МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» (Самарский университет)

Е.В. СИМОНОВА

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Самара 2022

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева»
(Самарский университет)

Е.В. СИМОНОВА

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве методических указаний по курсу «Моделирование информационно-вычислительных систем» для направления «Информатика и вычислительная техника»

С А М А Р А
Издательство Самарского университета
2022

УДК 519.876.5

ББК 22.18я73
С 375

Симонова, Елена Витальевна

Рецензент: канд. техн. наук, доц. Л.С. З е л е н к о

С 375 **Моделирование случайных величин**: метод. указания / Е. *В.Симонова.* – Самара: Изд-во Самарского университета, 2022. – 26 с. : ил.

ISBN

Методические указания содержат достаточно подробное описание точных и приближенных методов получения значений случайных величин с наиболее распространенными законами распределения. Даны рекомендации по организации статистического контроля качества получаемых реализаций случайных величин.

Методические указания предназначены для студентов направления 09.03.01 – «Информатика и вычислительная техника».

Подготовлены на кафедре информационных систем и технологий.

УДК 519.876.5
ББК 22.18я73

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ………….………………………………………………… 5
ВВЕДЕНИЕ……………….…………………………………………………… 5
1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ ………… 6
2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ…………………………………. 13
3. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА………………….……………………………. 13
4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ………………………………………… 15
5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ……………………………………………… 25
ЗАКЛЮЧЕНИЕ …………..……………………………………………… 25
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК……………..………………………. 25

ПРЕДИСЛОВИЕ

В методических указаниях описаны точные и приближенные методы моделирования случайных величин с заданными законами распределения вероятностей. Приводятся контрольные вопросы, а также индивидуальные задания для выполнения лабораторной работы.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлению 09.03.01 – Информатика и вычислительная техника.

Содержание методических указаний соответствует разделам рабочей программы по дисциплине «Моделирование информационно-вычислительных систем» федерального компонента ГОС подготовки бакалавров по направлению 09.03.01 – Информатика и вычислительная техника.

ВВЕДЕНИЕ

Цель лабораторной работы – изучение методов моделирования случайных величин, получение навыков разработки программ формирования реализаций случайных величин с заданными законами распределения вероятностей, а также практическое освоение статистических методов контроля качества полученных реализаций случайных величин.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Исходным материалом для формирования на ЭВМ случайных величин с различными законами распределения вероятностей служат равномерно распределенные в интервале [0, 1) случайные числа, которые вырабатываются на ЭВМ программным путем или же специальным физическим генератором случайных чисел.

Основные **свойства равномерного распределения**.
Непрерывная случайная величина *R* имеет равномерное распределение в интервале [0, 1), если функция плотности вероятности имеет вид:

$$f(R)=\begin{cases}1 & \text{при } 0<=R<=1\\ 0 & \text{вне этого интервала}\end{cases}$$

Интегральная функция распределения вероятностей имеет вид

$$F(R)=\begin{cases}0 & \text{при } R<0\\ R & \text{при } 0<=R<=1\\ 1 & \text{при } R>1\end{cases}$$

Математическое ожидание *M[R]* и дисперсия *D[R]*, соответственно, равны:

$$M[R]=\frac{1}{2};\ D[R]=\frac{1}{12}$$

Особенностью подобного распределения вероятностей является то обстоятельство, что вероятность попадания случайной величины *R* в интервал определенной длины равна длине этого интервала.

$$\Delta = R^{(2)} - R^{(1)},\ 0 \le \Delta \le 1$$

$$P\{R \in \Delta\} = P\{R^{(1)} <= R <= R^{(2)}\} = f(R)(R^{(2)} - R^{(1)}) = R^{(2)} - R^{(1)} = \Delta$$

Эта особенность равномерного случайного распределения в интервале [0, 1) широко используется при цифровой реализации случайных величин с различными законами распределения вероятностей.

Строго говоря, получить на ЭВМ программным путем реализации «чисто» случайной величины с равномерным законом распределения вероятностей невозможно. Это объясняется, в первую очередь, конечной разрядностью любой цифровой машины. В состав математического обеспечения современных ЭВМ вводятся, как правило, стандартные программы получения «псевдослучайных» последовательностей чисел.

Принципы составления алгоритмов, по которым функционируют подобные программы, подробно описаны в работе [1]. Эти алгоритмы объединяет одно общее для всех обстоятельство: они имеют в своей основе не случайную, а детерминированную структуру. Однако генерируемые с их помощью последовательности чисел весьма «похожи» на случайные. Этим и объясняется термин «псевдослучайность». Получаемые с помощью этих алгоритмов случайные числа с равномерным распределением являются только исходным материалом, «сырьем», из которого получаются реализации случайных величин с заданным законом распределения вероятностей.

Для получения реализаций случайной величины X с заданной плотностью распределения вероятностей $f(x)$ существует немало искусственных приемов.

Весьма распространен **метод нелинейного преобразования, обратного функции распределения**. Метод основан на использовании соотношения

$$\int_{-\infty}^{x_i} f(x)dx = r_i; i = 1,2,... \qquad (1)$$

Здесь r_i – i –я реализация случайной величины R, равномерно распределенной в интервале [0, 1); x_i – i –я реализация случайной величины X, описываемой плотностью вероятности $f(x)$.

