

TP Méthodes Numériques :

Simulation d'impacts de billes

Brighton MUFFAT, Yassine DAHMOUL

ENSIMAG 2017-2018

1 Simulation de la collision de deux billes par le schéma d'Euler explicite

Question 1. Pour plus de clarté, introduisons la variable a_1 , l'accélération de la bille 1 ainsi que la variable a_2 , l'accélération de la bille 2 qui sont toutes deux définies physiquement de la manière suivante :

$$a_1 = \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -(x_1 - x_2)_+^{3/2} \quad (1)$$

$$a_2 = \frac{d^2 x_2}{dt^2} = (x_1 - x_2)_+^{3/2} = -a_1 \quad (2)$$

L'énergie mécanique du système physique est quant à elle :

$$H = \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} + \frac{2}{5}(x_1 - x_2)_+^{3/2} \quad (3)$$

Montrons que pour toute solution de (1)-(2) on a $\frac{dH}{dt} = 0$. Supposons (x_1, x_2) solution de (1)-(2). Dérivons H par rapport au temps t :

$$\frac{dH}{dt} = v_1 a_1 + v_2 a_2 + (v_1 - v_2)(x_1 - x_2)_+^{3/2} \quad (4)$$

Puisque (x_1, x_2) est solution de (1)-(2), on a

$$a_2 = (x_1 - x_2)_+^{3/2} = -a_1$$

Donc l'équation (4) devient :

$$\frac{dH}{dt} = v_1 a_1 - v_2 a_1 - a_1(v_1 - v_2)$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = 0} \quad (5)$$

Pour toute solution de (1)-(2) on a bien $\frac{dH}{dt} = 0$

Question 2. Soit l'équation différentielle dans \mathbb{R}^4 suivante

$$\frac{dY}{dt} = F(Y) \quad (6)$$

Avec, $Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Donc $\frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

On en déduit $F(Y)$ d'après (1) et (2) :

$$F(Y) = \begin{pmatrix} F_1(Y) \\ F_2(Y) \\ F_3(Y) \\ F_4(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -(x_1 - x_2)_+^{3/2} \\ (x_1 - x_2)_+^{3/2} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Se référer au fichier *partie2.sci* pour y trouver l'implémentation de *rhs*

Question 3. Se référer au fichier *partie2.sci* pour y trouver l'implémentation de *eulerexp*

Question 4. Pour les conditions initiales et les différents pas indiqués voici les graphes des déplacements $x_1(t)$ et $x_2(t)$ et les graphes des vitesses $v_1(t)$ et $v_2(t)$.

