敏度不仅取决于该点, 还受到其邻域内所有点灵敏度的加权影响, 从而平滑了高频振荡。

2.6.2 密度过滤方法

灵敏度过滤虽然在工程上有效, 但其本质是对梯度场的后处理, 并未改变设计变量本身的空间分布, 因此在数学上缺乏对解空间的严格约束。相比之下, Bruns 和 Tortorelli [6] 提出的密度过滤直接作用于设计变量场, 是一种更为严谨的正则化手段。Bourdin [5] 进一步在数学上证明了该方法能确保拓扑优化问题解的存在性。

密度过滤的核心思想在于解耦了“数学设计空间”与“物理材料空间”。在该框架下, 原始设计变量场 $\rho(\mathbf{x})$ 不再直接决定材料的物理属性, 而是作为一组纯粹的数学优化参数。真正决定结构物理响应(如刚度、质量、热传导率等)的是经过平滑映射后的物理密度场 $\tilde{\rho}(\mathbf{x})$ 。因此, 所有的状态方程求解及性能泛函计算均必须基于 $\tilde{\rho}$ 进行, 且最终的设计结果亦应以 $\tilde{\rho}$ 为准。

在连续域 Ω 上, 密度过滤定义了一个从原始设计变量空间 $L^{\infty}(\Omega)$ 到物理密度空间的平滑映射算子。物理密度场 $\tilde{\rho}(\mathbf{x})$ 定义为原始设计场的卷积:

$$\tilde{\rho}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\psi(\mathbf{x})} \int_{\Omega} w(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

在此框架下, 结构的目标泛函及约束泛函 \mathcal{F} 均直接依赖于物理密度场 $\tilde{\rho}$, 根据链式法则

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho(\mathbf{x})} = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tilde{\rho}(\mathbf{y})} \frac{\partial \tilde{\rho}(\mathbf{y})}{\partial \rho(\mathbf{x})} d\mathbf{y} = \int_{\Omega} w(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|) \frac{1}{\psi(\mathbf{y})} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tilde{\rho}(\mathbf{y})} d\mathbf{y}.$$

2.6.3 投影方法

虽然密度过滤方法在数学上提供了良好的适定性证明, 并有效控制了最小长度尺度, 但其低通滤波特性不可避免地在结构边界处引入了较宽的中间密度过渡区域(即灰度带)。这导致最终优化结果存在大量非 0 非 1 的材料分布, 不仅难以制造,

且在有限元分析中可能导致物理属性（如刚度）被低估或高估。为了获得边界清晰、黑白分明的拓扑结构，Guest 等 [9] 及 Sigmund [22] 提出在密度过滤之后引入基于 Heaviside 函数的非线性投影技术。

投影方法的核心思想是构建一个从过滤后密度空间到物理密度空间的非线性映射。在该框架下，原始设计变量 $\rho(\mathbf{x})$ 首先经过密度过滤得到平滑的中间密度场 $\tilde{\rho}(\mathbf{x})$ ，随后通过投影算子 \mathcal{P} 映射为物理密度场 $\bar{\rho}(\mathbf{x})$ 。此时，全场变量的映射关系扩展为三层体系：

$$\rho(\mathbf{x}) \xrightarrow{\text{过滤}} \tilde{\rho}(\mathbf{x}) \xrightarrow{\text{投影}} \bar{\rho}(\mathbf{x})$$

所有的物理场分析与性能计算均基于最终的物理密度 $\bar{\rho}(\mathbf{x})$ 进行。

理想的投影算子为 Heaviside 阶跃函数，即当 $\tilde{\rho} > \eta$ 时 $\bar{\rho} = 1$ ，否则 $\bar{\rho} = 0$ ，其中 η 为投影阈值。然而，阶跃函数在阈值处不可微，无法直接应用于基于梯度的优化算法。因此，在实际应用中通常采用光滑的连续函数来逼近阶跃特征。目前应用最为广泛的两种光滑投影函数分别为指数型投影与双曲正切型投影。

- 指数型投影：由 Guest 等 [9] 提出，其形式为：

$$\bar{\rho}(\mathbf{x}) = 1 - e^{-\beta\tilde{\rho}(\mathbf{x})} + \tilde{\rho}(\mathbf{x})e^{-\beta},$$

其中 $\beta > 0$ 为控制投影陡峭程度的正则化参数。当 $\beta \rightarrow 0$ 时，该映射退化为近似线性关系；当 $\beta \rightarrow \infty$ 时，该映射收敛于 Heaviside 阶跃函数。常用于特定的微结构设计或材料插值方案中。

- 双曲正切型投影：由 Wang 等 [26] 推广，该函数通过双曲正切函数构造，具有形式简单、阈值可控的优点：

$$\bar{\rho}(\mathbf{x}) = \frac{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(\tilde{\rho}(\mathbf{x}) - \eta))}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))},$$

式中， $\eta \in [0, 1]$ 为投影阈值，决定了灰度转变的分界点（通常取 $\eta = 0.5$ 以保持过滤前后的体积近似守恒）。该投影同样通过 β 控制逼近程度。

投影参数 β 的选取对优化收敛性至关重要。若直接采用较大的 β 值，目标泛函会表现出极强的非凸性，导致优化算法过早陷入局部极小值；若 β 值过小，则无法有效消除灰度。为此，通常采用延拓策略进行求解：在优化初期设定较小的 β 值（如 $\beta = 1$ ），此时优化问题近似凸性较好，利于寻找全局轮廓；随着迭代步数的增加，逐步增大 β 值，从而逐渐锐化结构边界，直至获得清晰的黑白设计。

引入投影算子后，目标泛函 \mathcal{F} 对原始设计变量 $\rho(\mathbf{x})$ 的灵敏度计算需根据链式

法则进一步扩展。基于连续域的变分推导，其导数关系为：

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho(\mathbf{x})} = \int_{\Omega} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{\rho}(\mathbf{y})} \frac{\partial \bar{\rho}(\mathbf{y})}{\partial \tilde{\rho}(\mathbf{y})} \frac{\partial \tilde{\rho}(\mathbf{y})}{\partial \rho(\mathbf{x})} d\mathbf{y},$$

考虑到投影是点对点的局部映射，即 $\bar{\rho}(\mathbf{y})$ 仅取决于该点的 $\tilde{\rho}(\mathbf{y})$ ，而密度过滤是全域积分映射，结合第 2.6.2 节的过滤伴随算子，最终灵敏度表达式为：

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho(\mathbf{x})} = \int_{\Omega} w(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|) \frac{1}{\psi(\mathbf{y})} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\rho}(\mathbf{y})} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \tilde{\rho}} \Big|_{\mathbf{y}} \right) d\mathbf{y},$$

其中， $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \tilde{\rho}}$ 为投影函数的导数。对于指数型投影，其导数为

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \tilde{\rho}} = \beta e^{-\beta \tilde{\rho}} + e^{-\beta},$$

而对于双曲正切型投影，其导数为

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \tilde{\rho}} = \beta \frac{1 - \tanh^2(\beta(\tilde{\rho} - \eta))}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))},$$

该式表明，引入投影后，物理场灵敏度在反向传播时，首先被投影导数“缩放”（在密度过滤区放大，在黑白区抑制），然后再经过卷积核“平滑”，最终作用于设计变量。这一机制确保了优化驱动力集中于结构边界的演化，从而实现高精度的形状描述。

2.7 拓扑优化的基本流程

第3章 任意次多单元族拉格朗日有限元拓扑优化比较研究

3.1 引言

拓扑优化是一类用于在给定设计域内优化材料分布的计算设计方法，旨在满足既定物理与几何约束的同时优化目标函数。其基本流程为“分析—优化”闭环：求解相应边值问题获得状态场，并据此更新设计变量以迭代逼近最优。在变密度法框架下，设计域由有限元方法离散，并将每个几何实体（如单元或节点）关联到一个设计变量（密度） $\rho \in [0, 1]$ 。理想的二元拓扑设计满足 $\rho \in \{0, 1\}$ ($\rho = 1$ 为实体相, $\rho = 0$ 为空洞相)，数值实现中则通过惩罚化材料插值、最小特征尺度控制与适当的优化策略，将连续松弛变量逐步逼近上述 0–1 结构（为数值稳定常取 $\rho \in [\rho_{\min}, 1]$, $\rho_{\min} > 0$ 很小）。

在传统拓扑优化中，常以低阶四边形或三角形单元离散设计域，虽实现简便、代价较低，但优化过程中易出现棋盘格与网格依赖性等数值病态，且边界呈现明显锯齿化特征，通常需配合过滤与投影以控制最小特征尺度并获得网格无关解。相较之下，高阶拉格朗日单元在可比自由度规模下具有更高的分析精度与更强的边界刻画能力，有望改善目标函数收敛与几何质量。鉴于此，本章在统一物理长度尺度的设计下（过滤半径 r_{\min} 在物理坐标系中统一设定），系统比较任意阶次 k 与多单元族在拓扑优化中的表现。

就设计变量布置而言，本文对比两类常用方案：其一，单元密度（每个单元一个密度变量，密度场间断），实现简单、装配直接，但更易诱发上述病态且分辨率受平均网格尺寸所限；其二，节点密度（每个节点一个密度变量，密度场连续），该做法在粗网格下可能出现“岛化”现象，但当位移分析采用高阶有限元 ($k \geq 2$) 时，由于对层状材料分布的刚度评估更为准确，此类不利效应可显著缓解。尽管围绕上述两类表征已有大量工作，在统一最小特征尺度、求解与约束参数的前提下，针对不同网格类型与质量、不同单元族与任意阶 k 的系统比较仍相对不足，且覆盖二维/三维同时并列评估单元密度与节点密度两类表征的综合性研究仍显缺失。本章即在这一统一框架下开展全面对比与量化评估。

3.2 线弹性问题的连续模型与变分形式

3.2.1 线弹性理论的基本假设

结构拓扑优化中的状态方程通常采用经典小变形线弹性理论，其为柔顺度最小化等优化问题提供了明确的物理基础与数学结构。本节简要回顾该理论所依赖的标

准假设 [3]

1. 连续介质假设：将由离散原子、分子构成的真实材料在宏观尺度上理想化为连续、致密且可无限分割的介质。
2. 小变形假设：假设结构在载荷作用下产生的位移和转动均是微小的，即位移梯度张量 $\nabla \mathbf{u}$ 的范数远小于 1，该假设带来两个关键简化：
 - (a) 几何线性化：应变与位移的关系可由线性的几何方程描述。应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 被定义为位移向量 \mathbf{u} 的对称梯度：
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T).$$
- (b) 平衡方程简化：可忽略变形前后物体几何构型的差异，直接在未变形的初始构型上建立静力平衡方程。
3. 线性本构假设：假设材料的力学响应是线性的，即应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 与应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 之间服从广义胡克定律：

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon},$$

其中 \mathbb{C} 为四阶弹性刚度张量，包含了描述材料弹性特性的所有信息，且在该假设下被视为不依赖于应变的常数张量。

4. 各向同性假设：假设材料的力学性质在所有方向上都是相同的。在此假设下， \mathbb{C} 仅由两个独立的材料常数来完全决定，以拉梅常数 λ 和 μ 表示：

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I},$$

其中 $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ 表示应变张量的迹， \mathbf{I} 为二阶单位张量。

工程实践中常用的材料参数体系包括：

- 杨氏模量 E ：描述材料在单轴拉伸或压缩时的刚度。
- 泊松比 ν ：描述材料在单轴加载时横向应变与纵向应变的比值。
- 拉梅第一常数 λ ：主要出现在应力-应变关系的数学表述中，无直接的物理解释。
- 剪切模量 μ ：描述材料抵抗剪切变形的能力，亦称拉梅第二常数。
- 体积模量 K ：描述材料在各向同性压力下的体积变化特性。

在经典三维各向同性线弹性理论中，上述材料参数之间存在如下转换关系：

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)},$$

反过来有

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

3.2.2 线弹性问题的强形式

在不考虑时间效应的静态情况下，求解域 Ω 内的任意一点满足本构三类控制方程：

1. 静力平衡方程：描述物体内任意点的内力平衡关系

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega.$$

2. 几何方程：描述应变场与位移场之间的运动学关系

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top) \quad \text{in } \Omega.$$

3. 本构方程：描述各向同性线弹性材料的应力–应变关系

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{in } \Omega.$$

设 $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ 且 $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ ，给定边界数据 \mathbf{u}_D 与 \mathbf{g} ，求 $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ，使得

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{b} & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D & \text{on } \Gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{g} & \text{on } \Gamma_N \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 \mathbf{n} 为外法向量。

3.2.3 线弹性问题的弱形式与变分原理

为便于建立能量型表述，以下在合适的 Sobolev 空间内给出弱形式，记

$$\mathbf{V} := H^1(\Omega; \mathbb{R}^d), \quad \mathbf{V}_0 := \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_D\}$$

在上述设置下，取任意 $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$ 与强形式 $-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}$ 作内积：

$$(-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = (\mathbf{b}, \mathbf{v}),$$

应用 Green 公式得：

$$(-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = -\langle \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\partial\Omega} + (\boldsymbol{\sigma}, \nabla \mathbf{v}),$$

由于测试函数 \mathbf{v} 在 Γ_D 上为零，且 $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{g}$ 在 Γ_N 上成立，于是：

$$(\boldsymbol{\sigma}, \nabla \mathbf{v}) = (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_N},$$

利用应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的对称性，梯度项化为对称梯度项：

$$(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v})) = (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_N}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$$

据此定义双线性型与线性泛函

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v})), \quad \ell(\mathbf{v}) := (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_N},$$

得到位移法的弱形式：求 $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ ，使得

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0 \tag{3.2}$$

在线性各向同性情形，可得两种常用且等价的表达：

1. 应变型：

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := 2\mu(\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v})) + \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v})$$

2. 梯度型：

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v})$$

由 Korn 与 Poincaré 不等式可知 $a(\cdot, \cdot)$ 在 \mathbf{V}_0 上连续且强椭圆， $\ell(\cdot)$ 连续，故由 Lax–Milgram 定理，弱问题存在唯一解 [8]。此外，弱形式 $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v})$ 正是最小势能原理的欧拉–拉格朗日方程：线弹性体系的总势能由应变能与外力势能构成，求解弱式等价于寻求使总势能极小的稳定平衡态 [28]。

3.3 线弹性问题的任意次多单元族拉格朗日有限元方法

3.3.1 单纯形单元上拉格朗日有限元空间构造

长度为 $d + 1$ 的多重指标是一个非负整数数组:

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d), \quad \alpha_i \in \mathbb{N}, \quad i = 0, \dots, d,$$

其次数与阶乘分别定义为:

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \sum_{i=0}^d \alpha_i, \quad \boldsymbol{\alpha}! = \prod_{i=0}^d (\alpha_i!)$$

给定多项式阶次 $k \in \mathbb{N}$, 所有满足 $|\boldsymbol{\alpha}| = k$ 的多重指标组成单纯形晶格:

$$\mathbb{T}_k^d = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^{d+1} : |\boldsymbol{\alpha}| = k\}.$$

在实际实现中, 通常对 \mathbb{T}_k^d 进行字典序进行线性编号, 一种常用的编号方式为 [7]:

$$R_d(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^d \binom{\alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_d + d - i}{d + 1 - i}.$$

设 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d \in \mathbb{R}^d$, 由这 $d + 1$ 个点的凸包构成一个 d -维单纯形:

$$T = \text{Convex}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d) = \left\{ \sum_{i=0}^d \lambda_i \mathbf{x}_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=0}^d \lambda_i = 1 \right\},$$

其中 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_d)$ 为重心坐标。基于此, 定义 k 阶插值点 (晶格节点) 集合

$$\mathcal{X}_T = \left\{ \mathbf{x}_{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^d \alpha_i \mathbf{x}_i : \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{T}_k^d \right\}, \quad \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{k} (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d)$$

\mathcal{X}_T 中插值点的排序 \mathbb{T}_k^d 中多重指标的排序规则相同, 都由字典序 $R_d(\boldsymbol{\alpha})$ 给出。

对于任意单纯形 T , k 次拉格朗日有限元对应的标量多项式空间

$$P_k(T) = \text{span}\{\phi_{\boldsymbol{\alpha}} : \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{T}_k^d\}$$

其节点型拉格朗日基函数 $\phi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})$ 可由重心坐标构造 [7, 14]:

$$\phi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} \prod_{i=0}^d \prod_{j=0}^{\alpha_i-1} (k\lambda_i(\mathbf{x}) - j), \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{T}_k^d,$$

与插值点 $\mathbf{x}_\alpha \in \mathcal{X}_T$ 对应的自由度取节点值：

$$N_\alpha(u) = u(\mathbf{x}_\alpha),$$

并满足对偶关系：

$$N_\beta(\phi_\alpha) = \phi_\alpha(\mathbf{x}_\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$$

即一个基函数 ϕ_α 在其对应的插值点 \mathbf{x}_α 上值为 1，而在所有其它插值点 \mathbf{x}_β （其中 $\beta \neq \alpha$ ）上值为 0。

为标准化计算流程并便于高效数值积分，物理单元 T 上的量通过仿射映射 $\mathbf{F}_T : \hat{T} \rightarrow T$ 统一转移至参考单纯形 \hat{T} （二维取 $(0,0), (1,0), (0,1)$ ）处理：

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{J}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{x}_0, \quad \int_T f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\hat{T}} f(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi})) |\det \mathbf{J}| \, d\boldsymbol{\xi},$$

其中，雅可比矩阵 \mathbf{J} 是一个常数矩阵， \mathbf{x}_0 是一个常数向量，对直边单纯形单元， \mathbf{J} 与 $|\det \mathbf{J}|$ 为常数；若采用曲边等高阶几何映射，则需在各求积点评估 $\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})$ 与 $|\det \mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})|$ 。

上述思想可以推广到矢量拉格朗日单元。设 $\mathbf{x}_\alpha \in \mathcal{X}_T$ ，在该点引入一组局部基底 $\{\mathbf{e}_i^{x_\alpha}\}_{i=1}^d \subset \mathbb{R}^d$ 以及其对偶基 $\{\hat{\mathbf{e}}_i^{x_\alpha}\}_{i=1}^d$ ，满足：

$$(\hat{\mathbf{e}}_i^{x_\alpha}, \mathbf{e}_j^{x_\alpha})_{\mathbb{R}^d} = \delta_{ij},$$

则可定义矢量拉格朗日基函数及其自由度：

$$\phi_{\alpha,i}(\mathbf{x}) = \phi_\alpha(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{e}}_i^{x_\alpha}, \quad N_{\alpha,i}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_\alpha) \cdot \mathbf{e}_i^{x_\alpha},$$

并有

$$N_{\beta,i}(\phi_{\alpha,j}) = \delta_{\alpha,\beta} \delta_{ij}.$$

基于上述构造，标量拉格朗日元在单个 d 维单纯形单元上的局部自由度数为

$$\text{ldof}^{(s)} = \binom{k+d}{d}.$$

矢量拉格朗日元（位移场）在每个单元上的局部自由度数为

$$\text{ldof}^{(v)} = d \text{ldof}^{(s)} = d \binom{k+d}{d}.$$

在二维、三维情形下，可得到更直观的表达式：

- 二维三角形单元：

$$\text{ldof}^{(v)} = 2 \binom{k+2}{2} = (k+1)(k+2).$$

- 三维四面体单元：

$$\text{ldof}^{(v)} = 3 \binom{k+3}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{2}.$$

在全局层面，记 NN、NE、NF、NC 分别为网格中的顶点数、边数、三角形面数和单元数，则标量拉格朗日空间的全局自由度数为：

- 二维三角形网格：

$$\text{gdof}^{(s)} = \text{NN} + \text{NE} \times (k-1) + \text{NC} \times \binom{k-1}{2}.$$

- 三维四面体网格：

$$\text{gdof}^{(s)} = \text{NN} + \text{NE} \times (k-1) + \text{NF} \times \binom{k-1}{2} + \text{NC} \times \binom{k-1}{3}.$$

矢量拉格朗日位移空间由标量空间在每个坐标方向复制一份得到，其全局自由度数满足统一关系

$$\text{gdof}^{(v)} = d \text{ gdof}^{(s)}.$$

在二维、三维情形下可写为：

- 二维三角形网格：

$$\text{gdof}^{(v)} = \text{NN} \times 2 + \text{NE} \times 2(k-1) + \text{NC} \times 2 \binom{k-1}{2}.$$

