

# 1 Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия. Методы интегрирования некоторых дифференциальных уравнений 1-го порядка.

## 1.1 Дифференциальное уравнение. Определение решения.

**Определение 1.1.** *Дифференциальным уравнением называется уравнение*

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

где  $x$  — независимая переменная,  $y(x)$  — неизвестная функция,  $n$  — порядок уравнения.

**Определение 1.2.** *Уравнением, разрешенным относительно старшей производной, называется уравнение*

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Будем рассматривать уравнения с  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  ( $y \in \mathbb{R}^n$ ),  $f \in \mathbb{R}$  ( $f \in \mathbb{R}^m$ ).

**Определение 1.3.** *Решением дифференциального уравнения называется  $n$  раз дифференцируемая функция  $\varphi(x)$ , обращающая уравнение в тождество.*

**Предмет обыкновенных дифференциальных уравнений:**

1. найти решение дифференциального уравнения, если это возможно;
2. доказать существование решения (в тех случаях, когда его нельзя найти аналитически);
3. определить область, в которой это решение существует;
4. выяснить, будет ли единственным решение, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям;
5. выяснить свойства решения, если его не удастся найти аналитически:
  - (а) ограниченность;
  - (б) убывание, возрастание (монотонность);
  - (с) поведение на бесконечности, если оно там определено;
  - (д) поведение вблизи границ области определения;
  - (е) существование нулей, в том числе, количество нулей на заданном интервале;

и т.д.

## 1.2 Дифференциальные уравнения первого порядка

**Определение 1.4.** *Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида*

$$f(x, y, y') = 0 \tag{1.1}$$

или

$$y' = F(x, y). \tag{1.2}$$

**Определение 1.5.** *Решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция  $y = \varphi(x)$ , один раз дифференцируемая, обращающая уравнение в тождество.*

**Пример 1.1.** *Решить уравнение*

$$y' = x.$$

**Р е ш е н и е.** Решением уравнения является функция  $y(x) = \frac{x^2}{2} + C$ , где  $C$  — произвольная действительная постоянная.

**Определение 1.6.** *Общим решением дифференциального уравнения называется совокупность функций, содержащих все решения уравнения.*

Таким образом, если решение дифференциального уравнения задается формулой  $y = \varphi(x, C)$  или  $\psi(x, y, C) = 0$ , то она задает общее решение, если

1. при каждом фиксированном  $C = C_0$  эта функция определяет решение;
2. любое решение может быть найдено из этой формулы при некотором  $C = C_0$ .

**Определение 1.7.** *Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из формулы (формул) общего решения при некотором значении  $C = C_0$ .*

В примере 1.1 формула  $y = \frac{x^2}{2} + C$  задает общее решение, а, например, решения  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $y = \frac{x^2}{2} + 1$  — частные решения.

**Найти решение дифференциального уравнения** — значит выразить решение в квадратурах — через элементарные функции и их неопределенные интегралы.

**Геометрический смысл дифференциального уравнения  $y' = F(x, y)$ .**

Данное уравнение в любой точке плоскости, где  $F(x, y)$  существует, определяет направление, угол наклона  $\alpha$  к оси  $Ox$  которого задается равенством  $\operatorname{tg} \alpha = y'(x_0) = F(x_0, y_0)$ . Если каждой точке плоскости таким образом сопоставить направление, то получим поле направлений (направление изображается отрезком с центром в точке  $(x_0, y_0)$ ).

**Определение 1.8.** *Интегральной кривой (интегральной кривой поля направлений) называется кривая, касающаяся в любой своей точке поля направлений.*

**Определение 1.9.** *Изоклинами называются кривые, вдоль которых направление поля постоянно.*

**Пример 1.2.** Построить интегральные кривые, определяемые уравнением  $y' = y - x^2$ .

**Решение.** Уравнение изоклин

$$\begin{aligned}y' &= C \\y - x^2 &= C \\y &= x^2 + C\end{aligned}$$

$$C = 0 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow y' = \operatorname{tg} \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0,$$

$$C = 1 \Rightarrow y = x^2 + 1 \Rightarrow y' = \operatorname{tg} \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4},$$

$$C = 2 \Rightarrow y = x^2 + 2 \Rightarrow y' = \operatorname{tg} \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 2,$$

$$C = -1 \Rightarrow y = x^2 - 1 \Rightarrow y' = \operatorname{tg} \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4}.$$

Заметим, что при  $y - x^2 > 0$  получаем  $y' > 0$ , то есть  $y(x)$  возрастает. Аналогично при  $y - x^2 < 0$  получаем, что  $y(x)$  убывает, поэтому кривая  $y = x^2$  — линия экстремумов.

**Замечание 1.1.** Отметим, что интегральные кривые касаются поля направлений в каждой своей точке.

**Пример 1.3.** Построить интегральные кривые, определяемые уравнением  $y' = -\frac{x}{y}$ .

**Решение.** Уравнение изоклин  $-\frac{x}{y} = C \Rightarrow y = -\frac{x}{C}$ .

$$C = 1 \Rightarrow y = -x \Rightarrow y' = \operatorname{tg} \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4},$$

$$C = -1 \Rightarrow y = x \Rightarrow y' = \operatorname{tg} \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4},$$

$$C = 2 \Rightarrow y = -\frac{x}{2} \Rightarrow y' = \operatorname{tg} \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 2.$$

Можно отметить, что уравнение обладает симметрией: замена  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow -y$  не меняет уравнения. Можно также заметить, что если  $\operatorname{tg} \alpha = k_1$  — угловой коэффициент поля направлений, то  $k_2 = -\frac{1}{k_1}$  — угловой коэффициент изоклины, то есть поле направлений ортогонально изоклинам. Интегральные кривые — окружности.

**Связь между понятиями «решение дифференциального уравнения» и «интегральная кривая»:** для уравнения (1.2) решение — это интегральная кривая, так как уравнение (1.2) в любой точке задает направление, касательное к  $y(x)$ :  $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ . Но, (см., например, пример 1.3, интегральные кривые могут не являться функциями (каждому значению  $x$  соответствует не единственное значение  $y$ ), поэтому не всякую интегральную кривую можно назвать решением, если его понимать в смысле нашего определения.

*Замечание 1.2.* Иногда наряду с уравнением  $y' = f(x, y)$  удобно рассматривать уравнение  $x' = \frac{1}{f(x, y)}$ . Тогда совокупность решений этих уравнений будет задавать все интегральные кривые.

### 1.2.1 Уравнения с разделяющимися переменными

**Определение 1.10.** Уравнениями с разделяющимися переменными называются уравнения вида

$$y' = f(x)g(y) \quad (1.3)$$

или

$$f_1(x)g_2(y)dx + f_2(x)g_1(y)dy = 0.$$

**Метод разделения переменных (формальный).**

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)g(y),$$

Умножив уравнение на  $\frac{dx}{g(y)}$ , получим

$$\left[ \begin{cases} \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx, \\ g(y) \neq 0, \\ g(y) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(x) - \text{делаем проверку, подставляя в уравнение.}$$

Далее интегрируем

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C,$$

откуда находим решение в виде  $y = \varphi(x, C)$  или  $\psi(x, y, C) = 0$ .

*Замечание 1.3.* Общее решение может не задаваться одной формулой. Иногда форма его записи зависит от способа записи постоянной или от метода интегрирования.

**Пример 1.4.** Решить уравнение  $y' = xy^2$ .

**Решение.**

$$\frac{dy}{dx} = xy^2$$

$$\left[ \begin{cases} \frac{dy}{y^2} = xdx, \\ y \neq 0, \\ y = 0. \end{cases} \right.$$

$y \equiv 0$  — решение, проверяется подстановкой в уравнение.

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int xdx,$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C,$$

$$y = -\frac{2}{x^2 + 2C}.$$

Отметим, что решение  $y(x) \equiv 0$  не получается из этой формулы ни при каком значении  $C$ , поэтому общее решение определяется их совокупностью.

*Замечание 1.4.* При решении этого уравнения мы получили, что если  $y \equiv 0$ , то оно является решением. Может ли оказаться, что  $y(x) = 0$  в некоторой точке  $x_0$ , но  $y(x)$  не тождественно равно нулю?

Ответ на этот вопрос можно дать с использованием теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

### 1.2.2 Теорема существования и единственности решения задачи Коши

**Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка:** найти решение уравнения (1.2), удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0, \quad (1.4)$$

то есть задача

$$\begin{cases} y' = F(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

**Определение 1.11.** Будем говорить, что задача Коши (1.5) **имеет единственное решение**, если существует такое  $h > 0$ , что в интервале  $(x_0 - h, x_0 + h)$  определено  $y = \varphi(x)$ , являющееся решением задачи (1.5), и не существует решения, определенного в том же интервале, и не совпадающего с решением  $y = \varphi(x)$  хотя бы в одной точке этого интервала, отличной от точки  $x_0$ .

**Теорема 1.1.** Пусть функция  $F(x, y)$

1) определена и непрерывна по совокупности переменных в прямоугольнике  $\Pi = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ . Тогда существует решение задачи Коши, определенное на  $V_h(x_0) = \{x_0 - h, x_0 + h\}$ , где  $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ ,  $M = \max_{\Pi} F(x, y)$ ;

2) если, в дополнение к первому условию, производная  $F'_y(x, y)$  определена и непрерывна в  $\Pi$ , то решение задачи Коши единственно в  $V_h(x_0)$ .

Доказательство будет приведено позже.

**Замечание 1.5.** Теорема носит локальный характер, то есть утверждается существование и единственность решения лишь в некоторой окрестности точки  $x_0$ .

**Замечание 1.6.** Теорема дает лишь достаточные условия существования и единственности, которые можно ослабить, заменив, например, второе условие условием Липшица.

**Определение 1.12.** Функция  $F(x, y)$  удовлетворяет условию Липшица по  $y$  в  $\Pi$ , если существует такое  $L > 0$ , что для всех  $(x, y_1), (x, y_2) \in \Pi$  имеем  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ .

Теперь можно дать ответ на ранее поставленный вопрос (замечание 1.4). В примере 1.4 функция  $y(x) \equiv 0$  является решением, которое удовлетворяет условию  $y(x_0) = 0$  для всех  $x_0 \in \mathbb{R}$ , поэтому в силу теоремы существования и единственности это уравнение не может иметь других решений, обращающихся в ноль в некоторой точке  $x_0$ .

### 1.2.3 Обоснование метода разделения переменных.

1) Рассмотрим уравнение вида  $y' = f(x)$ .

Пусть  $f(x)$  непрерывна на интервале  $(a, b)$ , тогда из курса математического анализа имеем

$$y = \int f(x)dx + C, \quad (1.6)$$

где под выражением  $\int f(x)dx$  мы будем понимать первую первообразную. Придавая константе  $C$  произвольные значения, получим все решения данного уравнения, то есть формула (1.6) задает общее решение. Запишем решение в виде

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx + C, \quad x_0 - \text{произвольное значение из интервала.}$$

Отсюда  $y(x_0) = C$ . Таким образом, придавая функции  $y(x)$  значение  $y_0$  в точке  $x_0$ , получим частное решение, однозначно определяемое через  $x_0$  и  $y_0$ .

