

## 6 Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

### 6.1 Методы решения задачи Коши. Вводные замечания

Для простоты изложения основных идей вычислительных методов решения задач с начальными условиями будем рассматривать, как правило, случай одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Обычно эти идеи легко переносятся на системы уравнений первого порядка и сравнительно просто обобщаются на случай уравнений высших порядков.

Пусть на отрезке  $x_0 \leq x \leq X$  требуется найти решение  $y(x)$  дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \quad (6.1)$$

удовлетворяющее при  $x = x_0$  начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \quad (6.2)$$

Условия существования и единственности решения поставленной задачи Коши будем считать выполненными. Будем предполагать также, что функция  $f(x, y)$  в некоторой области изменения ее аргументов обладает необходимой по ходу изложения дополнительной гладкостью. Основной нашей целью на данном этапе будет построение вычислительных правил нахождения приближенного решения рассматриваемой задачи.

В вычислительной практике иногда используют аналитический метод, основанный на идее разложения в ряд решения рассматриваемой задачи Коши. Особенно часто для этих целей используют ряд Тейлора. В этом случае вычислительные правила строятся особенно просто. Приближенное решение  $y_m(x)$  исходной задачи ищут в виде

$$y_m(x) = \sum_{i=0}^m \frac{(x - x_0)^i}{i!} y^{(i)}(x_0), \quad x_0 \leq x \leq X, \quad (6.3)$$

где  $y^{(0)}(x_0) = y(x_0) = y_0$ ,  $y^1(x_0) = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ ,

а значения  $y^{(i)}(x_0)$ , находят по формулам, полученным последовательным дифференцированием уравнения (6.1):

$$y^{(2)}(x_0) = y''(x_0) = f_x(x_0, y_0) + f(x_0, y_0)f_y(x_0, y_0),$$

$$y^{(3)}(x_0) = y'''(x_0) = f_{xx}(x_0, y_0) + 2f(x_0, y_0)f_{xy}(x_0, y_0) + f^2(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) + \quad (6.4)$$

$$+ f_y(x_0, y_0)[f_x(x_0, y_0) + f(x_0, y_0)f_y(x_0, y_0)],$$

... ..

$$y^{(m)}(x_0) = F_m(f, f_x, f_y, f_{x^2}, f_{xy}, f_{y^2}, \dots, f_{x^{m-1}}, \dots, f_{y^{m-1}})_{x=x_0, y=y_0}$$

(конкретный вид многочлена  $F_m$  не приведен из-за громоздкой записи). Для значений  $x$ , близких к  $x_0$ , **метод рядов** (6.3) при достаточно большом  $m$  дает обычно хорошее приближение к точному решению  $y(x)$  задачи (6.1), (6.2).

Однако с увеличением расстояния  $|x - x_0|$  погрешность приближенного равенства  $y(x) \approx y_m(x)$ , вообще говоря, возрастает по абсолютной величине и правило (6.3) становится вовсе неприемлемым, когда  $x$  выходит из области сходимости соответствующего (6.3) ряда Тейлора.

Предпочтительными в таких случаях будут, например, численные методы решения задачи Коши, позволяющие в некоторых попарно близких друг другу фиксированных точках (узлах)

$$x_0 < x_1 < \dots < x_N = X \quad (6.5)$$

последовательно находить значения  $y_n \approx y(x_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , приближенного решения.

Сходимость методов подобного типа не так жестко связана с длиной отрезка  $[x_0, X]$ , и их чаще кладут в основу стандартных программ для ЭВМ. Таким методам ниже будет уделено основное внимание.

Большинство численных методов решения рассматриваемой задачи Коши можно привести к виду

$$y_{n+1} = F(y_{n-q}, y_{n-q+1}, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+s}), \quad (6.6)$$

где  $F$  – некоторая известная функция указанных аргументов, определяемая способом построения метода и зависящая от вида уравнения (6.1) и избранной сетки (6.5). При  $q = 0$ ,  $0 \leq s \leq 1$  такие вычислительные правила обычно

называют *одношаговыми*, а при  $q = 1$  или  $s > 1$  – *многошаговыми*. Как одношаговые, так и многошаговые методы вида (6.6) называют *явными* в случае  $s = 0$  и  *неявными* при  $s = 1$ .

В случае  $s > 1$  многошаговые правила часто называют методами с *забеганием вперед*.

## 6.2 Построение одношаговых методов

Будем считать, что процесс решения задачи (6.1), (6.2) доведен до точки  $x_n$  ( $0 \leq n < N$ ), и известно (точно или приближенно) соответствующее значение  $y(x_n)$  искомого решения. Построим вычислительное правило для нахождения значения решения в очередной узловой точке  $x_{n+1} = x_n + h_n$  сетки (6.5). Поскольку при построении одношаговых методов используется информация о решаемой задаче лишь в пределах одного шага интегрирования, то можно без ущерба для понимания не писать индекс, обозначающий номер шага процесса.

Чтобы по известному значению  $y(x)$  соответствующего решения дифференциального уравнения (6.1) в узловой точке  $x \geq x_0$  найти значение этого решения в очередной точке  $x + h$  сетки (6.5), можно, очевидно, воспользоваться вычислительным правилом типа (6.3), положив там  $x_0$  и взяв вместо текущей точки  $x$  отрезка  $[x_0, X]$  узловую точку  $x + h$ . Это позволит записать приближенное равенство

$$y_m(x) \approx \sum_{i=0}^m \frac{h^i}{i!} y^{(i)}(x), \quad (6.7)$$

которое может быть положено в основу соответствующего одношагового метода, если для вычисления значений  $y^{(i)}(x)$ ,  $i = 2, 3, \dots, m$ , использовать формулы типа (6.4). При условии, что данное решение уравнения (6.1) имеет на рассматриваемом отрезке непрерывную производную порядка  $m + 1$ , погрешность приближенного равенства (6.7) будет, очевидно, величиной порядка  $h^{m+1}$  и при малых  $h > 0$  и больших  $m$  построенный пошаговый вариант метода рядов будет давать, как правило, достаточно хорошее приближение к искомому значению решения. Привлекательной чертой полученного вычислительного метода является то обстоятельство, что искомое значение приближенного решения разложено по последовательным главным частям. Это позволяет в процессе решения задачи без дополнительных вычислительных затрат по величине последних слагаемых суммы (6.7) составить представление о локальной погрешности

приближенного решения (погрешности нахождения значения  $y(x+h)$  в предположении, что значение  $y(x)$  известно точно). Однако такой одношаговый метод интегрирования дифференциальных уравнений при  $m > 1$  все же редко используется в практике вычислений, так как его применение требует на каждом шаге нахождения значений  $\frac{m(m+1)}{2}$  различных функций  $f, f_x, f_y, f_{x^2}, f_{xy}, f_{y^2}, \dots, f_{x^{m-1}}, \dots, f_{y^{m-1}}$ . При использовании ЭВМ это сопряжено с написанием большого числа блоков вычисления значений указанных функций, что осложняет связь пользователя с машиной и увеличивает, как правило, время решения задачи. Поэтому данный метод редко кладут в основу стандартных программ решения задач Коши, хотя в специальных частных случаях (например, когда приходится многократно решать задачи, отличающиеся лишь начальными данными или мало отличающиеся правыми частями уравнений) использование метода может быть оправданным. В общем случае стандартные программы чаще строятся с использованием вычислительных методов, не требующих нахождения значений производных от правых частей уравнений. Ниже будут рассмотрены основные способы построения таких методов.