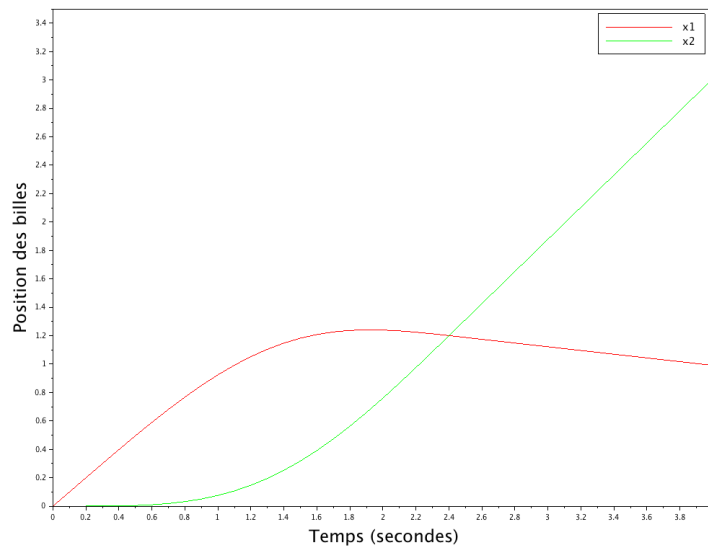


Figure 1: Graphe des déplacements avec $h = 10^{-1}$

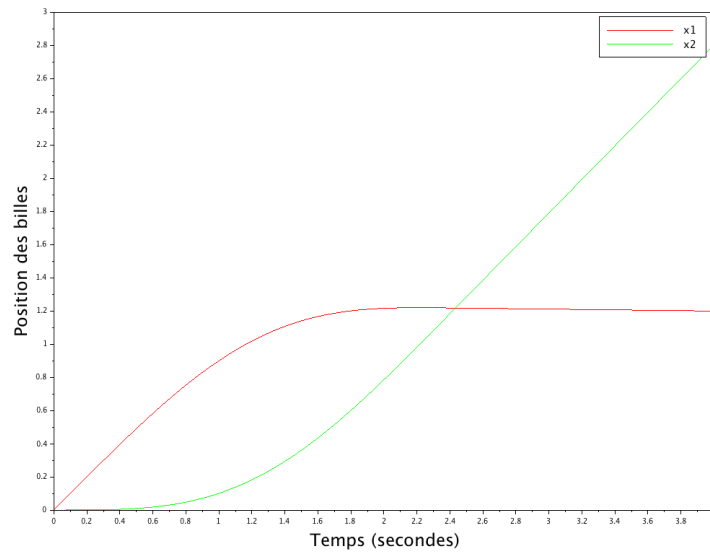


Figure 2: Graphe des déplacements avec $h = 10^{-2}$

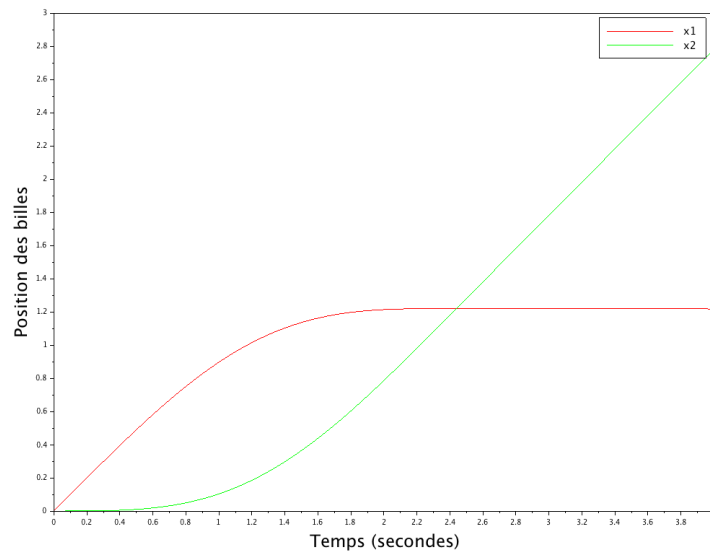


Figure 3: Graphe des déplacements avec $h = 10^{-3}$

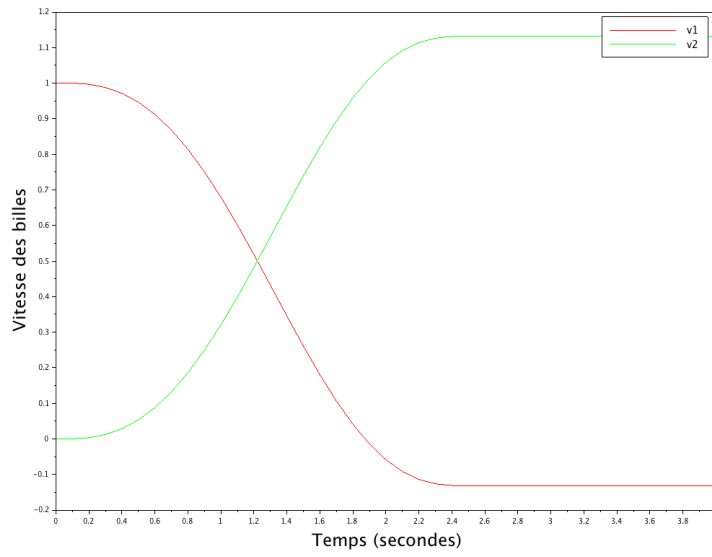


Figure 4: Graphe des vitesses avec $h = 10^{-1}$

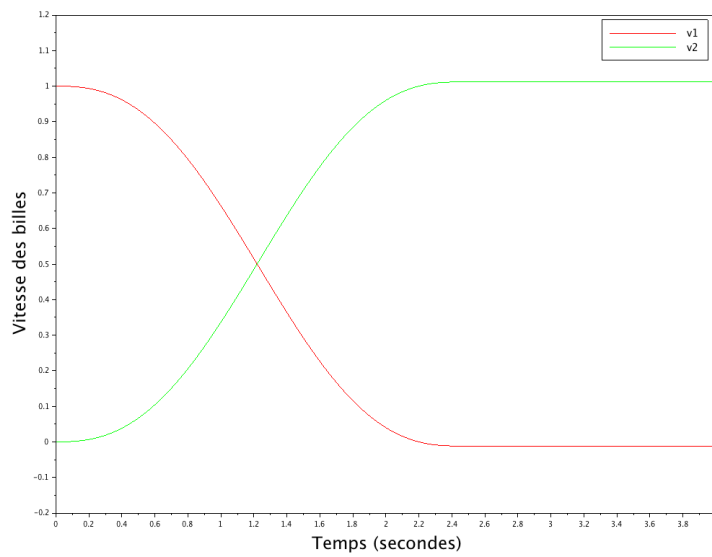


Figure 5: Graphe des vitesses avec $h = 10^{-2}$

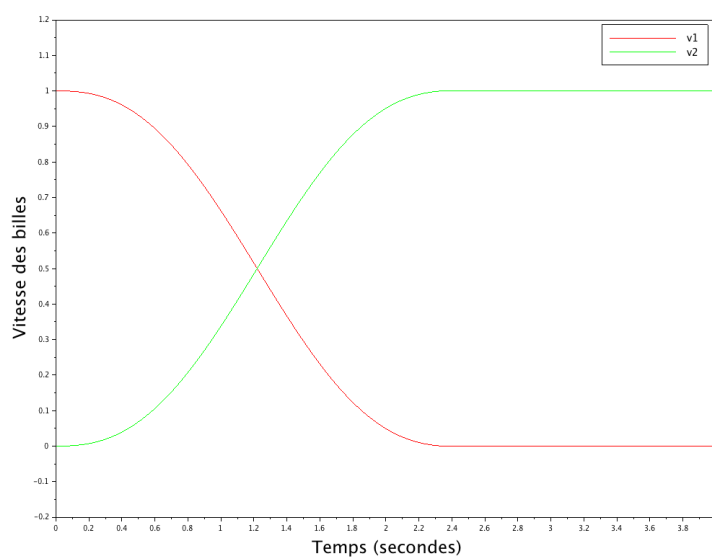


Figure 6: Graphe des vitesses avec $h = 10^{-3}$

On remarque bien qu'au delà d'un certain temps $t \approx 1.2$, les vitesses prennent des valeurs constantes avec $v_{2,finale} > v_1(0) = 1$. Ce résultat semble physiquement surréaliste car en présence de forces de frottements ou non on devrait avoir dans tous les cas $v_{2,finale} \leq v_1(0)$. En effet l'énergie mécanique est censée se conserver.

Lorsque $h \rightarrow 0$, on observe graphiquement que la quantité $v_{2,finale} - v_1(0)$ tend vers 0. Ce résultat semble cohérent et réaliste car lorsque $h \rightarrow 0$, les solutions sont plus précises et on néglige les forces de frottements donc on devrait avoir théoriquement $v_{2,finale} = v_1(0)$.

2 Simulation de la collision de n billes par le schéma d'Euler implicite

2.1 Modèle non linéaire

Question 5. Pour plus de clarté, introduisons la variable $a_i(t)$, l'accélération de la $i^{\text{ème}}$ bille et la variable $v_i(t)$, la vitesse de la $i^{\text{ème}}$ bille qui sont définies physiquement de la manière suivante :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i = \frac{d^2 x_i}{dt^2} \quad (8)$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, v_i = \frac{dx_i}{dt} \quad (9)$$

L'énergie mécanique du système physique est quant à lui :

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{2}{5} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})_+^{5/2} \quad (10)$$

Remarque : dans la suite les équations (5), (6) et (7) feront référence à celles de l'énoncé.

Montrons que pour toute solution de (5)-(6)-(7) on a $\frac{dH}{dt} = 0$. Supposons (x_1, \dots, x_n) solution de (5)-(6)-(7). Dérivons H par rapport au temps t :