Рассматривая выражение (1) как уравнение относительно x_i

$$x_i = \varphi(r_i)$$

и разрешая его, получим явную функциональную связь между x_i и r_i, которая легко алгоритмизируется. Например, для экспоненциального распределения вероятностей

$$f(x) = \lambda \ell^{-\lambda x}; x \geq 0, \lambda \geq 0$$

из выражения (1) получим:

$$\lambda \int_{0}^{x_i} \ell^{-\lambda x} dx = 1 - \ell^{-\lambda x} = r_i; \quad x \geq 0, \lambda \geq 0 \qquad (2)$$

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r_i) \qquad (3)$$

Из (2) следует, что т.к. величина *(1- R)* распределена так же, как и R, т.е. равномерно в интервале [0, 1), можно представить выражение (3) в окончательном виде (4).

Использование последнего соотношения позволяет получить реализации x_i случайной величины X, каждая из которых будет зависеть лишь от r_i. Таким образом, если программный датчик (стандартная программа генерации R) выдает независимые реализации r_i, реализации x_i также будут независимы друг от друга.

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln r_i; \qquad i = 1,2,... \qquad (4)$$

В общем случае, уравнение (1) очень часто точно не решается относительно x_i (например, для $f(x)$ – плотности нормальной случайной величины и т.д.). Поэтому возможности реализации случайных величин с заданной статистической моделью нередко связывают с использованием **специальных методов моделирования**.

Одни методы этой группы основаны на приближенном решении уравнения (1) [1], другие – на использовании специальных теорем теории вероятностей и т.п.

Так, например, для получения на ЭВМ реализаций **нормальной случайной величины** используют центральную предельную теорему теории вероятностей, из которой, в частности, следует, что сумма реализаций r_i случайной величины R, равномерно распределенной в интервале [0, 1), при достаточно большом значении n, может рассматриваться как случайная величина, описываемая нормальным законом распределения вероятностей. Это обстоятельство позволяет легко алгоритмизировать процесс формирования реализации нормальной случайной величины (5). Обычно при $n = 12$ распределение величины norm уже весьма близко к нормальному [1].

$$\left| norm(n) = \sum_{i=1}^{n} r_i \right| \tag{5}$$

Нетрудно убедиться, что величина, формируемая с помощью приведенного алгоритма (5), в предположении независимости отдельных величин r_i , имеет дисперсию ($n/12$) и среднее, равное ($n/2$). Сформировать из этой величины любую другую, распределенную нормально, но с другими значениями параметров (среднее – m, дисперсия – σ^2) можно с помощью алгоритма (6):

$$Norm = \sigma * (norm(12)-6) + m. \tag{6}$$

Обсуждая возможности цифровой реализации **дискретных величин**, рассмотрим случайную величину (7)

$$X = \begin{Bmatrix} x^{(0)} & x^{(1)} & x^{(2)} & \dots & x^{(n)} \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{Bmatrix} \tag{7}$$

такую, что

$$p\left\{X = x^{(k)}\right\} = p_k \qquad \sum_{k=0}^{n} p_k = 1$$

Верхняя строка в выражении (7) определяет спектр возможных значений величины X, нижняя – соответствующие им вероятности.

Реализация такой случайной величины на ЭВМ осуществляется весьма просто. Интервал определения равномерно распределенной случайной величины R $\in$ [0,1) делится на подинтервалы Δ_k такие, что длина Δ_k равна p_k (рис. 1):

Тогда вероятность того, что случайная величина R попадет в интервал Δ_k, оказывается равной p_k:

$$p\left\{R \in \Delta_k\right\} = p_k$$

и алгоритм моделирования случайной величины X определяется простым присваиванием:

$$X = x^k \text{ при } \quad R \in \Delta_k$$

Схема алгоритма моделирования для этого случая может иметь вид, приведенный на рис.2 (сплошные стрелки). При этом интервалы Δ_k определяются самим заданием случайной величины (7) и вводятся в ЭВМ в качестве исходных данных.

Для **дискретных случайных величин с неограниченным спектром** значений принципы моделирования остаются в основном прежними, однако Δ_k приходится рассчитывать непосредственно в процессе моделирования.