- 三维四面体网格：

$$\text{gdof}^{(v)} = \text{NN} \times 3 + \text{NE} \times 3(k-1) + \text{NF} \times 3 \binom{k-1}{2} + \text{NC} \times 3 \binom{k-1}{3}.$$

3.3.2 张量积单元上拉格朗日有限元空间构造

与第 3.3.1 节中单纯形单元利用重心坐标和单纯形晶格 \mathbb{T}_k^d 构造拉格朗日有限元不同，四边形、六面体等非单纯形单元缺乏类似的内蕴重心坐标系。对于此类张量积单元，高阶拉格朗日有限元的构造通常基于规整参考单元上的一维插值与张量积结构，再通过等参映射推广到任意物理单元。为保持记号上的统一，本节在张量积晶格 \mathbb{S}_k^d 的框架下，给出四边形、六面体单元上的拉格朗日有限元空间构造，以及局部与全局自由度的计数公式。

考虑 d 维参考张量积单元 $\hat{Q} = [-1, 1]^d$ ，其坐标标记为 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ 。在一维参考区间 $I = [-1, 1]$ 上，选取 $k+1$ 个互不相同的插值节点 $\{s_i\}_{i=0}^k$ 。对应于每个节点 s_j ，一维 k 次拉格朗日基函数定义为

$$l_j^k(t) = \prod_{i=0, i \neq j}^k \frac{t - s_i}{s_j - s_i}, \quad j = 0, \dots, k,$$

并满足插值性质 $l_j^k(s_i) = \delta_{ij}$ 。为描述张量积结构，引入长度为 d 的多重索引（晶格指标）

$$\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_d), \quad i_\ell \in \{0, 1, \dots, k\}, \quad \ell = 1, \dots, d,$$

所有这样的多重索引构成张量积晶格

$$\mathbb{S}_k^d = \{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^d : 0 \leq i_\ell \leq k, \ell = 1, \dots, d\}.$$

基于一维节点 $\{s_i\}_{i=0}^k$ ，参考单元上的插值点集合为

$$\mathcal{X}_{\hat{Q}} = \{\xi_{\mathbf{i}} = (s_{i_1}, \dots, s_{i_d}) : \mathbf{i} \in \mathbb{S}_k^d\},$$

对每个 $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{S}_k^d$ ，定义张量积形式的标量拉格朗日基函数

$$\hat{\phi}_{\mathbf{i}}(\xi) = \prod_{\ell=1}^d l_{i_\ell}^k(\xi_\ell), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \hat{Q},$$

利用一维基函数的 Kronecker δ 性质，可以得到高维基函数在插值点上的插值特性：

$$\hat{\phi}_{\mathbf{i}}(\xi_{\mathbf{p}}) = \prod_{\ell=1}^d l_{i_\ell}^k(s_{p_\ell}) = \prod_{\ell=1}^d \delta_{i_\ell p_\ell} = \delta_{\mathbf{i}, \mathbf{p}}, \quad \mathbf{i}, \mathbf{p} \in \mathbb{S}_k^d,$$

因此， $\{\hat{\phi}_{\mathbf{i}}\}_{\mathbf{i} \in \mathbb{S}_k^d}$ 构成了参考单元上张量积多项式空间的一组节点型拉格朗日基函数。用多重指标 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$ 表示各坐标方向上的幂次，该空间可以写为

$$P_k(\hat{Q}) = \text{span} \left\{ \xi_1^{\beta_1} \cdots \xi_d^{\beta_d} : \beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d, 0 \leq \beta_\ell \leq k \right\}.$$

在实现中， \mathbb{S}_k^d 通常按字典序进行线性编号，与单纯形晶格 \mathbb{T}_k^d 的处理方式完全一致，从而可在统一的数组结构下管理不同单元族的局部与全局自由度编号。

设 Q 为空间中的任一四边形或六面体物理单元，其几何控制点集合记为

$$\{\boldsymbol{x}_j\}_{j \in \mathbb{S}_k^d} \subset \mathbb{R}^d,$$

借助参考基函数，可以定义从参考单元到物理单元的等参映射

$$\boldsymbol{F}_Q : \hat{Q} \rightarrow Q, \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}_Q(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j \in \mathbb{S}_k^d} \boldsymbol{x}_j \hat{\phi}_j(\boldsymbol{\xi}),$$

在等参元设定下，几何映射与场变量（如位移场）的插值采用同一组形函数。定义在物理单元 Q 上的标量拉格朗日基函数由参考基函数通过映射 \boldsymbol{F}_Q 的逆得到：

$$\phi_i(\boldsymbol{x}) = \hat{\phi}_i(\boldsymbol{F}_Q^{-1}(\boldsymbol{x})), \quad i \in \mathbb{S}_k^d,$$

对物理单元上的积分，通过变量代换可统一转移到参考单元上：

$$\int_Q f(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} = \int_{\hat{Q}} f(\boldsymbol{F}_Q(\boldsymbol{\xi})) |\det \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\xi})| \, d\boldsymbol{\xi},$$

其中 \boldsymbol{J} 是映射 \boldsymbol{F}_Q 的雅可比矩阵。与单纯形单元的仿射映射不同，张量积等参元中的 \boldsymbol{F}_Q 一般是非线性的，故 \boldsymbol{J} 及其行列式通常依赖于 $\boldsymbol{\xi}$ ，需要在每个求积点上重新计算。

类似于单纯形上的矢量拉格朗日元构造，张量积单元上的矢量空间同样可以通过在每个插值点处引入局部基底与对偶基底来刻画。鉴于本文所考虑的线弹性问题均在全局笛卡尔坐标系下描述，且自由度自然对应于各坐标分量上的位移值，为简化记号，在本节中不再区分不同插值点处的局部坐标基，而是统一采用全局标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_m\}_{m=1}^d$ 。

定义矢量基函数

$$\phi_{i,m}(\boldsymbol{x}) = \phi_i(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_m, \quad i \in \mathbb{S}_k^d, \quad m = 1, \dots, d,$$

相应的自由度取为位移分量在插值点处的点值：

$$N_{i,m}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_i) \cdot \boldsymbol{e}_m,$$

并满足对偶关系

$$N_{\mathbf{p},m}(\phi_{i,n}) = \delta_{i,\mathbf{p}} \delta_{mn}, \quad \mathbf{i}, \mathbf{p} \in \mathbb{S}_k^d, \quad m, n = 1, \dots, d.$$

在上述晶格框架下，参考张量积单元上的标量局部自由度数为

$$\text{ldof}^{(s)} = (k+1)^d.$$

矢量拉格朗日元（位移场）的局部自由度数为

$$\text{ldof}^{(v)} = d \text{ ldof}^{(s)} = d(k+1)^d.$$

在二维四边形单元与三维六面体单元上分别为

- 二维四边形单元：

$$\text{ldof}^{(v)} = 2(k+1)^2.$$

- 三维六面体单元：

$$\text{ldof}^{(v)} = 3(k+1)^3.$$

标量空间的全局自由度数为：

- 二维四边形网格：

$$\text{gdof}^{(s)} = \text{NN} + \text{NE} \times (k-1) + \text{NC} \times (k-1)^2$$

- 三维六面体网格：

$$\text{gdof}^{(s)} = \text{NN} + \text{NE} \times (k-1) + \text{NF} \times (k-1)^2 + \text{NC} \times (k-1)^3$$

矢量拉格朗日位移空间由标量自由度在每个坐标方向复制得到，其全局自由度数满足统一关系

$$\text{gdof}^{(v)} = d \text{ gdof}^{(s)}$$

在二维、三维情形下可写为：

- 二维四边形网格：

$$\text{gdof}^{(v)} = \text{NN} \times 2 + \text{NE} \times 2(k-1) + \text{NC} \times 2(k-1)^2$$

- 三维六面体网格:

$$\text{gdof}^{(v)} = \text{NN} \times 3 + \text{NE} \times 3(k-1) + \text{NF} \times 3(k-1)^2 + \text{NC} \times 3(k-1)^3$$

3.3.3 线弹性的有限元离散

设 \mathcal{K}_h 为区域 Ω 的一族形状正则的网格剖分, 由有限个闭合单元 K 组成, 记 h 为网格的特征尺寸参数。基于前文 3.3.1 节和 3.3.2 节中关于单纯形与张量积单元上多项式框架及其拉格朗日基函数的构造, 记定义在单元 K 上的局部 k 次向量值多项式空间为 $P_k(K; \mathbb{R}^d)$, 据此, 定义 Ω 上的连续拉格朗日有限元空间如下

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{u}_h \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^d) : \mathbf{u}_h|_K \in P_k(K; \mathbb{R}^d), \forall K \in \mathcal{K}_h\},$$

如此定义的 \mathbf{V}_h 构成了原连续问题解空间的有限维子空间, 该空间中的任意函数 \mathbf{u}_h 可以由其在插值点上的矢量自由度唯一确定, 并表示为矢量基函数的线性组合:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N_{\text{dof}}} U_I \phi_I(\mathbf{x}),$$

其中, N_{dof} 为系统中自由度的总数, $\{\phi_I(\mathbf{x})\}_{I=1}^{N_{\text{dof}}}$ 为第 I 个全局矢量基函数, U_I 为对应的自由度值。相应的测试函数空间定义为

$$\mathbf{V}_{h,0} = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h : \mathbf{v}_h = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_D\}.$$

有限元近似解 $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ 满足离散变分问题

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = l(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{h,0}$$

其中

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) := (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h)), \quad l(\mathbf{v}_h) := (\mathbf{b}, \mathbf{v}_h) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma_N}.$$

在小变形假设下, 应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)$ 由位移梯度给出。将对称应变和对称应力按 Voigt 记号展平, 在三维情形中记为

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}, & \varepsilon_{yy}, & \varepsilon_{zz}, & 2\varepsilon_{xy}, & 2\varepsilon_{xz}, & 2\varepsilon_{yz} \end{pmatrix}^\top, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}, & \sigma_{yy}, & \sigma_{zz}, & 2\sigma_{xy}, & 2\sigma_{xz}, & 2\sigma_{yz} \end{pmatrix}^\top.$$

记全局位移和测试函数的自由度列向量分别为

$$\mathbf{U} = \left(U_1, \dots, U_{N_{\text{dof}}} \right)^\top, \quad \mathbf{V} = \left(V_1, \dots, V_{N_{\text{dof}}} \right)^\top.$$

将矢量基函数按分量展开，设每个分量对应的标量拉格朗日形函数为 $\{\phi_j\}_{j=1}^{N_n}$ ，并记

$$\Phi(\mathbf{x}) = (\phi_1(\mathbf{x}), \dots, \phi_{N_n}(\mathbf{x}))^\top,$$

则矢量有限元函数可写为

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Phi(\mathbf{x}) \\ & \ddots \\ & & \Phi(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \mathbf{U},$$

其中块对角矩阵由 $\Phi(\mathbf{x})$ 在 d 个分量方向上复制而成，由此得到应变-位移关系

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}_h(\mathbf{x})) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{U},$$

其中应变-位移矩阵可写为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{,y} & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{,z} \\ \Phi_{,y} & \Phi_{,x} & 0 \\ \Phi_{,z} & 0 & \Phi_{,x} \\ 0 & \Phi_{,z} & \Phi_{,y} \end{bmatrix},$$

其中 $\Phi_{,x}, \Phi_{,y}, \Phi_{,z}$ 分别表示标量形函数对相应坐标的导数组成的行向量。

线弹性本构关系 $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$ 在 Voigt 表示下写为

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}},$$

三维各向同性情形下本构矩阵为

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix},$$

二维平面问题下，记

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}, & \varepsilon_{yy}, & 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix}^\top, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}, & \sigma_{yy}, & 2\sigma_{xy} \end{pmatrix}^\top,$$

则在平面应变与平面应力假设下，本构矩阵分别为

$$\mathbf{D}_{pe} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{ps} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix}.$$

在上述记号下，双线性型可写为

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h)) &= \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h))^\top \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h))^\top \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{DB}(\mathbf{x})\mathbf{U})^\top \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{V} \, d\mathbf{x} \\ &= \mathbf{U}^\top \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}(\mathbf{x})^\top \mathbf{DB}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right) \mathbf{V}, \end{aligned}$$

由此可定义全局刚度矩阵

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}(\mathbf{x})^\top \mathbf{DB}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

同理，由右端线性泛函得到载荷向量

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \Phi^\top \mathbf{f} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \Phi^\top \mathbf{g}_N \, ds,$$

于是线弹性问题的有限元离散代数系统可写为

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F}.$$

3.3.4 算例验证

为验证本文实现的任意次多单元族拉格朗日有限元方法的正确性和有效性，并评估其数值精度与收敛阶次，本节构造一个具有解析解的二维线弹性问题。为聚焦于数值方法的收敛性分析，本算例采用无量纲化的物理参数。

考虑单位正方形求解域 $\Omega = [0, 1]^2$ ，假设材料为均匀各向同性线弹性体，处于

平面应变状态，材料拉梅第一常数 $\lambda = 1$ ，剪切模量 $\mu = 0.5$ 。构造精确位移解如下：

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{2}x) \sin(\pi y) \\ -2 \sin(\pi x) (\sin(\frac{\pi}{2}y) - y) \end{pmatrix}$$

根据线弹性控制方程可导得对应的体力密度向量：

$$\mathbf{b}(x, y) = \begin{pmatrix} \pi^2 [\sin(\frac{\pi}{2}x) \sin(\pi y) + \frac{3}{2} \cos(\pi y) \cos(\frac{\pi}{2}y)] - 2\pi(\lambda + \mu) \cos(\pi x) \\ -\frac{3}{4}\pi^2 \cos(\frac{\pi}{2}x) \cos(\pi y) - 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\frac{\pi}{2}y) + 2\mu\pi^2 y \sin(\pi x) \end{pmatrix}$$

在上下边界 ($y = 0, 1$) 施加与精确解一致的狄利克雷位移约束，左右边界 ($x = 0, 1$) 施加诺伊曼面力牵引 \mathbf{g} ，具体表达式为：

$$\mathbf{g}(0, y) = \begin{pmatrix} -\pi \sin(\pi y) \\ \pi \sin(\frac{\pi y}{2}) - 2\mu\pi y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(1, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \cos(\pi y) + \pi \sin(\frac{\pi y}{2}) - 2\mu\pi y \end{pmatrix}$$

为了系统评估并对比不同单元族在统一框架下的数值精度与收敛阶，本节在保持多项式阶次 k 固定的前提下，分别针对单纯形（三角形）单元与张量积（四边形）单元进行了 h -型网格细化测试。通过计算一系列加密网格上的数值解，提取了位移场的 L^2 误差范数与 H^1 半范数。图 3.1 在双对数坐标系下展示了这两种单元族的误差收敛曲线对比，其中图 3.1(a) 与 3.1(b) 分别对应于线性单元 ($k = 1$) 与高阶单元 ($k = 4$) 的情形。

如图所示，无论是单纯形（三角形）单元还是张量积（四边形）单元，在线性单元 ($k = 1$) 情形下，位移场 L^2 范数的收敛阶均稳定在 2.0 左右，而在高阶单元 ($k = 4$) 情形下，其收敛阶更是都达到了 5.0 的理论最优值。上述结果与有限元先验误差估计理论中 $\mathcal{O}(h^{k+1})$ 与 $\mathcal{O}(h^k)$ 的最优收敛阶次高度吻合，这一结果充分验证了本文实现的任意阶有限元求解器在数值上的正确性与高阶精度。

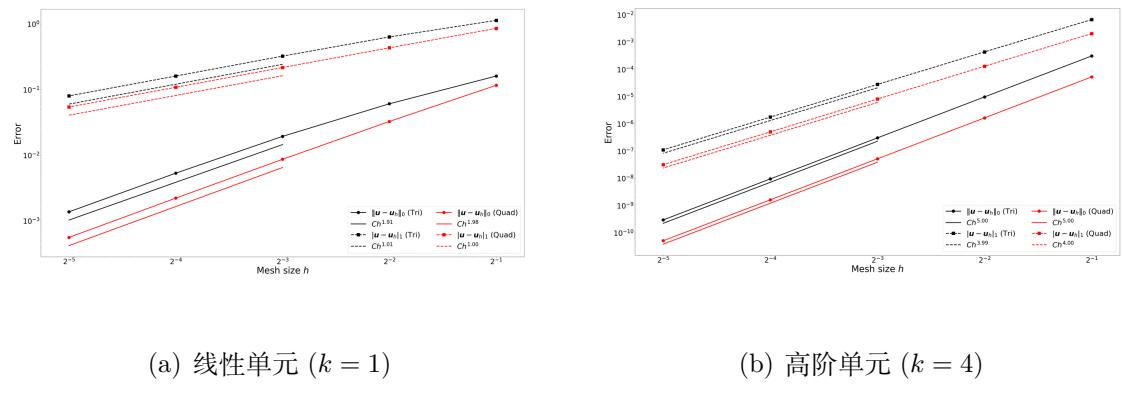


图 3.1 不同阶次下两种单元族的误差收敛曲线对比图。图中带标记的曲线表示数值误差，无标记的直线段表理论示参考斜率。

3.4 不同设计变量表征下的优化问题描述

本节在第 2 章中连续模型与变分形式的基础上，给出体积分数约束下柔顺度最小化与柔顺机构设计问题的有限元离散表达。为便于比较，统一采用同一套有限元平衡方程与 SIMP 材料插值，并在此框架下考察不同密度表征对离散优化模型及灵敏度形式的影响。对给定的设计变量向量 $\boldsymbol{\rho}$ ，记线弹性问题的有限元平衡方程为

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{F}, \quad c(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{F}^T\mathbf{U} = \mathbf{U}^T\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{U}$$

其中 $\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})$ 为全局刚度矩阵， $\mathbf{U}(\boldsymbol{\rho})$ 为位移向量， $c(\boldsymbol{\rho})$ 为柔顺度。为保证一致性，统一采用 SIMP 材料插值，其杨氏模量插值为

$$E(\rho(\mathbf{x})) = \rho(\mathbf{x})^p E_0$$

泊松比 ν 取定，据此构造本构矩阵 $\mathbf{D}(E(\rho(\mathbf{x})), \nu)$ 。

3.4.1 单元密度表征

首先考虑最为经典的单元密度表征。设计变量取每个单元的密度 $\rho_e \in [0, 1]$ ($e = 1, \dots, N_c$)，记第 e 个单元体积为 $v_e = |\Omega_e|$ ，则体积分数可写为

$$V(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{e=1}^{N_c} \int_{\Omega_e} \rho_e \, d\mathbf{x} = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{e=1}^{N_c} \rho_e v_e,$$

据此，柔顺度最小化问题可表述为

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\rho}} : & c(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{F}^T\mathbf{U} = \mathbf{U}^T\mathbf{K}\mathbf{U} \\ \text{subject to :} & \begin{cases} \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{F} \\ g_V(\boldsymbol{\rho}) = V(\boldsymbol{\rho}) - V_f \leq 0 \\ \rho_e \in [\rho_{\min}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

材料行为采用 SIMP 插值 $E(\rho_e) = \rho_e^p E_0$ ，据此，单元刚度矩阵：

$$\mathbf{K}_e(\rho_e) = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}(\rho_e) \mathbf{B} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T (\rho_e^p \mathbf{D}_0) \mathbf{B} \, d\mathbf{x} = \rho_e^p \mathbf{K}_e^{(0)},$$

在上述记号下，灵敏度分析可分步给出。首先，体积分数约束函数的对设计变量 ρ_e 的导数为

$$\frac{\partial g_V(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_e} = \frac{\partial V(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_e} = \frac{v_e}{|\Omega|},$$

其次，SIMP 模型中杨氏模量的导数为

$$\frac{\partial E(\rho_e)}{\partial \rho_e} = p \rho_e^{p-1} E_0,$$

从而由链式法则得到单元刚度矩阵的导数

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_e} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{D}(\rho_e)}{\partial \rho_e} \mathbf{B} \, dx = \frac{\partial E(\rho_e)}{\partial \rho_e} \frac{1}{E_0} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{B} \, dx = p \rho_e^{p-1} \mathbf{K}_e^{(0)},$$

最后，柔顺度的导数为

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = -\mathbf{U}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_e} \mathbf{U}_e = -p \rho_e^{p-1} \mathbf{U}_e^T \mathbf{K}_e^{(0)} \mathbf{U}_e.$$