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i a_i v_i + \sum_{i=1}^{n-1} (v_i - v_{i+1})(x_i - x_{i+1})_+^{3/2} \quad (11)$$

Puisque (x_1, \dots, x_n) est solution de (5)-(6)-(7), on a

$$\sum_{i=1}^n m_i a_i v_i = -(x_1 - x_2)_+^{3/2} v_1 + \sum_{i=2}^{n-1} v_i [(x_{i-1} - x_i)_+^{3/2} - (x_i - x_{i+1})_+^{3/2}] + (x_{n-1} - x_n)_+^{3/2} v_n$$

et

$$\sum_{i=1}^{n-1} (v_i - v_{i+1})(x_i - x_{i+1})_+^{3/2} = (v_1 - v_2)(x_1 - x_2)_+^{3/2} + \sum_{i=2}^{n-1} (v_i - v_{i+1})(x_i - x_{i+1})_+^{3/2}$$

Donc en sommant ces deux dernières équations, l'équation (4) devient :

$$\frac{dH}{dt} = -v_2(x_1 - x_2)_+^{3/2} + \sum_{i=2}^{n-1} [v_i(x_{i-1} - x_i)_+^{3/2} - v_{i+1}(x_i - x_{i+1})_+^{3/2}] + v_n(x_{n-1} - x_n)_+^{3/2}$$

Ainsi, par télescopage

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = 0}$$

Pour toute solution de (5)-(6)-(7) on a bien $\frac{dH}{dt} = 0$

Question 6. *Remarque : dans la suite les équations (9), (10), (11) et (12) feront référence à celles de l'énoncé.*

Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Notons f telle que $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$

On en déduit tout d'abord que l'équation (9) multipliée par h^2 correspond à la première ligne de l'équation (12). Donc on en déduit $f_1(x)$:

$$\boxed{f_1(x) = -(x_1 - x_2)_+^{3/2}}$$

De même l'équation (10) multipliée par h^2 correspond aux lignes 2 à $n - 1$ de l'équation (12). Donc on en déduit que

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 2, n - 1 \rrbracket, f_i(x) = (x_{i-1} - x_i)_+^{3/2} - (x_i - x_{i+1})_+^{3/2}}$$

Enfin l'équation (11) multipliée par h^2 correspond à la dernière ligne de l'équation (12). Donc on en déduit que

$$\boxed{f_n(x) = (x_{n-1} - x_n)_+^{3/2}}$$

Ainsi, pour f décrite ci-dessus de on a bien

$$\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, M(x^{(k+1)} - 2x^{(k)} + x^{(k-1)}) - h^2 f(x^{(k+1)}) = 0 \quad (12)$$

Question 7. *Se référer au fichier `partie31.sci` pour y trouver l'implémentation de `feulerimp`*

Question 8. *Se référer au fichier `partie31.sci` pour y trouver l'implémentation de `solnumerique` qui calcule la solution numérique correspondant au schéma d'Euler implicite.*

Question 9. Ci-dessous, voici les graphes de $H^{(k)}$ en fonction de $t = kh$.