Естественно поставить задачу о таком усовершенствовании приведенного выше одношагового метода, которое сохраняло бы основные его достоинства, но не было связано с нахождением значений производных правой части уравнения (6.1). Чтобы выполнить последнее условие, производные  $y^{(i)}(x), i = 2, 3, \dots, m$ , входящие в правую часть равенства (6.1), можно заменить по формулам численного дифференцирования их приближенными выражениями через значения функции  $y'$  и учесть, что  $y'(x) = f[x, y(x)]$ . Требование одношаговости конструируемых правил накладывает при этом свои условия на такую замену. Ниже на конкретных примерах будет рассмотрен один из возможных подходов к решению поставленной задачи.

В случае  $m = 1$  приближенное равенство (6.7) не требует вычисления производных правой части уравнения (6.1) и позволяет с погрешностью порядка  $h^2$  находить значение  $y(x_n + h)$  решения этого уравнения по известному его значению  $y(x_n)$ . Соответствующее одношаговое правило можно записать в виде

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hf(x_n, y_n). \quad (6.8)$$

Правило (6.8) впервые было построено Эйлером и носит его имя. Иногда его называют также **правилом ломаных** или методом **касательных**, чем

подчеркивают простой геометрический смысл формулы. Геометрическая интерпретация одного шага метода Эйлера заключается в аппроксимации решения на отрезке  $[x_n, x_{n+1}]$  касательной

$$y = y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n),$$

проведенной в точке  $(x_n, y_n)$ , к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Таким образом, после выполнения  $N$  шагов интегральная кривая заменяется ломаной линией (ломаной Эйлера).

Погрешность  $r_{n+1}$  этой формулы можно, очевидно, записать в виде

$$r_{n+1} = \frac{h^2}{2} y''(x_n + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

При  $m = 2$  приближенное равенство (6.7) требует вычисления производной  $y''(x_n)$  и дает возможность находить значение  $y(x_n + h)$  с локальной ошибкой порядка  $h^3$ . Чтобы не понизить порядок погрешности приближенного равенства

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n), \quad (6.9)$$

значение производной  $y''(x_n)$  необходимо найти по крайней мере не хуже, чем с ошибкой порядка  $h$ , для чего, очевидно, достаточно иметь два значения функции

$$y'(x) = f[x, y(x)] \text{ из отрезка } x_n \leq x \leq x_n + h \quad (0 < h < 1).$$

В точке  $x_n$  значением  $f_n$  этой функции мы уже располагаем, так как по предположению, на предыдущем шаге процесса было найдено  $y_n$ . Найдем теперь еще значение функции  $y'$  в точке  $x_n + h^i (i \geq 1)$ . Для этого с учетом уравнения (6.1) достаточно указать правило вычисления  $y(x_n + h^i)$ .

Очевидно,  $y(x_n + h^i) = y(x_n) + h^i y'(x_n) + O(h^{2i})$ . Поэтому справедлива следующая расчетная формула

$$y(x_n + h^i) = y(x_n) + h^i f(x_n, y_n). \quad (6.10)$$

Так как

$$y''(x_n) = \frac{y'(x_n + h^i) - y'(x_n)}{h^i} + O(h^i),$$

$$y'(x_n + h^i) = f[x_n + h^i, y(x_n + h^i)],$$

То на основании (6.9) можно записать

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hf(x_n, y_n) + \frac{h^{2-i}}{2} (f[x_n + h^i, y(x_n + h^i)] - f(x_n, y_n)). \quad (6.11)$$

Формулы (6.10), (6.11) можно рассматривать как семейство (зависящих от параметра  $i \geq 1$ ) одношаговых методов решения задачи Коши (6.1), (6.2) с локальной погрешностью порядка  $h^3$ .

При  $i = 1$  эти формулы принимают вид

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hf + O(h^2). \quad (6.12)$$

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hf(x_n, y_n) + \frac{h}{2} (f[x_n + h, y(x_n + h)] - f(x_n, y_n)) + O(h^3). \quad (6.13)$$

Они имеют предсказывающе-исправляющий характер: формула (6.12) служит для получения грубого приближения искомой величины  $y(x_n + h)$ , а по формуле (6.13) производится уточнение полученного значения. Сравнение  $y(x_n + h)$  формул (6.12) и (6.13), дает возможность судить о локальной погрешности результата.

Заметим, что иногда на основе формулы (6.13) бывает полезным сделать одну итерацию. Это может (при сохранении порядка погрешности) несколько повысить точность приближения величины  $y(x_n + h)$ . К существенному увеличению объема вычислений эта итерация не приведет, так как значение  $f_{n+1}$ , которое при этом необходимо будет вычислить, можно использовать в качестве  $f_n$  на следующем этапе вычислений.

В случае  $i = 2$  формулы (6.10), (6.11) имеют вид

$$y(x_n + h^2) = y(x_n) + h^2 f(x_n, y_n) + O(h^4). \quad (6.14)$$

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hf(x_n, y_n) + \frac{1}{2} (f[x_n + h^2, y(x_n + h^2)] - f(x_n, y_n)) + O(h^4). \quad (6.15)$$

Увеличение значения  $i$  на единицу позволило, вообще говоря, несколько улучшить структуру остаточного члена вычислительного правила. Если в случае правила (6.12), (6.13) погрешность складывалась из одного слагаемого вида  $\frac{h^3}{6} y'''(x_n + \theta h)$ ,  $0 < \theta < 1$ , представляющего собой ошибку

приближенного равенства (6.9), и еще двух слагаемых также порядка  $h^3$ , порождаемых соответственно неточностью замены производной  $y''$  и ошибкой формулы Эйлера (6.10). То в случае (6.14), (6.15) два последних слагаемых остаточного члена будут уже, очевидно, величинами порядка  $h^4$ . При  $i = 3$  соответствующие слагаемые остатка станут величинами порядка  $h^5$  и т. д. Однако, увеличение значения  $i$ , улучшая структурные свойства остаточного члена вычислительного правила, предъявляет повышенные требования к выполнению вычислений, так как в этом случае в силу ограниченности разрядной сетки ЭВМ возможна потеря точности результата за счет операций вычитания близких величин и деления на малые по абсолютному значению числа.

Описанным способом можно строить вычислительные методы более высокого порядка точности. Следует, однако, заметить что при больших значениях  $m$  построение таких методов связано с приближенной заменой производных высоких порядков по интерполяционным формулам численного дифференцирования. Эта процедура, как известно сопряжена обычно с повышенными требованиями к точности выполнения вычислений.