3.4.2 节点密度表征

在单元密度模型的基础上，进一步考虑节点密度表征。设计变量取每个节点的密度 $\rho_i \in [0, 1]$ ($i = 1, \dots, N_n$)，采用一阶拉格朗日形函数 $\{\phi_i^{(e)}\}_{i \in \mathcal{N}(e)}$ 对密度场近似：

$$\rho_h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}(e)} \phi_i^{(e)}(\mathbf{x}) \rho_i, \quad \phi_i^{(e)}(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \sum_{i \in \mathcal{N}(e)} \phi_i^{(e)}(\mathbf{x}) = 1$$

因此若 $0 \leq \rho_i \leq 1$ ，则

$$0 \leq \rho_h(\mathbf{x}) \leq 1, \quad \frac{\partial \rho_h(\mathbf{x})}{\partial \rho_i} = \phi_i^{(e)}(\mathbf{x}) \geq 0$$

体积分数可写为

$$V(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho_h(\mathbf{x}) \, dx = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{e=1}^{N_c} \int_{\Omega_e} \rho_h(\mathbf{x}) \, dx \approx \frac{1}{|\Omega|} \sum_{e=1}^{N_c} \sum_{g=1}^{N_q} \rho(\mathbf{x}_{e,g}) \det \mathbf{J}_e(\mathbf{x}_{e,g}) \omega_g$$

由此，柔顺度最小化问题为

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\rho}} : c(\boldsymbol{\rho}) &= \mathbf{F}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \\ \text{subject to} : &\begin{cases} \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{F} \\ g_V(\boldsymbol{\rho}) = V(\boldsymbol{\rho}) - V_f \leq 0 \\ \rho(\mathbf{x}) \in [\rho_{\min}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

在经典 SIMP 模型 $E(\rho_h(\mathbf{x})) = \rho_h(\mathbf{x})^p E_0$ 插值下，单元刚度矩阵：

$$\mathbf{K}_e(\rho_h(\mathbf{x})) = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}(\rho_h(\mathbf{x})) \mathbf{B} \, d\mathbf{x} \approx \sum_{g=1}^{N_q} \mathbf{B}_g^T \mathbf{D}(\rho(\mathbf{x}_g)) \mathbf{B}_g \det \mathbf{J}_e(\mathbf{x}_{e,g}) \omega_g$$

体积分数约束函数的导数由链式法则并按单元分片求和：

$$\frac{\partial g_V(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} = \frac{\partial V(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{e \in I_i} \int_{\Omega_e} \phi_i^{(e)}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \approx \frac{1}{|\Omega|} \sum_{e \in I_i} \sum_{g=1}^{N_q} \phi_i^{(e)}(\mathbf{x}_{e,g}) \det \mathbf{J}_e(\mathbf{x}_{e,g}) \omega_g$$

先对杨氏模量求导

$$\frac{\partial E(\rho_h(\mathbf{x}))}{\partial \rho_i} = p \rho_h(\mathbf{x})^{p-1} E_0 \phi_i^{(e)}(\mathbf{x})$$

从而单元刚度矩阵的导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_i} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \left(\frac{\partial E(\rho_h(\mathbf{x}))}{\partial \rho_i} \frac{1}{E_0} \mathbf{D}_0 \right) \mathbf{B} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T (p \rho_h(\mathbf{x})^{p-1} \phi_i^{(e)}(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0) \mathbf{B} \, d\mathbf{x} \\ &\approx \sum_{g=1}^{N_q} p \rho_h(\mathbf{x}_{e,g})^{p-1} \phi_i^{(e)}(\mathbf{x}_{e,g}) \mathbf{B}_g^T \mathbf{D}_0 \mathbf{B}_g \det \mathbf{J}_e(\mathbf{x}_{e,g}) \omega_g \end{aligned}$$

最后，柔顺度的导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial \rho_i} &= - \sum_{e \in I_i} \mathbf{U}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_i} \mathbf{U}_e = - \sum_{e \in I_i} \mathbf{U}_e^T \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{D}(\rho_h(\mathbf{x}))}{\partial \rho_i} \mathbf{B} \right) \mathbf{U}_e \\ &\approx - \sum_{e \in I_i} \sum_{g=1}^{N_q} p \rho_h(\mathbf{x}_{e,g})^{p-1} \phi_i^{(e)}(\mathbf{x}_{e,g}) \mathbf{B}_g^T \mathbf{D}_0 \mathbf{B}_g \det \mathbf{J}_e(\mathbf{x}_{e,g}) \omega_g \end{aligned}$$

值得注意的是，与单元密度表征不同，节点密度表征下的被积函数包含了密度插值函数的高次幂项 $(\rho_h(\mathbf{x}))^p$ ，这意味着为了精确捕捉单元内部的刚度变化并避免数值积分误差，节点密度模型通常需要比同阶位移元更高的数值积分阶次。

3.4.3 柔顺机构设计问题

在上述两种密度表征下柔顺度最小化问题的基础上，本小节将优化目标从结构柔顺度推广到柔顺机构的输出位移。为突出基本思想，以下给出单元密度表征下的离散模型；节点密度表征的形式可完全类比第 3.4.2 节推导得到。设输出端在指定方向上的离散位移定义为

$$u_{\text{out}} = \mathbf{L}^\top \mathbf{U},$$

其中 \mathbf{L} 为输出选择向量，仅在输出自由度对应分量处取非零值，其余分量为零，用于从全局位移向量 \mathbf{U} 提取输出端在给定方向上的位移分量。则柔顺机构设计问题的离散优化模型可写为

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\rho}} : u_{\text{out}} &= \mathbf{L}^\top \mathbf{U} \\ \text{subject to} : &\begin{cases} \mathbf{K}_{\text{system}}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{U} = \mathbf{F}_{\text{in}} \\ g_V(\boldsymbol{\rho}) = V(\boldsymbol{\rho}) - V_f \leq 0 \\ \rho_e \in [\rho_{\min}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

其中， \mathbf{F}_{in} 为仅在输入自由度非零的物理载荷向量，总刚度矩阵 $\mathbf{K}_{\text{system}}$ 由结构刚度和输入/输出弹簧刚度组合而成，结构部分依然采用 SIMP 插值模型，

$$\mathbf{K}_{\text{system}}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{e=1}^{N_c} \rho_e^p \mathbf{K}_e^{(0)} + \mathbf{K}_{\text{spring}},$$

其中 $\mathbf{K}_{\text{spring}}$ 为由输入端与输出端弹簧刚度构造的刚度矩阵，仅在输入和输出自由度对应的对角线元素上分别叠加弹簧刚度 k_{in} 和 k_{out} ，且与设计变量 $\boldsymbol{\rho}$ 无关。

离散伴随向量 $\boldsymbol{\lambda}$ 满足

$$\mathbf{K}_{\text{system}} \boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{L},$$

且在状态方程与伴随方程均满足时，输出位移关于单元密度 ρ_e 的导数为

$$\frac{\partial u_{\text{out}}}{\partial \rho_e} = \boldsymbol{\lambda}^\top \frac{\partial \mathbf{K}_{\text{system}}}{\partial \rho_e} \mathbf{U},$$

由于弹簧刚度矩阵 $\mathbf{K}_{\text{spring}}$ 与设计变量无关，有

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{\text{system}}}{\partial \rho_e} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e},$$

而第 3.4.1 节中单元刚度矩阵的导数为

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} = p \rho_e^{p-1} \mathbf{K}_e^{(0)},$$

于是柔顺机构输出位移的灵敏度为：

$$\frac{\partial u_{\text{out}}}{\partial \rho_e} = \boldsymbol{\lambda}^\top \frac{\partial \mathbf{K}_{\text{system}}}{\partial \rho_e} \mathbf{U} = p \rho_e^{p-1} \boldsymbol{\lambda}_e^\top \mathbf{K}_e^{(0)} \mathbf{U}_e.$$

3.5 不同设计变量表征下的正则化策略

本节针对拓扑优化中常见的棋盘格现象及网格依赖性等数值不稳定性问题，在不同设计变量表征下，讨论基于过滤技术的正则化策略。

3.5.1 单元密度表征

在单元密度表征中，设计变量与有限元网格单元一一对应。定义卷积权重因子：

$$H_{es} = \max\{0, r_{\min} - \text{dist}(e, s)\},$$

式中， r_{\min} 为预设的过滤半径， $\text{dist}(e, s)$ 为单元 e 和 s 的中心距离。 H_{es} 本质上是第 2.6.1 节中连续卷积核函数 $w(r)$ 在离散网格上的数值实现。具体而言，当选取

$$w(r) = \max\{0, r_{\min} - r\},$$

并在单元几何中心处取样时，有

$$H_{es} \equiv w(\|\boldsymbol{x}_e - \boldsymbol{x}_s\|),$$

其中 \boldsymbol{x}_e 与 \boldsymbol{x}_s 分别表示单元 e 与单元 s 的几何中心坐标。由 $\max\{\cdot\}$ 的截断形式可知，过滤邻域外 ($\text{dist}(e, s) \geq r_{\min}$) 的单元权重自动为零，从而保证权重非负并使得过滤仅在局部邻域内生效，这是该方法在数值实现中的标准做法。

灵敏度过滤：该方法主要修正目标函数的灵敏度场，而不直接改变设计变量本身。其修正公式为：

$$\widetilde{\frac{\partial c}{\partial \rho_e}} = \frac{1}{\max\{\gamma, \rho_e\}} \frac{\sum_{s=1}^{N_c} H_{es} v_s \rho_s \frac{\partial c}{\partial \rho_s}}{\sum_{s=1}^{N_c} H_{es} v_s},$$

其中， v_s 分别为单元 s 的体积， γ 为防止奇异的小正数。

密度过滤：通过引入物理密度场 $\tilde{\rho}$ 与设计变量场 ρ 之间的平滑映射来控制最小特征尺寸。物理密度 $\tilde{\rho}_e$ 定义为邻域内设计变量的体积加权平均：

$$\tilde{\rho}_e = \frac{1}{\sum_{s=1}^{N_c} H_{es} v_s} \sum_{s=1}^{N_c} H_{es} v_s \rho_s,$$

在此表征下，有限元刚度矩阵的组装及柔顺度的计算均基于物理密度 $\tilde{\rho}$ 进行。因此，对于任意依赖于物理密度的函数 $f(\tilde{\rho})$ (如目标函数 c 或体积分数约束 g_V)，其关于

原始设计变量 ρ_e 的灵敏度必须利用链式法则求解：

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_e} = \sum_{j=1}^{N_c} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\rho}_j} \frac{\partial \tilde{\rho}_j}{\partial \rho_e} = v_e \sum_{j=1}^{N_c} H_{je} \left(\frac{1}{\sum_{s=1}^{N_c} H_{js} v_s} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\rho}_j} \right),$$

式中 $\frac{\partial f}{\partial \tilde{\rho}_j}$ 为函数关于物理密度的导数。

3.5.2 节点密度表征

在节点密度表征中，设计变量定义于有限元网格节点。定义节点 i 与节点 k 之间的卷积权重因子：

$$H_{ik} = \max\{0, r_{\min} - \text{dist}(i, k)\},$$

式中， $\text{dist}(i, k)$ 为节点 i 和 k 之间的欧几里得距离。

灵敏度过滤：节点表征下的灵敏度过滤修正公式为：

$$\widetilde{\frac{\partial c}{\partial \rho_i}} = \frac{v_i}{\max\{\gamma, \rho_i\} \sum_{k=1}^{N_n} H_{ik} v_k} \sum_{k=1}^{N_n} H_{ik} \rho_k \frac{1}{v_k} \frac{\partial c}{\partial \rho_k}.$$

密度过滤：引入物理节点密度场 $\tilde{\rho}$ 。物理密度 $\tilde{\rho}_i$ 定义：

$$\tilde{\rho}_i = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N_n} H_{ik} v_k} \sum_{k=1}^{N_n} H_{ik} v_k \rho_k,$$

其中 v_k 为节点 k 的控制体积。在数值实现中，通常采用集中质量策略计算，即将每个单元的体积均分给其顶点并累加。任意函数 $f(\tilde{\rho})$ 关于原始节点设计变量 ρ_k 的灵敏度为：

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_k} = \sum_{j=1}^{N_n} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\rho}_j} \frac{\partial \tilde{\rho}_j}{\partial \rho_k} = v_k \sum_{j=1}^{N_n} H_{jk} \left(\frac{1}{\sum_{l=1}^{N_n} H_{jl} v_l} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\rho}_j} \right),$$

值得注意的是，求和项 $\sum_{j=1}^{N_n}$ 表示节点 k 的设计变量变化通过卷积关系影响其邻域内所有节点 j 的物理密度，进而对全局目标函数产生贡献。

3.6 数值算例

3.6.1 算例设置与统一框架

为确保本章所有比较研究均在统一且公平的基准下进行，除特别说明外，全部数值算例均采用如下统一设置：

- 物理与本构：材料为均匀、各向同性的线弹性体，平面应力假设。

- 采用修正的 SIMP 模型，以避免低密度区域的刚度矩阵奇异性。杨氏模量 E 被定义为关于空间位置 \mathbf{x} 处相对密度场 $\rho(\mathbf{x})$ 的函数：

$$E(\rho(\mathbf{x})) = E_{\min} + (\rho(\mathbf{x}))^p(E_0 - E_{\min}),$$

其中， $E_0 = 1$ 为实体材料的杨氏模量， $E_{\min} = 10^{-9}$ 为孔洞区域设定的极小非零刚度下限，惩罚因子固定为 $p = 3$ 。

- 优化问题：主要优化问题为最小化柔顺度，并施加体积分数约束。
- 最小尺度控制：为获得网格无关且无病态的解，统一采用固定的小特征尺度控制。具体地，过滤算子采用基于单元邻域的加权平均形式，其过滤半径 r_{\min} 以物理长度为单位度量，除特别说明外统一取 $r_{\min} = 2.4$ 。该设置确保在不同网格密度下，过滤邻域覆盖的物理范围保持一致，从而实现真正的网格无关性。
- 优化算法：设计变量更新采用优化准则法，统一设置
 - 正向移动限制 $m = 0.2$ ；
 - 数值阻尼系数 $\eta = 0.5$ ；
 - 拉格朗日乘子采用二分法搜索，给定上界 $l_{\max} = 10^9$ 与容差 $\epsilon_{\text{bisect}} = 10^{-3}$ ；
 - 设计变量下界 $\rho_{\min} = 10^{-9}$ 。
- 收敛准则：当连续两次迭代中设计变量 ρ 的变化量满足

$$\|\boldsymbol{\rho}^{(n+1)} - \boldsymbol{\rho}^{(n)}\|_{\infty, \Omega} < 10^{-2},$$

此外，设置最大迭代步数 $n_{\max} = 500$ 作为安全上限。当迭代达到 n_{\max} 而上述条件仍未满足时，算法亦终止。若此时柔顺度与体积分数已在较长迭代区间内保持基本稳定，则本文将该情形记为“准收敛”。

- 单位体系：本章所有算例统一采用 mm/N/MPa（长度单位 mm，力单位 N，杨氏模量单位 MPa）。

值得注意的是，在有限元分析中，刚度矩阵的数值积分精度直接影响优化结果的可靠性。对于单元密度表征，由于设计变量在单元内为常数，刚度矩阵被积函数的多项式阶次相对较低，采用适当的阶数的标准高斯积分即可满足精度要求。而在节点密度表征下，密度场随空间变化，并通过 SIMP 插值进入材料刚度，刚度矩阵与灵敏度的被积函数中包含高次非线性项，需要提高数值积分精度以避免显著的积分误差。

本章统一采用如下积分设置，对于张量积单元（如二维四边形、三维六面体）上的拉格朗日元，单元密度表征采用 $q = k + 1$ 阶高斯积分公式，节点密度表征采用 $q = k + 2$ 阶；对于单纯形单元（如二维三角形、三维四面体）上的拉格朗日元，则不再用积分点数表示，而是按代数精度选择积分公式，单元密度表征选用代数精度不低于 $2k$ 阶的高斯积分公式，节点密度表征选用不低于 $2k + 2$ 阶的积分公式。

3.6.2 基准比较：数值病态与最小尺度控制

算例 3.1：二维 MBB 梁

本节首先采用二维 MBB (Messerschmitt-Bolkow-Blohm) 梁作为基准算例，以对比有无最小尺度控制下的优化结果，并为后续研究建立参照。

MBB 梁是拓扑优化的经典基准算例 [15]，其完整设计域如图 3.2(a) 所示，尺寸为 $120 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ 。鉴于结构与载荷关于竖向中线对称，为提高计算效率，采用右半域作为计算域，如图 3.2(b) 所示，半域尺寸为 $60 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ ，左侧边施加对称约束 ($u_x = 0$)，右下角节点施加滑移支座 ($u_y = 0$)，左上角节点处施加竖直向下的集中载荷 $P = 1 \text{ N}$ ，其余边施加自由边界（即齐次诺伊曼）条件。

材料的杨氏模量 $E = 1 \text{ MPa}$ ，泊松比 $\nu = 0.3$ ，优化问题定义为：在满足体积分数约束 $V_f = 0.5$ 的条件下，寻找材料的最优分布以最小化结构柔顺度（即最大化刚度）。

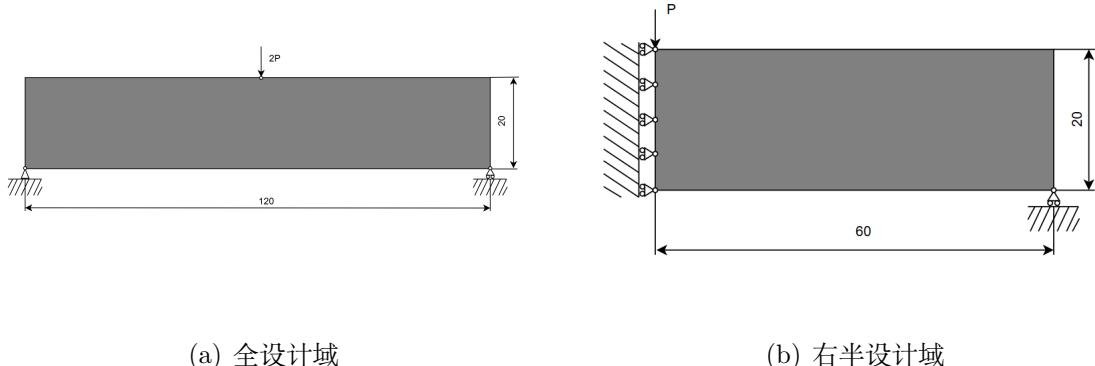


图 3.2 二维 MBB 梁设计域。

为突出数值病态与最小特征尺度控制的影响，本节基准比较统一采用单分辨率的位移型有限元离散，分析单元取 $k = 1$ 阶四边形单元，采用 $q = 2$ 阶高斯积分公式，设计变量取每个单元上的常值密度 ρ_e 。在此基础上，考虑三种过滤策略：不施加最小特征尺度控制（无过滤）、灵敏度过滤与密度过滤。为保证物理尺度的一致性，灵敏度过滤与密度过滤的过滤半径均取 $r_{\min} = 2.4$ ，并在三种不同网格剖分下进行对比，三组网格剖分分别为 60×20 、 90×30 与 150×50 ，对应位移自由度数

$u_{\text{dof}} = \{2562, 5642, 15402\}$, 设计变量自由度数 $\rho_{\text{dof}} = \{1200, 2700, 7500\}$ 。上述对比结果汇总于表 3.1。

表 3.1 二维 MBB 梁在不同网格剖分与过滤策略下的优化结果

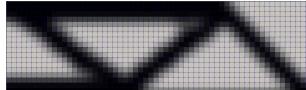
| 网格剖分 | 无最小特征尺度 | 灵敏度过滤 | 密度过滤 |
|-----------------|--|---|--|
| 60×20 |  |  |  |
| | $n = 53, c = 203.0660$ | $n = 106, c = 216.8137$ | $n = 144, c = 233.7146$ |
| 90×30 |  |  |  |
| | $n = 34, c = 201.0279$ | $n = 95, c = 217.9426$ | $n = 265, c = 234.4671$ |
| 150×50 |  |  |  |
| | $n = 48, c = 202.8103$ | $n = 95, c = 219.7274$ | $n = 362, c = 235.7332$ |

