TEORÍA DE LA DECISIÓN

Sesión #4:
Cierre de Teoría de la Utilidad y Tolerancia la Riesgo Corporativo

Prof. Brigitte Castañeda, Ph.D.

Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de los Andes

26 de agosto de 2026

Parte IV: Tolerancia Al Riesgo

Tolerancia al riesgo: contenido

1. **Tolerancia al Riesgo Corporativo:** definición, supuestos y propiedades básicas.
2. **Metodologías de estimación y aplicación:** métodos de estimación de la Tolerancia al Riesgo de un decisor. Selección de proyectos de inversión y alternativas de decisión.
3. **Caso de estudio en Colombia:** aplicación real en la industria para la estimación de la Tolerancia al Riesgo Corporativo.

** Basado en la tesis de Maestría de Andrea Soto Patiño (asesorada por el Prof. Mario Castillo, Universidad de los Andes, 2006) y en el trabajo fundamental sobre política de riesgo en exploración del Prof. Michael Walls (Colorado School of Mines, 1994).*

La función de tolerancia al riesgo

La función de **Tolerancia al Riesgo (RT)** $\rho(x)$ se define formalmente como (Kirkwood, 2002):

$$\rho(x) = \frac{1}{r(x)} = -\frac{u'(x)}{u''(x)}$$

donde $r(x)$ es la medida de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt.

Medición Monetaria

La Tolerancia al Riesgo se mide en **unidades monetarias** (USD, COP), lo que facilita enormemente su interpretación y estimación directa en comités directivos.

Para funciones de utilidad exponenciales $u(x) = -e^{-cx}$, se cumple que:

$$\rho(x) = \frac{1}{r(x)} = \frac{1}{c} = RT \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{u(x) = -e^{-\frac{x}{RT}}}$$

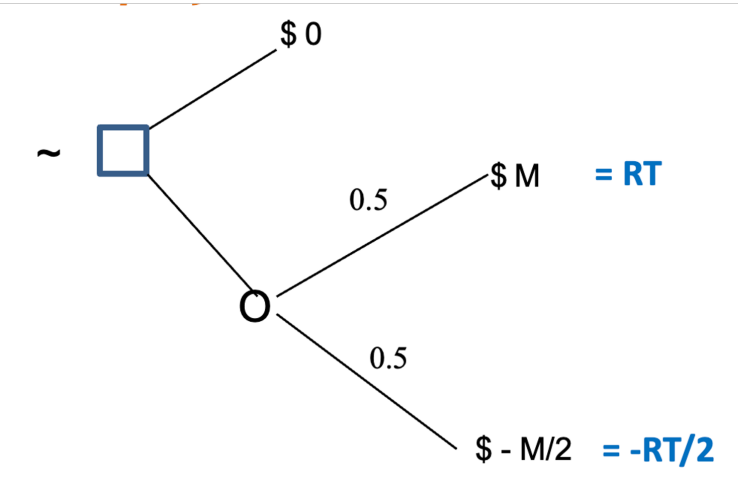
Nota: En el curso nos enfocaremos en la función de utilidad exponencial con parámetro RT constante.

Definición de Howard: estimación por lotería 50-50

Ronald A. Howard (1988) define la Tolerancia al Riesgo en términos de la indiferencia ante una lotería simétrica:

Definición de Howard

La **Tolerancia al Riesgo (RT)** es el valor monetario M que hace que el decisor sea **indiferente** entre su *statu quo* ($0) y participar en una lotería de ganar $\$M$ o perder $\$M/2$ con igual probabilidad (50 %).



Lotería	Valor de M	Valor de -$M/2$	Decisión
#1	$ 20	-$ 10.0	Acepta
#2	$ 25	-$ 12.5	*Indiferente*
#3	$ 30	-$ 15.0	Rechaza

En este caso la Tolerancia al Riesgo sería de $25 millones. Esta se halla evaluando en forma iterativa diferentes valores de M, hasta encontrar el punto de indiferencia.

Tolerancia al riesgo y equivalente monetario cierto

La Tolerancia al Riesgo cuantifica **la capacidad de la firma para asumir pérdidas en relación con el volumen de capital expuesto** (Walls, 1994).