Рассмотрим другие способы получения одношаговых методов, которые непосредственно не связаны с подобной аппроксимацией производных.

### 6.3 Метод Рунге-Кутты

Изложим основную идею этого способа на примере задачи (6.1), (6.2)

Интегрируя уравнение (6.1) в пределах от  $x$  до  $x + h$  ( $0 < h < 1$ ), получим равенство

$$y(x + h) = y(x) + \int_x^{x+h} f[t, y(t)] dt, \quad (6.15)$$

которое посредством последнего интеграла связывает значения решения рассматриваемого уравнения в двух точках, удаленных друг от друга на расстояние шага  $h$ . Указав эффективный метод приближенного вычисления интеграла в (6.15), мы получим тем самым одно из правил численного интегрирования уравнения (6.1). В силу требования одношаговости конструируемых вычислительных правил при нахождении значения указанного интеграла мы можем использовать информацию об интегрируемой функции  $y'(t) = f[t; y(t)]$  лишь на отрезке  $[x, x + h]$ . По постановке задачи значение этой функции в точке  $x$  нам известно. Поэтому

для вычисления интеграла можно применить, например, односточную формулу левых прямоугольников

$$\int_a^b \varphi(t) dt \approx (b - a)\varphi(a).$$

В результате мы получим, очевидно, известный метод Эйлера. Погрешность этого метода, как мы уже отмечали, является величиной порядка  $h^2$ .

По формулам типа (6.4) в точке  $x$  можно найти и значения производных

$y^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , интегрируемой функции  $y'$ . Используя для наших целей квадратурную формулу с единственным кратным узлом на левом конце отрезка интегрирования, мы придем к пошаговому варианту типа (6.7) метода рядов.

Если же интеграл в (6.15) приближенно заменить квадратурной суммой двухточечной формулы трапеций, получим приближенное равенство

$$y(x + h) \approx y(x) + \frac{h}{2} [f(x, y(x)) + f(x + h, y(x + h))],$$

которое позволяет записать так называемый метод *трапеций* численного интегрирования уравнения (6.1):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_{n+1})]. \quad (6.16)$$

Погрешность последней формулы будет величиной порядка  $h^3$ .

Равенство (6.16) дает нам пример **неявного одношагового метода**. Незвестное значение  $y_{n+1}$  здесь приходится находить путем решения, численного уравнения (6.16). Обычно для этих целей используют итерационные методы. Подробнее на неявных методах решения дифференциальных уравнений мы остановимся несколько позже, а сейчас отметим лишь, что на основе равенства (6.16) с использованием формулы Эйлера (6.8) можно очевидным образом построить известное уже нам явное вычислительное правило (6.12), (6.13) типа предиктор-корректор того же порядка точности.

Более сложный пример неявного метода можно получить, если и на правом конце отрезка  $[x; x + h]$  через значение функции  $y(x + h)$  при помощи формул типа (6.4) выразить значения производных  $y^{(i)}(x + h)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , и применить для вычисления интеграла в (6.15) соответствующую



квадратурную формулу с двумя кратными узлами  $x$  и  $x + h$ . Однако использование такого неявного метода потребует на каждом шаге итераций вычисления значений производных правой части уравнения, что, как отмечали ранее, является существенным недостатком вычислительного правила. Чтобы построить методы более высокого порядка точности, не связанные с вычислением производных функции  $f[x; y(x)]$ , нужно привлечь дополнительную информацию по значениям интегрируемой функции. Поскольку эта функция, как функция одного аргумента  $x$ , в случае задачи Коши (6.1), (6.2), в отличие от ее частного случая – рассмотренной уже нами ранее задачи вычисления неопределенного интеграла, – вообще говоря, неизвестна внутри отрезка интегрирования  $[x; x + h]$ , то использовать непосредственно квадратурные формулы с числом узлов  $N > 2$  не удастся. Поэтому в способе Рунге-Кутты применяют следующий специальный метод приближенного вычисления интеграла в (6.15).

Для удобства записи используем обозначение  $\Delta y = y(x + h) - y(x)$  и равенству (6.15) придадим новый вид, произведя замену переменной интегрирования  $t = x + \alpha h$

$$\Delta y = h \int_0^1 f[x + \alpha h, y(x + \alpha h)] d\alpha, \quad (6.16)$$

Чтобы на основе (6.16) построить одношаговый метод численного интегрирования уравнения (6.1), введем три набора параметров:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q; \quad (\alpha)$$

$$\beta_{10},$$

$$\beta_{20}, \beta_{21},$$

$$\dots \dots \dots (\beta)$$

$$\beta_{q0}, \beta_{q1}, \dots, \beta_{q,q-1};$$

$$A_0, A_1, \dots, A_q, \quad (A)$$

выбором которых распорядимся в дальнейшем. При помощи двух первых наборов составим величины

$$\varphi_0 = hf(x, y),$$

$$\varphi_1 = hf(x + \alpha_1 h, y + \beta_{10} \varphi_0),$$

$$\varphi_2 = hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{20}\varphi_0 + \beta_{21}\varphi_1),$$

... ..

$$\varphi_q = hf(x + \alpha_q h, y + \beta_{q0}\varphi_0 + \beta_{q1}\varphi_1 + \dots + \beta_{q,q-1}\varphi_{q-1}),$$

которые при заданных  $(\alpha)$  и  $(\beta)$  могут быть вычислены последовательно.

Хотя  $\varphi_i = hf(x + \alpha_i h, y + \beta_{i0}\varphi_0 + \dots + \beta_{i,i-1}\varphi_{i-1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ ,

вообще говоря, не равны значениям  $hf[x + \alpha_i h, y(x + \alpha_i h)]$ ,

однако при соответствующем выборе параметров  $(\beta)$  их можно трактовать как приближенные значения интегрируемой функции  $f[x + \alpha h, y(x + \alpha h)]$ , умноженные на  $h$ : Это дает основание надеяться при помощи параметров  $(A)$  составить такую линейную комбинацию величин  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ , которая будет являться аналогом квадратурной суммы и позволит вычислить приближенное значение приращения  $\Delta y$ :

$$\Delta y \approx \sum_{i=0}^q A_i \varphi_i. \quad (6.17)$$

Тем самым параметрам  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  и  $(A)$  можно придать некоторый квадратурный смысл.