表 3.1 第 2 列给出了在未施加最小特征尺度控制时, 不同网格剖分下的优化结果。以粗网格 60×20 为例, 位移自由度 $u_{\text{dof}} = 2562$, 设计变量自由度 $\rho_{\text{dof}} = 1200$, 优化在 53 步即可收敛, 柔顺度值约为 $c \approx 203$ 。然而, 结构内部尤其在荷载作用区域与右端支承附近出现了大面积规则的棋盘格图案, 相邻单元的密度在接近 0 与接近 1 之间交替振荡, 整体拓扑呈现出明显的网格振荡, 主承载路径难以辨认, 属于典型的棋盘格型数值病态。随着网格细化到 90×30 乃至 150×50 , 位移和设计变量自由度显著增加, 但迭代步数和柔顺度值大致保持在同一量级, 并未出现性能明显改善的趋势。与此同时, 病态特征不仅没有消失, 反而在细网格下演化为大量一至两单元宽度的细薄杆件与分枝结构, 局部拓扑极其细碎和复杂, 不同网格分辨率下腹板走向和承载路径差异显著, 粗网格得到的拓扑在细网格上常演化为截然不同的布局, 表现出强烈的网格依赖性。

相比之下, 施加最小特征尺度控制后的结果(表 3.1 第 3、4 列)在几何特征和网格依赖性方面均有显著改善。对三个网格层次, 无论采用灵敏度过滤还是密度过滤, 优化得到的拓扑结构均基本消除了棋盘格和局部高频振荡, 粗、中、细网格之间的主承载路径保持较好的一致性, 各主要构件的宽度稳定在由过滤半径 r_{\min} 决定的尺度附近, 灰度区主要局限于构件边缘的狭窄过渡带。与未过滤情形相比, 过滤操作引入了额外的平滑约束, 柔顺度值整体略有上升, 迭代步数普遍增加, 但换来了物理上更可行、几何上更规整的无病态设计。

需要指出的是，在相同过滤半径下，密度过滤（表 3.1 第 4 列）对密度场本身进行平滑，所得结构相对更为保守，边界略显模糊；灵敏度过滤则形成更为清晰的 0–1 型拓扑。在二维 MBB 梁算例所采用的参数配置下，灵敏度过滤在几何清晰度与数值稳定性之间取得了较为满意的折中。基于此，为简化后续比较，本章后续算例如无特别说明均采用灵敏度过滤作为统一的最小特征尺度控制手段，而将密度过滤结果仅作为对照与补充。

3.6.3 核心对比：表征方法与单元阶次

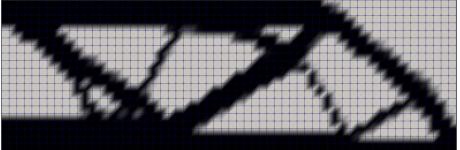
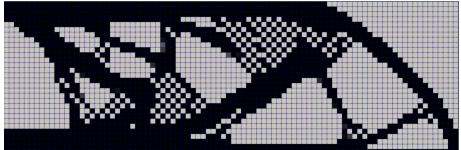
第 3.6.2 节通过二维 MBB 梁基准算例说明了在单元密度表征下，若缺乏显式的最小特征尺度控制，则容易产生棋盘格与网格依赖等数值病态；而在施加统一过滤半径的灵敏度过滤与密度过滤后，上述病态现象可以得到显著缓解，并可获得几何清晰、对网格划分不敏感的拓扑结构。基于这一认识，本节在前述 MBB 梁算例的基础上，系统比较不同设计变量表征方式与不同单元阶次对优化结果的影响，物理与优化参数均沿用前文的统一设置。

为突出设计变量表征方式本身的作用，表 3.2 给出了在未施加最小特征尺度控制时，采用四边形单元进行位移分析下，不同网格剖分对应的单元密度与节点密度两种表征方式的优化结果。积分规则按照第 3.6.1 节中的统一设置选取，单元密度表征采用 $q = k + 1$ 阶高斯积分公式，而节点密度表征采用 $q = k + 2$ 高斯积分公式。在 60×20 、 90×30 与 150×50 三组网格下，单元密度表征的设计变量自由度数分别为 $\rho_{\text{dof}}^{\text{elem}} = \{1200, 2700, 7500\}$ ，而节点密度表征下设计变量自由度数分别为 $\rho_{\text{dof}}^{\text{node}} = \{1281, 2821, 7701\}$ 。

与作为基准的单元密度方案（表 3.2 左列）相比，未过滤的节点密度方案（表 3.2 右列）表现出显著差异。得益于四节点双线性形函数的插值特性，节点密度场天然具备 C^0 连续性，这使得优化结果基本消除了棋盘格等高频振荡病态。沿主承载路径的密度分布呈连续条带状，灰度主要集中在构件边缘的过渡带，视觉上更为平滑清晰，验证了节点表征的“天然平滑”机制对数值不稳定性的抑制作用。

然而，节点密度方案并未完全消除网格依赖性：在不同网格分辨率下，腹板数量、走向以及局部细杆件的形态仍存在可见差异，细网格下依然会出现一到两单元宽度的细薄构件与分枝结构。从数值角度看，三组网格中两种表征所得的柔顺度水平大致相当，节点密度并未表现出稳定而显著的目标值优势，但迭代代价却明显增加：单元密度方案通常在约 $30 \sim 50$ 步内即可满足收敛判据，而节点密度方案则往往需要约 $200 \sim 400$ 步，其迭代次数约为前者的 $6 \sim 8$ 倍。这反映了节点设计变量通过形函数在网格上的强耦合，以及连续性约束对快速形成陡峭 0–1 阶跃的阻碍。综合来看，仅将设计变量由单元转移至节点、依赖节点密度的 C^0 连续性，虽然可以在一定程度上抑制棋盘格并改善拓扑，但既不能根除网格依赖，也会显著提高达到给定收敛精度所需的计算成本。

表 3.2 二维 MBB 梁在不同网格剖分与密度表征下的优化结果（未过滤）

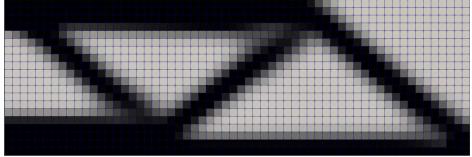
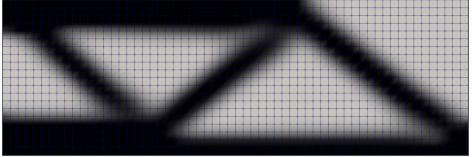
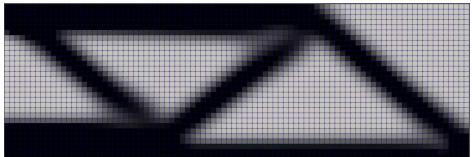
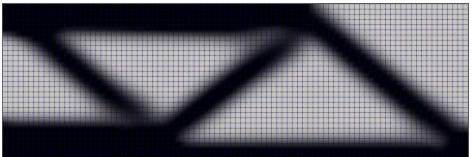
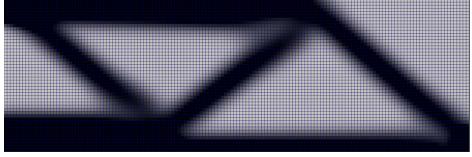
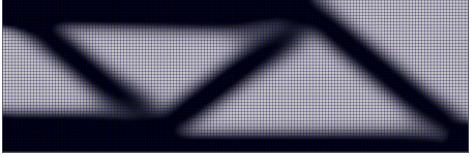
| 网格剖分 | 单元密度 | 节点密度 |
|-----------------|--|--|
| 60×20 |  $n = 53, c = 203.0660$ |  $n = 302, c = 204.0256$ |
| 90×30 |  $n = 34, c = 201.0279$ |  $n = 216, c = 197.3244$ |
| 150×50 |  $n = 48, c = 202.8103$ |  $n = 369, c = 192.3462$ |

鉴于未过滤情形下两种密度表征方式均存在不同程度的网格依赖性，为在统一且物理可制造的框架下进行公平对比，本节进一步考察施加灵敏度过滤后的优化表现。表 3.3 给出了在统一过滤半径 $r_{\min} = 2.4$ 下，不同网格剖分对应的单元密度与节点密度两种表征方式的优化结果。

与作为基准的单元密度方案（表 3.3 左列）相比，施加同样过滤条件的节点密度方案（表 3.3 右列）在最终拓扑形态上仅表现出细微差异。三种网格分辨率下，引入统一半径的灵敏度过滤同样有效地消除了节点密度表征下的棋盘格与网格依赖性。结合第 3.6.2 节中对单元密度方案的观察可以看出，一旦采用统一物理尺度的灵敏度过滤，显式的最小特征尺度控制在消除数值病态和缓解网格依赖方面起到了主导作用，而设计变量取单元密度还是节点密度对最终拓扑的影响已经相对次要。从迭代行为的角度看，这一点同样得到了印证。在未施加过滤时，单元密度方案相较于节点密度方案，迭代次数相差接近一个数量级；施加灵敏度过滤后，两种密度表征在三个网格上的迭代次数均集中在约一百步左右，差异已经不再显著。这一前后对比说明：在本算例下，迭代效率和数值稳定性的主导因素并非设计变量取单元还是节点，而是是否施加了统一的最小特征尺度控制。

综上，从网格加密的角度看，本节的结果表明：在缺乏显式最小特征尺度控制时，单元密度方案在各个网格上均出现严重的棋盘格和显著的网格依赖；节点密度

表 3.3 二维 MBB 梁在不同网格剖分与密度表征下的优化结果（灵敏度过滤）

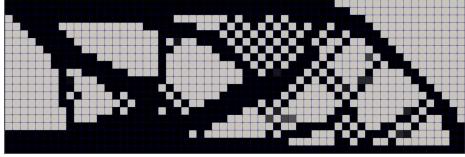
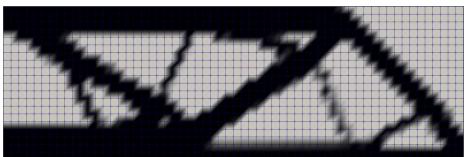
| 网格剖分 | 单元密度 | 节点密度 |
|-----------------|--|--|
| 60×20 |  $n = 106, c = 216.8137$ |  $n = 140, c = 225.3707$ |
| 90×30 |  $n = 95, c = 217.9426$ |  $n = 108, c = 221.4765$ |
| 150×50 |  $n = 95, c = 219.7274$ |  $n = 112, c = 220.8803$ |

表征虽然凭借 C^0 连续性在一定程度上抑制了棋盘格，但仍无法消除内部主承载路径对离散尺度的敏感性，并且迭代代价明显增大。引入统一物理半径的灵敏度过滤后，两种密度表征在不同网格上的拓扑形态、柔顺度水平和收敛步数均趋于一致，数值病态得到根本缓解，说明显式长度尺度正则化在获得网格无关、几何清晰的拓扑结构方面起到了决定性作用，而设计变量取单元密度还是节点密度已退居次要地位。

在前文比较了不同网格剖分下的表现之后，本小节将网格统一固定为 60×20 的粗网格，首先在不施加过滤的条件下，仅改变单元阶次 k ，考察单元密度与节点密度两种表征在不同单元阶次下的差异，在保持设计自由度不变的前提下（单元密度方案中 $\rho_{\text{dof}} = 1200$ ，节点密度方案中 $\rho_{\text{dof}} = 1281$ ），随着 k 的提高，位移自由度从 $u_{\text{dof}} = 2562$ 增加到 $u_{\text{dof}} = 9922$ 以及 $u_{\text{dof}} = 39042$ ，如表 3.4 所示。

表 3.4 的第一行 ($k = 1$) 对应前述基准算例在未过滤条件下的结果，此处作为参照用以刻画单元阶次提高时的变化趋势。由表可见，提高单元阶次在两种密度表征下都呈现出相似的数值趋势：柔顺度随 k 的增加而单调升高，单元密度方案中由 $c \approx 203$ 增加到 $c \approx 213$ 和 $c \approx 219$ ，节点密度方案中由 $c \approx 204$ 增加到 $c \approx 212$ 和 $c \approx 216$ 。这种“柔顺度变大”的现象并不意味着结构性能恶化，而是高阶有限元在一定程度上抑制了由离散误差、棋盘格及细微结构引起的“虚假刚度”，使计算结果更接近物理合理的柔顺度水平，这是两种密度表征在提高阶次时的共性。

表 3.4 二维 MBB 梁在不同四边形单元阶次与密度表征下的优化结果（无过滤）

| 单元阶次 | 单元密度 | 节点密度 |
|---------|--|--|
| $k = 1$ |  $n = 53, c = 203.0660$ |  $n = 302, c = 204.0256$ |
| $k = 2$ |  $n = 36, c = 213.1796$ |  $n = 500^+, c = 212.1727$ |
| $k = 4$ |  $n = 41, c = 218.6621$ |  $n = 500^+, c = 216.0374$ |

在此基础上，两种表征在拓扑形态上的表现有所不同。对单元密度表征而言， $k = 1$ 时棋盘格最为显著，大量一单元尺度的细碎条块沿结构内部分布，提高至 $k = 2$ 后，棋盘格明显减弱，密度沿构件方向被拉伸成较为连续的条带，局部结构明显平滑，继续提升到 $k = 4$ 时，所得拓扑与 $k = 2$ 已非常接近，局部振荡难以进一步显著减少，说明在缺乏显式最小特征尺度控制的前提下，高阶形函数对抑制棋盘格的作用在 $k \approx 2$ 左右基本趋于饱和。

对节点密度表征而言：由于密度在节点上通过四节点双线性形函数进行 C^0 连续插值，在 $k = 1$ 时棋盘格现象已基本消失，三种单元阶次下得到的宏观拓扑框架几乎完全一致，高阶单元仅在主承载杆件和边界附近带来轻微的平滑或细化。此时，提高阶次的主要作用同样是削弱虚假刚度，而非改变拓扑结构。但在迭代行为上，节点密度方案表现出明显的不利影响：迭代步数由 $k = 1$ 的 302 步显著增加，到 $k = 2$ 与 $k = 4$ 均达到最大迭代步数 $n_{\max} = 500$ 仍未满足收敛判据。图 3.2 给出了 $k = 4$ 情形下两种密度表征的迭代历程对比：单元密度方案（图 3.3(a)）在约 30 步左右即可使柔顺度和体积分数稳定，并很快满足设计变量变化量的收敛阈值，而节点密度方案（图 3.3(b)）在前若干步内同样迅速降低柔顺度，之后长达数百步仅在极窄区间内小幅震荡，体积分数始终维持在目标值附近，但由于 0–1 过渡带内存在局部微调，设计变量的最大变化量始终略高于阈值，最终在迭代步数达到 $n_{\max} = 500$ 时由

安全上限触发终止，表现出典型的“准收敛”特征。

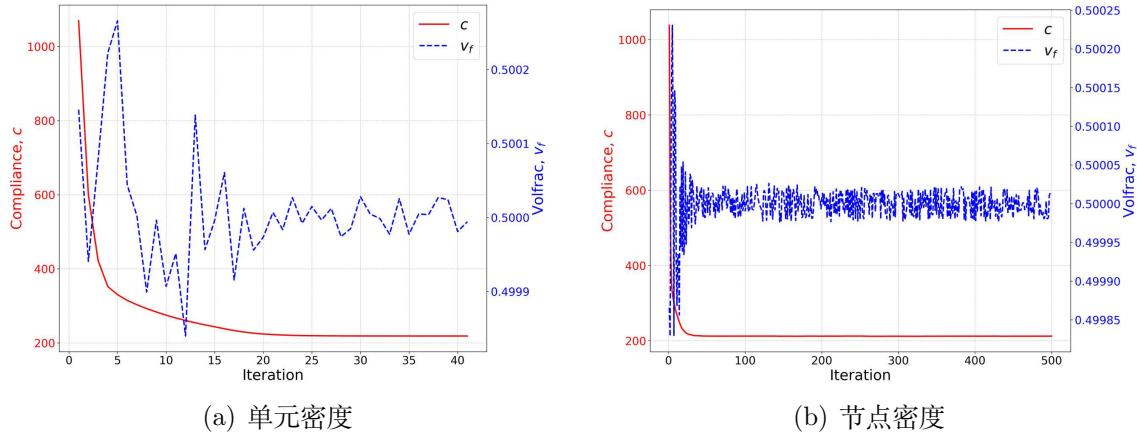


图 3.3 $k = 4$ 下两种密度表征的迭代历程对比

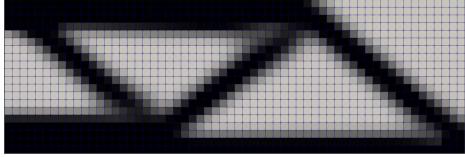
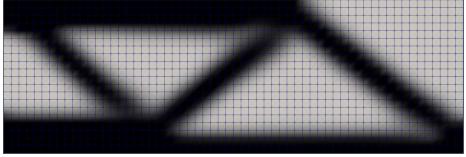
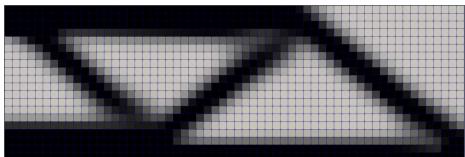
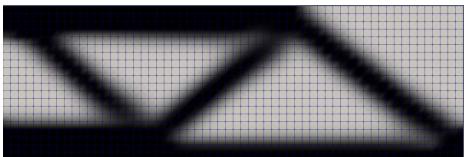
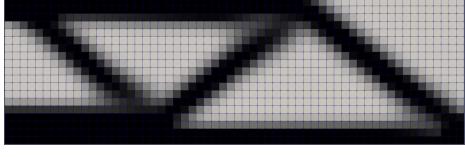
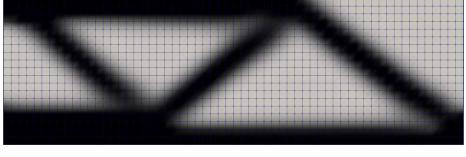
上述无过滤算例表明，仅通过提高单元阶次并不能从根本上消除数值病态，在节点密度表征下还会诱发明显的“准收敛”行为。为进一步考察在最小特征尺度统一控制时单元阶次的作用，本节在表 3.4 的基础上，引入过滤半径为 $r_{\min} = 2.4$ 的灵敏度过滤，给出不同单元阶次下单元密度与节点密度两种表征的优化结果，如表 3.5 所示。

表 3.5 的第一行 ($k = 1$) 对应前述基准算例在灵敏度过滤条件下的结果，此处作为参照用以刻画单元阶次提高时的变化趋势。由表可见，在引入统一半径的灵敏度过滤后，不同单元阶次与两种密度表征下的优化拓扑在形态上已高度一致。无论取单元密度还是节点密度， $k = 1, 2, 4$ 情形均收敛到光滑、无棋盘格的结构框架，主承载路径基本重合，两者主要差异仅在于节点密度方案的边界轮廓和杆端过渡略为平滑一些，而整体构型基本一致，而整体构型几乎相同，说明此时由过滤半径 r_{\min} 决定的最小特征尺度已在很大程度上主导了最终拓扑。

在性能与迭代行为上，随着 k 从 1 提高到 2、4，两种密度表征下的柔顺度仅出现幅度较小的变化，迭代步数也稳定在约一百步左右，高阶节点密度方案在无过滤时出现的 500^+ 步“准收敛”现象消失。就本算例和当前参数设置而言，这表明：在设计自由度和过滤半径固定的前提下，提高四边形单元阶次并未带来显著的拓扑改进或目标值收益，高阶形函数的精度优势难以得到充分发挥，单元阶次和密度表征对整体优化效果已退居次要地位。

为检验上述结论在其他单元族上的适用性，进一步考虑等面积剖分的三角形网格，除网格类型与积分阶次外，其余物理参数、优化设置以及灵敏度过滤半径均与前文保持一致。积分规则按照第 3.6.1 节中的统一设置选取：在单元密度表征下，统一采用代数精度不低于 $2k$ 阶的高斯积分公式，在节点密度表征下，不低于 $2k + 2$ 阶。表 3.6 给出了在施加灵敏度过滤时，不同单元阶次下单元密度与节点密度两种