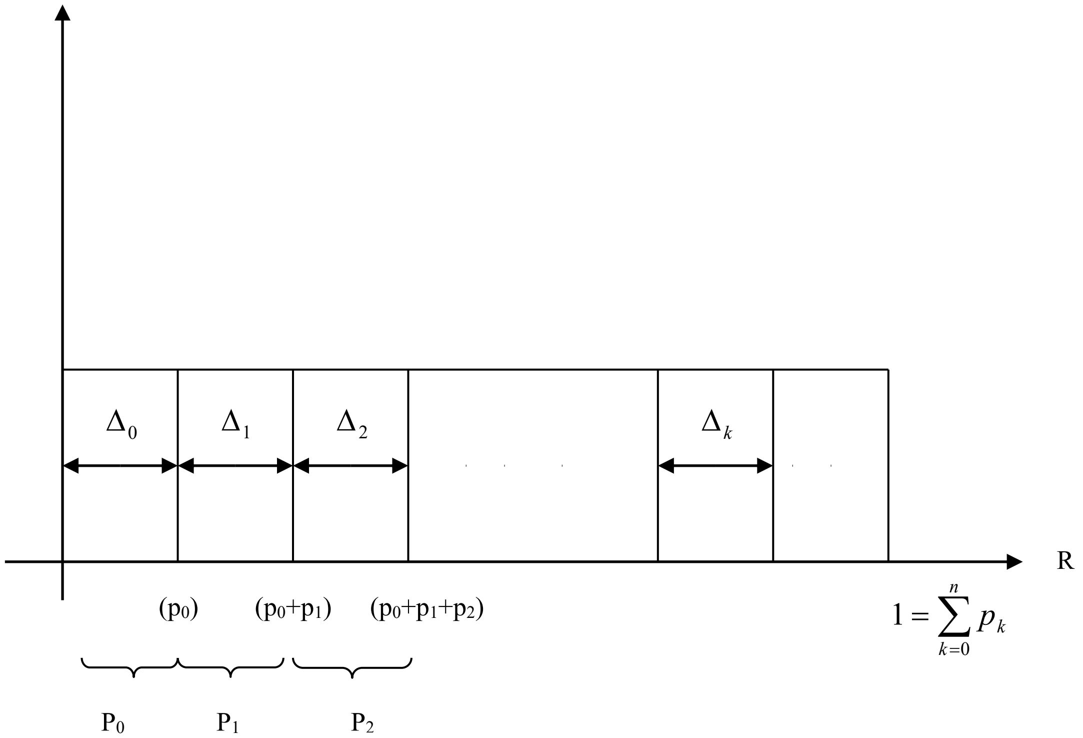

Рис. 1 Инверсная функция распределения вероятностей

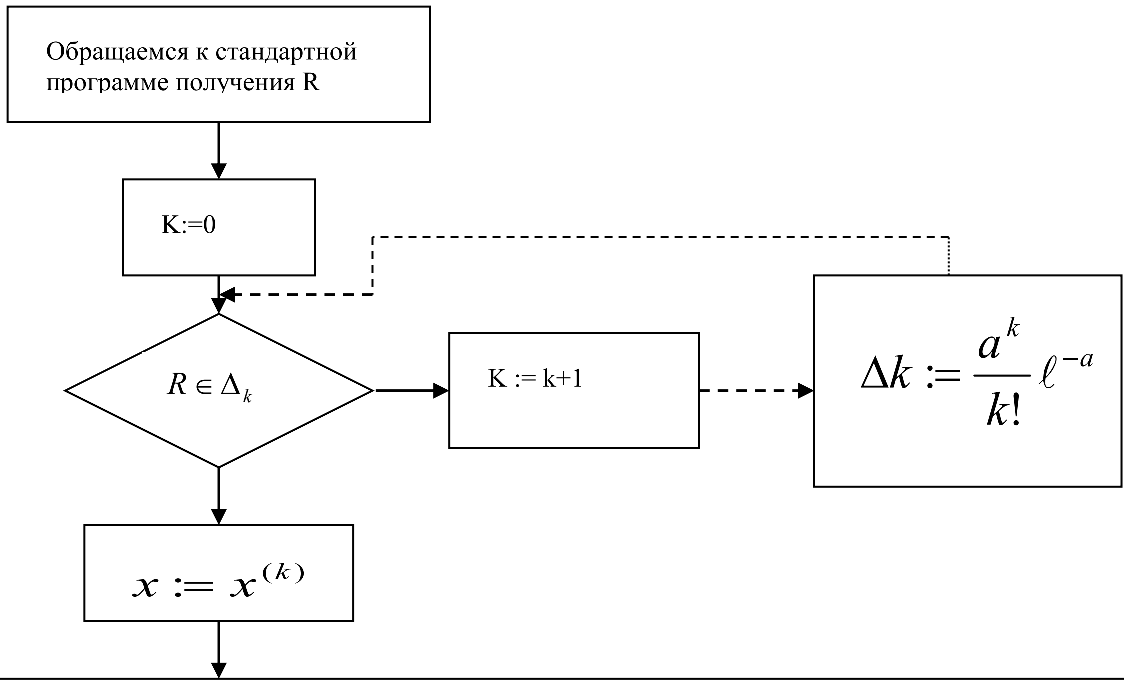

Рис. 2 Алгоритм моделирования дискретной случайной величины

Например, для случайной величины, распределенной по закону Пуассона, придется рассчитывать для каждого значения k, при этом в программу моделирования (рис. 2) следует ввести дополнительный блок (пунктирные стрелки).

Заранее же рассчитать все Δ_k невозможно вследствие их бесконечного количества. Однако нередко все же Δ_k рассчитывают для $k<=K$ (причем K выбирают из условия $\sum_{k=0}^{K} p_k \approx 1$). Тогда при $k<=K$ случайную величину X моделируют как величину с ограниченным спектром значений, а при $k>K$ – как с бесконечным (неограниченным), рассчитывая Δ_k в процессе моделирования.

Статистический контроль качества реализаций случайной величины

При моделировании на ЭВМ случайной величины X с заданным законом распределения $f(x)$ (f – плотность вероятности) качество получаемых реализаций x_i, $i=1, 2, 3, \dots, N$ оценивается путем проверки гипотезы о принадлежности этих реализаций распределению $f(x)$. Самые разнообразные погрешности моделирования (в том числе, и «псевдослучайность» исходного материала – R) могут привести к тому, что реализации x_i не будут соответствовать закону распределения $f(x)$, что будет свидетельствовать о неудовлетворительном качестве нашей цифровой модели. Подобный статистический контроль качества реализаций x_i $(i = 1, 2, \dots, N)$ проводится с использованием математического аппарата проверки статистических гипотез, в основе которого лежит понятие критерия согласия. В качестве критерия согласия условимся использовать критерий Пирсона χ^2 .