2) Рассмотрим уравнение вида  $y' = f(y)$ , где  $f(y)$  — непрерывная на  $(a, b)$  функция.

Предположим, что для функции, задающей решение,  $y(x) = \varphi(x)$ , существует обратная функция  $x = \psi(y)$ . Тогда для нее имеем

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}, \quad \text{если } f(y) \neq 0.$$

Значит, на интервале  $(\alpha, \beta) \subset (a, b) : f(y) \neq 0$  при  $x \in (\alpha, \beta)$ , получим

$$x(y) = \int \frac{dy}{f(y)} + C. \quad (1.7)$$

Если  $x(y_0) = x_0$ , то  $x(y) = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{dy}{f(y)}$ . Данная формула, как и формула (1.7), допускает обратную функцию, так как на  $(\alpha, \beta)$   $f(y) \neq 0$ , а значит,  $f(y)$  сохраняет знак. Тогда  $x - x_0$  — монотонная функция от  $y$ , а непрерывная и монотонная (не постоянная ни в каком интервале) функция имеет непрерывную и однозначную обратную. Очевидно, что эта обратная функция удовлетворяет уравнению.

Отметим, что функции  $y \equiv y_0$ , определяемые из уравнения  $f(y) = 0$ , являются решениями.

3) Рассмотрим уравнение вида  $y' = f(x)g(y)$ .

Формально разделим переменные:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Из равенства дифференциалов следует, что их неопределенные интегралы различаются на константу:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C. \quad (1.8)$$

Выясним, при каких условиях формула (1.8) определяет  $y$  как функцию от  $x$  в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ . Если  $y(x)$  — решение, то запишем уравнение (1.3) в виде

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x),$$

умножим обе части на  $dx$  и проинтегрируем от  $x_0$  до  $x$

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int_{x_0}^x f(x)dx,$$

откуда, с учетом условия  $y(x_0) = y_0$ , делая в первом интеграле замену переменных, получим

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^x f(x)dx.$$

Обозначим

$$\psi(x, y, x_0, y_0) = \int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)} - \int_{x_0}^x f(x)dx.$$

По теореме о неявной функции из этого равенства можно выразить  $y$  как функцию  $x, x_0, y_0$ : очевидно, что  $\psi(x_0, y_0, x_0, y_0) = 0$ ; далее,  $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{x=x_0, y=y_0} = \frac{1}{f(y)} \neq 0$ , и имеет смысл при  $f(y_0) \neq 0$ .

#### 1.2.4 Критерий единственности решения для уравнения $y' = f(y)$ (необходимый и достаточный признак особых решений).

**Определение 1.13.** *Особым решением дифференциального уравнения (1.3) называется такое решение, которое во всех своих точках не удовлетворяет условию единственности, то есть решение, через каждую точку которого проходит еще одно решение, не совпадающее с ним ни в какой окрестности этой точки.*

Рассмотрим уравнение

$$y' = f(y), \quad (1.9)$$

где  $f(y)$  — непрерывная функция. Если  $f(y_0) \neq 0$ , то начальное условие определяет единственное решение, как это было показано ранее. Если же существует такая  $c$ , что  $f(c) = 0$ , то  $y \equiv c$  — решение

указанного уравнения. Исследуем, при каких условиях нарушается единственность в точках  $y = c$ , а при каких она сохраняется.

Зададим начальное условие  $(x_0, y_0)$ . Пусть (без ограничения общности рассуждений)  $y_0 < c$ . Допустим, что  $f(y) > 0$ ,  $y_0 < y < c$ . Случай  $y_0 > c$  приводится к рассматриваемому заменой  $y$  на  $-y$ , а случай  $f(y) < 0$  — заменой  $x$  на  $-x$ . Исследуем единственность решения  $y = c$ .

Разделяя переменные в уравнении (1.9) и интегрируя полученное равенство от  $x_0$  до  $x$ , получим для решения, проходящего через точку  $(x_0, y_0)$ , формулу:

$$x - x_0 = \int_{y_0}^y \frac{dy}{f(y)}.$$

При  $y \rightarrow c$  интеграл в правой части стремится к несобственному интегралу  $\int_{y_0}^c \frac{dy}{f(y)}$ .

1) Если  $\int_{y_0}^c \frac{dy}{f(y)} < \infty$ , то  $x - x_0 < \infty$ , значит,  $x < \infty$ , то есть интегральная кривая  $y(x)$  пересечет прямую  $y = c$  при некотором конечном значении  $x$ , причем параллельным переносом этой интегральной кривой можно добиться пересечения соответствующим решением прямой  $y = c$  в любой точке  $x$ , то есть единственность решения  $y = c$  в каждой его точке нарушается.

2) Если  $\int_{y_0}^c \frac{dy}{f(y)} = \infty$ , то  $x = \infty$ , значит, за конечное время интегральная кривая не пересечет прямую  $y = c$ , то есть единственность решения сохраняется. Таким образом, верна следующая теорема.

**Теорема 1.2.** *Решение  $y = c$ , такое что  $f(c) = 0$ , уравнения  $y' = f(y)$  является особым решением тогда и только тогда, когда  $\int_{y_0}^c \frac{dy}{f(y)} < \infty$ .*

**Пример 1.5.** *Найти особые решения уравнения  $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ .*

**Решение.** Заметим, что второе условие теоремы существования и единственности не выполняется, так как  $f'_y(y) = y^{-\frac{1}{3}}$  разрывна при  $y = 0$ . Функция  $y \equiv 0$  — решение уравнения. Вычислим

$$\int_{y_0}^0 \frac{dy}{3y^{\frac{2}{3}}} = y_0^{\frac{1}{3}} < \infty.$$

Таким образом,  $y \equiv 0$  — особое решение.

**Пример 1.6.** *Найти особые решения уравнения*

$$y' = \begin{cases} y \ln y, & y > 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

**Решение.** Так как  $f(y) = 0$  при  $y = 0$  и  $y = 1$ , то необходимо рассмотреть два случая. Вычислим соответствующие интегралы:

$$y = 0 : \int_{y_0}^0 \frac{dy}{y \ln y} = \ln |\ln y| \Big|_{y_0}^0 = \infty \Rightarrow y \equiv 0 \text{ не является особым решением.}$$

$$y = 1 : \int_{y_0}^1 \frac{dy}{y \ln y} = \ln |\ln y| \Big|_{y_0}^1 = \infty \Rightarrow y \equiv 1 \text{ не является особым решением.}$$

**Пример 1.7.** *Найти особые решения уравнения*

$$y' = \begin{cases} y \ln^2 y, & y > 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

**Р е ш е н и е.** Аналогично предыдущему примеру рассматриваем два случая:  $y = 0$  и  $y = 1$ .

$$y = 0 : \int_{y_0}^0 \frac{dy}{y \ln^2 y} = -\frac{1}{\ln y} \Big|_{y_0}^0 = 0 + \frac{1}{\ln y_0} < \infty \Rightarrow y \equiv 0 \text{ является особым решением.}$$

$$y = 1 : \int_{y_0}^1 \frac{dy}{y \ln^2 y} = -\frac{1}{\ln y} \Big|_{y_0}^1 = \infty \Rightarrow y \equiv 1 \text{ не является особым решением.}$$

### 1.2.5 Однородные уравнения

**Определение 1.14.** *Однородным дифференциальным уравнением называется уравнение вида  $F(x, y, y') = 0$ , если для любого  $k$  имеем*

$$F(kx, ky, y') \equiv k^p F(x, y, y'), \quad (1.10)$$

где  $p$  — какое-то число.

Это уравнение может быть приведено к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (1.11)$$

Однородное дифференциальное уравнение решается методом **замены переменных**. Именно, вместо неизвестной функции  $y$  введем неизвестную функцию  $z$ , положив  $z = y/x$ .

Подставляя в уравнение (1.11)  $y = zx$ , с учетом того, что по правилу дифференцирования произведения  $y' = z'x + zx' = z'x + z$ , для новой неизвестной функции  $z$  получим дифференциальное уравнение

$$z'x + z = f(z),$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными.

Уравнение вида  $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$  приводится к однородному с помощью замены  $x = \xi + \alpha$ ,  $y = \eta + \beta$ , где  $\xi, \eta$  — новые переменные,  $(\alpha, \beta)$  — точка пересечения прямых  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  и  $ax + by + c = 0$ . Если эти прямые не пересекаются, то  $a_1x + b_1y = k(ax + by)$ ; следовательно, уравнение имеет вид  $y' = f(ax + by)$ , которое рассматривалось в предыдущем пункте.

Некоторые уравнения можно привести к однородным заменой  $y = z^m$ . Чтобы найти число  $m$ , надо в уравнении сделать замену  $y = z^m$ . После замены найдем  $m$ , при котором выполняется условие (1.10). Если такого числа  $m$  не существует, то уравнение не приводится к однородному этим способом.

**Пример 1.8.** *Найти решение уравнения*

$$x(x^2 + y^2) dy = y(y^2 - xy + x^2) dx,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(1) = 1.$$

**Р е ш е н и е.** Это уравнение — однородное. Полагаем  $z = y/x$ ,  $y = xz$ . Тогда  $dy = x dz + z dx$ . Подставляя в исходное уравнение, получим

$$x(x^2 + x^2z^2)(x dz + z dx) = xz(x^2z^2 - x^2z + x^2) dx; \quad (1 + z^2)x dz = -z^2 dx.$$

Получилось уравнение с разделяющимися переменными. Разделим обе части уравнения на  $xz^3$  и проинтегрируем:

$$\frac{1 + z^2}{z^2} dz = -\frac{dx}{x}; \quad z - \frac{1}{z} = -\ln|x| + C.$$

Заметим, что при делении могли быть потеряны решения  $z = 0$  и  $x = 0$ . Но ни одно из них не удовлетворяет начальному условию, так как  $z(1) = 1$ . Возвращаясь к переменной  $y$ , получим

$$y^2 - x^2 = -xy(\ln|x| - C).$$

Из начального условия имеем

$$1 - 1 = -\ln 1 + C,$$

откуда  $C = 0$ .

О т в е т:  $y^2 - x^2 = -xy \ln|x|$ .

### 1.2.6 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка, уравнение Бернулли

**Определение 1.15.** *Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида*

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (1.12)$$

где  $p(x)$ ,  $q(x)$  — заданные непрерывные функции.

Если  $q(x) \equiv 0$ , то уравнение (1.12) называется **линейным однородным дифференциальным уравнением**, иначе **линейным неоднородным дифференциальным уравнением**.

Рассмотрим сначала линейное однородное уравнение

$$y' + p(x)y = 0. \quad (1.13)$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y; \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Заметим, что  $y = 0$  является решением этого уравнения. Проинтегрировав правую и левую части, получим

$$\ln |y| = - \int p(x)dx + \ln |C|,$$

где  $\ln |C|$  — постоянная величина. Преобразуем выражение, используя свойства логарифма и, варьируя константу  $C$ , опустим модуль. Тогда имеем

$$\ln \frac{y}{C} = - \int p(x)dx.$$

Выражая  $y$ , получим общее решение уравнения (1.13):

$$y = Ce^{-\int p(x)dx},$$

причем решение  $y = 0$  получается из общего решения при  $C = 0$ .