Рассмотрим теперь задачу выбора этих параметров. Введем величину

$$r_q(h) = \Delta y - \sum_{i=0}^q A_i \varphi_i. \quad (6.18)$$

представляющую собой погрешность приближенного равенства (6.17). В предположении, что правая часть уравнения (6.1) является достаточно гладкой функцией, запишем следующее разложение этой величины:

$$r_q(h) = \sum_{j=0}^k \frac{h^j}{j!} r_q^{(j)}(0) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} r_q^{(k+1)}(\theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

На основании этого разложения можно утверждать, что если параметры  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  и  $(A)$  подобрать так, чтобы выполнялись условия

$$r_q^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k, \quad (6.19)$$

то погрешность (6.18) приближенного равенства (6.17) будет величиной порядка не ниже  $h^{k+1}$ :

$$r_q(h) = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} r_q^{(k+1)}(\theta h). \quad (6.20)$$

Число  $k$  при этом обычно называют **порядком точности** соответствующего метода. Такому определению порядка точности метода можно дать следующее объяснение. В случае рассматриваемой задачи Коши (6.1), (6.2), как и в случае изученной ранее задачи неопределенного интегрирования, оказывается, что, если погрешность типа (6.18) расчетной формулы данного метода является величиной порядка  $h^{k+1}$  в достаточно широкой окрестности решения, то погрешность метода (та часть погрешности приближенного решения, которая определяется лишь неточностью самой формулы) для случая конечного отрезка интегрирования будет величиной порядка  $h^k$ . Доказательство этого факта будет приведено несколько позже, а сейчас продолжим рассмотрение вопроса о построении вычислительных правил по способу Рунге-Кутты.

Для выполнения условий (6.19) при возможно большем значении  $k$  величины  $r_q^{(j)}(0)$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$  выражают через значения функции  $f(x, y)$  и ее частных производных и требуют обращения в нуль возможно большего числа этих величин для любой достаточно гладкой функции  $f$ . Иными словами, выбор параметров  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  и  $(A)$  осуществляют на основании требования, чтобы разложение

$$\Delta y = y(x+h) - y(x) = \frac{h}{1!} y'^{(x)} + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \dots \quad (6.21)$$

и разложение по степеням  $h$  линейной комбинации  $\sum_{i=0}^q A_i \varphi_i$  совпадали до членов с возможно более высокими степенями  $h$  в случае любой правой части уравнения (6.1).

При произвольном  $q$  систему уравнений для определения параметров  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  и  $(A)$  записать очень трудно. Поэтому мы ограничимся здесь рассмотрением лишь нескольких конкретных примеров построения одношаговых правил указанным способом.

**Метод первого порядка точности.** Зададимся минимальным значением  $q = 0$ , что равнозначно введению лишь одного параметра  $A_0$ . Приближенное равенство (6.17) в этом случае принимает вид

$$\Delta y \approx A_0 \varphi_0 = h A_0 f(x, y).$$

И погрешность (6.18) может быть записана следующим образом:

$$r_0(h) = y(x+h) - y(x) - h A_0 f(x, y).$$

Тогда

$$r_0'(h) = y'(x+h) - A_0 f(x, y),$$

$$r_0''(h) = y''(x+h).$$

Так как  $r_0''(h)$  не зависит от  $A_0$ , то уже при  $j = 2$  условие (6.19) в случае произвольной функции  $f$  удовлетворено быть не может. Поэтому  $k = 1$  и система (6.19) принимает вид  $(1 - A_0)f(x, y) = 0$ .

Отсюда находим, что  $A_0 = 1$ . Следовательно,

$$\Delta y \approx h f(x, y)$$

$$\text{и } r_0(h) = \frac{h^2}{2} r_0''(\theta h) = \frac{h^2}{2} y_0''(x + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

В простейшем случае  $q = 0$ , таким образом, способ Рунге-Кутты приводит известному методу Эйлера (6.8). Квадратурный смысл этого вычислительного правила был уже выяснен.

**Методы второго порядка точности.** При  $q = 1$  имеем

$$\Delta y \approx A_0 \varphi_0 + A_1 \varphi_1 = h A_0 f(x, y) + h A_1 f(x + \alpha_1 h, y + \beta_{10} f(x, y)).$$

С целью выбора введенных параметров  $\alpha_1, \beta_{10}, A_0, A_1$ , разложим  $\Delta y$  и  $A_0 \varphi_0 + A_1 \varphi_1$  по степеням  $h$ .

Разложение (6.21) для  $\Delta y$  с учетом (6.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta y &\approx y(x+h) - y(x) = \\ &= h f + \frac{h^2}{2} (f_x + f f_y) + \frac{h^3}{6} [f_{xx} + 2 f f_{xy} + f^2 f_{yy} + f_y (f_x + f f_y)] \\ &+ O(h^4). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Используя формулу Тейлора, для линейной комбинации  $A_0 \varphi_0 + A_1 \varphi_1$  можно дать следующее представление:

$$A_0 \varphi_0 + A_1 \varphi_1 = h(A_0 + A_1)f +$$

$$+h^2 A_1 (\alpha_1 f_x + \beta_{10} f f_y) + \frac{h^3}{2} A_1 [\alpha_1^2 f_{xx} + 2\alpha_1 \beta_{10} f f_{xy} + \beta_{10}^2 f^2 f_{yy}] + O(h^4). \quad (6.23)$$

Сравним в разложениях (6.22), (6.23) коэффициенты при  $hf, h^2 f_x, h^2 f f_y$ . Тем самым на выбор четырех параметров  $\alpha_1, \beta_{10}, A_0, A_1$  будут наложены три условия:

$$A_0 + A_1 = 1, \quad A_1 \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad A_1 \beta_{10} = \frac{1}{2}.$$

Непосредственно из (6.22), (6.23) следует, что в случае  $q = 1$  для произвольных  $f$  нельзя добиться совпадения всех членов с множителем  $h^3$  за счет выбора введенных параметров. Поэтому при  $q = 1$  вычислительные правила типа Рунге-Кутта будут иметь лишь второй порядок точности. Параметры  $\alpha_1, \beta_{10}, A_0$  могут быть выражены через коэффициент  $A_1$  по формулам

$$A_1 = \beta_{10} = \frac{1}{2A_1}, \quad A_0 = 1 - A_1.$$

В качестве  $A_1$  может быть взято, вообще говоря, произвольное отличное от нуля число. Например, при  $A_1 = \frac{1}{2}$  будем иметь

$$\Delta y = \frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_1) + O(h^3), \quad (6.24)$$

$$\varphi_0 = hf(x, y), \quad \varphi_1 = hf(x + h, y + \varphi_0).$$

Вычислительное правило, построенное на основе равенства (6.24), имеет следующий квадратурный смысл. Так как  $\varphi_1 = hf(x + h, y + hf(x, y)) \approx hf(x + h, y(x + h))$ ,

то линейная комбинация  $\frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_1)$  является аналогом квадратурной суммы формулы трапеций при вычислении интеграла в правой части равенства (6.15).

Выбрав  $A_1 = 1$ , получим еще одно из широко известных вычислительных правил типа Рунге-Кутта второго порядка точности:

$$\Delta y \approx \varphi_1, \quad (6.25)$$

$$\varphi_0 = hf(x, y), \quad \varphi_1 = hf(x + h/2, y + \varphi_0/2).$$

Формула (6.25) является, очевидно, аналогом односточной квадратурной формулы средних прямоугольников.