Процедуру проверки гипотезы о принадлежности реализаций x_i $(i = 1, 2, \dots, N)$ моделируемому распределению $f(x)$ проведем в несколько этапов.

<u>Этап 1.</u>

Разделим всю область определения случайной величины x на несколько непересекающихся интервалов, например, n (рис. 3).

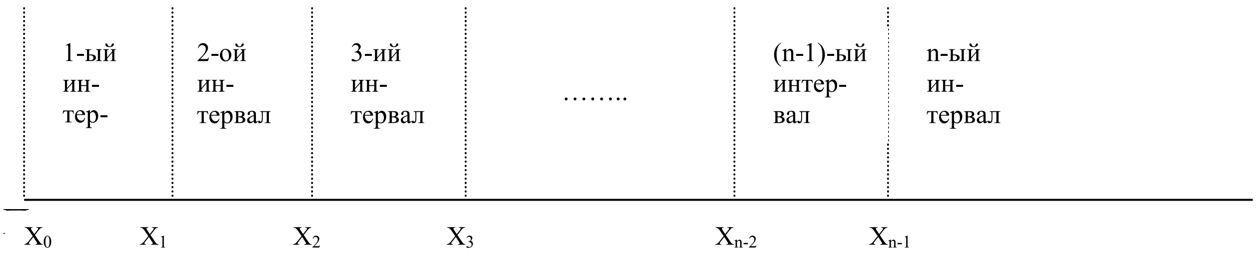

Рис 3. Разбиение области определения случайной величины

Ширина этих интервалов определяется областью существования x. Так, если x – величина нормальная, то, как известно, ее область определения $(-\infty, \infty)$ – вся числовая ось. При этом крайние интервалы оказываются полуоткрытыми: $(-\infty, X_0]$ и $[X_{n-1}, \infty)$. Если X – величина, распределенная по экспоненциальному закону, область определения – полубесконечность – $[0, \infty)$. В этом случае $x_0=0$, первый интервал разбиения $[0, x_1)$, последний – $[x_{n-1}, \infty)$. Наконец, для равномерного распределения первый интервал $[0, x_1)$, последний $[x_{n-1}, 1)$ – все интервалы закрыты. Граничные точки, отделяющие один интервал от другого, в дальнейшем для определенности условимся включать в предыдущий интервал *$(x_{k-1}, x_k], (x_k, x_{k+1}]$, ...* хотя принципиального значения это, конечно, не имеет.

Заметим, что целесообразно проводить разбиение на интервалы таким образом, чтобы вероятность попадания реализаций случайной величины X в любой из интервалов была бы постоянна:

$$p\{x_{k-1} < X < x_k\} = p_k = const = \frac{1}{n}.$$

Это условие можно переписать в виде

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \frac{1}{n}; k = 1,2,...,n-1 \qquad (8)$$

из которого легко вывести алгоритм разбиения области определения X на интервалы.

$$x_k = \frac{1}{\lambda}\left[-\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)\right]; k = 1,2,...,n-1;$$

Для дискретной случайной величины интервалы желательно выбирать таким образом, чтобы в каждом из них находилось одно из возможных значений спектра. Однако, если вероятности спектральных составляющих малы *($p_k<0.05$)*, интервалы должны включать в себя несколько спектральных компонент с тем, чтобы теоретическая вероятность попадания в интервал была бы не меньше 0.05.

$$p\{x = x^{(k)}\} = p_k$$

Этап 2.

Всю совокупность реализаций x_i *($i = 1, 2, ... , N$)* «сортируем» по интервалам, определяя при этом, сколько реализаций попало в первый интервал, во второй, в третий и т.д. Программным путем это удобно делать с помощью счетчиков (рис. 4), которым предварительно присваиваются нулевые значения:

СЧ$_1$:=0, СЧ$_2$:=0, … ,СЧ$_n$:=0;

Ясно, что по завершении всего цикла «сортировки», когда $i=N$, $\sum_{k=1}^{n} СЧ_k = N$.

Этап 3.

На третьем этапе вычисляется значение критерия согласия:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(СЧ_k - NP_k)^2}{NP_k} \qquad (9)$$

Если положить $p_k = \frac{1}{n}$ для всех k и определить границы интервалов разбиения x_k из условий (8), выражение (9) можно записать в более удобном для вычисления виде:

$$\chi^2 = \frac{n}{N}\left[\sum_{k=1}^{n}(СЧ_k)^2\right] - N \qquad (10)$$

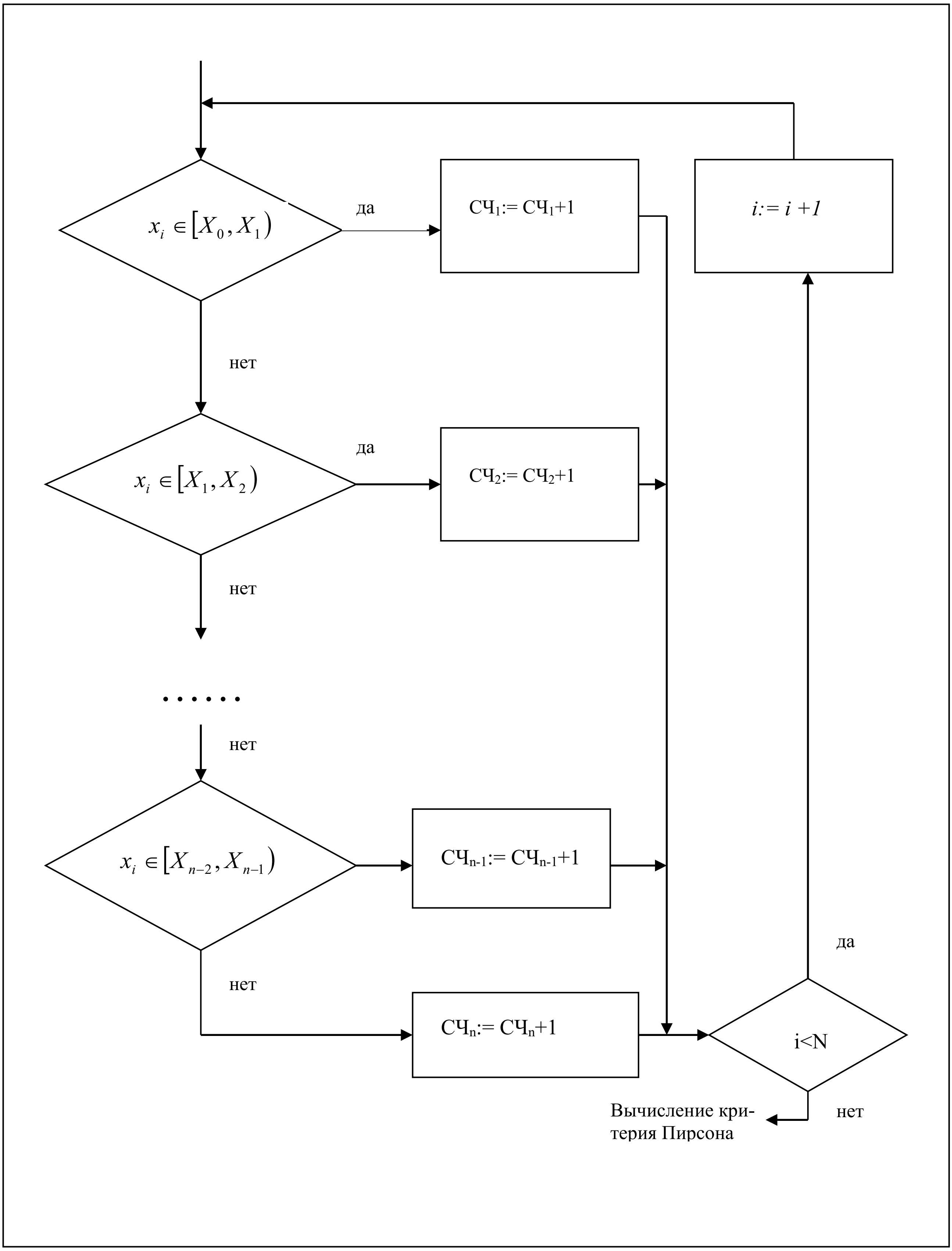

Рис. 4. Проверка гипотезы о принадлежности случайной величины заданному распределению вероятностей

Этап 4.

Этот этап является завершающим, на котором по полученному значению необходимо определить, можно ли принять гипотезу о принадлежности моделируемой случайной величины *x* распределению *f(x)* или нет.

Для того чтобы дать ответ на этот вопрос, χ^2 сравнивают с порогом y_0: если $\chi^2 > y_0$, проверяемая гипотеза отвергается; если $\chi^2 < y_0$, проверяемая гипотеза не может быть отвергнута. В первом случае делается вывод о неудовлетворительности построенной модели. Во втором считается, что реализации x_i $(i = 1, 2, \ldots , N)$ случайной величины *X*, получаемые с помощью цифровой модели, хорошо согласуются с законом распределения *f(x)*.

При этом вероятность того, что мы ошибочно признали построенную цифровую модель неудовлетворительной (ошибка первого рода) не превосходит заданной величины α – уровня значимости критерия согласия. Уровень значимости – α, порог y_0 и число интервалов разбиения *n* связаны специальной табулированной зависимостью (табл. 1).

Таблица 1. Уровень значимости критерия согласия

a / *(n-1)*	0.05	0.025	0.01	0.005
10	18.3	20.5	23.2	25.2
11	19.7	21.9	24.7	26.8
12	21	23.3	26.2	28.3
13	22.4	24.7	27.7	29.8
14	23.7	26.1	29.1	31.3

2 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Процесс выполнения лабораторной работы можно условно разделить на четыре следующих этапа:

1. Ознакомительный
2. Расчетный
3. Лабораторный
4. Этап оформления отчета.

На первом этапе, студенту, выполняющему работу, необходимо ознакомиться с теоретическими вопросами реализации случайных величин на ЭВМ.

Второй этап начинается с получения задания на моделирование. Для полученного задания разрабатывается алгоритм моделирования случайной величины и обработки результатов моделирования с использованием критерия согласия χ^2.

На лабораторном (третьем) этапе выполняется программа моделирования.

Четвертый этап заключается в оформлении отчета.