Можно записать решение в виде

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x p(x)dx}.$$

Тогда, полагая,  $y_0 = y(x_0)$ , определим константу  $C$ :

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x p(x)dx} \Rightarrow C = y_0.$$

Таким образом, получаем частное решение линейного неоднородного уравнения

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(x)dx}.$$

#### Свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнений.

1. Если  $y(x)$  — решение уравнения (1.13), то для любой постоянной  $C$  функция  $z(x) = Cy(x)$  также является решением этого уравнения.

Действительно, подставим  $z(x)$  в уравнение:

$$(Cy(x))' + p(x)Cy(x) = C(y'(x) + p(x)y(x)) = 0,$$

так как  $y(x)$  — это решение.

2. Если  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — некоторые частные решения уравнения (1.13), то функция  $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$  тоже является решением этого уравнения.

Действительно, подставим  $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$  в уравнение:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x))' + p(x)(\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)) &= \\ &= \alpha_1 (y_1'(x) + p(x)y_1(x)) + \alpha_2 (y_2'(x) + p(x)y_2(x)) = 0, \end{aligned}$$

так как  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  — решения уравнения (1.13).



3. Если  $y_1(x)$  — некоторое частное решение уравнения (1.13), то  $y(x) = Cy_1(x)$  есть общее решение уравнения (1.13).
4. Если  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — некоторые частные решения уравнения (1.13), то общее решение можно записать в виде

$$y(x) = y_1(x) + C(y_2(x) - y_1(x)).$$

Действительно, согласно свойству 2,  $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$  тоже является решением уравнения (1.13). Следовательно,  $z(x) = y_2(x) - y_1(x)$  — частное решение уравнения (1.13). По свойству 2 функция  $y_1(x) + Cz(x)$  — тоже решение.

5.

**Теорема 1.3.** *Решения линейного однородного дифференциального уравнения образуют линейное пространство.*

**Теорема 1.4.** *Если  $y_1$  — частное решение неоднородного уравнения (1.12), то общее решение этого уравнения дается формулой*

$$y = y_1 + z,$$

где  $z$  — общее решение соответствующего однородного уравнения (1.13).

*Доказательство.* Пусть  $y_1(x)$  — частное решение линейного неоднородного уравнения. Общее решение линейного неоднородного уравнения будем искать в виде:  $y(x) = y_1(x) + z(x)$ , где  $z(x)$  — неизвестная функция. Подставим это выражение в (1.12) и получим

$$(y_1(x) + z(x))' + p(x)(y_1(x) + z(x)) = q(x),$$

$$y_1'(x) + p(x)y_1(x) + z'(x) + p(x)z(x) = q(x).$$

Так как  $y_1(x)$  — частное решение линейного неоднородного уравнения, то получим

$$q(x) + z'(x) + p(x)z(x) = q(x),$$

откуда имеем  $z'(x) + p(x)z(x) = 0$ . Следовательно,  $z(x)$  — решение линейного однородного дифференциального уравнения.  $\square$

## Методы решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений.

### 1) Метод вариации произвольной постоянной.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение (1.12). Сначала найдем общее решение однородного уравнения (1.13). В этом решении заменим произвольную постоянную  $C$  на неизвестную функцию  $C(x)$ .

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \quad (1.14)$$

В таком виде будем искать общее решение неоднородного уравнения (1.12). Выражение (1.14) подставим в уравнение (1.12) для определения функции  $C(x)$ .

$$(C(x)e^{-\int p(x)dx})' + p(x)(C(x)e^{-\int p(x)dx}) = q(x),$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)(-p(x))e^{-\int p(x)dx} + p(x)(C(x)e^{-\int p(x)dx}) = q(x),$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Откуда

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1.$$

Подставим  $C(x)$  в решение (1.14):

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} = \left( \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1 \right) e^{-\int p(x)dx} = C_1 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx,$$

где  $C_1 e^{-\int p(x)dx}$  — общее решение однородного уравнения (1.13), а  $e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx$  — частное решение неоднородного уравнения (1.12).

## 2) Метод Бернулли.

Решение уравнения (1.12) будем искать в виде

$$y(x) = u(x)v(x),$$

где  $u(x)$  и  $v(x)$  — неизвестные функции. Подставим это выражение в (1.12) и получим

$$\begin{aligned}(uv)' + p(x)uv &= q(x), \\ u'v + uv' + p(x)uv &= q(x), \\ u'v + u(v' + p(x)v) &= q(x).\end{aligned}\tag{1.15}$$

Выберем функцию  $v$  так, чтобы выполнялось следующее условие:

$$v' + p(x)v = 0.\tag{1.16}$$

Уравнение (1.16) является уравнением с разделяющимися переменными, и его общее решение имеет вид

$$v = C e^{-\int p(x)dx}.$$

Для определенности будем считать  $C = 1$ . Подставим  $v$  в (1.15), тогда

$$\begin{aligned}u' e^{-\int p(x)dx} + u \cdot 0 &= q(x), \\ u' &= q(x) e^{\int p(x)dx}, \\ u &= \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C.\end{aligned}$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения (1.12) имеет вид

$$y = uv = e^{-\int p(x)dx} \left( \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right) = e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx,$$

где  $C e^{-\int p(x)dx}$  — общее решение однородного уравнения (1.13), а  $e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx$  — частное решение неоднородного уравнения (1.12).

### Пример 1.9. Решить уравнение

$$y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}\tag{1.17}$$

методом вариации произвольной постоянной.

**Решение.** Сначала решим однородное уравнение  $y' + y \operatorname{tg} x = 0$ . Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = -y \operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -dx \operatorname{tg} x.$$

Проинтегрировав обе части последнего уравнения, получим  $\ln |y| = \ln |\cos x| + \ln C$ . Выразим  $y$ :  $y = C \cos x$ .

Решение неоднородного уравнения (1.17) будем искать в виде  $y = C(x) \cos x$ . Подставим эту функцию и ее производную  $y' = C'(x) \cos x - C(x) \sin x$  в уравнение (1.17). Получим

$$C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \operatorname{tg} x + C_1.$$

Осталось подставить найденную функцию  $C(x)$  в решение.

**О т в е т:**  $y = (\operatorname{tg} x + C_1) \cos x$ .

### Пример 1.10. Решить уравнение

$$y' + 2xy = 2x e^{-x^2}$$

методом Бернулли.

Р е ш е н и е. Будем искать решение в виде  $y(x) = u(x)v(x)$ . Получим уравнение

$$u'v + uv' + 2xuv = 2xe^{-x^2}. \quad (1.18)$$

За функцию  $v$  примем какое-нибудь частное решение дифференциального уравнения

$$v' + 2xv = 0. \quad (1.19)$$

При таком выборе  $v$  второе и третье слагаемые в левой части (1.18) исчезают. Для функции  $u$  имеем дифференциальное уравнение:

$$u'v = 2xe^{-x^2}. \quad (1.20)$$

Уравнение (1.19) является уравнением с разделяющимися переменными и его интеграл равен

$$\ln |v| + x^2 = C_1.$$

Здесь можно положить  $C_1 = 0$  и взять частное решение  $v = e^{-x^2}$ . Далее подставляем найденное  $v(x)$  в уравнение (1.20):  $u' = 2x$ , и находим  $u = x^2 + C$ . Производя обратную подстановку, получим общее решение исходного уравнения:

$$y = (x^2 + C)e^{-x^2}.$$

О т в е т:  $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$ .

### Уравнение Бернулли.

Обобщением линейного дифференциального уравнения (1.12) является **уравнение Бернулли**:

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \quad (m \neq 1). \quad (1.21)$$

Чтобы решить уравнение (1.21), необходимо обе его части разделить на  $y^m$

$$\frac{y'}{y^m} + p(x)\frac{y}{y^m} = q(x),$$

и сделать замену  $z = y^{1-m}$ . Так как  $z' = (1-m)y^{-m}y'$ , то уравнение (1.21) приводится к уравнению

$$\frac{z'}{1-m} + p(x)z = q(x)$$

или

$$z' + p(x)(1-m)z = q(x)(1-m).$$

Обозначив  $p_1(x) = p(x)(1-m)$ ,  $q_1(x) = q(x)(1-m)$ , получим линейное неоднородное уравнение вида (1.12) относительно  $z(x)$ . Решая это уравнение, находим  $z(x)$ , и подставляя его в формулу для  $y(x)$ :

$$z = y^{1-m} \Rightarrow y = z^{\frac{1}{1-m}},$$

получим решение уравнения Бернулли.

*Замечание 1.7.* Для решения уравнения Бернулли можно использовать также метод Бернулли.

**Пример 1.11.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' + 2y = y^2 e^x. \quad (1.22)$$

Р е ш е н и е. Это уравнение Бернулли. Поделим обе части уравнения на  $y^2$  и сделаем замену  $z = 1/y$ . Тогда получим следующее уравнение:

$$-z' + 2z = e^x. \quad (1.23)$$

Решим это уравнение методом вариации произвольной постоянной. Сначала решим однородное уравнение  $-z' + 2z = 0$ , являющееся уравнением с разделяющимися переменными. Его решение —

$z = Ce^{2x}$ . Будем искать решение уравнения (1.23) в виде:  $z = C(x)e^{2x}$ . Подставим это выражение в уравнение (1.23):

$$-C'(x)e^{2x} - 2C(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} = e^x,$$

откуда  $C(x) = e^{-x} + C_1$ . Таким образом, общее решение уравнения (1.23) есть

$$z = e^x + C_1e^{2x}.$$

Возвращаясь к переменной  $y$ , получим решение исходного уравнения:

$$y \cdot (e^x + C_1e^{2x}) = 1.$$

Кроме того, функция  $y = 0$  также является решением исходного уравнения.

О т в е т:  $y \cdot (e^x + C_1e^{2x}) = 1, \quad y = 0$ .

## 1.2.7 Уравнения в полных дифференциалах

**Определение 1.16.** Уравнение

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (1.24)$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции  $U(x, y)$ .

Это имеет место в односвязной области  $D$ , если  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка и выполняется следующее условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

**Определение 1.17.** *Интегралом уравнения (1.24) называется функция  $U(x, y)$  обращающаяся в константу на любом решении уравнения (1.24), и не равная тождественно константе ни в какой части области  $D$ . Таким образом  $U(x, \phi(x)) = c$  для любого решения  $y = \phi(x)$ . Равенство  $U(x, y) = c$  называется **общим интегралом уравнения**.*

Чтобы решить уравнение (1.24), надо найти функцию  $U(x, y)$ , полный дифференциал от которой

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

равен левой части уравнения (1.24). Из этого уравнения получаем, что  $dU = 0$ , поэтому первый интеграл уравнения (1.24) можно записать в виде

$$U(x, y) = C, \quad \text{где } C \text{ — произвольная постоянная.}$$

Восстановим функцию по ее полному дифференциалу. Так как

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy,$$

можно найти  $U(x, y)$  из решения системы

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Из второго уравнения системы выразим  $U(x, y)$ , предполагая, что  $x$  — постоянная<sup>1</sup>:

$$U(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial U}{\partial y} dy + f(x) = \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + f(x). \quad (1.25)$$

<sup>1</sup>Здесь  $(x_0, y_0)$  — произвольная точка, принадлежащая области непрерывности функций  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  и их частных производных. При решении конкретных примеров можно использовать неопределенные интегралы.