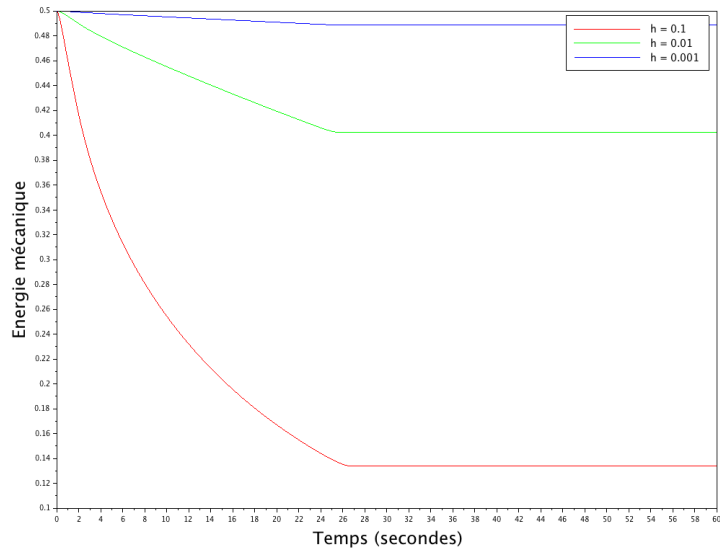


Figure 7: Graphe de $H^{(k)}$ pour $m = 1$

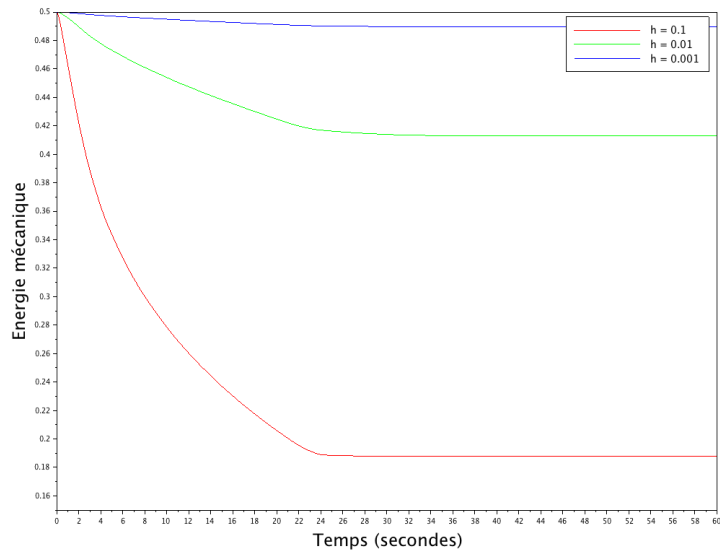


Figure 8: Graphe de $H^{(k)}$ pour $m = 0.5$

Graphiquement on vérifie bien que l'énergie décroît avec le temps pour $m = 1$ avant de se stabiliser pour rester constante lorsque $t \simeq 26$. Cette dernière décroît aussi pour $m = 0.5$ avant de se stabiliser pour rester constante lorsque $t \simeq 24$, c'est à dire plus rapidement. On observe une pente plus forte pour $m = 0.5$. Par ailleurs, lorsque h diminue on remarque que l'énergie mécanique décroît beaucoup moins fortement, ce qui est plus réaliste. En effet, la perte d'énergie mécanique du système à cause des forces de contact entre les billes au cours du temps est moindre. Le système conserve presque son énergie mécanique au cours du temps (aux forces de frottements près).

Question 10. Ci-dessous, voici les graphes des vitesses $v_i^{(k)}$ en fonction de $t = kh$ pour certaines billes, ainsi que les valeurs des forces de contacts pour $m = 1$.

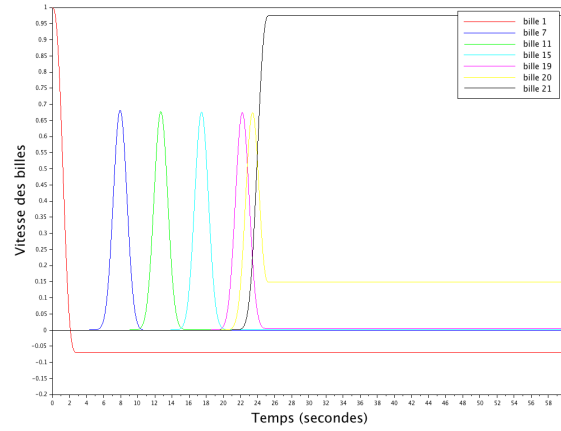


Figure 9: Graphe des vitesses $v_i^{(k)}$ pour $m = 1$ et $h = 10^{-3}$

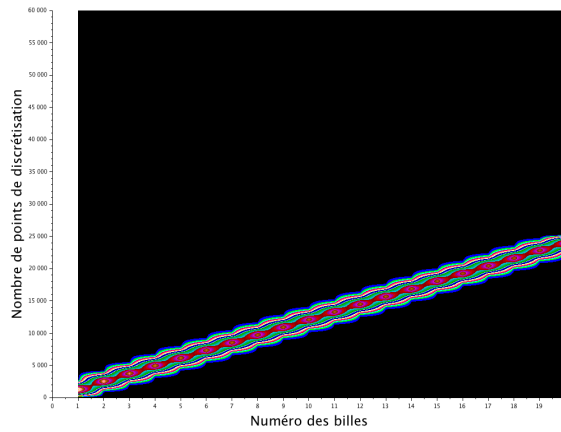


Figure 10: Valeurs de forces de contacts $(x_i^{(k)} - x_{i+1}^{(k)})_+^{3/2}$ pour $m = 1$ et $h = 10^{-3}$