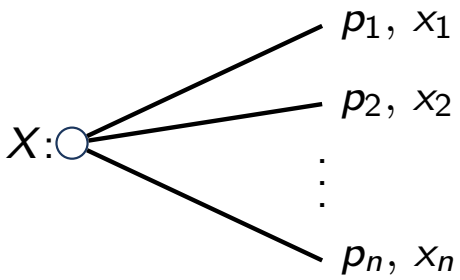
- Un mayor valor de $RT \implies$ menor aversión al riesgo.
- Si $RT \to \infty \implies$ el decisor se comporta como neutral al riesgo.

Para una lotería discreta X con pagos x_i y probabilidades p_i, con la siguiente f.u.:

$$\mathbf{u(x) = -e^{-x/RT}} \tag{1}$$

El **Equivalente Monetario Cierto (C_x)** se calcula analíticamente como:

$$\mathbf{C_x = -RT \ln \left(\sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\frac{x_i}{RT}} \right)} \tag{2}$$

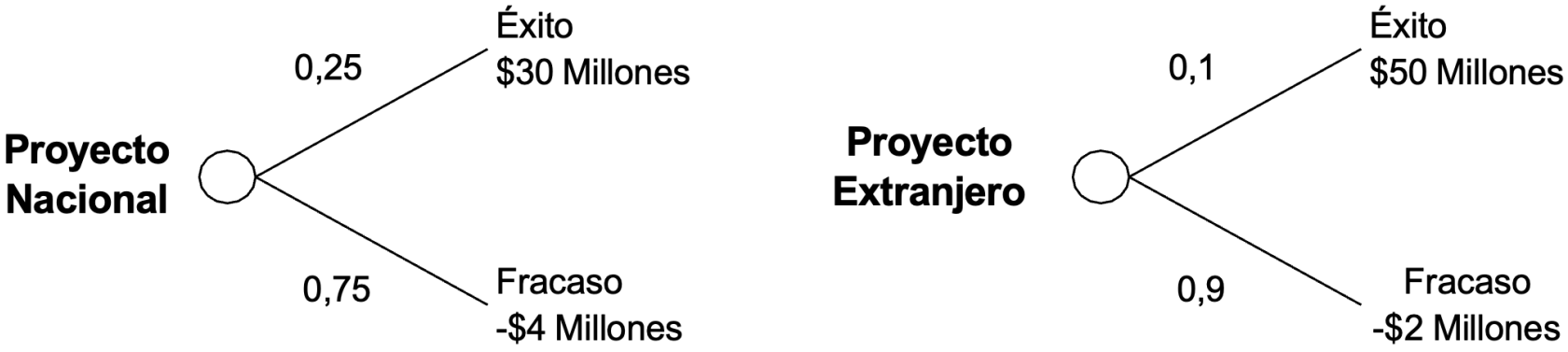


Si conocemos RT, se puede calcular el C_x de cualquier loteria discreta. Recíprocamente, observando el C_x asignado por un decisor, podemos inferir su RT.