Продифференцируем полученное равенство по  $x$  и подставим в первое уравнение системы:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{y_0}^y Q(x, y) dy \right) + f'(x) = \int_{y_0}^y \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dy + f'(x) = P(x, y).$$

Так как  $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ , получим

$$\int_{y_0}^y \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy + f'(x) = \int_{y_0}^y \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dy + f'(x) = P(x, y).$$

Таким образом, для определения  $f(x)$  имеем уравнение

$$P(x, y) \Big|_{y_0}^y + f'(x) = P(x, y).$$

Отсюда следует, что

$$f'(x) = P(x, y_0), \quad f(x) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx.$$

Найденную функцию  $f(x)$  подставим в (1.25):

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy = C.$$

*Примечание 1.1.* Можно начать со второго уравнения системы:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial U}{\partial x} dx + \varphi(y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \varphi(y).$$

Дальше действовать аналогично.

**Пример 1.12.** Из семейства интегральных кривых дифференциального уравнения

$$2x \cos^2 y \, dx + (2y - x^2 \sin 2y) \, dy = 0$$

выбрать ту, которая проходит через точку  $(1, 0)$ .

**Решение.** Здесь  $P(x, y) = 2x \cos^2 y$ ,  $Q(x, y) = 2y - x^2 \sin 2y$  и заданное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах вида:

$$P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = 0,$$

так как

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -2x \sin 2y.$$

Из равенства частных производных следует, что существует такая функция  $U(x, y)$ , что

$$dU(x, y) = 2x \cos^2 y \, dx + (2y - x^2 \sin 2y) \, dy.$$

Так как  $U'_y = Q(x, y)$ , можем найти  $U(x, y)$  с точностью до произвольной функции  $f(x)$ :

$$U(x, y) = \int Q(x, y) \, dy = y^2 + \frac{x^2 \cos 2y}{2} + f(x).$$

Чтобы найти  $f(x)$ , продифференцируем найденную функцию  $U(x, y)$  по  $x$ :  $U'_x = x \cos 2y + f'(x)$  и приравняем к известному значению  $U'_x = 2x \cos^2 y$ . Получим  $2x \cos^2 y = x \cos 2y + f'(x)$ , то есть  $2x \cos^2 y = x(2 \cos^2 y - 1) + f'(x)$ . Отсюда  $f'(x) = x$ . Проинтегрировав, найдем  $f(x) = x^2/2 + c_1$ . Таким образом,

$$U(x, y) = y^2 + \frac{x^2 \cos 2y}{2} + \frac{x^2}{2} + c_1.$$

Уравнение семейства интегральных кривых имеет вид

$$y^2 + \frac{x^2 \cos 2y}{2} + \frac{x^2}{2} = c.$$

Из этого семейства кривых выделим ту, которая проходит через начало координат. Полагая  $x = 1$ ,  $y = 0$ , получим  $c = 1$ .

Уравнение искомой кривой имеет вид

$$2y^2 + x^2 \cos 2y + x^2 = 2 \quad \text{или} \quad y^2 + x^2 \cos^2 y = 1.$$

О т в е т:  $y^2 + x^2 \cos^2 y = 1$ .

**Метод интегрирующего множителя.**

**Определение 1.18.** Если левая часть уравнения (1.24) не является полным дифференциалом, но удастся подобрать такую функцию  $\mu(x, y)$ , что после умножения на нее уравнения (1.24) получаем уравнение в полных дифференциалах, то есть уравнение

$$\mu(x, y)P(x, y) dx + \mu(x, y)Q(x, y) dy = 0$$

удовлетворяет условию

$$\frac{\partial(\mu(x, y)P(x, y))}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu(x, y)Q(x, y))}{\partial x},$$

то такая функция называется **интегрирующим множителем**.

**Некоторые частные случаи нахождения интегрирующего множителя.**

1. Интегрирующий множитель зависит только от  $x$ .

Пусть существует такой множитель  $\mu(x, y) = \mu(x)$ . Тогда уравнение

$$\mu(x)P(x, y) dx + \mu(x)Q(x, y) dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\frac{\partial(\mu(x)P(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(x)Q(x, y))}{\partial x}.$$

Откуда

$$\mu(x) \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \mu'(x)Q(x, y) + \mu(x) \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x},$$

$$\mu'(x)Q(x, y) = \mu(x) \left( \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\left( \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right)}{Q(x, y)}.$$

Так как левая часть последнего равенства зависит только от  $x$ , то для существования интегрирующего множителя  $\mu(x)$  необходимо и достаточно, чтобы и правая часть этого равенства зависела только от  $x$ :

$$\frac{\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}}{Q(x, y)} = \Psi(x),$$

следовательно,

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \Psi(x).$$

Решим это уравнение и получим

$$\mu(x) = Ce^{\int \Psi(x) dx}.$$

2. Интегрирующий множитель зависит только от  $y$ :  $\mu(x, y) = \mu(y)$ .

Пусть существует такой множитель  $\mu(x, y) = \mu(y)$ . Тогда уравнение

$$\mu(y)P(x, y) dx + \mu(y)Q(x, y) dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\frac{\partial(\mu(y)P(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(y)Q(x, y))}{\partial x}.$$

Откуда

$$\begin{aligned}\mu'(y)P(x, y) + \mu(y)\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} &= \mu(y)\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \\ \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} &= \frac{\left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\right)}{P(x, y)}.\end{aligned}$$

Так как левая часть последнего равенства зависит только от  $y$ , то для существования интегрирующего множителя  $\mu(y)$  необходимо и достаточно, чтобы и правая часть этого равенства зависела только от  $y$ :

$$\frac{\left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\right)}{P(x, y)} = \Psi(y),$$

следовательно,

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \Psi(y).$$

Решим это уравнение и получим

$$\mu(y) = Ce^{\int \Psi(y) dy}.$$

3. Интегрирующий множитель зависит от  $\omega(x, y)$ :  $\mu(x, y) = \mu(\omega(x, y))$ .

Пусть существует такой множитель  $\mu(x, y) = \mu(\omega(x, y))$ . Тогда уравнение

$$\mu(\omega(x, y))P(x, y) dx + \mu(\omega(x, y))Q(x, y) dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\frac{\partial(\mu(\omega(x, y))P(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(\omega(x, y))Q(x, y))}{\partial x}.$$

Откуда

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} P(x, y) + \mu(\omega(x, y)) \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} Q(x, y) + \mu(\omega(x, y)) \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \\ \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} Q(x, y) - \frac{\partial \omega}{\partial y} P(x, y) \right) &= \mu(\omega(x, y)) \left( \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right), \\ \frac{\mu'(\omega)}{\mu(\omega)} &= \frac{\left( \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right)}{\frac{\partial \omega}{\partial x} Q(x, y) - \frac{\partial \omega}{\partial y} P(x, y)}.\end{aligned}$$

Так как левая часть последнего равенства зависит только от  $\omega$ , то для существования интегрирующего множителя  $\mu(y)$  необходимо и достаточно, чтобы и правая часть этого равенства зависела только от  $\omega$ :

$$\frac{\left( \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right)}{\frac{\partial \omega}{\partial x} Q(x, y) - \frac{\partial \omega}{\partial y} P(x, y)} = \Psi(\omega(x, y)).$$

Проверяем последнее равенство, выбирая в качестве  $\omega(x, y)$  некоторые функции, например,  $x + y$ ,  $xy$ ,  $\frac{x}{y}$ ,  $x^2 + y^2$  и т. д. И, решая уравнение

$$\frac{d\mu}{\mu} = \Psi(\omega(x, y))d\omega,$$

получаем

$$\mu = Ce^{\int \Psi(\omega(x, y))d\omega}.$$

**Пример 1.13.** Решить дифференциальное уравнение:

$$(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0. \quad (1.26)$$

**Решение.** Уравнение (1.26) не является уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 0.$$

Но в данном случае можно подобрать интегрирующий множитель, так как

$$\frac{\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}}{Q(x, y)} = 2,$$

то есть интегрирующий множитель можно искать как в виде  $\mu(x)$ , так и в виде  $\mu(y)$ . Будем искать интегрирующий множитель как функцию от  $x$ :

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = 2.$$

Решением этого уравнения будет  $\mu(x) = e^{2x}$ . При умножении уравнения (1.26) на  $\mu(x)$  получим уравнение в полных дифференциалах:

$$(x^2 + y^2 + x)e^{2x}dx + ye^{2x}dy = 0.$$

Решив его, получим

**О т в е т:**

$$\frac{x^2 + y^2}{2}e^{2x} = c.$$

**Замечание 1.8.** 1. Если  $\mu(x, y)$  — интегрирующий множитель, то  $C\mu(x, y)$  — также интегрирующий множитель, где  $C$  — постоянная.

2. Если  $\mu_0$  — интегрирующий множитель и  $U_0(x, y)$  — соответствующий ему интеграл, то  $\mu = \mu_0\varphi(U_0)$  — также интегрирующий множитель, где  $\varphi \in C^1$ .