Le graphe des vitesses semble cohérent, en effet la première bille prend une vitesse initiale puis s'annule lorsqu'elle entre en collision avec la seconde bille, la seconde bille prend alors la vitesse puis la transmet à la bille suivante...etc. D'où ces enchainements de pic de vitesse pour les différentes billes intermédiaires. Lorsque la dernière bille est percutée par l'avant dernière bille, elle prend une vitesse qui ne s'annule pas et reste constante car elle n'a pas d'obstacle et car on a négligé les frottements. Cependant on s'attend à ce que les billes oscillent et ceci n'est pas représenté dans ce modèle ...

Le graphe des forces de contact représente comment se propage l'onde de choc sur les billes au cours du temps. Les couleurs les plus chaudes témoignent d'une forte intensité des forces de contact et, à l'inverse, les couleurs les plus froides témoignent d'un faible intensité des forces de contact. A l'instant $t = 0$, les forces de contact sont au niveau de la première bille puis quand $t > 0$, ces forces de contact se propagent de bille en bille.

Question 11. Ci-dessous, voici les graphes des vitesses $v_i^{(k)}$ en fonction de $t = kh$ pour certaines billes, ainsi que les valeurs des forces de contacts pour $m = 0.5$.

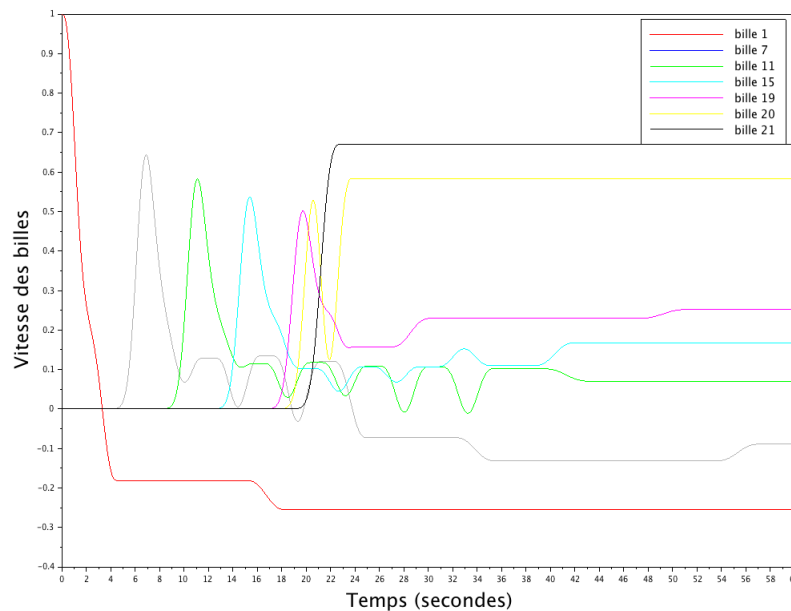


Figure 11: Graphe des vitesses $v_i^{(k)}$ pour $m = 0.5$ et $h = 10^{-3}$

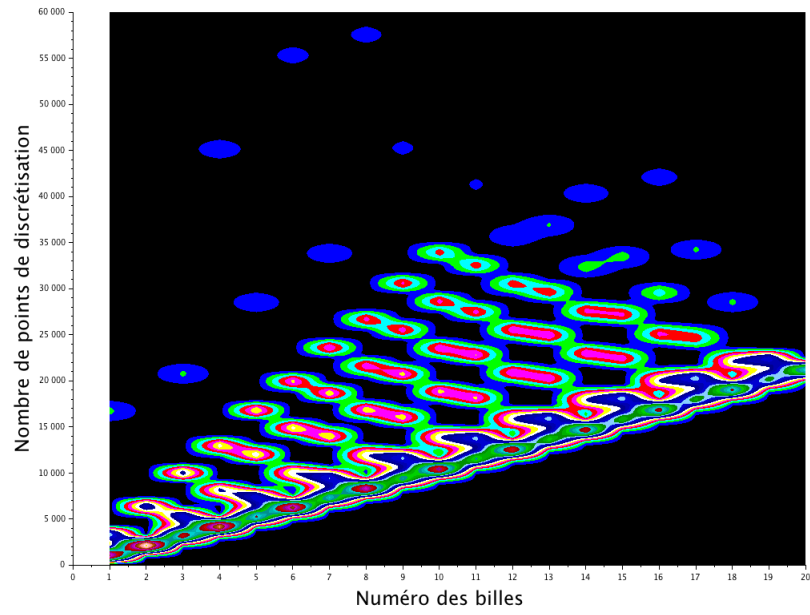


Figure 12: Valeurs de forces de contacts $(x_i^{(k)} - x_{i+1}^{(k)})_+^{3/2}$ pour $m = 0.5$ et $h = 10^{-3}$

Lorsque $m = 0.5$, les répartitions des forces ne sont pas égales entre les billes, donc les transmissions de vitesse ne sont pas égales.