Tolerancia al riesgo: loterías discretas y portafolio

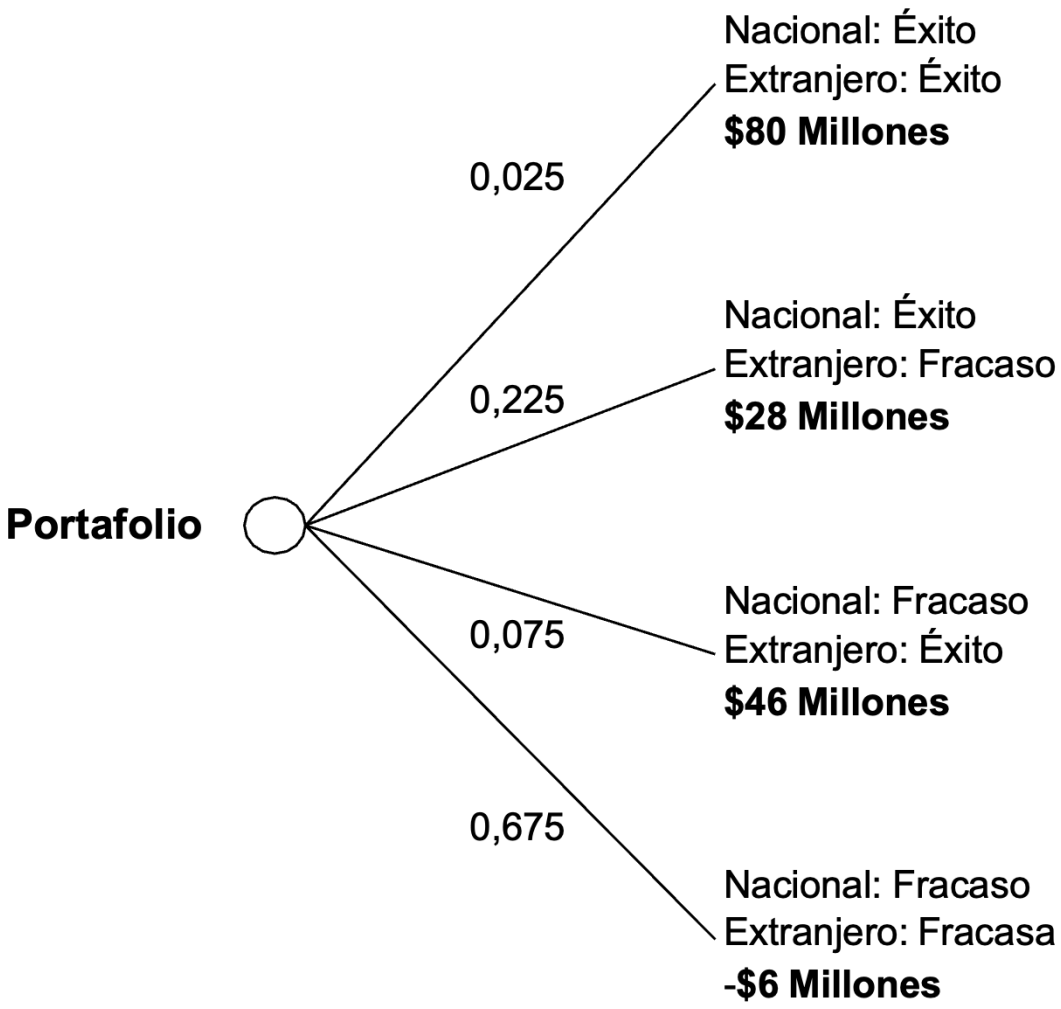
Cuando se considera el caso de un portafolio de inversiones, en donde cada inversión es una lotería con probabilidades asociadas a cada resultado, el portafolio debe simplificarse en una sola lotería para poder usar la Ecuación (2). En el caso en el que el portafolio esté constituido por pocas inversiones, es posible realizar una simplificación de este tipo.

Ejemplo: Una firma evalúa dos proyectos, uno nacional y otro extranjero, que son **independientes entre sí**, y tienen las siguientes características (millones de USD):



Lotería reducida del portafolio

Como ambos proyectos son estocásticamente independientes, construimos la lotería combinada del portafolio ($2 \times 2 = 4$ escenarios):



Evaluación del portafolio con utilidad exponencial

El Precio de Compra que la compañía le asigna a cada proyecto corresponde a la **cantidad invertida en cada proyecto,** pero dado que la función de utilidad es Exponencial, este valor es igual al EMC o C_x.

$$C_{\text{Portafolio}} = C_{\text{Nacional}} + C_{\text{Extranjero}}$$

Si, por ejemplo:
$C_{\text{Nacional}} = \$2{,}2$ M y $C_{\text{Extranjero}} = \$1{,}0$ M $\implies$ $\mathbf{C}_{\text{Portafolio}} = \$\mathbf{3{,}2}$ MUSD.
es decir, es la suma del equivalente monetario cierto de cada lotería, gracias a que la función de utilidad es de **tipo exponencial**.

Escenario		**Consecuencia**	**Probabilidad**
Nacional	**Extranjero**	**(MUSD)**	**Conjunta**
Éxito	Éxito	\$80	0,025
Éxito	Fracaso	\$28	0,225
Fracaso	Éxito	\$46	0,075
Fracaso	Fracaso	$-\$6$	0,675

Estimación computacional de la tolerancia al riesgo

Sustituyendo el $C_{\text{Portafolio}} = \$3{,}2$ M en la ecuación del equivalente cierto (2):

$$C_x = -RT \ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i e^{-x_i/RT} \right)$$

$$3.2 = -RT \ln\left(0.025 \times e^{-80/RT} + 0.225 \times e^{-28/RT} + 0.075 \times e^{-46/RT} + 0.675 \times e^{6/RT}\right)$$

No es posible despejar RT analíticamente. Recurrimos a una búsqueda numérica:

RT (Millones)	C_x **(Millones)**
\$35	2,72805
\$36	2,83007
\$37	2,92814
\$38	3,02246
\$39	3,11324
\$40	**3.20067**
\$41	3,28492

Resultado: Para un equivalente cierto observado de \$3,2 MUSD, la Tolerancia al Riesgo (RT) implícita de la compañía es de aproximadamente **\$40 Millones de USD**.