表 3.5 二维 MBB 梁在不同四边形单元阶次与密度表征下的优化结果（灵敏度过滤）

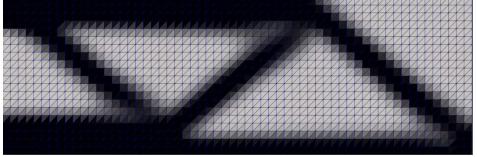
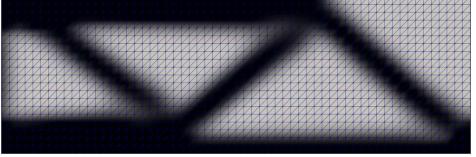
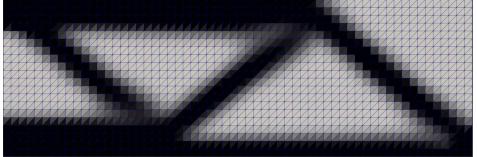
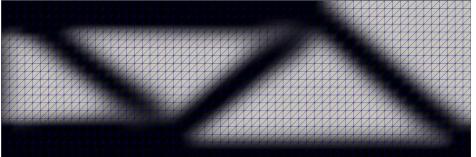
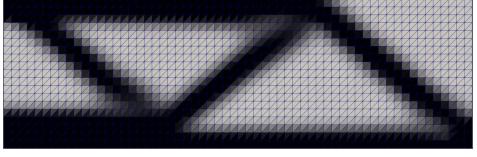
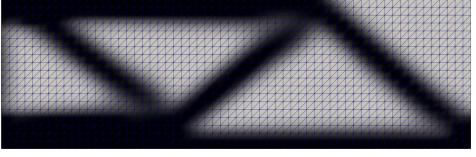
| 单元阶次 | 单元密度 | 节点密度 |
|---------|--|---|
| $k = 1$ |  |  |
| $k = 2$ |  |  |
| $k = 4$ |  |  |

表征的优化结果。

从表 3.6 可以看到，在三角形单元上，单元密度与节点密度在统一施加灵敏度过滤后，同样收敛到无棋盘格、拓扑结构高度一致的解，不同单元阶次 k 之间的拓扑差异很小，主要表现为杆件略有加粗或局部边界略为平滑，主承载路径和整体构型基本保持不变。相应的迭代步数也都集中在约百步量级，未再无过滤情形下的“准收敛”等异常行为。这与前文四边形单元上的观察结论一致，表明在统一的最小特征尺度控制下，“表征方法与单元阶次”的主要规律对不同单元族均具有良好的鲁棒性。

需要注意的是，在节点密度表征下，左侧固定边界附近形成了一条饱和的高密度带，视觉上呈现为一条“黑色边界”。这可以理解为节点密度离散与体积分数度量方式共同作用的自然结果：边界节点仅被较少单元共享，在体积分数约束中的有效权重较小，在相同体积分数限制下将其取为 1 所“消耗”的体积分数更低，因此优化过程倾向于优先填满这些边界节点，再叠加灵敏度过滤的平滑效应，高密度沿边界连续传播，最终形成稳定的边界高密度带。若在实际应用中希望进一步消除这种边界偏好，可通过重新设计体积分数的离散形式来统一各设计变量的体积权重（例如对节点密度采用归一化权重），这类修正可以减弱边界高密度带，但不会改变本节关于拓扑形态与收敛特性的整体结论，本文不再展开。

表 3.6 二维 MBB 梁在不同三角形单元阶次与密度表征下的优化结果（灵敏度过滤）

| 单元阶次 | 单元密度 | 节点密度 |
|---------|--|---|
| $k = 1$ |  |  $n = 101, c = 212.2910$ |
| $k = 2$ |  |  $n = 98, c = 224.2097$ |
| $k = 4$ |  |  $n = 99, c = 228.8028$ |

3.6.4 算例推广：不同边界载荷

3.6.5 算例推广：三维问题

3.6.6 算例推广：柔顺机构设计

第 4 章 基于高阶有限元的多分辨率高精度拓扑优化

4.1 引言

4.2 设计模型与分析模型

结构拓扑优化的根本任务是寻找结构的最优材料分布，而有限元分析则是评估该候选结构在给定物理工况下性能（如刚度、强度、应力）的手段。传统单元密度法往往将材料分布的参数化模型（设计模型）与偏微分方程的离散与求解模型（分析模型）混为一谈，使得两者在分辨率与功能上的区别被掩盖。若从数学建模与数值实现的角度加以区分，可以清晰地看到该过程实际上包含两个本质不同但紧密耦合的子模型：其一用于定义并生成可行的密度场，服务于优化变量的表达与正则化；其二用于在给定密度场下求解状态方程并计算目标与约束，服务于结构响应的高精度评估。

4.2.1 模型的定义与二分性

在连续层面，变密度拓扑优化的一般形式及其函数空间设定已在第 2.2.2 节中给出。本文在本章中沿用相同的符号约定：以标量密度场 $\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$ 描述结构中的材料分布，以位移场 $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ 描述结构在外载与边界条件作用下的力学响应。

需要强调的是，在连续模型中， ρ 与 \mathbf{u} 并非并列出现的未知量，而是通过材料插值模型与线弹性状态方程形成一条明确的映射关系：密度场 ρ 决定等效材料刚度，从而确定状态方程的算子形式；位移场 \mathbf{u} 则作为该边值问题的解，用于评估结构在给定材料分布下的物理响应。换言之， ρ 通过“定义材料”，而 \mathbf{u} 通过“响应材料”，二者在优化问题中承担着不同的功能角色。基于上述认识，在变密度拓扑优化语境下，可以将整体计算过程中的两个子模型概括为：

- 设计模型：给出可行密度场的参数化表示和优化变量的定义方式，并通过插值、过滤与投影等机制生成用于分析的物理密度场；
- 分析模型：在给定密度场（物理密度场）下，对线弹性等状态方程进行离散与求解，以评估柔顺度、应力等目标与约束函数。

在离散层面，设计模型通常由一组有限维设计变量向量 \mathbf{d} 参数化，例如单元密度、节点密度或子单元密度等。为强调“设计自由度”与“用于分析的密度场”之间的区别，可将密度生成过程抽象为一条映射链：先由 \mathbf{d} 通过插值给出连续密度近似 $\rho_h(\mathbf{x}; \mathbf{d})$ ，再经由过滤/投影等正则化算子得到物理密度场 $\rho_{\text{phys}}(\mathbf{x})$ ，并最终进入

有限元组装形成刚度矩阵 $\mathbf{K}(\rho_{\text{phys}})$ 。相应地，分析模型在给定 ρ_{phys} 后求解离散平衡方程

$$\mathbf{K}(\rho_{\text{phys}})\mathbf{U} = \mathbf{F},$$

并据此计算目标与约束以及灵敏度信息。

从数值分析与工程设计的角度出发，在变密度方法中，设计模型与分析模型在分辨率需求上存在天然的差异：

- 为获得边界清晰、细节丰富且具有可控最小特征尺度的结构形态，设计模型倾向于采用更高的空间分辨率，即更密集的设计自由度，以便刻画复杂的材料分布与细小构件。需要指出的是，结构的“有效最小特征尺度”通常主要由过滤/投影等正则化参数主导，而设计网格分辨率决定可表达细节的上限；
- 为控制计算成本并避免状态方程求解过度精细，分析模型通常在保证足够精度的前提下选取相对较粗的网格，或利用高阶有限元在较粗网格上提升近似能力，从而以更低自由度完成高精度响应评估。

理想情况下，设计模型与分析模型应在概念和实现上彼此独立：设计网格用于承载设计变量并通过过滤、投影等机制生成连续密度场；分析网格及其有限元空间则专注于状态方程的高精度求解。二者的解耦不仅可以更充分地发挥高阶有限元的逼近优势，而且为后续构造“高阶分析、低成本 + 高分辨率设计、细致控制”的多分辨率拓扑优化框架奠定基础。进一步地，这也自然导向在离散层面引入相互独立的设计网格与分析网格，并在必要时引入密度积分网格以保证刚度组装与约束评估的一致性。

4.2.2 单分辨率框架的局限与精度错配

在传统 STOP 框架中，普遍采用“基于单元的设计变量”策略：每个有限元单元都被赋予一个唯一的设计变量（密度值），即设计模型与分析模型在同一张网格上完全重合。这一做法在实现上简单直接，但也意味着一旦选定分析网格的尺寸与单元类型，设计模型的分辨率便被刚性地锁定，二者之间不存在任何独立调节的自由度。

这种强耦合在概念上模糊了两个模型之间的本质区别，更重要的是，在数值上造成了显著的“精度错配”。从分析角度看，随着有限元阶次 k 的提高，高阶有限元可以在较粗网格上获得更高的求解精度；但从设计角度看，如果设计变量仍然仅在分析单元上定义（即“一单元一设计变量”），那么设计模型的表达能力（分辨率）根本不会随 k 的增加而改善。高阶有限元所带来的精细物理场分布，只是对同一幅“像素化”几何的更精确响应计算，而对拓扑结构本身的边界清晰度与可表达的细部

特征几乎没有收益。从结构形态表达与优化效率的角度看，这种情形往往体现为计算资源的低效利用。

为说明 STOP 框架中的“精度错配”现象，本文沿用第 3.6.2 节中定义的对称二维 MBB 梁算例，作为对比分析的基准模型。在 STOP 中，设计变量与分析单元一一对应，因此设计变量自由度数为 $\rho_{\text{dof}} = 300$ ，在相同的分析网格（ 30×10 的四边形网格）下，将分析模型的有限元阶次从 $k = 2$ 提升到 $k = 4$ ，总自由度数量由 $u_{\text{dof}} = 2562$ 增加到 $u_{\text{dof}} = 9922$ ，计算规模约增加 4 倍。然而，如图 4.1 所示，对比 $k = 2$ 与 $k = 4$ 的优化结果可以发现：当设计变量仍与分析单元一一对应时，所得拓扑结构在主承载路径、杆件尺度及边界位置等方面几乎一致，差异主要体现在局部灰度过渡带的平滑性上。换言之，单纯提高分析阶次主要是在更精确地分析同一幅“像素化几何”，并未从根本上提升结构形态的表达能力。

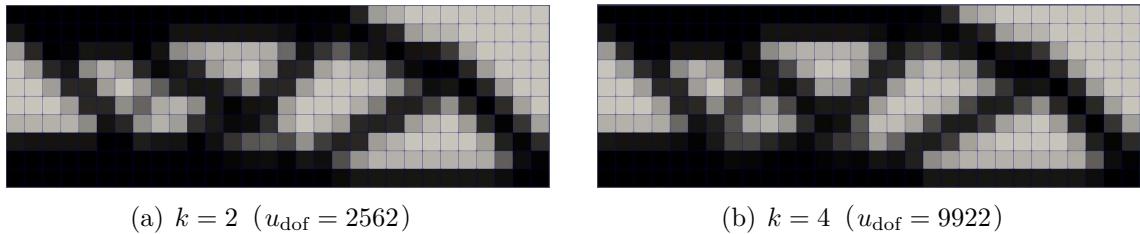


图 4.1 STOP 下对称二维 MBB 梁在 $\rho_{\text{dof}} = 300$ 时不同有限元阶次的优化结果对比。

进一步地，若将上述错配情形反转，即在保持分析网格不变（甚至分析阶次较低）的同时显著提高设计分辨率，同样会引发新的数值问题。以每个分析单元内采用 4×4 的子密度划分为例，此时设计自由度增至 $\rho_{\text{dof}} = 4800$ ，而位移自由度仍为 $u_{\text{dof}} = 2562$ ($k = 2$)。当分析模型对高频密度变化存在欠解析时，优化迭代更易出现密度振荡、条纹状伪结构或收敛不稳定等现象（见图 4.2）。

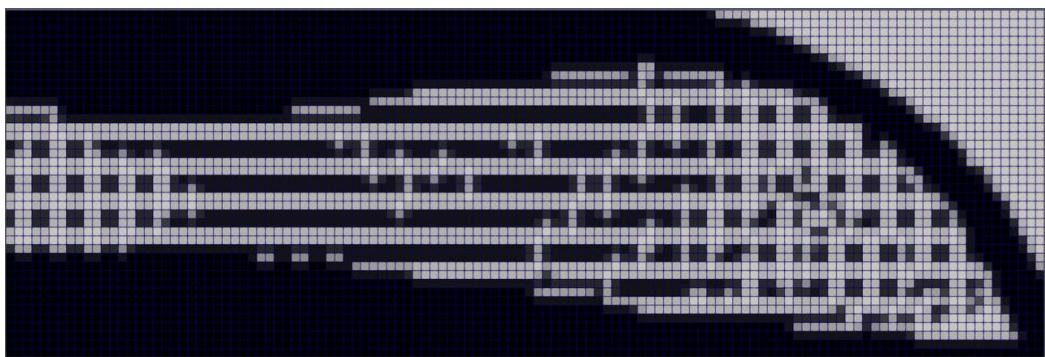


图 4.2 分析自由度固定 ($u_{\text{dof}} = 2562$) 时提高设计分辨率 (4×4 子密度) 的优化结构示例。

上述两类对偶现象表明：单纯追求“高精度分析”或“高分辨率设计”都不能自动保证获得高质量拓扑结构。为充分发挥高阶有限元在状态求解方面的优势，同

时在可控计算代价下获得边界清晰、细节可靠且无伪结构的优化结果，有必要打破设计模型与分析模型的刚性耦合，并引入能够协调“设计—分析—积分”三个层面分辨率的多分辨率拓扑优化框架。这也正是后续 MTOP 范式需要建立分辨率匹配机制的根本原因。

4.3 多分辨率拓扑优化计算框架

为实现拓扑优化中“设计分辨率—分析分辨率”的解耦，并在粗网格高阶分析下保持数值精度，本章采用多分辨率离散范式：引入位移有限元网格、设计变量网格与密度积分网格三套相互独立但逻辑耦合的离散层级，以在不加密位移网格的前提下获得更高分辨率的材料分布表征。该三层离散思想与 MTOP 框架一致 [13]，而在高阶有限元分析中，传统“单元常密度 = 设计变量”的做法难以随阶次提升而同步提高结构描述分辨率，因此更需要采用设计变量与有限元分析网格分离的多分辨率策略 [12]。

4.3.1 多分辨率空间离散策略

为了打破传统方法中几何分辨率受限于分析单元尺寸的桎梏，本章引入了三套相互独立但逻辑关联的离散网格系统，以在数学上实现设计与分析的解耦，并为粗网格高阶分析下的准确数值计算提供支撑 [13]。首先是位移有限元网格 \mathcal{T}_h ，作为求解线弹性平衡方程

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F}$$

的分析模型。在本章研究中， \mathcal{T}_h 由较粗的拉格朗日单元（阶次 $k \geq 1$ ）构成，旨在在自由度规模可控的前提下，提高位移场、应变能及其相关响应量的近似精度，从而降低由粗网格离散带来的分析误差。

与分析模型相对应的是用于优化迭代的设计变量网格 \mathcal{T}_d 。该网格由高密度的节点或中心点组成，每个节点关联一个设计变量 $d_i \in [0, 1]$ 。 \mathcal{T}_d 的分辨率显著高于 \mathcal{T}_h ，且二者在空间上相互独立；这种离散策略允许优化器在相对粗糙的分析网格背景下，探索超越分析单元尺度的精细拓扑结构，从而实现设计空间对分析空间的解耦，并提升结构几何表达能力。

然而，当粗位移单元内部的材料分布由高分辨率设计变量控制时，材料场往往呈现明显的空间非均匀性。若仍沿用“单元内密度常值”的刚度评估方式，将难以准确反映位移单元内部材料分布对刚度的局部贡献，从而引入欠解析并影响优化迭代的稳定性。为此，本章进一步引入密度积分网格 \mathcal{T}_ρ 作为连接高分辨率设计与低分辨率分析的数值桥梁：对每个位移单元 Ω_e ，将其进一步细分为 N_i 个密度子单元，并在子单元层面对刚度贡献进行数值积分与累加，以确保在非均匀密度场下刚度评

估具有足够的准确性与一致性。

值得注意的是，通常取设计变量网格 \mathcal{T}_d 与密度积分网格 \mathcal{T}_ρ 的空间分辨率显著高于位移有限元网格 \mathcal{T}_h ，从而在“高分辨率设计—粗网格高阶分析”的框架下实现几何表达能力与数值求解精度的兼顾，并为后续多分辨率拓扑优化问题的统一列式与实现奠定基础。为直观说明三网格体系的分工与分辨率差异，图 4.3 给出了示意图。图 4.3(a) 表示位移网格 \mathcal{T}_h 上的一个双二次四边形位移单元 Q_2 ；图 4.3(b) 表示位移单元内部引入的密度积分网格 \mathcal{T}_ρ ，即将单元细分为若干密度子单元以进行刚度的数值积分；图 4.3(c) 表示设计变量网格 \mathcal{T}_d ，在更高分辨率上对设计变量 \mathbf{d} 进行参数化。设计变量通过映射关系 $\rho = f(\mathbf{d})$ 赋值到 \mathcal{T}_ρ 上的子单元物理密度，随后由 \mathcal{T}_ρ 上的积分结果组装得到位移网格 \mathcal{T}_h 上的刚度矩阵 $K(\rho)$ ，用于后续平衡方程的求解。为便于示意，图中取 \mathcal{T}_d 与 \mathcal{T}_ρ 在单元内具有相同的细分密度；一般情形下二者可独立选取。

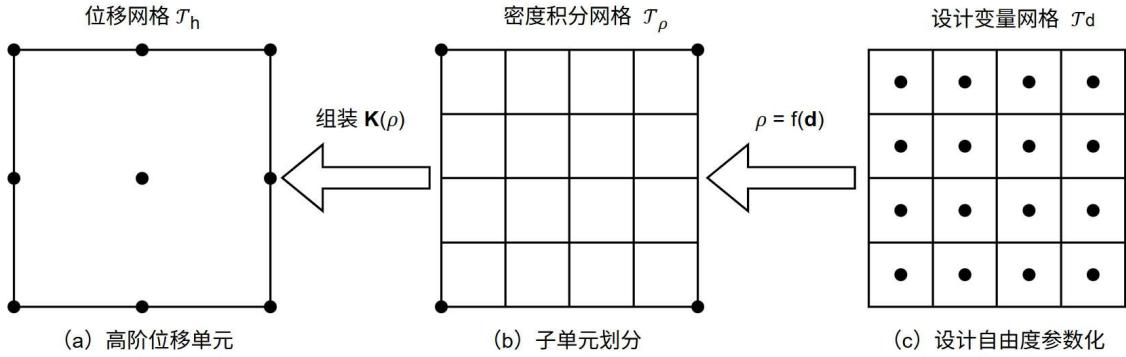


图 4.3 多分辨率三网格体系示意：位移网格、密度积分网格与设计变量网格。

4.3.2 多分辨率框架下的优化问题列式

在上述三层网格体系下，拓扑优化问题的数学列式需进行重构。设 \mathbf{d} 为定义在设计变量网格上的设计变量向量， \mathbf{U} 为定义在位移有限元网格上的全局位移向量。以第 2.3.1 节体积分数约束的柔顺度最小化问题为例，基于 SIMP 插值模型的多分辨率拓扑优化问题描述如下：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} \quad & c(\mathbf{d}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U}(\mathbf{d}) \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{K}(\rho(\mathbf{d})) \mathbf{U}(\mathbf{d}) = \mathbf{F} \\ & g_V(\mathbf{d}) = V(\rho(\mathbf{d})) - V_f \leq 0 \\ & d_i \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, N_d \end{aligned}$$

其中 $c(\mathbf{d})$ 为目标函数； $\mathbf{K}(\rho(\mathbf{d}))$ 为全局刚度矩阵，其构造依赖于由设计变量 \mathbf{d} 映射得到的物理密度场 $\rho(\mathbf{d})$ ； \mathbf{F} 为外载荷向量； $V(\rho(\mathbf{d}))$ 为结构体积分数， V_f 为给定

的体积分数上限。需要强调的是，在多分辨率框架下， $\rho(\mathbf{d})$ 表示在密度积分网格 \mathcal{T}_ρ 上取值的离散物理密度（或子单元密度向量），其将直接参与刚度矩阵的数值积分与组装。为避免刚度矩阵奇异，通常在由 \mathbf{d} 映射得到物理密度时引入下界 $\rho_{\min} > 0$ ，以保证结构处处具有非零刚度。