Ceci se répercute aussi sur les forces de contact. Comme les masses diffèrent d'une bille à l'autre, cela provoque une élasticité de l'onde de choc car les billes de masse différente ne se décollent pas immédiatement.

Question 12. Ci-dessous, voici le graphe de la vitesse d'éjection $v_n^{(N)}$ de la dernière bille de masse $m = 1$ en fonction de la masse m des petites billes.

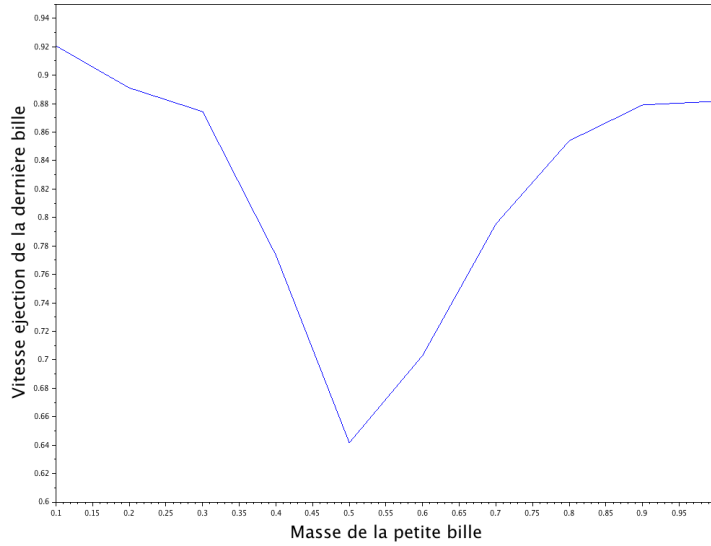


Figure 13: Vitesse d'éjection $v_n^{(N)}$ de la dernière bille en fonction de m pour $h = 10^{-2}$

La vitesse minimale d'éjection de la dernière bille est atteinte pour $m=0.5$.

Celle-ci est atteinte lorsque les masses entre deux billes consécutives diffèrent assez pour amoindrir la puissance de l'onde de choc. La vitesse maximale d'éjection est quant à elle atteinte lorsque toutes les billes sont de même masse. On voit que quand $m=0.1$ la vitesse est maximale, ce qui s'explique par le fait que les billes de masse m sont négligeables par rapport aux billes de masse 1. Ce qui revient aussi à une configuration de $n/2$ billes de masse 1.

2.2 Modèle linéaire

Question 13. Les équations (17), (18) et (19) sont équivalentes au système suivant:

$$m_1 u_1^{(k+1)} + h^2 (-u_2^{(k+1)} + u_1^{(k+1)}) = 2m_1 u_1^{(k)} - m_1 u_1^{(k-1)} + f_1((k+1)h)h^2$$

$$\forall i \in \llbracket 2 : n-1 \rrbracket, m_i u_i^{(k+1)} + h^2 (-u_{i+1}^{(k+1)} + 2u_i^{(k+1)} - u_{i-1}^{(k+1)}) = 2m_i u_i^{(k)} - m_i u_i^{(k-1)}$$

$$m_n u_n^{(k+1)} + h^2(2u_n^{(k+1)} - u_{n-1}^{(k+1)}) = 2m_n u_n^{(k)} - m_n u_n^{(k-1)}$$

Ceci s'écrit matriciellement de la manière suivante:

$$Au^{(k+1)} = b^{(k)}$$

avec $A = M + h^2 D$, où $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $b^{(k)} = \begin{pmatrix} m_1(2u_1^{(k)} - u_1^{(k-1)}) + f_1((k+1)h)h^2 \\ \vdots \\ m_i(2u_i^{(k)} - u_i^{(k-1)}) \\ \vdots \\ m_n(2u_n^{(k)} - u_n^{(k-1)}) \end{pmatrix}$

Question 14. Premièrement, A est clairement symétrique.

Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

On a $A = M + h^2 D$, donc $X^T A X = X^T M X + h^2 X^T D X$

Or, $S_p(M) = \{m_{11}, \dots, m_{nn}\} \subset \mathbb{R}_+^*$ donc M est symétrique définie positive i.e $X^T M X > 0$.

De plus, D se met sous la forme $D = T T^T$ avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix}$; on note que T et

$T^T \in GL_n(\mathbb{R})$ car leur déterminant vaut 1.

Ainsi, $X^T D X = X^T T T^T X = (T^T X)^T (T^T X) = \|T^T X\|_2^2 > 0$ car X non nul et T^T inversible et donc $h^2 X^T D X \geq 0$.

Finalement, $\boxed{\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, X^T A X > 0}$ i.e A est symétrique définie positive.

Question 15. Se référer au fichier *partie32.sci* pour y trouver l'implémentation de *factorise*.

Question 16. Se référer au fichier *partie32.sci* pour y trouver l'implémentation de *descente*.

Question 17. Se référer au fichier *partie32.sci* pour y trouver l'implémentation de *remonte*.