Equivalente monetario cierto: distribuciones continuas

Para funciones de utilidad exponenciales y proyectos con retornos distribuidos de forma **Normal** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, el *EMC* (C_x) adopta una forma elegante de media-varianza:

$$\mathbf{C_x} = \mu - \frac{\sigma^2}{\mathbf{2RT}}$$

- μ: Media esperada del retorno del proyecto ($\mathbb{E}[X]$).
- σ^2: Varianza de los retornos (medida de volatilidad o riesgo).
- RT: Tolerancia al Riesgo Corporativo.

Demostración:

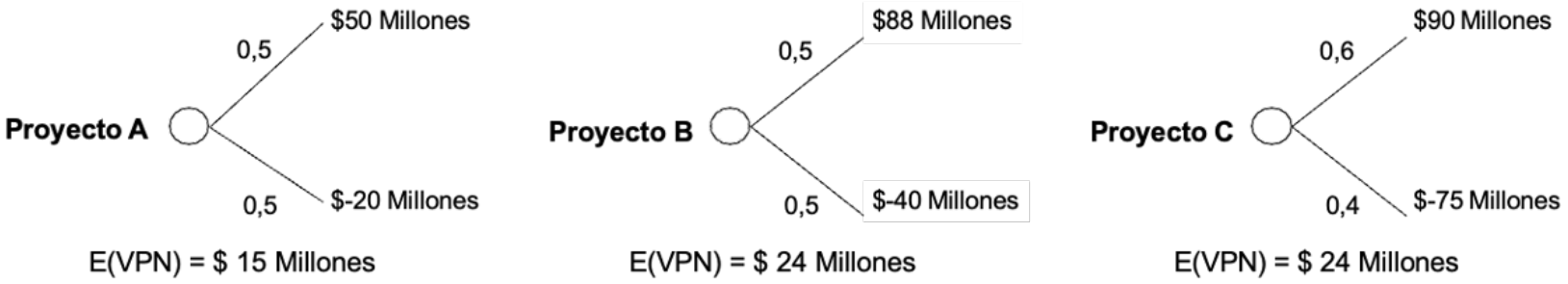
¡Ejercicio para la clase! *(Pista: Utilice la función generadora de momentos o la transformada exponencial de la distribución Normal* $T_X(s) = e^{-s\mu + s^2\sigma^2/2}$ *con* $s = 1/RT$*).*

Tolerancia al riesgo: síntesis de propiedades

- La Tolerancia el Riesgo es una medida del grado de aversión al riesgo de un decisor, incorporando la actitud del decisor hacia al riesgo y el valor que este le da al dinero.
- A medida que la Tolerancia el Riesgo aumenta, la aversión al riesgo del decisor disminuye.
- Permite comprar y distribuir recursos entre proyectos con diferente características de riesgo a través del Equivalente Monetario Cierto.
- Sirve para seleccionar el nivel de participación en una inversión, acorde con la capacidad de asumir riesgos de la empresa.
- Complementa otros indicadores como la TIR y el VPN.
- Permite comparar el nivel de aversión al riesgo entre compañías.

Aplicación: comparación de proyectos A, B y C

La comparación de las alternativas de una decisión se hace por medio de la comparación del EMC, Cx, correspondiente a cada alternativa.
Supongamos, por ejemplo, que una firma que debe decidir entre tres proyectos excluyentes con los siguientes perfiles de riesgo en VPN (en MUSD):



Dilema: Un decisor neutral al riesgo elegiría indiferentemente B o C ($\mathbb{E}[VPN] = \$24$ M). Sin embargo, para una firma aversa al riesgo, la pérdida probable de \$75 M en C o \$40 M en B puede ser catastrófica, debido a la mayor pérdida probable que estos implican.