3 ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

Отчет начинается с названия лабораторной работы и содержит следующие разделы:

1. Задание на моделирование.
2. Описание метода моделирования случайной величины.
3. Листинг программы моделирования.
4. Результаты моделирования (в этом разделе должна быть представлена гистограмма распределения *f(x)*) (рис. 5).

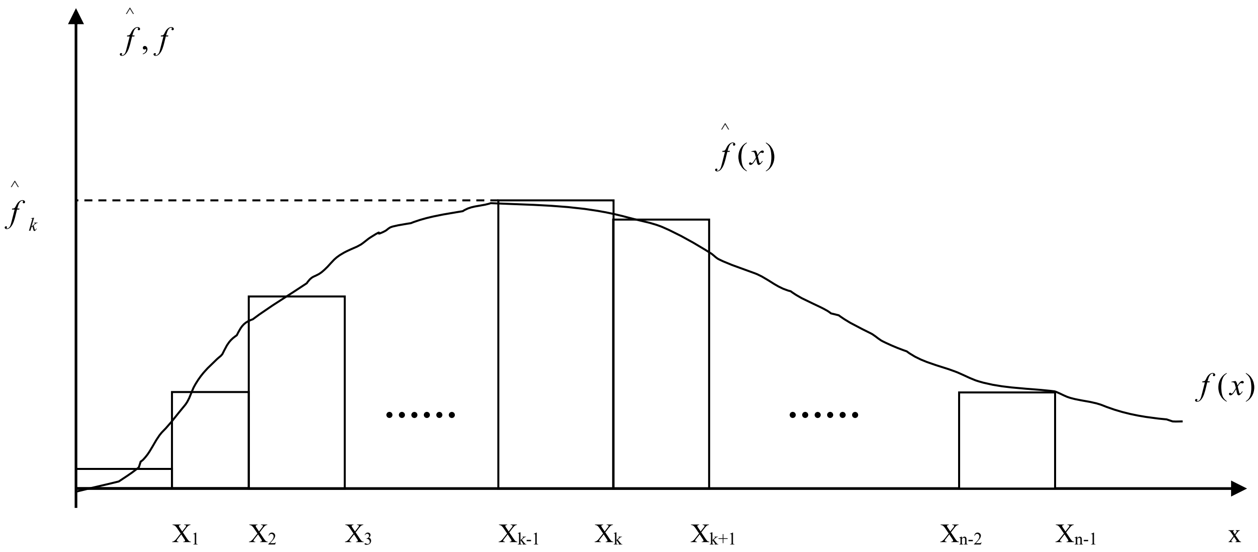

Рис. 5 Гистограмма распределения моделируемой случайной величины

Подобная гистограмма $\hat{f}(x)$ для непрерывных случайных величин является ступенчатой функцией аргумента. Причем, величина каждой такой «ступеньки» определяется как

$$\hat{f}_k = \frac{СЧ_k}{N(x_k - x_{k-1})}. \qquad (11)$$

Здесь $СЧ_k$ – содержимое k-ого счетчика;

N – количество реализаций случайной величины;

x_k, x_{k-1} – границы интервалов разбиения.

Для дискретной случайной величины

$$\hat{f} = \frac{СЧ_k}{N}.$$

Должна быть представлена также теоретическая кривая *f(x)* плотности вероятности моделируемого закона распределения. Кроме того, в этом разделе приводится найденное путем моделирования значение χ^2.

5. Вывод о качестве модели. Вывод делается на основании сравнения χ^2 с порогом y_0.

4 ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1

Получить последовательность из N=1000 реализаций случайной величины *X*, распределенной экспоненциально. Контроль качества проводить с использованием 11-ти интервалов разбиения области *[0, ∞)*. Уровень значимости *α=0.01*. Значение *a* определяется по таблице вариантов

$$f(x) = ae^{-ax}, \qquad \begin{cases} x \ge 0 \\ a > 0 \end{cases} \qquad F(x) = 1 - e^{-ax};$$

Номер варианта	1	2	3	4	5
Значение *a*	0.5	1	2	3	4

Задание 2

Получить на ЭВМ последовательность из N=1000 реализаций случайной величины *X*, распределенной по закону Релея.
При статистическом контроле использовать 12 интервалов разбиения. Уровень значимости *α=0.01*. Значение *a* определяется по таблице вариантов.

$$f(x) = \frac{x}{a}\exp\left\{-\frac{x^2}{2a}\right\}; \qquad \begin{cases} x \ge 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{x^2}{2a}\right\}$$

Номер варианта	1	2	3	4	5
Значение *a*	0.5	1	2	3	4

Задание 3

Получить на ЭВМ последовательность из N=1000 реализаций случайной величины *X*, распределенной по нормальному закону со средним *m* и дисперсией σ^2. При контроле качества моделирования принять *n* =15. Уровень значимости *α=0.005*. Параметры *m* и σ^2 выбираются из таблицы вариантов.

Номер варианта	1	2	3	4	5
Значение m	2	3	4	5	6
σ^2	0.25	4	0.25	1	4

<u>Задание 4.</u>

Получить на ЭВМ последовательность из N=100 реализаций случайной величины *X*, распределенной по закону Коши:

$$f(x) = \frac{1}{b\pi}\frac{1}{1+(x-a)^2/b^2} \qquad \begin{cases} x \ge 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\,\frac{x-a}{b};$$

Контроль качества моделирования провести для *n=13*. Уровень значимости *α=0.05*. Значение *a* и *b* определяется по таблице вариантов.