Для решения некоторых уравнений можно применять метод выделения полных дифференциалов, используя известные формулы:

$$\begin{aligned} d(xy) &= ydx + xdy, \\ d\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{ydx - xdy}{y^2}, \\ d(y^2) &= 2ydy, \\ d(\ln y) &= \frac{dy}{y}. \end{aligned}$$

**Пример 1.14.** Решить уравнение

$$ydx + xdy = 0$$

**Решение.** Так как  $ydx + xdy = d(xy)$ , то  $d(xy) = 0$ . Следовательно,  $xy = C$ .

**О т в е т:**  $xy = C$ .

**Интегрирующий множитель и особое решение.**

Пусть существует такое  $\mu(x, y)$ , что

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = du$$

или

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \frac{1}{\mu(x, y)} du = 0,$$

откуда

$$\begin{cases} du = 0, \\ \frac{1}{\mu(x, y)} = 0, \end{cases}$$

таким образом, особое решение может содержаться среди функций, удовлетворяющих условию

$$\mu(x, y) = \infty.$$



**Теорема 1.5** (Теорема о существовании интегрирующего множителя). *Если уравнение имеет общий интеграл*

$$U(x, y) = C, \quad (1.27)$$

*то оно имеет и интегрирующий множитель.*

*Доказательство.* Так как (1.27) - общий интеграл уравнения, то

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0 \\ P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \end{cases}$$

Откуда, так как система относительно  $dx, dy$  имеет ненулевое решение, имеем

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ P & Q \end{array} \right| = 0$$

или

$$Q \frac{\partial u}{\partial x} - P \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

откуда

$$Q \frac{\partial u}{\partial x} = P \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Определим

$$\mu = \frac{1}{P} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Q} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Значит

$$P \frac{1}{P} \frac{\partial u}{\partial x} dx + Q \frac{1}{Q} \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = du.$$

Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 1.6.** *Если  $\mu_0$  - интегрирующий множитель и  $U_0(x, y)$  соответствующий ему интеграл, то  $\mu_1 = \mu_0 \varphi(U_0(x, y))$ , где  $\varphi$  непрерывно дифференцируемая и не тождественно равная нулю функция, тоже интегрирующий множитель.*

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \mu_1 P dx + \mu_1 Q dy &= \mu_0 \varphi(U_0) P dx + \mu_0 \varphi(U_0) Q dy = \\ &= \varphi(U_0) (\mu_0 P dx + \mu_0 Q dy) = \varphi(U_0) dU_0 = d \left( \int \varphi(U_0) dU_0 \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 1.7.** *Любые два интегрирующих множителя связаны соотношением*

$$\mu_1 = \mu_0 \varphi(U_0),$$

*где  $\varphi$  - непрерывно дифференцируемая и не тождественно равная нулю функция.*

*Доказательство.* Пусть  $U_1$  - интеграл, соответствующий  $\mu_1$ ,  $U_0$  - интеграл, соответствующий  $\mu_0$ . Тогда

$$\begin{cases} \mu_0 (p dx + Q dy) = U_0 \\ \mu_1 (p dx + Q dy) = U_1. \end{cases}$$

Так как  $U_1 = \Phi(U_0)$ , то

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{dU_1}{dU_0} = \frac{d\Phi(U_0)}{dU_0} = \frac{\Phi(U_0)' dU_0}{dU_0} = \Phi(U_0)' = \varphi(U_0).$$

Производная  $\Phi'(U_0)$  существует и непрерывна, и  $U_0, U_1$  имеют непрерывные частные производные, так как являются решениями уравнения.

Теорема доказана.  $\square$

**Следствие 1.1.** Если  $\mu_1, \mu_2$  – два различных интегрирующих множителя, то есть  $\frac{\mu_1}{\mu_2} \neq \text{const}$ , то

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = C$$

это общий интеграл уравнения.

*Доказательство.*

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \varphi(U_0) = C.$$

общий интеграл уравнения.

Следствие доказано. □

Еще один способ нахождения интегрирующего множителя.

$$\underbrace{(M_1 dx + N_1 dy)}_1 + \underbrace{(M_2 dx + N_2 dy)}_2 = 0.$$

Пусть  $\mu_1$  – интегрирующий множитель для уравнения  $M_1 dx + N_1 dy = 0$ ,  $U_1$  – его интеграл. Пусть  $\mu_2$  – интегрирующий множитель для уравнения  $M_2 dx + N_2 dy = 0$ ,  $U_2$  – его интеграл.

Предположим, что существует  $\mu$  общий для (1) и (2), тогда  $\mu = \mu_1 \varphi(U_1)$ ,  $\varphi \in C^1$ , и  $\mu = \mu_2 \psi(U_2)$ ,  $\psi \in C^1$ . Если подобрать функции  $\varphi$  и  $\psi$  так, чтобы  $\mu_1 \varphi(U_1) = \mu_2 \varphi(U_2)$  и положить  $\mu = \mu_1 \varphi(U_1)$ , то это  $\mu$  и будет интегрирующим множителем исходного уравнения.

**Пример 1.15.**

$$\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right) dx + \left(1 + \frac{x^3}{y}\right) dy = 0,$$

$$\left(\frac{y}{x} dx + dy\right) + \left(3x^2 dx + \frac{x^3}{y} dy\right) = 0.$$

$$\mu_1 = x, \quad U_1 = xy; \quad \mu_2 = y, \quad U_2 = x^3 y \Rightarrow$$

$$x\varphi(xy) = y\psi(x^3 y), \quad \varphi(t) = t^2, \quad \psi(t) = t,$$

$$\mu = x^3 y^2; \quad \frac{(xy)^3}{3} + \frac{(x^3 y)^2}{2} = C.$$

### 1.3 Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

**Пример 1.16.** Уравнение радиоактивного распада.

**Решение.** Пусть  $x(t)$  — количество радиоактивного вещества. Известно, что скорость распада пропорциональна количеству вещества:

$$\dot{x}(t) = -kx(t), \quad k > 0.$$

Определим период полураспада, если в начальный момент времени  $t_0$  количество вещества составляет  $x(t_0) = x_0$ .

$$\frac{dx(t)}{dt} = -kx(t),$$

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = -k dt,$$

$$\ln |x(t)| = -kt + \ln c,$$

$$x(t) = ce^{-kt},$$

$$x_0 = x(t_0) = ce^{-kt_0},$$

$$c = x_0 e^{kt_0},$$

$$x(t) = x_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Определим, при каком  $T$  имеем  $x(T) = \frac{x_0}{2}$ .

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-k(T-t_0)},$$

$$k(T - t_0) = \ln 2,$$

$T = t_0 + \frac{1}{k} \ln 2$  — период полураспада не зависит от начального количества вещества.

**Пример 1.17.** Уравнение движения материальной точки под действием силы, приложенной вдоль прямой, получается из второго закона Ньютона:

$$m\ddot{x} = f(x, t).$$

**Пример 1.18.** Скорость распространения бактерий.

**Решение.** Известно, что скорость распространения бактерий пропорциональна их количеству:

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = kN(t), \\ N(0) = N_0. \end{cases}$$

$$\frac{dN}{N} = kdt,$$

$$\ln |N| = kt + \ln c,$$

$$N = ce^{kt},$$

$$N_0 = N(0) = c,$$

$N = N_0 e^{kt}$  — численность популяции растет экспоненциально.

**Пример 1.19.** Движение материальной точки под действием силы тяжести по вертикальной прямой.

**Решение.** Пусть известны скорость и положение точки в начальный момент времени, то есть выполняются условия  $x(t_0) = x_0$  и  $\dot{x}(t_0) = v_0$ . В силу второго закона Ньютона имеем

$$\ddot{x}(t) = g,$$

$$\dot{x}(t) = gt + c_1,$$

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2,$$

$$v_0 = \dot{x}(t_0) = gt_0 + c_1 \Rightarrow c_1 = v_0 - gt_0,$$

$$x_0 = x(t_0) = \frac{1}{2}gt_0^2 + (v_0 - gt_0)t_0 + c_2 \Rightarrow c_2 = x_0 + \frac{1}{2}gt_0^2 - v_0t_0,$$

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + (v_0 - gt_0)t + x_0 + \frac{1}{2}gt_0^2 - v_0t_0.$$

**Пример 1.20.** Малые колебания математического маятника.

**Решение.** Шарик массы  $m$  закреплен на конце невесомой нерастяжимой нити. Отклонение нити от положения равновесия задается переменной  $x$ . На шарик действует сила тяжести  $F = -mg$  и сила натяжения нити. Закон движения в проекции на касательную:

$$m \frac{d^2(lx)}{dt^2} = -mg \sin x,$$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l} \sin x.$$

Если колебания малые, то  $\sin x \sim x$ , и уравнение принимает вид

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x.$$

## 4 Уравнения высших порядков.

### 4.1 Уравнения высших порядков

$$f(x, y, y', \dots, y^n) = 0 \quad (4.1)$$

или

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (4.2)$$

**Определение 4.1.** Решением уравнения называется функция  $y = \phi(x)$ ,  $n$  раз дифференцируемая и обращающая уравнение в тождество.

**Определение 4.2** (Задача Коши). Найти решение уравнения, удовлетворяющее следующим условиям

$$\begin{cases} y(x_0) &= y_0^0 \\ y'(x_0) &= y_1^0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}^0 \end{cases} \quad (4.3)$$

**Теорема 4.1** (Теорема существования и единственности решения задачи Коши). Пусть функция  $F(x, y_0, \dots, y_{n-1})$  непрерывна на множестве  $N = \{(x, y_0, \dots, y_{n-1}) : |x - x_0| \leq a, |y_0 - y_0^0| \leq b, \dots, |y_{n-1} - y_{n-1}^0| \leq b\}$ . Тогда решение задачи (4.2)-(4.3) существует в некоторой окрестности  $U_\varepsilon(x_0)$ . Если  $f'y_0, \dots, f'y_{n-1}$  непрерывны в  $N$  (или выполняется более слабое условие), тогда  $F$  удовлетворяет условию Липшица по  $y_0, \dots, y_{n-1}$  в  $N$ , то решение задачи Коши (4.2)-(4.3) единственно в  $U_\varepsilon(x_0)$ , где  $\varepsilon = \min(a, \frac{b}{\max(M_0, \dots, M_{n-1})})$ ,  $M_i = \max_n |F'_{y_i}|$ .

#### 4.1.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Метод решения уравнений, допускающих понижение порядка, состоит в том, что в исходном уравнении делается такая замена  $z(x)$  или  $p(y)$ , относительно которой получается уравнение более низкого порядка.

При нахождении частного решения  $y(x)$  исходного уравнения порядка  $n \geq 2$  с заданными начальными условиями  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ , удобно константы интегрирования  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , возникающие в процессе нахождения сначала  $z(x)$  (или  $p(y)$ ), затем  $y(x)$ , определять при помощи начальных условий не из общего решения, а по мере их появления.

Укажем несколько наиболее распространенных случаев:

1. В уравнение не входит искомая функция  $y$ , т.е. уравнение имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Тогда порядок уравнения можно понизить с помощью замены  $y^{(k)} = z(x)$ .

2. В уравнение не входит независимая переменная  $x$ , т.е. уравнение имеет вид

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Тогда порядок уравнения понижается с помощью замены  $y' = p(y)$ .

3. Уравнение однородно относительно  $y$  и его производных, т.е.

$$F(x, ky, ky', ky'', \dots, ky^{(n)}) = k^m F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}).$$

Тогда порядок уравнения понижается подстановкой  $y' = yz$ , где  $z$  — новая неизвестная функция.

4. Уравнение однородно относительно  $x$  и  $y$  в обобщенном смысле, т.е.

$$F(kx, k^m y, k^{m-1} y', k^{m-2} y'', \dots, k^{m-n} y^{(n)}) = k^m F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}).$$

Для этого уравнения делается замена  $x = e^t$ ,  $y = ze^{mt}$ , где  $z = z(t)$  — новая неизвестная функция, а  $t$  — новая независимая переменная. Данная замена приводит к уравнению, не содержащему независимую переменную  $t$ . Порядок такого уравнения понижается одним из ранее рассмотренных способов.

**Пример 4.1.** Решить уравнение

$$xy'' = (y')^2.$$

**Решение.** Это уравнение не содержит  $y$ , поэтому порядок можно понизить заменой  $y' = z(x)$ ,  $y'' = z'(x)$ . Тогда исходное уравнение примет вид:

$$x^2 z' = z^2. \quad (*)$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}, \quad z = \frac{x}{1 - c_1 x}.$$

Подставим  $y' = x/(1 - c_1 x)$  в уравнение (\*) и получим решение

$$y = -\frac{1}{c_1} x - \frac{1}{c_1^2} \ln |1 - c_1 x| + c_2.$$

При разделении переменных в уравнении (\*) могли быть потеряны решения  $z = 0$  и  $x = 0$ . Функция  $z = 0$  является решением этого уравнения, а  $x = 0$  — нет. Таким образом, исходное уравнение имеет решение  $y' = 0$ , то есть  $y = c$ .