Evaluando las alternativas por medio del EMC, suponiendo diferentes valores, $RT = \$120$ MUSD y $RT = \$250$ MUSD, para la Tolerancia al Riesgo de la compañía que debe decidir entre uno de estos proyectos. Podemos incorporar el perfil de riesgo de la compañía utilizando la ecuación (2):

$$\mathbf{C_x = -RT \ln \left(\sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\frac{x_i}{RT}} \right)} \tag{3}$$

obteniendo los siguientes resultados:

(0.5)*50+(0.5*-20)

	Proyecto A	Proyecto B	Proyecto C
E[VPN]	$ 15	$ **24**	$ **24**
C_X (RT=$120)	$ **9,9**	$ 7,7	$ -3,6
C_X (RT=$250)	$ 12,6	$ **15,9**	$ 10,6

-120*LN((0.5*EXP(-50/120))+(0.5*EXP(20/120)))

Conclusión de Estrategia Corporativa:

- Firma más conservadora ($RT = \$120$ M): **Elige el Proyecto A** ($9{,}9 > 7{,}7 > -3{,}6$).
- Firma con mayor capacidad de riesgo ($RT = \$250$ M): **Elige el Proyecto B** (15,9).

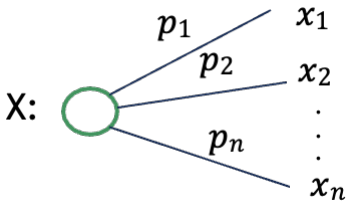
Nivel de participación (w) en proyectos de inversión

En la realidad, el nivel de participación que la empresa decide tener en cada proyecto por lo general es inferior al 100 %, y es una de las decisiones más importantes que se toman en el proceso de inversión y creación del portafolio.
Si w ($0 \leq w \leq 1$) representa el porcentaje de participación ade un decisor en un proyecto X, con f.u.:

$$\mathbf{u(x) = -e^{-x/RT}} \tag{4}$$

Entonces, la utilidad esperada pondera el retorno ajustado $w \cdot x_i$

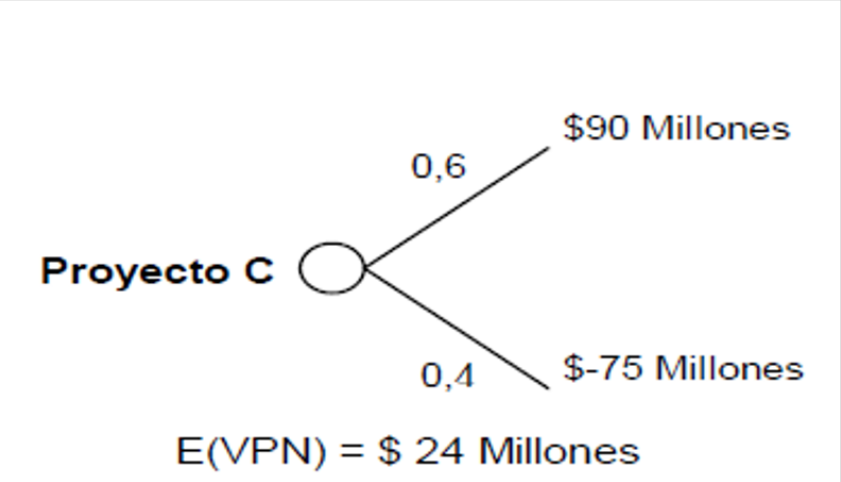
$$\mathbf{C_x(w) = -RT \ln \left(\sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\frac{w \cdot x_i}{RT}} \right)}$$



Optimización del Nivel de Participación
Existe un nivel óptimo $w^* \in (0, 1)$ que maximiza el valor del $C_x(w)$, permitiendo a la firma diversificar el riesgo mediante *Joint Ventures* o sindicación de proyectos.

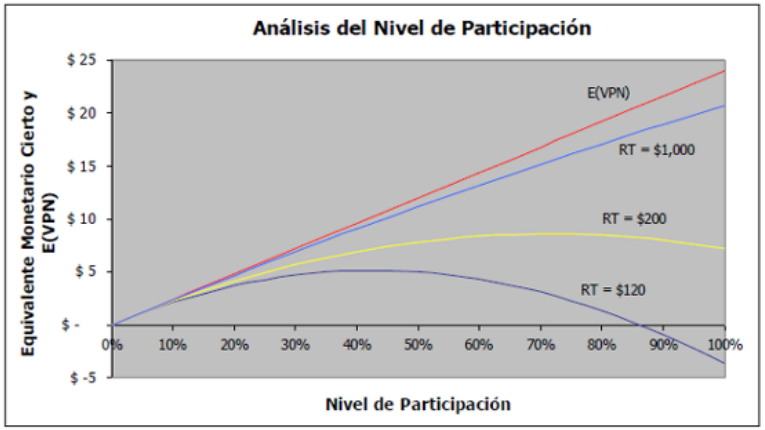
Tolerancia al riesgo: Nivel Óptimo de Participación