Локальная погрешность любого из методов типа Рунге - Кутта второго порядка точности, как следует из разложений (6.22), (6.23), может быть представлена в виде

$$r_1(h) = \frac{h^3}{6} [f_{xx}(1 - 3\alpha_1^2 A_1) + f f_{xy}(1 - 3\alpha_1 \beta_{10} A_1) + f^2 f_{yy}(1 - 3\beta_{10}^2 A_1) + f_y(f_x + f f_y)] + O(h^4). \quad (6.26)$$

Иногда свободный параметр  $A_1$  выбирают так, чтобы в этом представлении можно было обратить в нуль хотя бы часть членов. Например, если учесть, что  $A_1 = \beta_{10} = \frac{1}{2A_1}$  и положить  $A_1 = \frac{3}{4}$ , то правая часть равенства (6.26) существенно упростится:

$$r_1(h) = \frac{h^3}{6} f_y(f_x + f f_y) + O(h^4). \quad (6.27)$$

При таком выборе  $A_1$  будем иметь

$$\Delta y \approx \frac{1}{4}(\varphi_0 + 3\varphi_1), \quad (6.28)$$

$$\varphi_0 = hf(x, y), \quad \varphi_1 = hf(x + 2h/3, y + 2\varphi_0/3).$$

**Методы третьего порядка точности.** С повышением требований к точности вычислительных правил типа Рунге-Кутта очень быстро возрастает громоздкость необходимых построений, хотя общая схема таких построений и не претерпевает существенных изменений. Поэтому в случае  $q = 2$  мы не станем здесь воспроизводить все выкладки и выпишем лишь ту систему уравнений, которым должны удовлетворять параметры  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  и  $(A)$  в методах типа Рунге-Кутта третьего порядка точности:

$$A_0 + A_1 + A_2 = 1, \quad A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad A_1 \alpha_1^2 + A_2 \alpha_2^2 = \frac{1}{3} \quad (6.29)$$

$$A_2 \alpha_2 \beta_{21} = \frac{1}{6}, \quad \beta_{20} + \beta_{21} = \alpha_2, \quad \beta_{10} = \alpha_1.$$

Одно из решений этой системы шести уравнений с восемью неизвестными приводит к следующим формулам:

$$\Delta y \approx \frac{1}{6}(\varphi_0 + 4\varphi_1 + \varphi_2), \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= hf(x, y), & \varphi_1 &= hf(x + h/2, y + \varphi_0/2), \\ \varphi_2 &= hf(x + h, y - \varphi_0 + 2\varphi_1). \end{aligned}$$

Это вычислительное правило является, очевидно, аналогом трехточечной квадратурной формулы Симпсона. Часто встречается в практике вычислений и такой метод типа Рунге-Кутты третьего порядка точности:

$$\Delta y \approx \frac{1}{4}(\varphi_0 + 3\varphi_2), \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= hf(x, y), & \varphi_1 &= hf(x + h/3, y + \varphi_0/3), \\ \varphi_2 &= hf\left(x + \frac{2}{3}h, y + \frac{2}{3}\varphi_1\right). \end{aligned}$$

По квадратурному смыслу приведенное вычислительное правило сходно с методом (6.27) второго порядка точности и еще раз косвенно подчеркивает достоинства последнего.

**Методы четвертого порядка точности.** В случае  $q = 3$  одним из методов будет аналог четырехточечной квадратурной формулы «трех восьмых»:

$$\Delta y \approx \frac{1}{8}(\varphi_0 + 3\varphi_1 + 3\varphi_2 + \varphi_3), \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= hf(x, y), & \varphi_1 &= hf\left(x + \frac{h}{3}, y + \frac{\varphi_0}{3}\right), \\ \varphi_2 &= hf\left(x + \frac{2}{3}h, y - \frac{\varphi_0}{3} + \varphi_1\right), & \varphi_3 &= hf(x + h, y - \varphi_0 - \varphi_1 + \varphi_2). \end{aligned}$$

Особенно широко известно другое вычислительное правило типа Рунге-Кутты четвертого порядка точности:

$$\Delta y \approx \frac{1}{6}(\varphi_0 + 2\varphi_1 + 2\varphi_2 + \varphi_3), \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= hf(x, y), & \varphi_1 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{\varphi_0}{2}\right), \\ \varphi_2 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{\varphi_1}{3}\right), & \varphi_3 &= hf(x + h, y + \varphi_2). \end{aligned}$$

## 6. 4 Многошаговые методы. Экстраполяционный и интерполяционный методы Адамса

Методы, использующие информацию о решаемой задаче на отрезке длиной более одного шага, называются **многошаговыми**. Эти методы имеют вычислительное правило вида

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^p a_i y_{n-i} + h \sum_{j=-s}^q A_j f(x_{n-j}, y_{n-j}), \quad (6.35)$$

позволяющие искать приближенное значение  $y_{n+1}$  решения рассматриваемой задачи в точке  $x_{n+1}$  сетки  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N$  в виде линейной комбинации нескольких известных значений  $y_{n-i}$  решения в точках  $x_{n-i}$  этой сетки с коэффициентами  $a_i$  и нескольких приближенных значений  $f(x_{n-j}, y_{n-j})$  производной  $y'(x) = f(x, y(x))$  искомого решения в точках  $x_{n-j}$  с коэффициентами  $hA_j$ . При этом среди указанных значений производной могут быть и неизвестные (при  $s \geq 1$ ).

Если  $s < 1$ , то вычислительные **методы** вида (6.35) обычно называют **явными**,

при  $s = 1$  - **неявными** ( $A_{-1} \neq 0$ ),

при  $s > 1$  – **методы с забеганием вперед**.

Наиболее применимыми в вычислительной практике являются правила вида

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=-s}^q A_i f(x_{n-i}, y_{n-i}), \quad (6.36)$$

При  $s = 0$  – экстраполяционный метод Адамса.

При  $s = 1$  – интерполяционный метод Адамса.

### Экстраполяционные методы Адамса.

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=0}^q A_i f(x_{n-i}, y_{n-i}), \quad (6.37)$$

Если

$$h \int_0^1 f(x_n + \alpha h, y(x_n + \alpha h)) d\alpha \quad (6.38)$$

заменить на  $h \sum_{i=0}^q A_i f(x_n + \alpha_i h, y(x_n + \alpha_i h))$ , то коэффициенты  $A_i, \alpha_i$  необходимо выбирать следующим образом

$$\sum_{i=0}^q A_i = 1, \quad \sum_{i=0}^q A_i \alpha_i^j = \frac{1}{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, k-1.$$



Для (6.37)  $\alpha_i = -i$ ,  $i = 0, 1, \dots, q$ .

$$\sum_{i=0}^q A_i = 1, \quad \sum_{i=0}^q A_i (-i)^j = \frac{1}{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (6.39)$$

Так как определитель этой системы есть определитель Вандермонда, а все

$\alpha_i = -i$ ,  $i = 0, 1, \dots, q$  различны, то значения параметров  $A_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, q$  могут быть выбраны для любого  $q \geq 0$  и притом единственным образом.

При заданном  $q$  тем самым будет построен соответствующий экстраполяционный метод Адамса (6.37).