**О т в е т:**

$$y = -\frac{1}{c_1} x - \frac{1}{c_1^2} \ln |1 - c_1 x| + c_2, \quad y = c.$$

**Пример 4.2.** Решить уравнение

$$y^4 - y^3 y'' = 1 \quad \text{при условии} \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

**Решение.** Пусть  $y' = p(y)$ ,  $y'' = \frac{dp}{dy} y' = \frac{dp}{dy} p$ . Тогда исходное уравнение примет вид:

$$y^4 - y^3 p \frac{dp}{dy} = 1, \quad p(\sqrt{2}) = \sqrt{\frac{5}{2}};$$

$$\int p dp = \int \frac{y^4 - 1}{y^3} dy, \quad \frac{p^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2} + c_1, \quad c_1 = 0.$$

Итак,

$$p^2 = y^2 + \frac{1}{y^2}, \quad p = \pm \frac{\sqrt{y^4 + 1}}{y}.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{y^4 + 1}}{y}; \quad \int \frac{y dy}{\sqrt{y^4 + 1}} = \pm \int dx; \quad \frac{1}{2} \ln(y^2 + \sqrt{y^4 + 1}) = \pm x + c_2.$$

$$c_2 = \ln(\sqrt{2 + \sqrt{5}}).$$

**О т в е т:**  $\ln(y^2 + \sqrt{y^4 + 1}) = \pm 2x + \ln(2 + \sqrt{5})$ .

**Пример 4.3.** Решить уравнение

$$2yy'' = y^2 + (y')^2.$$

**Р е ш е н и е.** Это уравнение является однородным относительно  $y$  и его производных, поэтому порядок уравнения может быть понижен подстановкой  $y' = yz$ ,  $y'' = y(z^2 + z')$ . Получим уравнение первого порядка  $2y^2(z' + z^2) = y^2(1 + z^2)$ , которое эквивалентно системе

$$\begin{cases} y = 0, \\ 2z' = 1 - z^2. \end{cases} \quad (*)$$

Второе уравнение — это уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, получим

$$\frac{1+z}{1-z} = ce^x, \quad z = 1 - \frac{2}{1+ce^x}, \quad \text{то есть } y' = y\left(1 - \frac{2}{1+ce^x}\right).$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\ln y = \ln e^x - \ln(c^2 e^{2x}) + \ln(1 + ce^x) + \ln c^*, \quad \text{то есть } y = c_1(1 \pm \operatorname{ch}(x + c_2)).$$

При разделении переменных могли быть потеряны решения  $1 - z^2 = 0$ . Проверим, являются ли функции  $z = \pm 1$  решениями. Получим уравнения  $y' = \pm y$ , решения которых имеют вид  $y = ce^{\pm x}$ . Подставив эти функции в исходное уравнение, получим тождества, следовательно, они являются решениями. Решение  $y = 0$  из системы (\*) является частным случаем этих решений при  $c = 0$ .

**О т в е т:**  $y = c_1(1 \pm \operatorname{ch}(x + c_2))$ ,  $y = ce^{\pm x}$ .

## 5 Линейные уравнения высших порядков.

### 5.1 Общая теория линейных дифференциальных уравнений высших порядков

Линейное неоднородное уравнение с произвольными коэффициентами порядка  $n$  имеет вид:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (5.1)$$

где  $a_j(x) (j = 0, \dots, n)$ ,  $f(x)$  — непрерывные на интервале  $(a, b)$  функции. Тогда для любого  $x_0$  из интервала  $(a, b)$  и любых значений  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  существует единственное решение задачи Коши

$$\begin{cases} a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Пусть  $L$  — линейный оператор, определяемый формулой

$$Ly = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y,$$

тогда уравнение (5.1) можно записать в виде

$$Ly = f(x). \quad (5.2)$$

Будем также рассматривать однородное уравнение

$$Ly = 0. \quad (5.3)$$

**Свойства линейного оператора  $L$ .**

1.  $L(\alpha y) = \alpha Ly$ , при любом  $\alpha \in \mathcal{R}$  ( $\alpha \in \mathcal{C}$ );
2.  $L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$  при любых  $y_1$  и  $y_2$ , удовлетворяющих (5.3).

**Свойства уравнений (5.2) и (5.3).**

1. Уравнения остаются линейными при любой непрерывно дифференцируемой  $n$  раз замене независимой переменной  $x = \varphi(t)$ .
2. Уравнения остаются линейными при линейной замене неизвестной функции  $y(x) = a(x)z(x) + b(x)$ , где  $a(x)$ ,  $z(x)$ ,  $b(x)$  — непрерывно дифференцируемые  $n$  раз функции.

Специальная замена вида  $y(x) = e^{-\frac{1}{n} \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} z(x)$  сводит дифференциальные уравнения (5.2) и (5.3) к уравнениям, не содержащим  $(n-1)$ -й производной.

**Свойства решений уравнения (5.3).**

1. Если  $y(x)$  — решение уравнения (5.3), то для любого  $\alpha \in \mathcal{R}$  ( $\alpha \in \mathcal{C}$ ) функция  $y_1(x) = \alpha y(x)$  также является решением этого уравнения.
2. Если  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — решения уравнения (5.3), то функция  $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$  также является решением этого уравнения.
3. Если  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  — решения уравнения (5.3), то функция  $y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$  также является решением этого уравнения.

### 5.1.1 Понятие о линейной зависимости и линейной независимости функций

**Определение 5.1.** Функции  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  называются *линейно независимыми*, если их линейная комбинация  $\alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0$  только в случае, когда  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

**Определение 5.2.** Функции  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  называются *линейно зависимыми*, если существуют такие  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , не все равные нулю, что линейная комбинация  $\alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0$ .

#### Необходимое и достаточное условие линейной зависимости функций.

Функции  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда одна из этих функций линейно выражается через остальные, то есть существуют такие постоянные  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ , что

$$f_i(x) = \sum_{k=1 \atop (k \neq i)}^n \alpha_k f_k(x), \quad i = \overline{1, n}.$$

Пусть функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  имеют производные до  $(n-1)$ -го порядка. Тогда определитель

$$W(y_1 \dots y_n) = W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

называется **определителем Вронского**.

**Теорема 5.1.** Если система функций линейно зависима, то их определитель Вронского равен нулю.

*Доказательство.* Пусть функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  линейно зависимы. Тогда существуют такие постоянные  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , не все равные нулю, что  $\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$ . Без ограничений общности рассуждений можем считать, что  $\alpha_n \neq 0$ . Тогда

$$y_n(x) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1(x) - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}(x).$$

Вычислим  $y_n'(x), \dots, y_n^{(n-1)}(x)$  и подставим полученные значения в определитель Вронского вместо последнего столбца. При этом получится определитель, у которого последний столбец есть линейная комбинация предыдущих  $(n-1)$  столбцов. А такой определитель равен нулю.  $\square$

*Примечание 5.1.* Сформулированное условие линейной зависимости функций является необходимым, но не является достаточным условием. Для доказательства этого факта приведем пример функций, определитель Вронского которых равен нулю, но не являющихся линейно зависимыми.

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad y_2(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0, \end{cases}$$

$$W(y_1, y_2) = W(x) = \begin{cases} \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix}, & x \geq 0, \\ \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix}, & x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, определитель Вронского  $W(x) \equiv 0$ . Но функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  не являются линейно зависимыми. Действительно,

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \begin{cases} \infty, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

**Лемма 5.1.** Если  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  — линейно независимые решения уравнения  $Ly = 0$ , то определитель Вронского  $W(y_1, \dots, y_n)$  не обращается в нуль ни в одной точке области существования решений уравнения. (Если  $a_1(x), \dots, a_n(x) \in (a, b)$ , то  $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$  ни при каком  $x_0 \in (a, b)$ ).



*Доказательство.* Доказательство проведем от противного. Пусть существует  $x_0 \in (a, b)$  такой, что  $W(x_0) = 0$ , то есть

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим функцию  $y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$ . По свойству решений уравнения (5.3), если  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  есть решения уравнения  $Ly = 0$ , то и их линейная комбинация также является решением этого уравнения. Следовательно,  $y(x)$  — решение уравнения  $Ly = 0$ . Вычислим производные этой функции до  $(n-1)$ -го порядка:

$$\begin{aligned} y'(x) &= C_1 y_1'(x) + \dots + C_n y_n'(x), \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x) &= C_1 y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Вычислим значение функции  $y(x)$  и ее производных в точке  $x_0$ . Составим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = 0, \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Это линейная однородная система уравнений, главный определитель которой есть определитель Вронского с неизвестными  $C_1, \dots, C_n$ . Так как главный определитель системы по предположению равен нулю, то существует ненулевое решение этой системы:  $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$ .

Подставив эти  $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$  вместо  $C_1, C_2, \dots, C_n$  в функцию  $y(x)$  и (5.4), получим

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1^0 y_1(x) + \dots + C_n^0 y_n(x), \\ y'(x) &= C_1^0 y_1'(x) + \dots + C_n^0 y_n'(x), \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x) &= C_1^0 y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n^0 y_n^{(n-1)}(x). \end{aligned}$$

В точке  $x_0$  из системы (5.5) имеем

$$\begin{cases} y(x_0) = 0, \\ y'(x_0) = 0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

В частности, этими данными Коши обладает нулевое решение. А по теореме существования и единственности, которая выполняется в силу предположения леммы, любое решение, имеющее тот же набор данных Коши, должно с ним совпадать. Отсюда имеем  $y(x) \equiv 0$ . Таким образом, получили, что существуют такие константы  $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ , не все равные нулю, что

$$C_1^0 y_1(x) + \dots + C_n^0 y_n(x) = 0,$$

то есть решения  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  линейно зависимы. □

**Теорема 5.2.** Пусть  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  — решения линейного однородного дифференциального уравнения  $Ly = 0$ . Эти функции являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда определитель Вронского  $W(y_1, \dots, y_n)$  равен нулю.

*Доказательство.* 1) Если решения  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  линейно зависимы, то определитель Вронского равен нулю в силу теоремы о равенстве нулю определителя Вронского для любой системы линейно зависимых функций (необязательно решений уравнения).