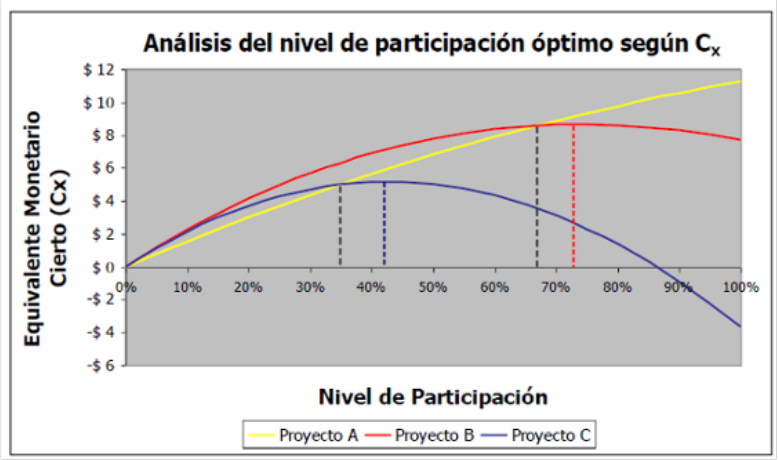
Ejemplo de Análisis acorde el nivel de participación cuando a) variamos el RT, b) RT fija.



Tolerancia al riesgo: Nivel Óptimo de Participación

Ejemplo de Análisis acorde el nivel de participación cuando a) variamos el RT, b) RT fija.





Ejemplo con RT de $25 Millones con dos proyectos A y B

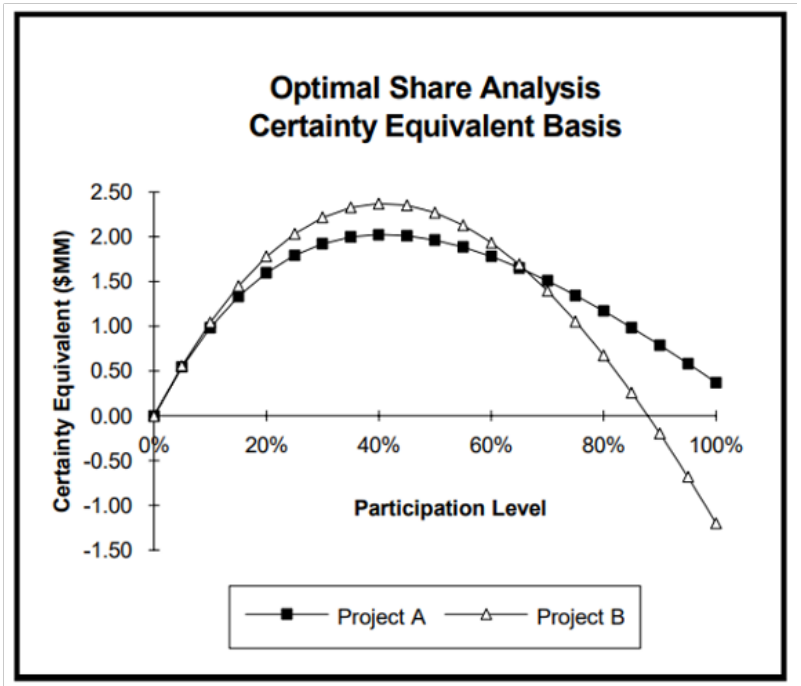


Figure 3. Optimal share analysis on a certainty equivalent basis provides guidance on the appropriate level of diversification. This analysis was based on a firm with a risk aversion coefficient, c, of 0.04 x 10^{-6}

Ref: Walls, M. 1994.

Metodologías para estimar la tolerancia al riesgo

Metodología 1: **Lotería 50-50 (Howard):** Punto de indiferencia M entre statu quo y lotería ganar M/perder $M/2$.