Номер варианта	1	2	3	4	5
Значение *a*	0	0	1	2	3
Значение *b*	1	2	1	2	1

<u>Задание 5</u>

Выполнить задание 4. Моделирование провести специальным методом, учитывая то обстоятельство, что отношение

$$x = \frac{norm1}{norm2}$$

σ_1^2 распределено по закону Коши с параметрами *a=0* и $b = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, если (*norm1*) и (*norm2*) – нормальные случайные величины с нулевыми средними и дисперсиями, указанными в таблице вариантов.

Номер варианта	1	2	3	4	5
σ_1^2	1	2	3	1	1
σ_2^2	2	1	1	3	4

Задание 6

Получить на ЭВМ последовательность из N=1000 реализаций случайной величины *X*, распределенной по закону Эрланга:

$$f(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x}; \begin{matrix} x \ge 0 \\ \lambda > 0 \end{matrix} \quad m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Моделирование провести специальным методом, используя то обстоятельство, что случайная величина

$$X = \sum_{k=1}^{m+1} y_k$$

распределена по закону Эрланга, если величины y_k независимы и распределены экспоненциально:

$$f(y) = \lambda e^{-\lambda y}, y > 0, \lambda > 0.$$

Исходные данные задаются таблице вариантов. Контроль качества провести для $n=12$. (Уровень значимости $\alpha=0.025$).

Номер варианта	1	2	3	4	5
Значение λ	1	0.5	28	1	0.5
Значение m	1	2	1	2	1

Задание 7

Получить на ЭВМ последовательность из N=1000 реализаций равномерно распределенной случайной величины $A \le x \le B$.
Контроль качества провести для $n=15$. Уровень значимости $\alpha=0.05$.
Исходные данные задаются в таблице вариантов.

Номер варианта	1	2	3	4	5
A	1	2	0.5	1	1
B	3	5	1.5	7	10

Задание 8

Получить на ЭВМ последовательность из N=1000 реализаций дискретной случайной величины

$$x = \begin{Bmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} & \dots & x^{(k)} & \dots & x^{(\ell)} \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots & p_\ell \end{Bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_k &= x_1 + (k-1)\Delta; \\ p_k &= p_1 - (k-1)p; \\ k &= \overline{1,\ell}. \end{aligned}$$

Контроль качества провести для *n=l*. Уровень значимости *α=0.025*. Исходные данные выбираются из таблицы вариантов.

Номер варианта	1	2	3	4	5
x_1	1	1	2	2	0.7
p_1	0.18	0.17	0.1	0.1	0.1
Δ	0.3	0.4	0.1	0.4	0.2
l	11	12	13	14	15

Примечание: параметр *p* определяется из условия нормировки:

$$\sum_{k=1}^{\ell} p_k = 1$$

Задание 9

Получить на ЭВМ последовательность из N=1000 реализаций дискретной случайной величины, распределенной по закону Пуассона:

$$p\{x = x_i\} = \frac{a_i}{i!} e^{-a}; i = 1,2,\dots$$

Статистический контроль провести с использованием *n=11* интервалов разбиения. Уровень значимости *α=0.025*. Параметр *a* выбирается из таблицы вариантов.

Номер варианта	1	2	3	4	5
a	0.5	1	2	3	4

Задание 10

Выполнить задание **N9**, используя для моделирования случайной величины, распределенной по закону Пуассона, соотношение между экспоненциальным распределением и распределением Пуассона.

Задание 11

Выполнить задание **N3**, используя для моделирования нормированной нормальной величины следующий алгоритм (метод Марсальи-Брея):

1) сгенерировать две реализации r1 и r2 случайной величины, равномерно распределенной на интервале [0, 1);
2) полагая v1 = 2r1 – 1 и v2 = 2r2 – 1, вычислить $s = v_1^2 + v_2^2$;
3) при s >= 1 начать цикл снова,
   при s < 1 вычислить

$$x_1 = v_1\sqrt{\frac{-2\ln s}{s}} \quad \text{и} \quad x_2 = v_2\sqrt{\frac{-2\ln s}{s}}.$$

Затем получить реализации случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами (m,σ^2).

Задание 12

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей треугольное распределение

$$f(x) = \frac{2}{a(a+b)}(a+x), \quad -a <= x <= 0$$

$$f(x) = \frac{2}{b(a+b)}(b-x), \quad 0 <= x <= b$$

$$F(x) = \frac{(a+x)^2}{a(a+b)}, \quad -a \le x \le 0$$

$$F(x) = 1 - \frac{(b-x)^2}{b(a+b)}, \quad 0 \le x \le b$$

Параметры a и b выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, $\alpha = 0.05$.

Задание 13

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, распределенной по биномиальному закону $p_n(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0,1,2...,n;$ $0<p<1.$

Параметры распределения n и p выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, $\alpha = 0.05$.

Задание 14

Выполнить задание **N3**, используя для моделирования нормированной нормальной величины следующий алгоритм:

1) вычислить $R=\dfrac{\sum_{i=1}^{12} r_i - 6}{4}$, r_i – реализации случайной величины, равномерно распределенной на интервале [0, 1);
2) вычислить $X=\left\{\left\langle\left[\left(c_1 R^2+c_2\right)R^2+c_3\right]R^2+c_4\right\rangle R^2+c_5\right\}R$, где

$c_1 = 0.029899776$ $c_4 = 0.252408784$

$c_2 = 0.008355968$ $c_5 = 3.949846138$

$c_3 = 0.076542912$

Затем получить реализации случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами (m,σ^2).