与传统单分辨率方法（第 3 章）的主要区别在于：物理密度场 ρ 不再直接等同于优化变量，而是通过映射关系

$$\rho = f(\mathbf{d})$$

与设计变量建立关联。该映射用于描述“设计自由度 \mathbf{d} 生成用于组装的物理密度 ρ ”这一密度生成链条：它既可以包含设计自由度向密度积分网格取值的插值/子单元赋值关系，也可以进一步统一涵盖密度过滤与 Heaviside 投影等密度正则化操作，从而使设计变量与物理密度在空间分辨率上相互独立。需要指出的是，若采用灵敏度过滤，其本质是对灵敏度/梯度信息的正则化处理，而不改变进入刚度组装的物理密度场；因此在“物理密度生成”意义下可将其视为恒等映射情形，即仍取 $\rho = f(\mathbf{d}) = \mathbf{d}$ ，相应的过滤作用将在灵敏度传递与更新步骤中体现。在最简单的恒等映射情形下，可理解为在设计自由度处直接取 $\rho_j = d_j$ ；当进一步取 $\mathcal{T}_d \equiv \mathcal{T}_\rho$ 并采用子单元常值设计时，上述关系可具体写为 $\rho_{e,i} = d_{e,i}$ 。

4.3.3 基于子单元的刚度矩阵数值积分

在 MTOP 框架下，物理密度场 $\rho(\mathbf{x})$ 在单个位移单元 Ω_e 内通常为非均匀分布，因此位移单元刚度矩阵写为

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{D}(\rho(\mathbf{x})) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x},$$

其中 \mathbf{B} 为应变–位移矩阵， $\mathbf{D}(\rho)$ 为由 SIMP 插值确定的本构矩阵。

由于 $\rho(\mathbf{x})$ 在单元内的空间变化一般难以用固定阶次多项式精确刻画，直接选取“精确求积”所需的高斯阶次并不方便。参考 Nguyen 等在 p-version 多分辨率框架下的处理方式 [12]，将位移单元 Ω_e 划分为 N_e 个密度子单元 $\{\Omega_{e,i}\}_{i=1}^{N_e}$ ，并在每个子单元内将密度近似为常值 $\rho_{e,i}$ （从而 $\mathbf{D}(\rho)$ 在该子单元内为常矩阵），则刚度积分可分段表示为

$$\mathbf{K}_e = \sum_{i=1}^{N_e} \int_{\Omega_{e,i}} \mathbf{B}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{D}(\rho_{e,i}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

为便于数值实现，将积分通过等参映射转移至位移单元参考域 $\hat{\Omega}_e$ 。记等参映射为 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_e(\boldsymbol{\xi})$ ($\boldsymbol{\xi} \in \hat{\Omega}_e$)，其雅可比矩阵定义为

$$\mathbf{J}_e(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{x}_e(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}}, \quad |\det(\mathbf{J}_e(\boldsymbol{\xi}))|$$

(对仿射单元该行列式为常数；一般等参单元在积分点处取值)。同时，将参考域 $\hat{\Omega}_e$ 规则划分为 N_e 个参考密度子单元 $\{\hat{\Omega}_{e,i}\}_{i=1}^{N_e}$ ，并以

$$J_i := |\det(\mathbf{J}_{\text{sub},i})|$$

表示从参考位移单元到第 i 个参考密度子单元的几何缩放因子（规则等分时为常数）。对每个参考密度子单元采用 N_g 点高斯积分，设第 i 个子单元内第 g 个高斯点与权重分别为 $\xi_{i,g}$ 与 w_g ，则有离散近似

$$\mathbf{K}_e \approx \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{g=1}^{N_g} \left(\mathbf{B}^\top \mathbf{D}(\rho_{e,i}) \mathbf{B} \right) (\mathbf{x}_e(\xi_{i,g})) \left| \det(\mathbf{J}_e(\xi_{i,g})) \right| J_i w_g.$$

上述“子单元分段积分”的关键在于：通过密度子单元的细化来补偿密度非均匀性带来的积分复杂度，从而可在每个子单元上采用相对低阶的高斯公式，而无需在整个高阶位移单元上使用高阶求积。密度子单元网格仅用于密度场表示与刚度积分，不参与位移插值，因此其细化与调整实现简单；同时子单元积分天然可并行，适合高效实现。

4.3.4 敏感度分析

本节在第 4.3.2 节给出的 MTOP 列式及映射关系 $\rho = f(\mathbf{d})$ 的基础上，推导柔顺度目标关于设计变量的敏感度表达式。记 $\rho_{e,i}$ 为位移单元 e 内第 i 个密度子单元的物理密度， \mathbf{U}_e 为全局位移向量 \mathbf{U} 在单元自由度上的提取向量。为突出多分辨率框架的统一性，以下先给出柔顺度对 $\rho_{e,i}$ 的“原始敏感度”，再通过映射 $\rho = f(d)$ 将其转换为对设计网格 \mathcal{T}_d 上设计变量 $d_{s,j}$ 的梯度。

对位移单元 e 内第 i 个密度子单元的物理密度 $\rho_{e,i}$ ，柔顺度灵敏度由伴随法给出

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_{e,i}} = -\mathbf{U}_e^\top \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_{e,i}} \mathbf{U}_e,$$

由于 $\rho_{e,i}$ 仅影响单元刚度中对应子单元的贡献项，结合第 4.3.3 节的子单元求积形式，可将 $\partial \mathbf{K}_e / \partial \rho_{e,i}$ 表示为对子单元 i 内高斯点的累加：

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_{e,i}} \approx \sum_{g=1}^{N_g} \left(\mathbf{B}^\top \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \rho}(\rho_{e,i}) \mathbf{B} \right) (\mathbf{x}_e(\xi_{i,g})) \left| \det(\mathbf{J}_e(\xi_{i,g})) \right| J_i w_g,$$

若采用 SIMP 插值 $\mathbf{D}(\rho) = E(\rho) \mathbf{D}_0$ ，且 $E(\rho) = \rho^p E_0$ ，则

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \rho}(\rho_{e,i}) = \frac{dE}{d\rho}(\rho_{e,i}) \mathbf{D}_0 = p \rho_{e,i}^{p-1} \mathbf{D}_0,$$

从而 $\partial \mathbf{K}_e / \partial \rho_{e,i}$ 可直接由上式数值积分得到。

进一步，由于物理密度由映射 $\rho = f(\mathbf{d})$ 给出，目标函数关于设计变量的梯度可由链式法则统一写为

$$\frac{\partial c}{\partial d_{s,j}} = \sum_e \sum_i \frac{\partial c}{\partial \rho_{e,i}} \frac{\partial \rho_{e,i}}{\partial d_{s,j}}$$

为强调映射的“局部影响范围”，也可引入影响集合

$$\mathcal{S}_{s,j} := \left\{ (e, i) : \frac{\partial \rho_{e,i}}{\partial d_{s,j}} \neq 0 \right\},$$

则上式等价为

$$\frac{\partial c}{\partial d_{s,j}} = \sum_{(e,i) \in \mathcal{S}_{s,j}} \frac{\partial c}{\partial \rho_{e,i}} \frac{\partial \rho_{e,i}}{\partial d_{s,j}}$$

当不引入过滤/投影且设计变量与密度子单元一一对应时，常有 $\rho_{e,i} = d_{e,i}$ ，此时 $\partial \rho_{e,i} / \partial d_{s,j}$ 退化为 Kronecker δ ，从而 $\partial c / \partial d_{s,j}$ 直接等于对应密度子单元的灵敏度；而当引入密度过滤或 Heaviside 投影等正则化后，单个 $d_{s,j}$ 往往会影响邻域内多个 $\rho_{e,i}$ ，此时需按上述集合求和累加其贡献。

4.4 设计变量到物理密度的映射机制

在第 4.3 节建立的三层离散体系中，设计变量 \mathbf{d} 定义在设计变量网格 \mathcal{T}_d 上，而刚度矩阵的组装与体积分数计算依赖密度积分网格 \mathcal{T}_ρ 上的物理密度场 ρ 。因此，灵敏度过滤、密度过滤与 Heaviside 投影等正则化策略可以统一表述为设计变量到物理密度的映射关系

$$\rho = f(\mathbf{d}),$$

根据映射关系的数学性质，可将其分为两类：一类为恒等映射，对应灵敏度过滤等梯度正则化方法，即 $\rho = \mathbf{d}$ ，正则化仅作用于梯度场；另一类为密度映射，对应密度过滤与 Heaviside 投影等方法，即通过线性或非线性算子对密度场进行重构，使得一个设计变量可影响邻域内多个子单元的物理密度。

4.4.1 基于灵敏度过滤的恒等映射

当采用灵敏度过滤策略时，正则化操作仅作用于目标函数的梯度场，而不直接改变用于刚度矩阵组装与体积分数计算的物理密度场。因此，在设计变量与密度积分自由度一一对应（例如子密度单元常值表征，且 $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\rho$ ）的情形下，设计变量到物理密度可视为恒等映射

$$\rho_{e,i} = d_{e,i}, \quad (e, i) \in \mathcal{T}_\rho,$$

其分量导数为

$$\frac{\partial \rho_{e,i}}{\partial d_{s,j}} = \delta_{es} \delta_{ij}$$

其中 δ_{es} 与 δ_{ij} 为 Kronecker delta 符号。由链式法则可得，目标函数关于任一设计变量 $d_{s,j}$ 的梯度可写为

$$\frac{\partial c}{\partial d_{s,j}} = \sum_e \sum_i \frac{\partial c}{\partial \rho_{e,i}} \frac{\partial \rho_{e,i}}{\partial d_{s,j}} = \frac{\partial c}{\partial \rho_{s,j}}$$

这表明在恒等映射下，第 4.3 节基于子单元刚度积分得到的 $\partial c / \partial \rho_{e,i}$ 可直接作为设计变量的基础梯度。随后仅需对该梯度场施加过滤，即可抑制棋盘格等数值不稳定性，并向优化器提供平滑后的梯度信息。

参照第 3.5.1 节的离散卷积思想，在密度积分网格 \mathcal{T}_ρ 上定义子密度单元 (e, i) 与 (s, j) 之间的权重

$$H_{(e,i)(s,j)} = \max \left\{ 0, r_{\min} - \text{dist}((e, i), (s, j)) \right\}$$

其中 $\text{dist}((e, i), (s, j)) = \|\mathbf{x}_{e,i} - \mathbf{x}_{s,j}\|$ 为对应位置向量的欧氏距离， $\mathbf{x}_{e,i}$ 表示子密度单元 (e, i) 的几何中心坐标。进一步定义与 (e, i) 相互作用的邻域索引集合

$$\mathcal{N}_{e,i} = \{(s, j) \mid H_{(e,i)(s,j)} > 0\}$$

则灵敏度过滤可写为

$$\widetilde{\left(\frac{\partial c}{\partial \rho_{e,i}} \right)} = \frac{1}{\max\{\gamma, \rho_{e,i}\}} \frac{\sum_{(s,j) \in \mathcal{N}_{e,i}} H_{(e,i)(s,j)} v_{s,j} \rho_{s,j} \left(\frac{\partial c}{\partial \rho_{s,j}} \right)}{\sum_{(s,j) \in \mathcal{N}_{e,i}} H_{(e,i)(s,j)} v_{s,j}}$$

其中 $v_{s,j}$ 为子密度单元 (s, j) 的体积， $\gamma > 0$ 为防止除零导致数值奇异的微小正数。由于恒等映射下 $\rho_{e,i} = d_{e,i}$ ，过滤后的 $\partial c / \partial \rho_{e,i}$ 可直接作为优化更新所需的设计变量梯度使用。该策略实现简单、计算开销低，且无需引入额外的密度映射变量，但由于正则化仅作用于灵敏度而不显式平滑物理密度场，最终结构边界的几何分辨率主要由子密度单元尺度所决定，最小特征尺度与平滑强度则由过滤半径 r_{\min} 控制。

4.4.2 基于密度过滤的线性映射

与灵敏度过滤不同，密度过滤直接对密度场进行正则化，其核心是通过一个线性空间算子将设计变量 \mathbf{d} 平滑为用于组装刚度矩阵与体积约束计算的物理密度 $\boldsymbol{\rho}$ 。在 MTOP 框架下，设计变量 $d_{s,j}$ 定义在设计网格 \mathcal{T}_d 上，而物理密度 $\rho_{e,i}$ 定义在密

度积分网格 \mathcal{T}_ρ (子密度单元) 上, 因此密度过滤自然对应一类从 \mathcal{T}_d 到 \mathcal{T}_ρ 的显式映射, 则密度过滤给出的线性映射可写为

$$\rho_{e,i} = \frac{\sum_{(s,j) \in \mathcal{N}_{e,i}} H_{(e,i)(s,j)} v_{s,j} d_{s,j}}{\sum_{(s,j) \in \mathcal{N}_{e,i}} H_{(e,i)(s,j)} v_{s,j}},$$

由此可见, 密度过滤本质上将每个 $\rho_{e,i}$ 表示为邻域内设计变量的加权平均, 因此映射 $f(\cdot)$ 为线性算子。由于 $\rho_{e,i}$ 由多个 $d_{s,j}$ 共同决定, 映射导数为

$$\frac{\partial \rho_{e,i}}{\partial d_{s,j}} = \begin{cases} \frac{H_{(e,i)(s,j)} v_{s,j}}{\sum_{(t,\ell) \in \mathcal{N}_{e,i}} H_{(e,i)(t,\ell)} v_{t,\ell}}, & (s,j) \in \mathcal{N}_{e,i}, \\ 0, & (s,j) \notin \mathcal{N}_{e,i}. \end{cases}$$

因此, 目标函数 c 对设计变量的灵敏度为

$$\frac{\partial c}{\partial d_{s,j}} = \sum_e \sum_i \frac{\partial c}{\partial \rho_{e,i}} \frac{\partial \rho_{e,i}}{\partial d_{s,j}},$$

体积分数等约束对设计变量的梯度亦可按同样形式计算。

与灵敏度过滤对应的恒等映射相比, 密度过滤通过显式平滑密度场本身, 使得刚度评估与体积计算在 \mathcal{T}_ρ 上具有一致的最小尺度控制效果, 但同时也会引入一定的中间密度。

4.4.3 基于 Heaviside 投影的非线性映射

如第 2.6.3 节所述, 虽然密度过滤策略能够有效控制结构的最小特征尺寸并解决棋盘格问题, 但其本质上的线性加权平均操作不可避免地会在结构边界处引入较宽的过渡区域 (灰度带)。在 MTOP 中, 为了充分利用高密度积分网格 \mathcal{T}_ρ 来清晰地表达结构边界, 本节在密度过滤的基础上进一步引入 Heaviside 投影, 建立从“设计变量 \rightarrow 中间密度 \rightarrow 物理密度”的非线性映射机制。

引入投影算子后, 设计变量到物理密度的映射过程被扩展为两阶段过程。首先, 利用第 4.4.2 节所述的线性密度过滤, 将定义在设计网格 \mathcal{T}_d 上的设计变量 $d_{s,j}$ 映射为定义在密度积分网格 \mathcal{T}_ρ (即子单元) 上的中间密度 $\tilde{\rho}_{e,i}$ 。随后, 应用第 2.6.3 节定义的投影算子 \mathcal{P}_β , 将中间密度非线性映射为近似 0 - 1 分布的物理密度 $\rho_{e,i}$:

$$\rho_{e,i} = \mathcal{P}_\beta(\tilde{\rho}_{e,i}),$$

其中 β 为控制投影陡峭程度的正则化参数。具体的数值实现中, 为了保证优化过程

的稳健性，需要采用延拓策略，即在迭代过程中逐步增大 β 值以逼近清晰边界。

指数型投影的离散形式为：

$$\rho_{e,i} = 1 - e^{-\beta\tilde{\rho}_{e,i}} + \tilde{\rho}_{e,i}e^{-\beta},$$

双曲正切型投影的离散形式为：

$$\rho_{e,i} = \frac{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(\tilde{\rho}_{e,i} - \eta))}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))},$$

通常取 $\eta = 0.5$ 以保持投影前后体积近似守恒。值得注意的是，在 MTOP 框架下，投影操作是在子单元层级上逐点进行的。这意味着，即使基础的设计变量分布相对稀疏，通过在极细密的积分网格上进行锐利的非线性截断，依然可以“切割”出极其光滑且清晰的几何边界。

引入投影后，目标函数 c 关于设计变量 $d_{s,j}$ 的灵敏度计算需应用链式法则。结合第 4.4.2 节中过滤灵敏度的推导，总灵敏度公式修正为：

$$\frac{\partial c}{\partial d_{s,j}} = \sum_e \sum_i \frac{\partial c}{\partial \rho_{e,i}} \frac{\partial \rho_{e,i}}{\partial \tilde{\rho}_{e,i}} \frac{\partial \tilde{\rho}_{e,i}}{\partial d_{s,j}},$$

其中 $\frac{\partial c}{\partial \rho_{e,i}}$ 为目标函数对子单元物理密度的偏导数； $\frac{\partial \tilde{\rho}_{e,i}}{\partial d_{s,j}}$ 为线性密度过滤的权重项； $\frac{\partial \rho_{e,i}}{\partial \tilde{\rho}_{e,i}}$ 为投影函数的导数项。对于双曲正切型投影，其导数为：

$$\frac{\partial \rho_{e,i}}{\partial \tilde{\rho}_{e,i}} = \beta \frac{1 - \tanh^2(\beta(\tilde{\rho}_{e,i} - \eta))}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))},$$

对于指数型投影，其导数为：

$$\frac{\partial \rho_{e,i}}{\partial \tilde{\rho}_{e,i}} = \beta e^{-\beta\tilde{\rho}_{e,i}} + e^{-\beta},$$

通过上述链式法则，优化驱动力能够准确地穿过非线性投影层和线性过滤层，传递回设计变量网格，从而驱动拓扑构型的演化。

4.5 应力约束拓扑优化问题

4.6 数值算例

4.6.1 算例设置与统一框架

为保证本章数值算例在统一且可复现的基准下进行，除特别说明外，均沿用第 3.6.1 节中关于小变形线弹性假设、各向同性材料、SIMP 材料插值、单位体系等通用设定。本章在此基础上主要补充如下统一约定。

- 材料插值与惩罚延续：基础材料模型沿用第 3.6.1 节中定义的修正 SIMP 插值公式，且杨氏模量参数保持 $E_0 = 1$ 与 $E_{\min} = 10^{-9}$ 不变。与前文固定惩罚因子 ($p = 3$) 不同，本章为增强多分辨率框架下优化过程的鲁棒性并避免局部极值，对惩罚指数 p 施加如下延续策略

$$p^{(n)} = \min\left(3, 1 + 0.5 \lfloor n/30 \rfloor\right)$$

即初始 $p = 1$ ，每迭代 30 次增加 0.5，直至达到上限 $p = 3$ 后保持不变。

- 映射机制：基准测试中，默认采用密度过滤对应的线性映射 $\rho = f(\mathbf{d})$ 对设计变量进行正则化处理。而在涉及 Heaviside 投影的对比研究中（如第 4.6.3 节），采用双曲正切型投影算子，并取固定阈值 $\eta = 0.5$ 。为兼顾优化早期的鲁棒性与后期的边界清晰度，对投影陡峭度参数 β 施加指数量型延续策略：

$$\beta^{(n)} = \min(512, 2^{\lfloor n/50 \rfloor})$$

即初始 $\beta = 1$ ，每迭代 50 次数值翻倍，直至达到上限 $\beta = 512$ 后保持不变。

- 最小尺度控制与过滤半径：统一采用过滤算子实现最小特征尺度控制，过滤半径 r_{\min} 以设计域的物理长度度量（与第 3.6.1 节一致），离散实现时，过滤邻域由设计网格尺寸 h_ρ 确定，也就是

$$N_x = \left\lceil \frac{r_{\min}}{h_{\rho,x}} \right\rceil, \quad N_y = \left\lceil \frac{r_{\min}}{h_{\rho,y}} \right\rceil$$

例如，在 MTOP 采用 4×4 子密度单元划分时，设计网格步长精细化为 $h_\rho \approx h/4$ ，此时，为维持 r_{\min} 的物理覆盖范围不变，其对应的离散单元层数将自动调整为 STOP 框架下的约 4 倍，即 N_x, N_y 相应放大约 4 倍，在二维情形下，邻域内参与平均的子密度单元总数因此增加约 16 倍。该机制保证了物理最小特征尺度的一致性，同时允许在更细的设计网格上进行稳定更新。

- 优化算法：采用 MMA 更新设计变量。算法参数采用 Svanberg 推荐的标准设置 [25]：渐近线移动的收缩因子与扩张因子分别取 0.7 与 1.2，初始渐近线参数取 0.5，设计变量的移动限制设为 0.2。
- 收敛准则：当连续两次迭代中设计变量的最大变化量满足

$$\|\boldsymbol{\rho}^{(n+1)} - \boldsymbol{\rho}^{(n)}\|_{\infty, \Omega} < 10^{-3}$$