Metodología 2: **Reglas empíricas e indicadores financieros (Howard):**

- $RT = 6{,}5\,\% \times$ Ventas
- $RT = 125\,\% \times$ Utilidad Neta
- $RT = 15{,}7\,\% \times$ Patrimonio

Metodología 3: **Análisis de decisiones e inversiones pasadas:**

$$RT = \frac{\sigma^2}{2(\mu - P)}$$

donde $P = C_x$ es el presupuesto/precio invertido en el proyecto.

Metodología 4: **Encuestas específicas de industria (Walls, 1994).**

Metodología 4: Encuesta específica de industria

Encuesta de Tolerancia al Riesgo

Suponga que a usted le proponen los siguientes proyectos de exploración como posibles inversiones del presupuesto anual de la compañía. Dadas las características de riesgo de cada una de las alternativas, seleccione el nivel de participación que recomendaría para cada proyecto. Haga sus decisiones basado en el presupuesto anual normal y sus limitaciones.

Proj.	Outcome	Value	Prob.	Choice (circle one) Participation Level (%)					
1	Success	35.0	.50	100	75	50	25	12.5	0
	Failure	-15.0	.50						
2	Success	45.0	.15	100	75	50	25	12.5	0
	Failure	-3.0	.85						
3	Success	22.0	.30	100	75	50	25	12.5	0
	Failure	-4.0	.70						
4	Success	14.0	.80	100	75	50	25	12.5	0
	Failure	-9.5	.20						
5	Success	16.0	.20	100	75	50	25	12.5	0
	Failure	-1.4	.80						

Walls,. M. 1994. Corporate Risk Tolerance and Capital Allocation: A practical Approach o setting and imprementing and exploration Risk policy.

Metodología 4: Encuesta específica de industria

Para cada proyecto en la encuesta se hace un análisis computacional de la siguiente forma:

Análisis del Equivalente Monetario Cierto
Proyecto #2

Probabilidad de éxito	15%
Probabilidad de fracaso	85%
VPN dado éxito	$ 45 millones
VPN dado fracaso	$ -3 millones

Basado en las opciones elegidas, para cada proyecto (P), en este caso el ejemplo del P2 y usando la ecuación de la derech y los RTs implícitos, resolvemos Cx para cada nivel de participación, w.

$$C_x = -RT \ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i e^{-w*x_i/RT}\right)$$

Project #2 - Certainty Equivalent Valuation
($ Millions)

RT $Million	100% W.I.	75% W.I.	50% W.I.	25% W.I.	12.5% W.I.
$1000	4.05	3.07	2.06	1.04	0.52
$100.0	2.89	2.39	1.75	0.96	0.50
$50.0	1.86	1.76	1.44	0.88	0.48
$33.3	1.05	1.23	1.17	0.80	0.46
$25.0	0.42	0.79	0.93	0.72	0.44
$20.0	-0.07	0.43	0.62	0.65	0.42
$13.3	-0.90	-0.24	0.28	0.49	0.37
$10.0	-1.39	-0.67	-0.03	0.36	0.33
$5.0	-2.19	-1.44	-0.69	-0.02	0.18
$2.5	-2.59	-1.84	-1.09	-0.35	-0.01

Notar que solo al nivel de RT de $25 M, hace que el Cx al 50% de participación, domina todas los demás niveles de participación en términos de la valoración por el equivalente cierto Cx en $Millones.

Walls,. M. 1994. Corporate Risk Tolerance and Capital Allocation: A practical Approach o setting and imprementing and exploration Risk policy.

Caso de aplicación: encuestas de industria (Walls, 1994)

Aplicación de encuestas a comités directivos de exploración petrolera para estimar el RT corporativo implícito ante 15 proyectos reales evaluando niveles de participación $w \in \{100\,\%, 75\,\%, 50\,\%, 25\,\%, 12{,}5\,\%\}$.

Regla Empírica de Industria (Regla de Dedo)

A partir del análisis de 18 compañías de exploración y producción (E&P), se halló que como primera aproximación:

$$\mathbf{RT} \approx \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \times \text{Presupuesto Anual de Exploración}$$

Ejemplo: Para un presupuesto de $40 MUSD, la RT estimada es de $10 MUSD.

Escenario Presupuestal	**RT Promedio Estimad**
Presupuesto: $120 MUSD	$109,06 MUSD
Presupuesto: $180 MUSD	$173,82 MUSD
Sin Límite Presupuestal	$189,71 MUSD

Resultado del Caso: La RT actualizada para la unidad de negocio se reajustó de **$45 MUSD** a un rango entre **$170 y $190 MUSD**.