Формула локальной погрешности:

$$r_{n+1} = y(x_n + h) - y(x_n) - h \sum_{i=0}^q A_i f(x_n + \alpha_i h, y(x_n + \alpha_i h)),$$

$$r_{n+1} = h^{k+1} y^{(k+1)}(x_n) \left[ \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^q A_i \alpha_i^k \right] + O(h^{k+2}).$$

Так как для нашего метода  $k = q + 1$

$$r_{n+1} = h^{q+2} y^{(q+2)}(x_n) \left[ \frac{1}{(q+2)!} - \frac{1}{(q+1)!} \sum_{i=0}^q A_i \alpha_i^{q+1} \right] + O(h^{q+3}).$$

$$q = 0: r_{n+1} = \frac{1}{2} h^2 y''(x_n) + O(h^3);$$

$$q = 1: r_{n+1} = \frac{5}{12} h^3 y'''(x_n) + O(h^4).$$

Нетрудно непосредственно проверить, что те же вычислительные правила экстраполяционного метода Адамса можно получить следующим образом.

Для приближенного вычисления интеграла (6.38) предварительно подынтегральную функцию  $y'(x_n + \alpha h)$  на отрезке интегрирования аппроксимируем алгебраическим интерполяционным многочленом степени  $q$ , построенным по ее значениям в точках  $x_n - ih, i = 0, 1, \dots, q$ , предшествующих отрезку интегрирования. Такое интерполирование за пределы таблицы значений интерполируемой функции называют экстраполированием, с чем связано название метода. Осуществив затем простую операцию интегрирования алгебраического многочлена, мы получим  $h \sum_{i=0}^q A_i f(x_n + \alpha_i h, y(x_n + \alpha_i h))$ , при

$\alpha_i = -i$ ,  $i = 0, 1, \dots, q$ , которая является основой экстраполяционного метода Адамса. Эта формула может быть записана по-разному в зависимости от того, в каком виде предварительно был представлен соответствующий интерполяционный многочлен. Если его записать, скажем, через конечные разности  $f(x, y)$ , то такая запись удобна для получения локальной погрешности. Правда, составление таблиц конечных разностей

сопряжено с быстрым накоплением вычислительной погрешности, особенно при высоких порядках разностей.

Замена уравнения задачи Коши уравнением экстраполяционного метода Адамса приводит к некорректной задаче, так как задание лишь одного начального данного  $y_0$  при  $q > 0$  не выделяет единственного решения этого разностного уравнения порядка  $q + 1$ . Поэтому достаточно задать дополнительно к  $y_0$  значения  $y_1, y_2, \dots, y_q$ .

Для их нахождения можно использовать любой из рассматриваемых выше одношаговых методов. Часто, чтобы не нарушать однородность вычислительного процесса, конструируют специальные вычислительные алгоритмы, стараясь по возможности более тесно привязать их к методу основного счета.

### **Интерполяционные методы Адамса.**

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=-1}^q A_i f(x_{n-i}, y_{n-i}), \quad (6.40)$$

Аналогично случаю экстраполяционных формул положив  $\alpha_i = -i$ ,  $i = -1, 0, 1, \dots, q$ ,

Получим систему уравнений

$$\sum_{i=-1}^q A_i = 1, \quad \sum_{i=-1}^q A_i (-i)^j = \frac{1}{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, q+1. \quad (6.41)$$

Формула локальной погрешности для (6.40)

$$r_{n+1} = h^{q+3} y^{(q+3)}(x_n) \left[ \frac{1}{(q+3)!} - \frac{1}{(q+2)!} \sum_{i=0}^q A_i \alpha_i^{q+2} \right] + O(h^{q+4}). \quad (6.42)$$

Приведем интерполяционные методы Адамса (6.40)

$$q = -1: y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

$$r_{n+1} = -\frac{1}{2} h^2 y''(x_n) + O(h^3);$$

$$q = 0: y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n)),$$

$$r_{n+1} = -\frac{1}{12} h^3 y'''(x_n) + O(h^4).$$

$$q = 1: y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} (5f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 8f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})),$$

$$r_{n+1} = -\frac{1}{24} h^4 y^{(4)}(x_n) + O(h^5).$$

Заметим, что построенные интерполяционные методы Адамса не дают явных выражений для нахождения  $y_{n+1}$ , а представляют собой уравнение относительно этой неизвестной.

Обычно в качестве начального приближения к  $y_{n+1}$  берут соответствующее значение, полученное экстраполяционным методом Адамса. При этом часто ограничиваются лишь одной итерацией. В этом случае процесс приобретает предсказывающе-исправляющий характер. По формуле экстраполяционного метода Адамса находят приближенное значение  $y_{n+1}$  с локальной погрешностью  $h^{q+2}$ , которое затем уточняется на порядок с помощью интерполяционной формулы Адамса. Такая организация вычислений применяется наиболее часто.

## 6.4 Решение линейных граничных задач

Наряду с задачами Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваются также граничные задачи. В этих задачах дополнительные условия, присоединенные к дифференциальным уравнениям, задаются в виде уравнений, содержащих комбинации значений решения и его производных, взятых в нескольких точках отрезка, на котором ищется решение.

Рассмотрим линейные граничные задачи для дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Пусть при  $a \leq x \leq b$  рассматривается граничная задача для дифференциального уравнения

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (6.43)$$

с условиями

$$l_a(y) \equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad (6.44)$$

$$l_b(y) \equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B. \quad (6.45)$$

Будем считать, что граничная задача (6.43 - 6.45) имеет единственное решение, это решение непрерывно на  $[a, b]$  и имеет непрерывные производные на этом отрезке до четвертого порядка включительно.

### Метод сеток.

1. Область задания дифференциального уравнения (6.43) – отрезок  $[a, b]$  заменяется некоторой дискретной сеточной областью. Это означает, что на отрезке  $[a, b]$  выбирается некоторая система точек. Совокупность этих точек называется **сеткой**. Если положение каждой точки определяется по правилу  $x_k = a + kh$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ ,  $h = \frac{b-a}{N}$ ,  $N$  – целое число, то сетку называют **равномерной**. Точки  $x_k$  называют **узлами сетки**.
2. Граничная задача (6.43 - 6.45) на множестве узлов, принадлежащих сетке, заменяется некоторой сеточной задачей. Под термином сеточная задача мы будем понимать некоторые соотношения между приближенными значениями решения граничной задачи (6.43 - 6.45) в узлах сетки. В рассматриваемом случае это будет система линейных алгебраических уравнений.
3. Полученная сеточная задача решается по какому-либо численному методу и тем самым находятся приближенные значения решения граничной задачи в узлах сетки. Это и является конечной целью метода сеток.

**Методы замены обыкновенных дифференциальных уравнений и граничных условий системой алгебраических уравнений.**

Возвратимся к краевой задаче (6.43 - 6.45). Выберем равномерную сетку:  $x_k = a + kh$ ,

$$k = 0, 1, \dots, N, h = \frac{b-a}{N}.$$

Дифференциальное уравнение (6.43) будем рассматривать только во внутренних узлах сетки, т.е. будем полагать, что  $x = x_k, k = 1, 2, \dots, N-1$ . Граничные условия (6.44 - 6.45) рассмотрим при  $x_0 = a, x_N = b$ .