则判定收敛并终止迭代；同时设置最大迭代步数 $n_{\max} = 1000$ 作为安全上限。

- 积分设置：为充分利用 MTOP 框架的子单元策略，与第 3.6.1 节不同的是，本章统一采用低阶高斯积分公式。低阶高斯积分的选取与密度子单元数 N_i 密切相关，子单元数越多，整体采样点密度越高，每个子单元内的积分点数 N_g 即可相应减少。在实践实现中，对于 $N_i \geq 16$ （如二维情形下 4×4 划分），可采用 $q = 1$ 阶高斯积分公式，对于 $N_i = 4 \sim 9$ （如二维情形下 $2 \times 2 \sim 3 \times 3$ 划分），可采用 $q = 2$ 阶积分公式以平衡精度和开销。

4.6.2 多分辨率数值验证：构型一致性与收敛行为

算例 4.1：二维 MBB 梁

本节选取经典的二维 MBB 梁作为基准算例 [16]，设计域与边界载荷关于竖向中心轴对称，几何尺寸为 $60 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ （见图 4.4(a)）。左下角设置铰支座约束 ($u_x = u_y = 0$)，右下角设置滑移支座约束 ($u_y = 0$)，并在上边界中点施加竖直向下的集中载荷 $P = 2 \text{ N}$ ，其余边界为零牵引边界条件。材料属性设定为杨氏模量 $E = 1 \text{ MPa}$ ，泊松比 $\nu = 0.3$ ，优化目标是在满足体积分数约束 $V_f = 0.6$ 的条件下最小化结构柔顺度。理论上，其最优构型在桁架极限意义下呈现 Michell 型扇形桁架特征 [18, 19]，图 4.4(b) 给出相应参考构型。

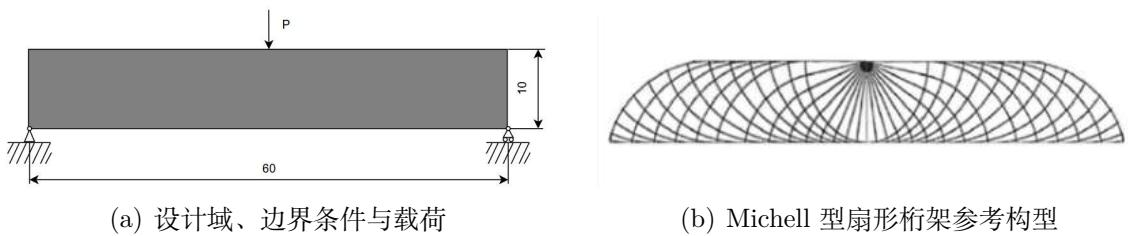


图 4.4 二维 MBB 梁算例：模型设置与 Michell 型扇形桁架参考构型。

为系统评估多分辨率策略在分析规模、设计分辨率与结构性能三个维度上的表现，图 4.5(a) 汇总展示了不同分析阶次 k 与最小尺度过滤半径 r_{\min} 下的优化拓扑构型。图 4.5(a) 给出了传统单分辨率框架 (STOP) 的基准结果，此时设计变量与位

移分析单元一一对应；图 4.5(b)–4.5(d) 则对应多分辨率框架 (MTOP) 的结果，其中每个位移分析单元进一步细分为 4×4 个子密度单元，从而在保持设计域与载荷边界条件一致的前提下，将设计自由度 ρ_{dof} 由 600 提升至 9600。各子图均标注了分析自由度 u_{dof} 与设计自由度 ρ_{dof} ，以刻画不同 k 下的分析规模与设计分辨率变化。映射与正则化策略沿用第 4.6.1 节统一设置。

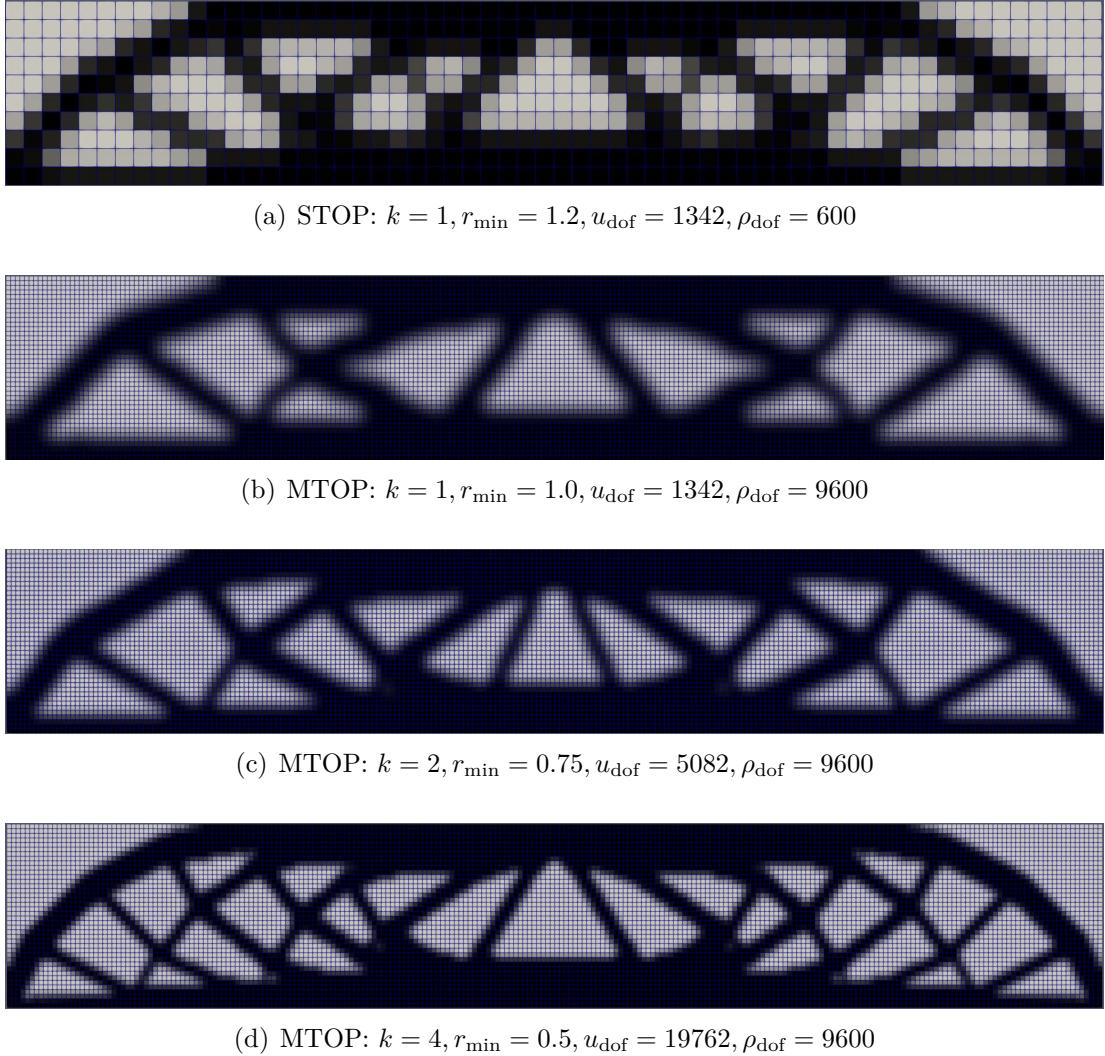


图 4.5 STOP 与 MTOP 在不同分析阶次 k 下的优化拓扑构型对比。

结合图 4.5 的优化拓扑结果可见，MTOP 通过“分析网格—设计网格”解耦，在相同分析规模下显著提升了构型边界的连续性与几何表达能力。对比图 4.5(a) 和图 4.5(b)，两者位移自由度相同 ($u_{\text{dof}} = 1342$)。在传统 STOP 框架中，设计变量与分析单元一一对应，设计更新受到粗分析网格显式限制，为抑制棋盘格等网格相关的伪影，需取相对更大的过滤半径 $r_{\min} = 1.2$ ，从而对边界细节产生更强的平滑作用，使终态构型呈现较明显的阶梯状边界。相比之下，MTOP 将每个分析单元细分为 4×4 个子密度单元，使设计自由度由 $\rho_{\text{dof}} = 600$ 提升至 9600，从而在不增加 u_{dof}

的前提下获得更高的设计分辨率，在该设置下，即使取更小的过滤半径 $r_{\min} = 1.0$ ，所得构型仍呈现出清晰的宏观拓扑轮廓且未出现显著数值伪影，体现出更好的网格鲁棒性。

进一步地，由图 4.5(b)–4.5(d) 可观察到：在 MTOP 框架下，当设计分辨率保持不变 ($\rho_{\text{dof}} = 9600$) 并逐步提高分析阶次 ($k = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$) 时，过滤半径可以相应减小 ($r_{\min} = 1.0 \rightarrow 0.75 \rightarrow 0.5$)，从而释放更多细尺度杆件与多层级传力路径，使构型逐步呈现更丰富的分支与层级特征。需要指出的是，细尺度构件的“可表达”与“可评估”是相互耦合的，只有当分析精度随阶次提高而同步增强时，细部构型的力学贡献才能被更可靠地刻画并有效参与优化更新。为进一步比较不同配置下的迭代收敛行为与目标函数终值差异，下面将给出目标函数与体积分数随迭代步演化的对比曲线（见图 4.6）。

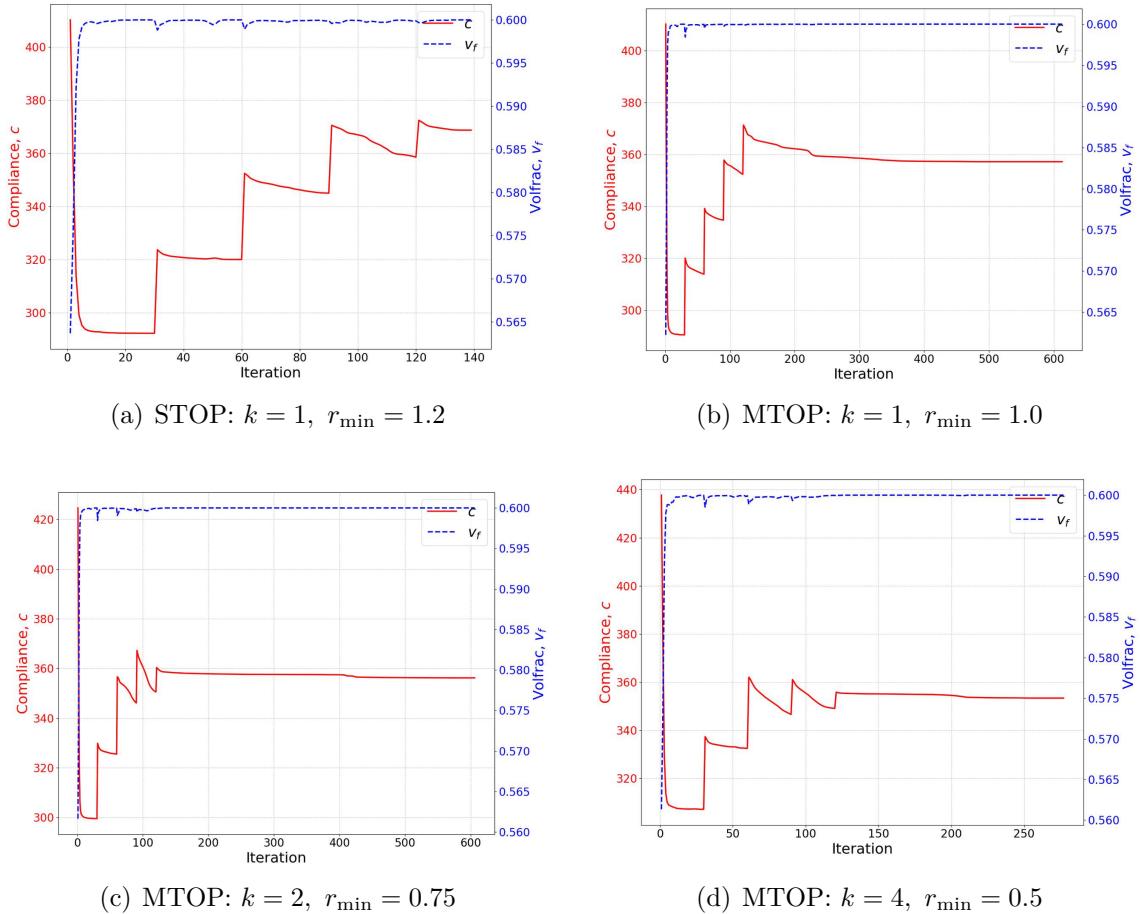


图 4.6 STOP 与 MTOP 在不同分析阶次 k 下的收敛曲线对比（实线：柔顺度 c ；虚线：体积分数 V_f ）。

图 4.6 展示了 STOP 与 MTOP 在不同分析阶次 k 下目标函数 c 与体积分数 V_f 的迭代演化过程。各子图横轴长度不同，源于不同配置下终止准则触发的迭代步数存在差异。虚线所示体积分数 V_f 在少量迭代后即快速逼近并稳定在目标值附近，

表明体积分数约束在整个优化过程中得到有效满足。实线中出现的阶梯式变化主要由第 4.6.1 节采用的惩罚延续策略导致，即惩罚指数 p 按 $n = 30$ 的间隔分段更新，使得参数更新节点附近发生阶段性结构重构并伴随再收敛。

从收敛结果与不同配置的对比来看，MTOP 框架在相同分析阶次 $k = 1$ 下相较于 STOP 表现出更稳定的收敛形态与更低的平台值，这与图 4.5 中“在相同 u_{dof} 下允许更小的 r_{\min} 并获得更平滑边界”的观察一致。进一步地，在 MTOP 内部随着分析阶次由 $k = 1$ 提升至 $k = 2, 4$ ，惩罚参数更新后的再收敛过程总体更为平稳，且终态平台值呈现进一步降低的趋势。该结果表明，“细网格设计（高分辨率密度自由度）”与“高阶分析（更高力学逼近精度）”之间存在协同关系：更高阶的力学分析能够更可靠地评估细尺度杆件与多层级传力路径的刚度贡献，从而支撑更小 r_{\min} 所释放的细部构型被稳定地保留并形成有效的优化更新。由此，多分辨率设计与高阶分析的匹配不仅提升了构型表达能力，也对应体现为更优的目标函数收敛结果与更稳健的迭代行为。

尽管上述结果表明提高分析阶次有助于增强力学评估精度，但要进一步论证 MTOP 框架在工程应用中的可行性，还需回答一个关键问题：在求解规模被严格约束的条件下，MTOP 中通过阶次提升获得的优化结果，能否达到 STOP 框架中通过网格加密所能达到的水平。为此，本节设计了一组严格控制变量的配对对比实验（如表 4.1 所示）。在每一组配对中，两种策略在位移自由度与设计自由度规模上保持一致，即

$$u_{\text{dof}} \in \{5082, 19762, 77922\}, \quad \rho_{\text{dof}} \in \{2400, 9600, 38400\}$$

并在相同体积分数约束与相同优化参数设置下进行比较；其中最小长度尺度控制参数 r_{\min} 以统一的物理意义取值。通过在上述等规模约束下比较终态拓扑构型与相应性能指标，本节旨在验证：在多分辨率设计分辨率的支撑下，粗分析网格上的高阶离散能否在给定求解规模内获得与细密低阶网格相近的构型特征与性能水平，从而体现“多分辨率 + 高阶分析”协同策略的有效性。

具体对比结果如表 4.1 所示。随着最小特征尺度 r_{\min} 从 0.75 逐步减小至 0.25，阶次提升策略在固定分析网格 60×10 上依次采用 $k = 2, 4, 8$ 的高阶单元，并分别配套 $2 \times 2, 4 \times 4, 8 \times 8$ 的子密度单元细化；与之对应，网格加密策略在低阶单元 $k = 1$ 下将网格规模从 120×20 逐步加密至 480×80 。在各组配对算例中，两类策略在相同的 r_{\min} 约束下呈现出高度一致的拓扑演化趋势：主承载骨架的布局与传力路径基本重合，细部层级结构（包括高分辨率下的扇形分支与类 Michell 桁架特征）在形态上亦具有良好的一致性。该结果表明，在 MTOP 框架中，通过“高阶分析”与“高分辨率设计表示（子密度细化）”的协同，可以在给定自由度规模约束下获得与细密低阶网格加密相近的优化构型与性能水平，证实了在有限的计算资源约

表 4.1 同等自由度规模下网格加密与阶次提升策略的优化结果对比

| 过滤半径 | 网格加密 | 阶次提升 |
|-------------------|--|--|
| $r_{\min} = 0.75$ |  $120 \times 20 \ (k = 1)$ |  $60 \times 10 \ (k = 2)$ |
| $r_{\min} = 0.5$ |  $240 \times 40 \ (k = 1)$ |  $60 \times 10 \ (k = 4)$ |
| $r_{\min} = 0.25$ |  $480 \times 80 \ (k = 1)$ |  $60 \times 10 \ (k = 8)$ |

束下，‘粗网格高阶分析 + 细网格多分辨率设计’是提升拓扑优化精度与效率的一种优越范式。需要指出的是，继续细化子密度单元能够提升密度场的几何表达分辨率，但其对优化结果的有效贡献仍需与分析精度（单元阶次与积分精度等）相匹配，以确保细部构件的力学效应得到可靠评估。

4.6.3 映射机制对优化结果与收敛行为的影响

在第 4.6.2 节中，我们已在统一的多分辨率离散设置下，以密度过滤对应的线性映射作为基准结果，验证了多分辨率策略在不同单元阶次下的构型一致性与收敛特征。为保证映射机制对比的公平性，本节固定采用与图 4.5 相同的多分辨率设置，即每个分析单元内进行 4×4 子密度单元细分，并保持 (k, r_{\min}) 取值及其余优化参数不变。在此基础上，将基准的密度过滤结果作为参考解，进一步对比两类常用映射/正则化机制：其一为灵敏度过滤（恒等密度映射 $\rho = d$ ，过滤作用仅施加于目标函数灵敏度场，见第 4.4.1 节）；其二为 Heaviside 投影（通过非线性投影算子实现从设计变量到物理密度的映射与“0–1”促进，见第 4.4.3 节）。以下重点分析二者相对于参考解在最终拓扑形态及迭代收敛行为方面的差异。

图 4.7 展示了灵敏度过滤（恒等映射）在不同分析阶次下的最终优化拓扑。与第 4.6.2 节中的密度过滤（线性映射）参考解相比，该组结果在边界特征与拓扑丰富度上呈现显著差异。

首先，在边界表现上，由于恒等映射未对物理密度场施加显式平滑约束，结构边界呈现出自然的灰度过渡而非强制模糊化。如图 4.7(c) 所示，随着分析阶次提升至 $k = 4$ 且过滤半径减小至 $r_{\min} = 0.5$ ，边界弥散带显著收窄，结构轮廓愈发清晰，