Question 18. Se référer au fichier *partie32.sci* pour y trouver l'implémentation du programme qui calcule la solution numérique de $u^{(1)}, \dots, u^{(N)}$. Les fonctions concernées sont les fonctions *boucle* et les fonctions appelées par celle-ci.

Question 19. Ci-dessous, voici les graphes demandés des vitesses et de l'énergie cinétique.

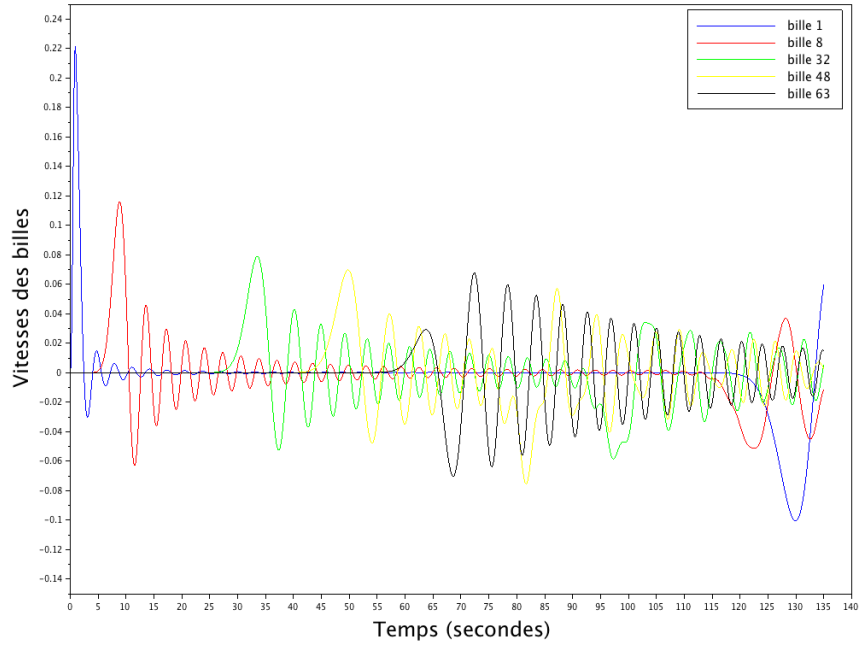


Figure 14: Vitesses de certaines billes en fonction du temps pour $h = 10^{-3}$ et pour $m = 1$