Положим в (6.43)  $x = x_k$ :

$$L(y)|_{x=x_k} \equiv y''(x_k) + p(x_k)y'(x_k) + q(x_k)y(x_k) = f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (6.46)$$

Выразим  $y'(x_k), y''(x_k)$  через значения функции  $y(x)$  в узлах  $x_{k-1}, x_k, x_{k+1}$ , т.е. через значения  $y(x_{k-1}), y(x_k), y(x_{k+1})$ . Для этой цели воспользуемся формулами численного дифференцирования.

Имеем

$$y'(x_k) = \frac{y(x_k) - y(x_{k-1}))}{h} + r_k^{(1)}(h), \quad r_k^{(1)}(h) = \frac{h}{2} y''(x_k^{(1)}), \quad x_{k-1} < x_k^{(1)} < x_k; \quad (6.47)$$

$$y'(x_k) = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} + r_k^{(2)}(h), \quad r_k^{(2)}(h) = -\frac{h}{2} y''(x_k^{(2)}), \quad x_{k-1} < x_k^{(2)} < x_k; \quad (6.48)$$

$$y'(x_k) = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_{k-1}))}{2h} + r_k^{(3)}(h), \quad r_k^{(3)}(h) = -\frac{h^2}{6} y'''(x_k^{(3)}), \quad x_{k-1} < x_k^{(3)} < x_k; \quad (6.49)$$

$$y''(x_k) = \frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1}))}{h^2} + r_k^{(4)}(h),$$

$$r_k^{(4)}(h) = -\frac{h^2}{12} y^{IV}(x_k^{(4)}), \quad x_{k-1} < x_k^{(4)} < x_k; \quad (6.50)$$

Подставив в (6.46) выражения (6.49) и (6.50) для  $y'(x_k), y''(x_k)$ , получим

$$L(y)|_{x=x_k} \equiv L_h(y(x_k)) + R_k(h) = f(x_k), \quad (6.51)$$

$$L_h(y(x_k)) = \frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1}))}{h^2} + p(x_k) \frac{y(x_{k+1}) - y(x_{k-1}))}{2h} + q(x_k)y(x_k),$$

$$R_k(h) = r_k^{(4)}(h) + p(x_k)r_k^{(3)}(h).$$

Выражение  $L_h(y(x_k))$  называется **разностным оператором** второго порядка, а величина  $R_k(h)$  – **погрешностью аппроксимации** дифференциального оператора  $L(y)$  разностным оператором  $L_h(y(x_k))$  на решении. Если для  $R_k(h)$  выполняется условие

$$|R_k(h)| \leq Mh^2, \quad k = 1, 2, \dots, N-1,$$

где  $M = \text{const}$ , не зависящая от  $h$ , то говорят, что разностный оператор  $L_h$  аппроксимирует на решении дифференциальный оператор  $L$  с погрешностью второго порядка относительно  $h$ .

Пусть  $h$  достаточно мало, тогда в формуле (6.51) величиной  $R_k(h)$  можно пренебречь и мы получим

$$L_h(y_k) = f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad (6.52)$$

где при выполнении некоторых условий можно предположить, что  $y_i \approx y(x_i)$ ,

$i = 0, 1, \dots, N$ . Равенство (6.52) будем называть **разностной схемой**, аппроксимирующей уравнение  $L(y) = f(x)$ .

Отметим еще, что (6.52) есть система линейных алгебраических уравнений, число таких уравнений  $N-1$ , а матрица этой системы – трехдиагональная. Неизвестными являются  $y_0, y_1, \dots, y_N$ . Число этих неизвестных в системе равно  $N+1$ .

Обратимся к граничным условиям (6.44), (6.45). Используя (6.48) при  $k=0$ , из (6.44) получим

$$l_a(y) \equiv l_a^{(h)}(y(x_0)) + R_0(h) = A, \quad (6.53)$$

$$l_a^{(h)}(y(x_0)) \equiv \alpha_0 y(x_0) + \alpha_1 \left( \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} \right),$$

$$R_0(h) = \alpha_1 r_0^{(2)}(h).$$

Аналогично, используя (6.47) при  $k=N$ , из (6.45) получим

$$l_b(y) \equiv l_b^{(h)}(y(x_N)) + R_N(h) = B, \quad (6.54)$$

где

$$l_b^{(h)}(y(x_N)) \equiv \beta_0 y(x_N) + \beta_1 \left( \frac{y(x_N) - y(x_{N-1})}{h} \right),$$

$$R_N(h) = \beta_1 r_N^{(1)}(h).$$

При достаточно малом  $h$  величинами  $R_0(h)$ ,  $R_N(h)$ , имеющими первый порядок малости относительно  $h$ , в выражениях (6.53), (6.54) можно пренебречь. Тогда вместо (6.53), (6.54) будем иметь

$$l_a^{(h)}(y_0) = A, \quad (6.55)$$

$$l_b^{(h)}(y_N) = B. \quad (6.56)$$

Операторы  $l_a^{(h)}(y_0)$  и  $l_b^{(h)}(y_N)$  аппроксимируют соответственно граничные операторы  $l_a(y)$  и  $l_b(y)$  с погрешностью  $O(h)$ .

Формулы (6.52), (6.55), (6.56) образуют в совокупности систему  $N + 1$  линейных алгебраических уравнений с неизвестными  $y_0, y_1, \dots, y_N$ . В методе сеток эту систему решают обычно методом прогонки и после этого полагают что  $y_k \approx y(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ .

Обратим внимание на то, что граничные условия (6.44), (6.45) при необходимости можно аппроксимировать разностными условиями с погрешностью второго порядка малости относительно  $h$ . Для этого достаточно, например, воспользоваться вместо (6.47), (6.48) следующими формулами:

$$y'(x_0) = \frac{-y(x_2) + 4y(x_1) - 3y(x_0)}{2h} + O(h^2),$$

$$y'(x_N) = \frac{3y(x_N) - 4y(x_{N-1}) + y(x_{N-2})}{2h} + O(h^2).$$

В этом случае соответствующая методу прогонки структура матрицы коэффициентов СЛАУ еще должна быть создана. Усложнения, сопутствующие второму варианту, могут быть оправданы тем, что в этом случае исходная дифференциальная краевая задача полностью аппроксимируется алгебраической системой относительно компонент каркаса решения с точностью  $O(h^2)$ , в то время как о первом варианте такого сказать нельзя (если, конечно, речь не идет о первой краевой задаче, т.е. о случае  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ , когда в аппроксимации краевых условий вообще нет нужды). Однако в поисках компромисса между качеством аппроксимации и численной устойчивостью при решении конкретных задач первый вариант может оказаться и более предпочтительным.

### **Устойчивость конечно-разностной схемы решения краевой задачи**

Рассмотрим построенные разностные уравнения относительно приближенных значений решения  $y_i \approx y(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$ :

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i. \quad (6.57)$$

После приведения подобных слагаемых в (6.57) получаем стандартное трехточечное разностное уравнение второго порядка

$$\left(1 + \frac{h}{2} p_i\right) y_{i+1} - (2 - h^2 q_i) y_i + \left(1 - \frac{h}{2} p_i\right) y_{i-1} = h^2 f_i, \quad (6.58)$$

где  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ .

Остановимся теперь на вопросе устойчивости построенной конечно-разностной схемы решения краевой задачи (6.43) – (6.45). Эту устойчивость можно связать с устойчивостью метода прогонки, что в свою очередь, можно гарантировать, когда матрица коэффициентов имеет свойство диагонального преобладания. Посмотрим с этой точки зрения на -е «внутреннее» уравнение системы, т.е. на уравнение (6.58).

Условие диагонального преобладания для (6.58) означает, что должно выполняться неравенство

$$|2 - h^2 q_i| > \left| 1 + \frac{h}{2} p_i \right| + \left| 1 - \frac{h}{2} p_i \right| \quad \forall i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (6.59)$$

Рассмотрим, что представляет собой правая часть этого неравенства. Раскрывая модули, имеем

$$\left| 1 + \frac{h}{2} p_i \right| + \left| 1 - \frac{h}{2} p_i \right| = \begin{cases} -hp_i, & \text{если } hp_i < -2, \\ 2, & \text{если } |hp_i| \leq 2, \\ hp_i, & \text{если } hp_i > 2. \end{cases}$$

Следовательно, правую часть неравенства (6.59) как функцию переменной  $hp_i$  (считая ее изменяющейся непрерывно) в условных координатах можно представить в виде графика, изображенного на рис. 6.1.

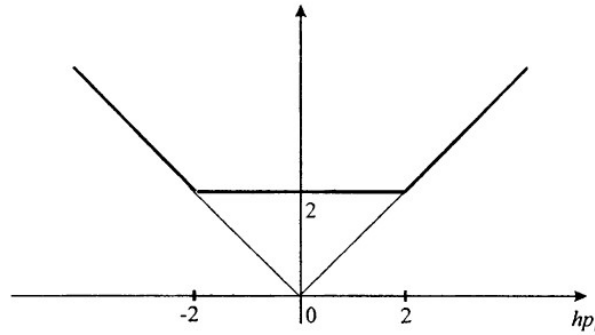


Рис. 6.1 Условный график правой части неравенства (6.59)

Так как левая часть неравенства (6.59) при  $q_i > 0$  и малых  $h > 0$  (малость  $h$  нужна из требований аппроксимации) меньше 2, то на устойчивость прогонки можно рассчитывать лишь в случае, когда  $q(x) < 0$ . При этом имеет место

$$|2 - h^2 q_i| = 2 - h^2 q_i > 2 \quad \forall h.$$

Чтобы в таком случае неравенство (6.59) выполнялось при любых  $p(x)$ , для правой части его считаем допустимым только значение 2 (т.е. используем горизонтальную часть графика на рис. 6.1). Отсюда получаем ограничение

$$|hp_i| \leq 2,$$

Означающее, что устойчивость прогонки можно гарантировать при условии, что шаг дискретизации  $h$  удовлетворяет неравенству

$$h \leq \frac{2}{|p_i|}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Усиливая это неравенство и используя утверждение «Аппроксимация плюс устойчивость дает сходимость», приходим к заключению, что если в дифференциальном уравнении (6.43)

$$q(x) < 0 \quad \forall x \in [a, b], \quad (6.60)$$

А в определяющем методе конечных разностей разностном уравнении (6.58)

$$h \leq \frac{2}{\max_{x \in [a, b]} |p(x)|},$$

то метод конечных разностей сходится (по крайней мере, к решению первой краевой задачи, т.е. когда в (6.44), (6.45)  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ ; в других случаях требуется более детальный анализ).

Наличие ограничения на шаг  $h$  в методе конечных разностей второго порядка (6.57) характеризует его как условно устойчивый метод. Если отказаться от аппроксимации все производных с порядком  $O(h^2)$  и использовать в роли  $y'(x_i)$  правые или левые разностные отношения первого порядка точности, связывая их выбор со знаком  $p_i$ , а именно, рассматривая вместо (6.58) разностное уравнение

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \left[ \begin{array}{ll} \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, & \text{если } p_i > 0 \\ \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, & \text{если } p_i < 0 \end{array} \right] + q_i y_i = f_i,$$

при  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ , придём к конечно-разностному методу

$$\left[ \begin{array}{ll} y_{i-1} - (2 + hp_i - h^2 q_i)y_i + (1 + hp_i)y_{i+1} = h^2 f_i, & \text{если } p_i > 0, \\ (1 - hp_i)y_{i-1} - (2 - hp_i - h^2 q_i)y_i + y_{i+1} = h^2 f_i, & \text{если } p_i < 0, \end{array} \right. \quad (6.61)$$

имеющему первый порядок точности независимо от точности аппроксимации краевых условий.

Легко видеть, что при условии (6.60) диагональное преобладание будет при любой величине шага  $h > 0$ . Отсюда следует его **безусловная устойчивость**, правда в ущерб точности; последнее означает необходимость проведения вычислений с более мелким шагом для доведения погрешности решения до некоторой фиксированной величины, чем это требует метод второго порядка (6.58), если он оба одновременно применимы.

### Правило Рунге

Укажем практический прием, позволяющий на основе вычислений судить о том, с какой точностью получены приближенные сеточные значения решения.

Пусть  $y(x)$  – точное решение некоторой граничной задачи,

А  $y_h(x)$  – приближенное решение этой задачи, полученное по методу сеток с шагом  $h$ .



$$\varepsilon_h = \frac{y_h(x) - y_{2h}(x)}{2^p - 1} \quad (6.62)$$

где  $p > 0$  – порядок аппроксимации.

Формула (6.62) называется *правилом Рунге*.

### **Формирование системы линейных уравнений и решение ее методом прогонки**

$$\begin{cases} b_0 y_0 + c_0 y_1 = d_0, \\ \dots \\ a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ \dots \\ a_N y_{N-1} + b_N y_N = d_N. \end{cases}$$

где  $a_i = 1 - \frac{h}{2} p_i$ ,  $b_i = h^2 q_i - 2$ ,  $c_i = 1 + \frac{h}{2} p_i$ ,  $d_i = h^2 f_i$ ,

$$b_0 = h\alpha_0 - \alpha_1, \quad c_0 = \alpha_1, \quad d_0 = Ah,$$

$$a_N = -\beta_1, \quad b_N = h\beta_0 + \beta_1, \quad d_N = Bh.$$

Прогоночные коэффициенты в прямом ходе определяются с помощью выражений:

$$A_0 = -\frac{c_0}{b_0}, \quad B_0 = \frac{d_0}{b_0}.$$

$$A_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i A_{i-1}}, \quad B_i = \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{b_i + a_i A_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$A_N = 0, \quad B_N = \frac{d_N - a_N B_{N-1}}{b_N + a_N A_{N-1}} = y_N.$$

Обратный ход метода прогонки:

$$y_i = A_i y_{i+1} + B_i, \quad i = N-1, \dots, 0.$$