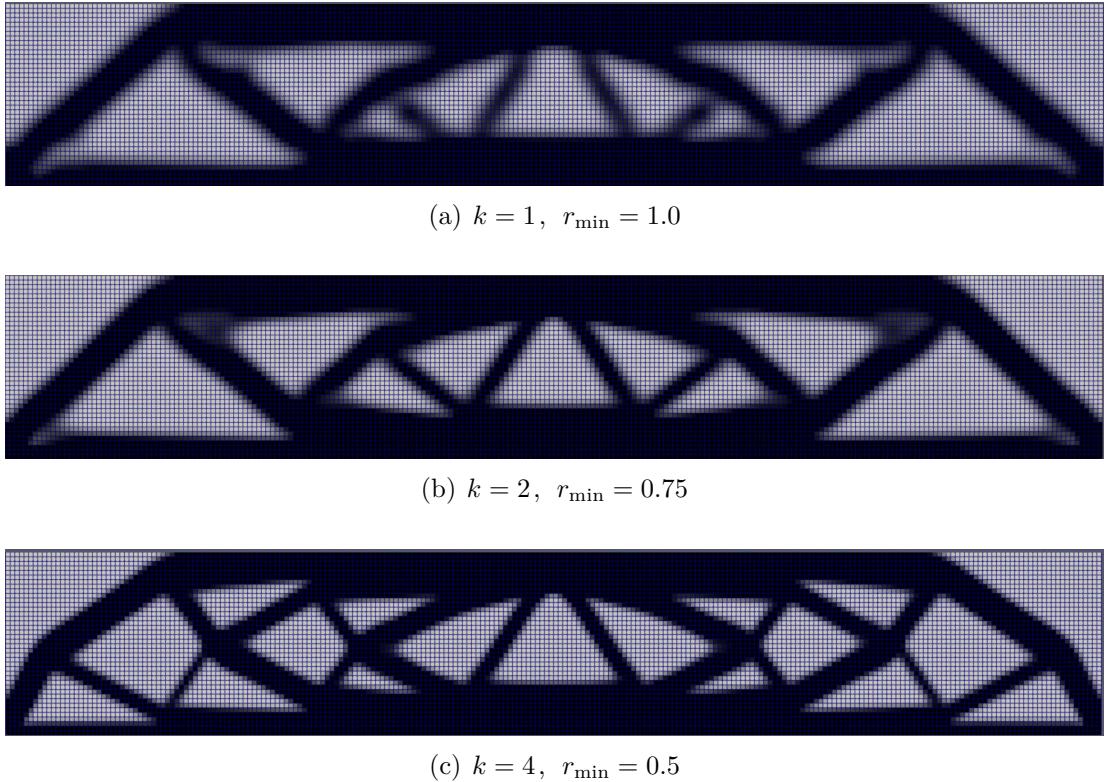


图 4.7 灵敏度过滤（恒等映射）下不同分析阶次的最终优化拓扑构型

证实了高阶分析与高分辨率设计结合能有效支持更细锐的边界表达。其次，在拓扑形态上，灵敏度过滤所得构型明显更为简化。对比图 4.5(d)（密度过滤）中丰富的层级分支结构，图 4.7(c) 在相同参数下倾向于合并细微特征，形成由少数粗壮杆件构成的主骨架。这表明，由于恒等映射未对物理密度场引入显式的时间相关性约束（即缺乏物理意义上的最小特征尺度直接控制），优化器更容易陷入包含较少拓扑细节的局部极值，从而得到较为保守的结构设计。

图 4.8 进一步给出了灵敏度过滤下目标函数 c 与体积分数 V_f 的迭代演化历程。观察可知，体积分数（虚线）在所有阶次下均能迅速满足约束并保持稳定。目标函数（实线）则呈现出典型的阶梯状下降特征，这是由于惩罚因子 p 的延拓策略（每 30 步更新）引发的结构重构与再收敛过程。

若将图 4.8 与图 4.6（密度过滤结果）进行横向对比，可以发现灵敏度过滤下的收敛曲线在局部呈现出更多的微小震荡，且在惩罚参数跳变后的再稳定过程相对较长。这是因为恒等映射未对物理密度场施加显式的时间平滑约束，使得优化过程对设计变量的局部离散更新更为敏感。然而，在此基础上重点对比图 4.8 内部不同阶次的表现可以发现：尽管缺乏密度过滤那样的强几何约束，高阶分析 ($k = 4$) (图 4.8(c)) 相较于低阶分析 (图 4.8(a)) 依然表现出了显著的稳定性提升。在高阶单元下，目标函数曲线在参数跳变后的调整过程更为迅速且平滑，最终收敛平台也更为平稳。这

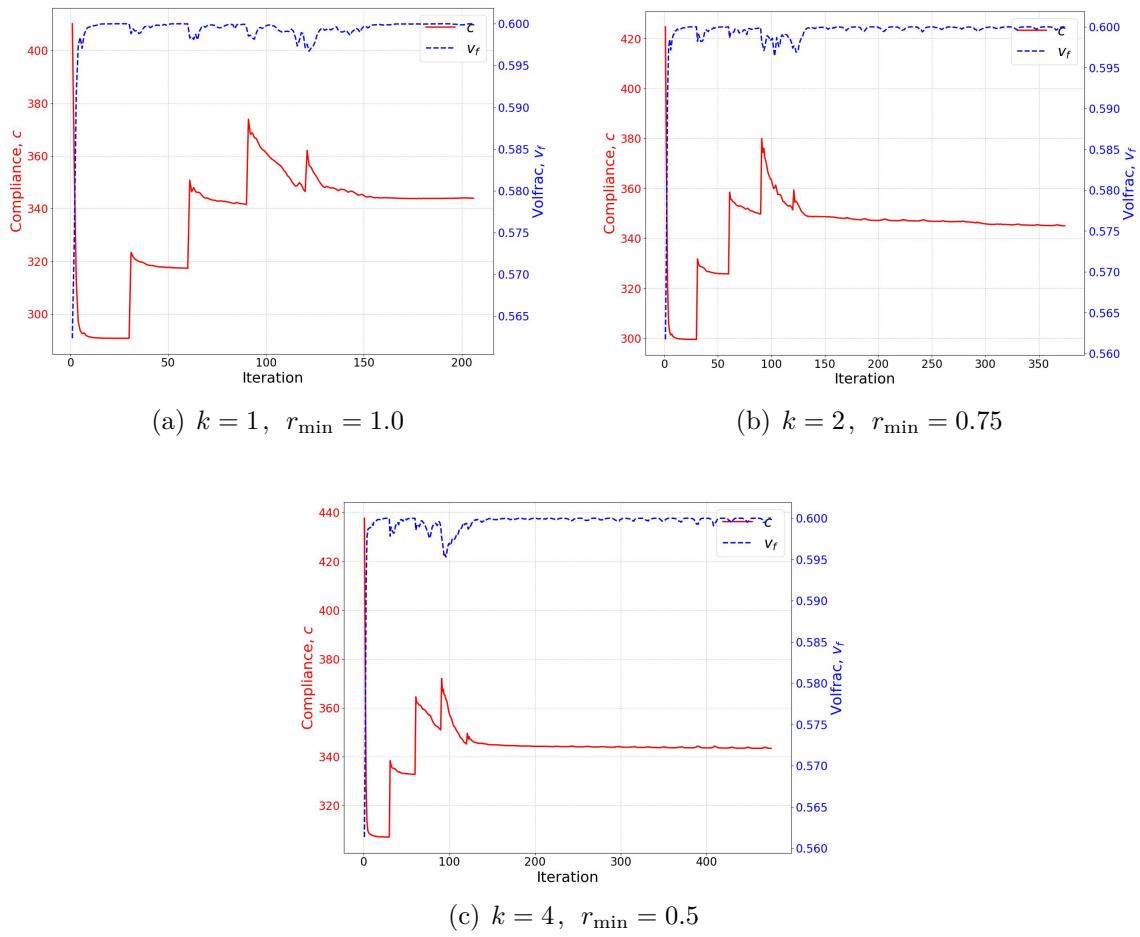


图 4.8 灵敏度过滤（恒等映射）下不同分析阶次的优化迭代收敛历程

表明，高阶有限元提供的高精度物理场梯度信息，能够有效抑制由灵敏度过滤弱正则化带来的潜在数值噪声，从而保障算法实现稳健收敛。

接下来考察基于 Heaviside 投影的非线性映射策略。正如前文所述，线性密度过滤虽能稳定数值计算，但不可避免地在边界处引入灰度过渡带。为了实现严格的“0–1”离散设计，本部分将映射机制替换为双曲正切型投影算子。投影参数严格遵循第 4.6.1 节定义的统一框架：阈值取 $\eta = 0.5$ ，陡峭度 β 采用指数延续策略（从 1 逐步增至 512）。该策略旨在优化初期利用较小的 β 保持问题凸性以寻找全局轮廓，随后逐步锐化边界以消除灰度。图 4.9 展示了在不同分析阶次下，采用 Heaviside 投影机制获得的最终拓扑构型。

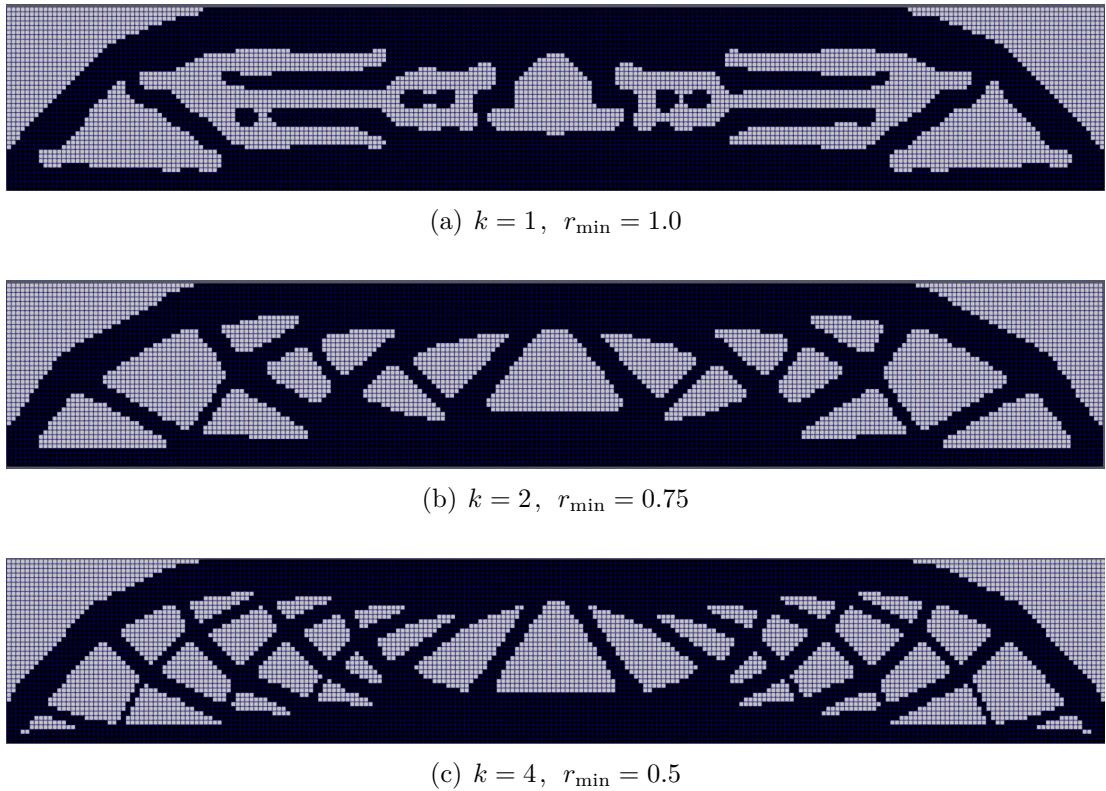


图 4.9 Heaviside 投影（非线性映射）下不同分析阶次的最终优化拓扑构型

与前述恒等映射（灵敏度过滤）及线性映射（密度过滤）相比，非线性投影通过对密度场的显式重构，综合了二者的优势：它既保留了线性过滤对最小特征尺度的显式控制能力，又通过阈值截断有效消除了由此引入的边界灰度带，从而在所有阶次下均实现了严格且几何规整的“0–1”离散。然而，对比不同阶次的结果可见显著差异。在低阶分析 ($k = 1$, 图 4.9(a)) 下，结构呈现出明显的条带化伪影与连接断裂。这是由于投影参数 β 的延续更新会导致局部密度发生剧烈跃迁，而低阶单元的刚度评估精度不足以适应这种快速变化，致使优化器陷入非物理的局部极值。相比之下，高阶分析 ($k = 2, 4$, 图 4.9(b)-4.9(c)) 凭借其优异的逼近能力，能够准确

捕捉投影诱导的锐利边界对整体刚度的实际贡献。因此，高阶框架在保证清晰二值化特征的同时，成功引导拓扑演化至力学性能更优的 Michell 桁架类构型，避免了低阶分析中的数值不稳定性。

图 4.10 进一步记录了 Heaviside 投影机制下目标函数 c 与体积分数 V_f 的迭代演化历程。观察可知，由于采用了投影参数 β 的指类型延续策略（每 50 步翻倍），目标函数曲线呈现出显著的“锯齿状”跳跃特征。每一次跳跃对应着 β 的更新，此时结构边界的陡峭度增加，导致中间密度单元的刚度贡献发生剧烈变化，从而引发目标函数的短期震荡与重构。

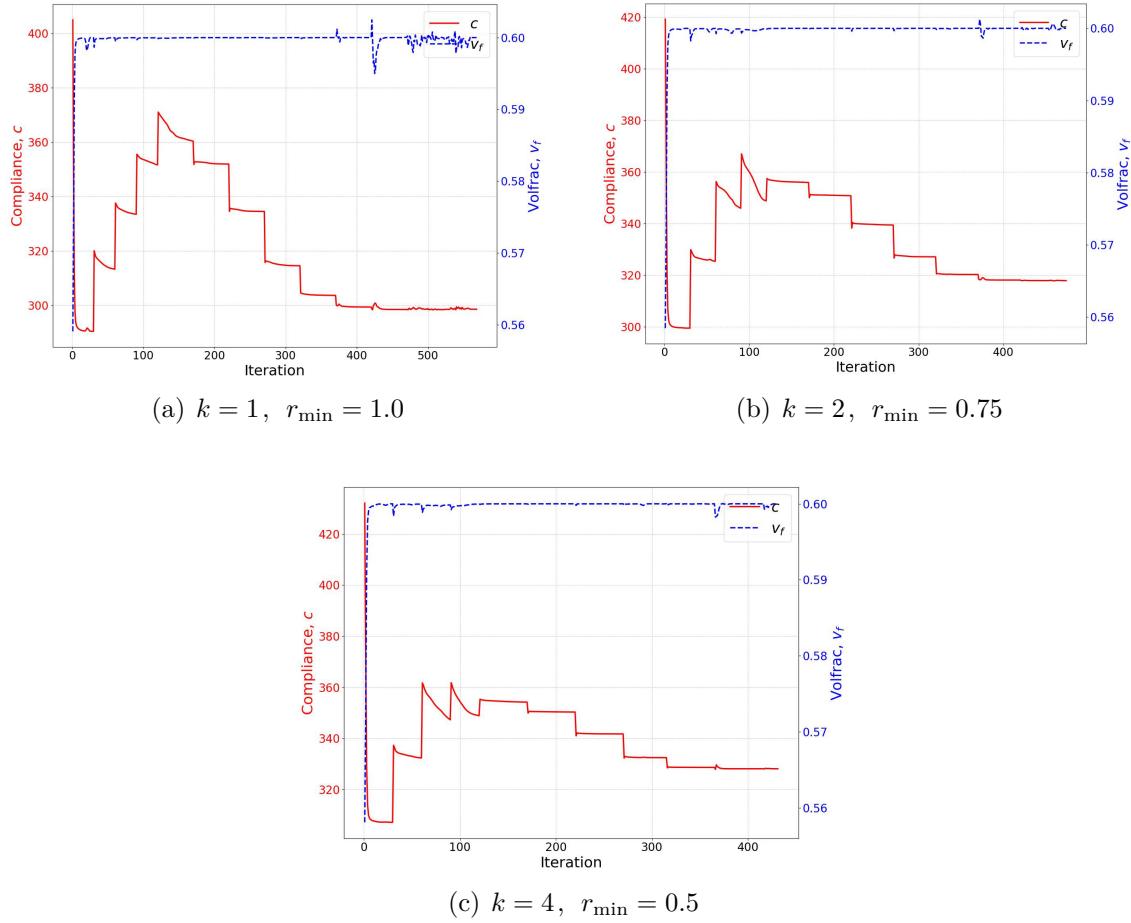


图 4.10 Heaviside 投影（非线性映射）下不同分析阶次的优化迭代收敛历程

在低阶分析 ($k = 1$, 图 4.10(a)) 下，收敛曲线在参数跳变后的再稳定过程较慢，且随着 β 增大（迭代后期），曲线呈现出持续的微小震荡，难以形成平滑的收敛平台。这与图 4.9(a) 中破碎的拓扑形态相对应，表明低阶单元难以准确响应由强非线性投影诱导的剧烈刚度变化，导致优化器在局部极值间反复徘徊。相比之下，高阶分析 ($k = 2, 4$, 图 4.10(b)-4.10(c)) 表现出极佳的鲁棒性。尽管 β 的成倍增长引入了强烈的数值冲击，但高阶单元凭借对物理场的高精度逼近，使得目标函数在短暂跳变后能够迅速回调并锁定在新的平稳平台。这种“即时响应—快速镇定”的收敛

特性，进一步证实了高阶有限元框架能够有效消化非线性映射带来的数值扰动，为获得清晰、规整的“0–1”拓扑设计提供坚实的算法支撑。

第 5 章 拓扑优化中的任意次胡张混合有限元方法研究

第 6 章 拓扑优化软件平台的开发及应用

参考文献

- [1] M. P. Bendsøe, Optimal shape design as a material distribution problem, *Structural optimization* **1** (1989) 193–202.
- [2] M. P. Bendsøe, *Optimization of Structural Topology, Shape, and Material* (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1995).
- [3] M. P. Bendsøe and O. Sigmund, *Topology Optimization* (Springer, Berlin, Heidelberg, 2004).
- [4] P. T. Boggs and J. W. Tolle, Sequential quadratic programming, *Acta Numerica* **4** (1995) 1–51.
- [5] B. Bourdin, Filters in topology optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **50** (2001) 2143–2158.
- [6] T. E. Bruns and D. A. Tortorelli, Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **190** (2001) 3443–3459.
- [7] C. Chen, L. Chen, X. H. null and H. Wei, Geometric decomposition and efficient implementation of high order face and edge elements, *Communications in Computational Physics* **35** (2024) 1045–1072.
- [8] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems* (SIAM, 2002).
- [9] J. K. Guest, J. H. Prévost and T. Belytschko, Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **61** (2004) 238–254.
- [10] R. V. Kohn and G. Strang, Optimal design and relaxation of variational problems, III, *Communications on Pure and Applied Mathematics* **39** (1986) 353–377.
- [11] D. G. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods*, Series in Decision and Control (J. Wiley, New York, 1969).
- [12] T. H. Nguyen, C. H. Le and J. F. Hajjar, Topology optimization using the p-version of the finite element method, *Structural and Multidisciplinary Optimization* **56** (2017) 571–586.

- [13] T. H. Nguyen, G. H. Paulino, J. Song and C. H. Le, A computational paradigm for multiresolution topology optimization (MTOP), *Structural and Multidisciplinary Optimization* **41** (2010) 525–539.
- [14] R. A. Nicolaides, On a class of finite elements generated by lagrange interpolation, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **9** (1972) 435–445.
- [15] N. Olhoff, M. P. Bendsøe and J. Rasmussen, On cad-integrated structural topology and design optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **89** (1991) 259–279.
- [16] N. Olhoff, M. P. Bendsøe and J. Rasmussen, On CAD-integrated structural topology and design optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **89** (1991) 259–279.
- [17] L. X. Qian, W. X. Zhong, K. T. Cheng and Y. K. Sui, An approach to structural optimization—sequential quadratic programming, sqp, *Engineering Optimization* **8** (1984) 83–100.
- [18] G. I. N. Rozvany, Some shortcomings in michell’s truss theory, *Structural optimization* **12** (1996) 244–250.
- [19] G. I. N. Rozvany, Exact analytical solutions for some popular benchmark problems in topology optimization, *Structural optimization* **15** (1998) 42–48.
- [20] M. Save, *Structural Optimization: Volume 1: Optimality Criteria*, number 34 in Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering (Springer US, Boston, MA, 1986).
- [21] O. Sigmund, On the design of compliant mechanisms using topology optimization*, *Mechanics of Structures and Machines* **25** (1997) 493–524.
- [22] O. Sigmund, Morphology-based black and white filters for topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization* **33** (2007) 401–424.
- [23] M. Stolpe and K. Svanberg, An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization* **22** (2001) 116–124.
- [24] K. Svanberg, The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **24** (1987) 359–373.

- [25] K. Svanberg, Mma and gmma, versions september 2007, (2007).
- [26] F. Wang, B. S. Lazarov and O. Sigmund, On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization* **43** (2011) 767–784.
- [27] M. Zhou and G. Rozvany, The COC algorithm, part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **89** (1991) 309–336.
- [28] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method Set* (Elsevier, 2005).
- [29] 程耿东., 工程结构优化设计基础程耿东编著 (大连理工大学出版社, Dalian, 2012), di 1 ban edition.

致 谢

个人简历、在学期间发表的学术论文及研究成果

个人简历

- XXX, 女, 199X 年 X 月出生, 籍贯 XX 省 XX 市 XX 县.
- 201X.09 – 201X.06, 就读于 XX 大学, 信息与计算科学专业, 201X 年 6 月获得理学学士学位.
- 201X.09 至今, 就读于湘潭大学, 数学专业, 攻读理学博士学位.

在学期间发表的学术论文