2) Если определитель Вронского равен нулю, то в силу леммы 5.1 решения  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  линейно зависимы. □

**Лемма 5.2** (Формула Лиувилля).

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx},$$

где  $a_1(x)$  — коэффициент при  $y^{(n-1)}$  в уравнении  $Ly = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  — линейно независимые решения уравнения  $Ly = 0$ . Запишем определитель Вронского для этих функций

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Вычислим  $W'(x)$ :

$$\begin{aligned} W'(x) = & \begin{vmatrix} y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1''(x) & \dots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \dots \\ & \dots + \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

В этом выражении все определители, кроме последнего, равны нулю, так как содержат одинаковые строки. Прибавим к последней строке ненулевого определителя линейную комбинацию всех остальных строк:

$$y_i^{(n)}(x) + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} y_i^{(n-2)}(x) + \dots + \frac{a_n(x)}{a_0(x)} y_i(x),$$

где  $i = \overline{1, n}$  — номер столбца. Так как  $y_i(x)$  — это решения уравнения  $Ly = 0$ , получаем, что

$$y_i^{(n)}(x) + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} y_i^{(n-2)}(x) + \dots + \frac{a_n(x)}{a_0(x)} y_i(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} y_i^{(n-1)}(x).$$

Таким образом,

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} y_1^{(n-1)}(x) & \dots & -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} W(x).$$

Следовательно, получено дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$W'(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} W(x).$$

Решим его и найдем  $W(x)$ .

$$\begin{aligned} \frac{dW}{W} &= -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx, \\ \ln |W| \Big|_{x_0}^x &= -\int_{x_0}^x \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx, \\ W(x) &= C e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}. \end{aligned}$$

Найдем  $C$ :

$$W(x_0) = Ce^0, \quad C = W(x_0).$$

Таким образом, получаем формулу Лиувилля

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}.$$

□

**Теорема 5.3.** Если существует такое значение  $x_0 \in (a, b)$ , что  $W(x_0) = 0$ , тогда  $W(x) = 0$  для любого  $x \in (a, b)$ .

Теорема является элементарным следствием доказанной леммы.

### 5.1.2 Понятие о фундаментальной системе решения

**Определение 5.3.** Система  $n$  линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка  $n$  называется **фундаментальной системой решения**.

Из доказанных ранее теорем следует, что система  $n$  решений данного линейного однородного дифференциального уравнения порядка  $n$  является фундаментальной тогда и только тогда, когда ее определитель Вронского не равен нулю.

Любое решение линейного однородного дифференциального уравнения порядка  $n$  есть линейная комбинация его фундаментальных решений.

**Утверждение 5.1.** Линейное однородное дифференциальное уравнение порядка  $n$  не может иметь более чем  $n$  линейно независимых частных решений.

*Доказательство.* Действительно, рассмотрим уравнение

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$$

Пусть  $y_1(x), \dots, y_n(x), y_{n+1}(x)$  — частные решения этого уравнения. Рассмотрим первые  $n$  решений.

1) Пусть  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  — линейно зависимые, тогда существуют такие постоянные  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  не все равные нулю, что  $\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$ . Добавим к этой сумме слагаемое  $0 \cdot y_{n+1}(x)$ . Получим  $\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) + 0 \cdot y_{n+1}(x) = 0$ . Так как не все  $\alpha_i$  равны нулю, а линейная комбинация обращается в нуль, следовательно,  $y_1(x), \dots, y_n(x), y_{n+1}(x)$  — линейно зависимы.

2) Пусть  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  — линейно независимые, тогда  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  являются фундаментальной системой решений. А так как  $y_{n+1}(x)$  — также решение, то его можно представить в виде линейной комбинации

$$y_{n+1}(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

Следовательно,  $y_1(x), \dots, y_n(x), y_{n+1}(x)$  — линейно зависимые. Тем самым доказали, что любые  $(n+1)$  решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка  $n$  являются линейно зависимыми. □

**Построение решения линейного однородного дифференциального уравнения.** Для построения требуется найти  $n$  линейно независимых частных решений, а затем взять их линейную комбинацию.

### 5.1.3 Понижение порядка линейного однородного дифференциального уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$$

Пусть  $y_1(x)$  — частное решение этого уравнения. Будем понижать порядок уравнения с помощью замены

$$y(x) = y_1(x) \int u(x) dx,$$

где  $u(x) = \left(\frac{y(x)}{y_1(x)}\right)'$ . Вычислим производные новой функции до  $n$ -го порядка:

$$y'(x) = y_1'(x) \int u(x)dx + y_1(x)u(x),$$

$$y''(x) = y_1''(x) \int u(x)dx + 2y_1'(x)u(x) + y_1(x)u'(x),$$

$$y'''(x) = y_1'''(x) \int u(x)dx + 3y_1''(x)u(x) + 3y_1'(x)u'(x) + y_1(x)u''(x),$$

...

$$y^{(n-1)}(x) = y_1^{(n-1)}(x) \int u(x)dx + (n-1)y_1^{(n-2)}(x)u(x) + \dots + y_1(x)u^{(n-2)}(x),$$

$$y^{(n)}(x) = y_1^{(n)}(x) \int u(x)dx + ny_1^{(n-1)}(x)u(x) + \dots + y_1(x)u^{(n-1)}(x).$$

Подставим новую функцию с ее производными в уравнение  $Ly = 0$ , сгруппируем подобные слагаемые и получим

$$\left(a_0(x)y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y_1\right) \cdot \int u(x)dx + B_1(x)u(x) + B_2(x)u'(x) + \dots + B_n(x)u^{(n-1)}(x) = 0,$$

где  $B_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$  — новые коэффициенты. Так как  $y_1(x)$  — частное решение уравнения  $Ly = 0$ , то

$$a_0(x)y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y_1 = 0.$$

Следовательно, получили уравнение  $(n-1)$ -го порядка относительно функции  $u(x)$

$$B_1(x)u(x) + B_2(x)u'(x) + \dots + B_n(x)u^{(n-1)}(x) = 0.$$

Пусть его решения  $u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)$  — линейно независимые, тогда решения исходного уравнения имеют вид

$$y_1(x), \quad y_1(x) \int u_1(x)dx, \quad y_1(x) \int u_2(x)dx, \dots, \quad y_1(x) \int u_{n-1}(x)dx.$$

#### 5.1.4 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

Рассмотрим уравнение

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

**Теорема 5.4.** Если  $y_1$  — частное решение линейного неоднородного уравнения, то общее решение этого уравнения дается формулой

$$y = y_1 + z,$$

где  $z$  — общее решение соответствующего линейного однородного уравнения.

Доказательство аналогично случаю линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка.

**Теорема 5.5.** Если правую часть уравнения можно представить в виде

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

то частное решение имеет вид

$$y = y^{(1)} + y^{(2)},$$

где  $y^{(1)}$  — частное решение уравнения  $Ly = f_1(x)$ , а  $y^{(2)}$  — частное решение уравнения  $Ly = f_2(x)$ .

Доказывается непосредственно подстановкой в уравнение  $Ly = f(x)$ .

**Метод нахождения решений линейного неоднородного дифференциального уравнения.**

Для нахождения решений линейного неоднородного дифференциального уравнения  $Ly = f(x)$  используется метод вариации произвольных постоянных. Для этого сначала находим решение однородного уравнения  $Ly = 0$ . Пусть  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  — фундаментальная система решений этого уравнения, тогда решение общего однородного уравнения можно записать в виде:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

В этом решении заменим произвольные постоянные  $C_1, \dots, C_n$  на неизвестные функции  $C_1(x), \dots, C_n(x)$ , то есть

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + \dots + C_n(x) y_n(x).$$

Функции  $C_1(x), \dots, C_n(x)$  определим, подставив  $y(x)$  в уравнение  $Ly = f(x)$ . При этом получим только одно условие, связывающее функции  $C_1(x), \dots, C_n(x)$ . Но так как для определения этих функций нам необходимо  $n$  условий, остальные  $(n-1)$  условие положим произвольно. Вычислим производные

$$y'(x) = C_1(x) y_1'(x) + \dots + C_n(x) y_n'(x) + C_1'(x) y_1(x) + \dots + C_n'(x) y_n(x).$$

Пусть в этом выражении  $C_1'(x) y_1(x) + \dots + C_n'(x) y_n(x) = 0$ , тогда

$$y''(x) = C_1(x) y_1''(x) + \dots + C_n(x) y_n''(x) + C_1'(x) y_1'(x) + \dots + C_n'(x) y_n'(x).$$

А в этом выражении пусть  $C_1'(x) y_1'(x) + \dots + C_n'(x) y_n'(x) = 0$ . И так далее,

$$y^{(n)}(x) = C_1(x) y_1^{(n)}(x) + \dots + C_n(x) y_n^{(n)}(x) + C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x).$$

Подставим полученные выражения в уравнение  $Ly = f(x)$ , получим

$$C_1(x) Ly_1 + \dots + C_n(x) Ly_n + a_0(x) \left( C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) \right) = f(x).$$

Поскольку  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  являются решениями уравнения  $Ly = 0$ , то  $Ly_1 = 0, \dots, Ly_n = 0$ , следовательно

$$a_0(x) \left( C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) \right) = f(x).$$

Таким образом, для определения функций  $C_1(x), \dots, C_n(x)$  имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + \dots + C_n'(x) y_n(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + \dots + C_n'(x) y_n'(x) = 0, \\ \vdots \\ C_1'(x) y_1^{(n-2)}(x) + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}. \end{cases}$$

Выразив из данной системы  $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$ , вычислим функции

$$C_1(x) = \int C_1'(x) dx, \dots, C_n(x) = \int C_n'(x) dx$$

и, подставив их в выражение

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + \dots + C_n(x) y_n(x),$$

получим решение уравнения  $Ly = f(x)$ .

## 5.2 Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

### 5.2.1 Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами порядка  $n$  имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad \text{где } a_j = \text{const}, \quad (j = 0, \dots, n). \quad (5.6)$$

Чтобы его решить, необходимо составить характеристическое уравнение

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (5.7)$$

и найти все его корни:  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Общее решение уравнения (5.6) есть сумма, состоящая из слагаемых вида  $C_j e^{\lambda_j x}$  для каждого простого корня  $\lambda_j$  уравнения (5.7) и слагаемых вида

$$(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_k x^{k-1}) e^{\lambda x}$$

для каждого кратного корня  $\lambda$  кратности  $k$  уравнения (5.7). Здесь все  $C_j$  — произвольные постоянные.

Если все коэффициенты  $a_j$  уравнения (5.6) вещественные, то слагаемые, отвечающие комплексным корням  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  уравнения (5.7), можно записать в вещественной форме:

$$C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

если эти корни простые, и

$$P_{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

если каждый из корней  $\alpha + i\beta$ ,  $\alpha - i\beta$  имеет кратность  $k$ . Здесь  $P_{k-1}$ ,  $Q_{k-1}$  — многочлены от  $x$  степени  $k-1$ . Их коэффициенты — произвольные постоянные.

**Пример 5.1.** Найти частное решение дифференциального уравнения  $y''' - 4y'' + 5y' = 0$ , удовлетворяющее следующим начальным условиям:  $y(0) = 5$ ,  $y'(0) = 7$ ,  $y''(0) = 13$ .