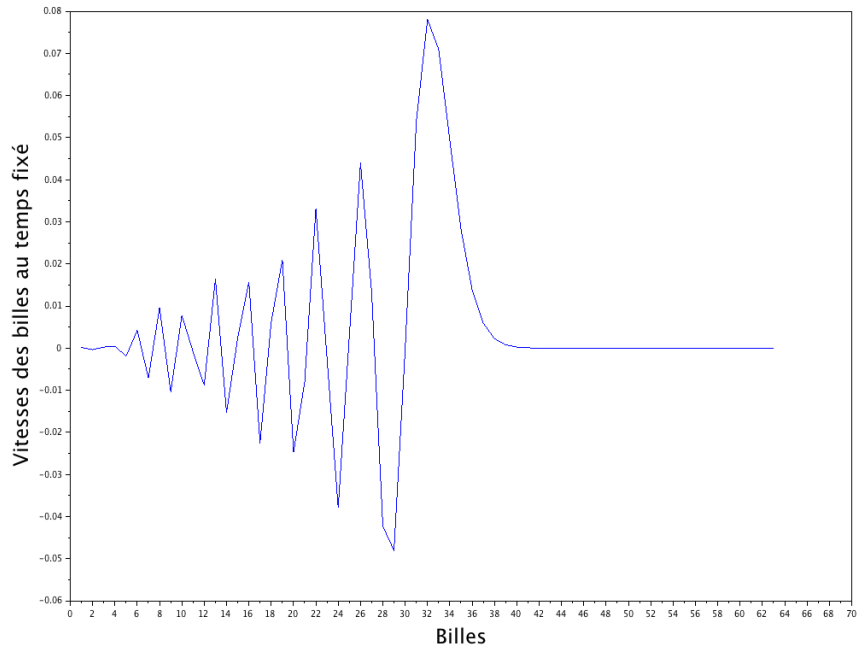


Figure 15: Vitesses au temps $t = T/4$ en fonction des billes

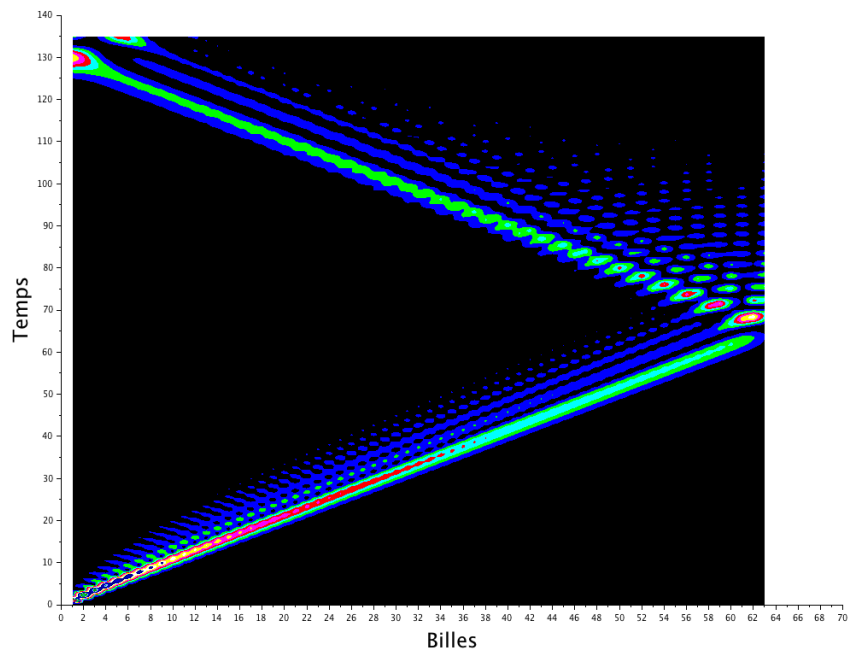


Figure 16: Graphe de l'energie cinétique $0.5m_i(v_i^{(k)})^2$ en fonction de i et k avec $p = 100$

Sur la figure 14, on peut vérifier que les billes se comportent comme des pendules qui oscillent successivement. En effet la force est exercée sur la bille 1 qui se stabilise rapidement, au bout d'un certain temps la bille 8 est percutée et se met à osciller, puis c'est au tour de la bille 32, et ainsi de suite. A $t = 135$, la bille 1 est repercutée et repart dans l'autre sens.

La figure 15 montre que l'oscillation des billes est asynchrone, en effet quand certaines billes oscillent dans un sens les autres oscillent dans le sens opposé.

De plus, on voit qu'au temps $t = T/4$ les billes numérotées à partir de $i = 38$ n'ont pas de vitesse car elles n'ont pas été percutées. Au temps $t = T/4 = 33.75$, "l'onde de choc" est au niveau de la bille 34 qui venait d'être percutée et qui a donc une vitesse maximale.

Ceci est en cohérence avec la figure 14 qui montre que la bille 32 est en mouvement à environ $t = 30 < T/4$ et que la bille 48 est en mouvement à environ $t = 45 > T/4$.

La figure 16 illustre la transmission de l'énergie cinétique sur les billes en fonction du temps. Comme illustré sur la figure 14, la bille n repercut la bille $n-1$ à $t = 68s$ (après avoir oscillé une demi-période) et c'est à ce moment là qu'on voit sur le graphe que l'énergie cinétique se transmet dans l'autre sens (de la bille n à la bille 1).

Le modèle non linéaire calculé à la question 10 ne met pas en exergue les oscillations des billes et prétend que les billes s'immobilisent dès qu'elles percutent leur bille voisine.

Question 20. Ci-dessous, voici le graphe demandé des rapport de vitesses maximales.

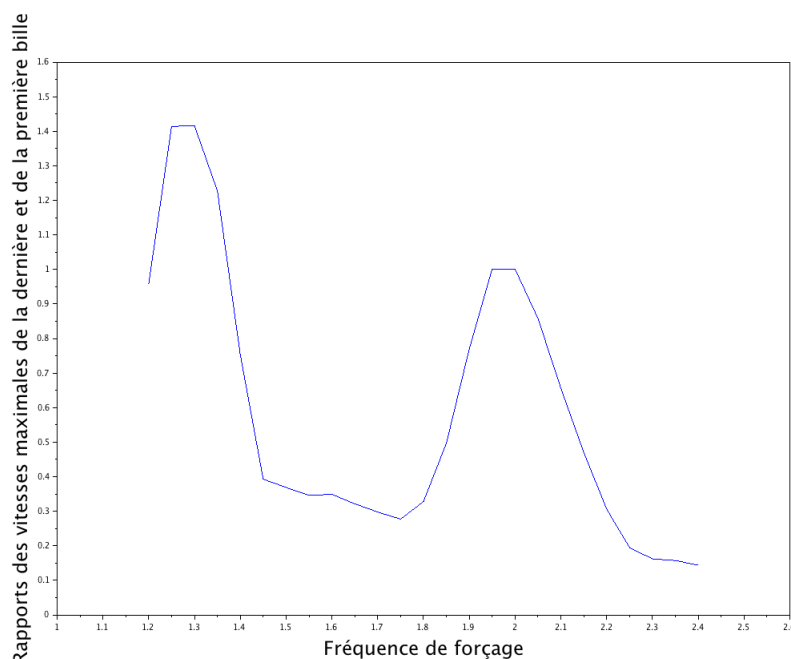


Figure 17: Rapports des vitesses maximales de la dernière bille et de la première bille, en fonction de la fréquence de forçage w

On observe que selon la fréquence de forçage la vitesse maximale de la $n^{\text{ème}}$ bille peut être plus ou moins grande que la vitesse de la première bille.

Pour $\omega < 1.4$ on a $\|v_n^{(\cdot)}\|_\infty > \|v_1^{(\cdot)}\|_\infty$ et pour $\omega > 1.4$ on a $\|v_n^{(\cdot)}\|_\infty < \|v_1^{(\cdot)}\|_\infty$.