**Решение.** Это линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Для его решения составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda = 0.$$

Найдем его корни:  $\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0$ ,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$ . Общее решение дифференциального уравнения

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} \cos x + c_3 e^{2x} \sin x.$$

Для того, чтобы воспользоваться начальными условиями, найдем  $y'$  и  $y''$ :

$$y' = 2c_2 e^{2x} \cos x - c_2 e^{2x} \sin x + 2c_3 e^{2x} \sin x + c_3 e^{2x} \cos x,$$

$$y'' = 3c_2 e^{2x} \cos x - 4c_2 e^{2x} \sin x + 3c_3 e^{2x} \sin x + 4c_3 e^{2x} \cos x.$$

Подставим в общее решение  $y$ , в  $y'$  и в  $y''$  начальные условия и решим полученную систему:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 5, \\ 2c_2 + c_3 = 7, \\ 3c_2 + 4c_3 = 13. \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} c_1 = 2, \\ c_2 = 3, \\ c_3 = 1. \end{cases}$$

Подставив в общее решение полученные значения постоянных, получим частное решение

$$y = 2 + 3e^{2x} \cos x + e^{2x} \sin x.$$

**О т в е т:**  $y = 2 + 3e^{2x} \cos x + e^{2x} \sin x$ .

### 5.2.2 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad \text{где } a_j = \text{const}, (j = 0, \dots, n). \quad (5.8)$$

Если правая часть  $f(x)$  состоит из сумм и произведений функций вида  $b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ ,  $e^{ax}$ ,  $\cos \beta x$ ,  $\sin \beta x$ , частное решение можно искать *методом неопределенных коэффициентов*.

Для уравнений с правой частью  $f(x) = P_m(x)e^{ax}$ , где  $P_m(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ , существует частное решение вида

$$y_1 = x^r Q_m(x) e^{ax}, \quad (5.9)$$

где  $Q_m(x)$  — многочлен с неопределенными коэффициентами степени  $m$ . Число  $r = 0$ , если  $a$  — не корень характеристического уравнения (5.7), а если  $a$  — корень, то  $r$  равно кратности этого корня. Чтобы найти коэффициенты многочлена  $Q_m(x)$ , надо решение (5.9) подставить в дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения.

Если в правую часть уравнения входят  $\cos bx$  и  $\sin bx$ , то их можно выразить через показательную функцию по формулам Эйлера. Если же коэффициенты  $a_j$  левой части уравнения (5.8) вещественны, то для уравнения с правой частью

$$e^{ax}(P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx) \quad (5.10)$$

можно искать частное решение в виде

$$y_1 = x^r e^{ax}(R_l(x) \cos bx + T_l(x) \sin bx), \quad (5.11)$$

где  $r = 0$ , если  $a + ib$  не корень характеристического уравнения, и  $r$  равно кратности корня  $a + ib$  в противном случае, а  $R_l$  и  $T_l$  — многочлены степени  $l$ , равной наибольшей из степеней  $m$  и  $n$  многочленов  $P$  и  $Q$ . Чтобы найти коэффициенты многочленов  $R_l$  и  $T_l$ , надо подставить решение (5.11) в уравнение (5.8) и приравнять коэффициенты при подобных членах.

Если правая часть уравнения равна сумме нескольких функций вида (5.10), то частное решение линейного уравнения с правой частью  $f_1 + f_2 + \dots + f_p$  равно сумме частных решений уравнений с той же левой частью и правыми частями  $f_1, \dots, f_p$ .

Общее решение линейного неоднородного уравнения во всех случаях равно сумме частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения с той же левой частью.

**Пример 5.2.** Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = 5xe^{2x}.$$

**Решение.** Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения  $y$  есть сумма общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения  $y_1$  и частного решения неоднородного уравнения  $y_2$ :

$$y = y_1 + y_2.$$

Найдем  $y_1$ . Составим соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Корни характеристического уравнения  $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ :  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3$ . Общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y_2 = x^r (Ax + B) e^{2x}.$$

Здесь  $r = 1$ , так как  $a = \lambda_1 = 2$  — корень характеристического уравнения кратности 1. Для нахождения неизвестных коэффициентов  $A$  и  $B$  подставим выражение функции  $y_2$  и ее производных

в уравнение и, сократив на  $e^{2x}$ , сравним коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  левой и правой частей. Получим

$$\begin{array}{l|l} 6 & y_2 = (Ax^2 + Bx)e^{2x} \\ -5 & y_2' = 2(Ax^2 + Bx)e^{2x} + (2Ax + B)e^{2x} \\ 1 & y_2'' = 4(Ax^2 + Bx)e^{2x} + 4(2Ax + B)e^{2x} + 2Ae^{2x}. \end{array}$$

$$(6A - 10A + 4A)x^2 + (6B - 10B - 10A + 4B + 8A)x + (-5B + 4B + 2A) = 5x = 0x^2 + 5x + 0,$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & (6A - 10A + 4A) = 0 \\ x & (6B - 10B - 10A + 4B + 8A) = 5 \\ x^0 & (-5B + 4B + 2A) = 0. \end{array}$$

Откуда находим  $A = -\frac{5}{2}$ ;  $B = -5$ , т.е.  $y = x(-\frac{5}{2}x - 5)e^{2x}$ .

О т в е т: Общее решение неоднородного уравнения  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + x(-\frac{5}{2}x - 5)e^{2x}$ .

**Пример 5.3.** Решить уравнение

$$y'' + y = 4 \sin x.$$

Р е ш е н и е. Решаем соответствующее однородное уравнение

$$y'' + y = 0.$$

Корни характеристического уравнения  $\lambda^2 + 1 = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \pm i$ .

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_1 = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения с правой частью

$$f(x) = 4 \sin x = e^{0x}(0 \cdot \cos x + 4 \cdot \sin x).$$

Имеем  $a = 0$ ,  $b = 1$ , тогда  $r = 1$ , так как  $a \pm bi = 0 \pm i$  — корни характеристического уравнения кратности 1;  $n = 0$ ,  $m = 0$ , тогда  $l = 0$ ,  $R_l(x) = A$ ,  $T_l(x) = B$ .

Поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_2 = e^{0x} \cdot x^1 \cdot (A \cos x + B \sin x) = Ax \cos x + Bx \sin x.$$

Для нахождения коэффициентов  $A$  и  $B$ , подставим  $y_2$  и его производные в исходное уравнение:

$$\begin{array}{l|l} 1 & y_2 = Ax \cos x + Bx \sin x, \\ 0 & y_2' = A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x, \\ 1 & y_2'' = -A \sin x - A \sin x - Ax \cos x + B \cos x + B \cos x - Bx \sin x. \end{array}$$

Приравниваем коэффициенты при  $\sin x$  и  $\cos x$  в левой и правой частях уравнения:

$$\begin{array}{l|l} \sin x & Bx - 2A - Bx = 4, \\ \cos x & Ax - Ax + 2B = 0, \end{array}$$

откуда, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в левой и правой частях уравнений системы, находим  $A = -2$ ,  $B = 0$ , и, подставляя в формулу для  $y_2(x)$ , получим  $y_2(x) = -2x \cos x$ , откуда

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - 2x \cos x.$$

О т в е т: Общее решение уравнения:  $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - 2x \cos x$ .



### 5.2.3 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью произвольного вида

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение (5.8) с непрерывной правой частью  $f(x)$  произвольного вида решается *методом вариации произвольных постоянных*. Пусть найдено общее решение

$$y = C_1 y_1 + \dots C_n y_n$$

соответствующего линейного однородного уравнения. Тогда решение уравнения (5.8) ищется в виде

$$y = C_1(x)y_1 + \cdots + C_n(x)y_n.$$

Функции  $C_k(x)$  определяются из системы

$$\left\{ \begin{array}{l} C'_1 y_1 + \cdots + C'_n y_n = 0 \\ C'_1 y'_1 + \cdots + C'_n y'_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ C'_1 y_1^{(n-2)} + \cdots + C'_n y_n^{(n-2)} = 0 \\ C'_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + C'_n y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_0}, \end{array} \right.$$

где  $a_0$  — коэффициент при старшей производной в уравнении (5.8).

**Пример 5.4.** Решить дифференциальное уравнение

$$y^{\text{IV}} - 2y''' + y'' = \frac{24 + 12x + 2x^2}{x^5}.$$

**Решение.** Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0.$$

Его корни:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ . Следовательно, общее решение однородного уравнения, соответствующего исходному уравнению, есть

$$y_1 = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x)e^x.$$

Ищем общее решение исходного уравнения в виде:

$$y = C_1(x) + C_2(x)x + (C_3(x) + C_4(x)x)e^x. \quad (5.12)$$

Для нахождения неизвестных функций  $C_k$  запишем систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1'(x) + C_2'(x)x + (C_3'(x) + C_4'(x)x)e^x = 0, \\ C_2'(x) + (C_3'(x) + C_4'(x)(x+1))e^x = 0, \\ (C_3'(x) + C_4'(x)(x+2))e^x = 0, \\ (C_3'(x) + C_4'(x)(x+3))e^x = \frac{24 + 12x + 2x^2}{x^5}. \end{array} \right.$$

Решая систему, получаем:

$$C_4(x) = \frac{24 + 12x + 2x^2}{x^5} e^{-x}, \quad C_3'(x) = -\frac{2x^3 + 16x^2 + 48x + 48}{x^5} e^{-x},$$

$$C_2'(x) = \frac{24 + 12x + 2x^2}{x^5}, \quad C_1'(x) = \frac{-2x^3 - 8x^2 + 48}{x^5}.$$

Интегрируя эти выражения, получим:

$$C_1(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{12}{x^4} + C_1, \quad C_2(x) = -\frac{6}{x^4} - \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2} + C_2,$$

$$C_3(x) = \left( \frac{12}{x^4} + \frac{12}{x^3} + \frac{2}{x^2} \right) e^{-x} + C_3, \quad C_4(x) = \left( -\frac{6}{x^4} - \frac{2}{x^3} \right) e^{-x} + C_4.$$

Подставляя эти выражения в (5.12), получим общее решение исходного уравнения:

$$y = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x)e^x + 1/x.$$

O T B E T:  $y = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x)e^x + 1/x.$

## Список литературы

- [1] В.И. Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
- [2] И.В. Асташова, В.А. Никишкин. Практикум по курсу "Дифференциальные уравнения". М.: МЭСИ, 2010.
- [3] А.И. Буфетов, Н.Б. Гончарук, Ю.С. Ильяшенко. Конспект курса Э Обыкновенные дифференциальные уравнения. Часть I. М., Изд-во попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2012.
- [4] Н.М. Матвеев. "Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений". Л.: Издательство ЛГУ, 1963.
- [5] И.Г. Петровский. "Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений". М.: Издательство МГУ, 1984.
- [6] Л.С. Понтрягин. "Обыкновенные дифференциальные уравнения". М.: "Наука", 1974.
- [7] А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. "Дифференциальные уравнения: примеры и задачи". Учеб. пособие. М.: "Высшая школа", 1989.
- [8] В.В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений (8-е изд.). М.: ГИФМЛ, 1959.
- [9] А.Ф. Филиппов. "Сборник задач по дифференциальным уравнениям". Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000.
- [10] А.Ф. Филиппов. Введение в теорию дифференциальных уравнений. УРСС, 2004.
- [11] Л.Е. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения М.: Изд-во ЛКИ, 2008.