Задание 15

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей равномерное прямоугольное распределение

$$f(x)=\frac{1}{2a}, \qquad |x-b|<a$$
$$f(x)=0, \qquad |x-b|>a$$

$$F(x)=0, \qquad x\le b-a$$
$$F(x)=\frac{1}{2a}(x-b+a) \qquad b-a\le x\le b+a$$
$$F(x)=1 \qquad x\ge b+a$$

Параметры a и b выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, $\alpha = 0.05$.

Задание 16

Выполнить задание **N3**, используя для моделирования нормированной нормальной величины следующий алгоритм (метод Бокса-Маллера):

1) сгенерировать две реализации r1 и r2 случайной величины, равномерно распределенной на интервале [0, 1);
2) сгенерировать две реализации x1 и x2 нормированной нормальной случайной величины

$$x1 = -2\,ln\,r1\,cos(2\pi r2); \qquad x2 = -2\,ln\,r1\,sin(2\pi r2);$$

Затем получить реализации случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами (m,σ^2).

Задание 17

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей распределение Лапласа

$$f(x) = \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{|x-b|}{\beta}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{|x-b|}{\beta}}, \quad x \le b$$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{|x-b|}{\beta}}, \quad x > b.$$

Параметры b и β выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 11 интервалов разбиения, $\alpha = 0.05$.

Задание 18

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей геометрическое распределение

$$p(x) = q(1-q)^x, \quad x = 0,1,2,\ldots; \quad 0 < q < 1.$$

Метод моделирования:

1) сгенерировать реализацию r случайной величины, равномерно распределенной на интервале [0, 1);
2) получить реализацию случайной величины c=[ln r / ln(1-q)], [] – означает целую часть числа;
3) принять значение случайной величины c за реализацию случайной величины p.

Параметр q выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, $\alpha = 0.05$.

Задание 19

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей распределение Паскаля

$$p(x) = C_{m+x-1}^{x} q^{m} (1-q)^{x}, \qquad x = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, 3, \dots; \quad 0 < q < 1.$$

В последовательности испытаний Бернулли с вероятностью успеха q количество p испытаний вплоть до m-го успеха (включая и этот успех) подчиняется распределению Паскаля с параметрами m и q.

Метод моделирования. Случайную величину, соответствующую распределению Паскаля с параметрами m и q, можно получить, просуммировав m независимых реализаций случайной величины, распределенной геометрически с параметром q (смотреть задание 18).

Параметры m и q выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, $\alpha = 0.05$.

Задание 20

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей гипергеометрическое распределение

$$p(x) = \frac{C_{N1}^{x} C_{N-N1}^{n-x}}{C_{N}^{n}},$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, n; \quad N \ge n \ge 0; \quad N \ge N1; \quad N1 = qN; \quad 0 \le q \le 1.$$

Параметры n, q, N выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, $\alpha = 0.05$.

Задание 21

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей Г- распределение $\Gamma(\alpha,\beta)$, если ее плотность распределения равна

$$f(x) = \beta^{\alpha} x^{(\alpha-1)} e^{-\beta x} / \Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad x \ge 0.$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad \text{– гамма – функция.}$$

Моделирование выполнить специальным методом с учетом того, что распределению $\Gamma(\alpha,\beta)$ подчинено распределение случайной величины $y = \frac{\bar{y}}{\beta}$. Случайная величина $\bar{y}$ имеет распределение $\Gamma(\alpha,1)$. Плотность распределения $\bar{y}$ при x > 0 равна $f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-x}$. Для целых α =n $\bar{y} = -\ln\left(\prod_{k=1}^{n} r_i\right)$, где r_i – независимые реализации случайной величины, равномерно распределенной на [0,1).

Параметры α и β выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, α = 0.05.

Задание 22

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей распределение Хи-квадрат с n степенями свободы. Моделирование выполнить специальным методом с учетом того, что распределению Хи-квадрат с n степенями свободы подчиняется распределение случайной величины $y = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$, где x_k – взаимно независимые реализации случайной величины, имеющей нормированное нормальное распределение с параметрами (0,1). Параметр *n* выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, α = 0.05.

Задание 23

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, распределенной по усеченно-нормальному закону с параметрами (m,σ^2) и принимающей значения > 0.

Параметры *m* и σ выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, α = 0.05.

Задание 24

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей t-распределение Стьюдента с m степенями свободы. Моделирование выполнить специальным методом с учетом того, что t-распределению Стьюдента с m степенями свободы подчиняется распределение случайной величины

$$Y = \frac{x_0}{\sqrt{\frac{1}{m}\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2\right)}},$$ где

x_0, x_1, …, x_m – взаимно независимые реализации случайной величины, имеющей нормированное нормальное распределение с параметрами (0,1).

Параметр *m* выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, α = 0.05.

Задание 25

Получить N = 1000 реализаций случайной величины *X*, о которой собрана следующая статистическая информация: 20% значений находятся в диапазоне [0,50], 30% значений находятся в диапазоне]50,80], 10% значений находятся в диапазоне]80,100], 40% значений находятся в диапазоне]100,200].

Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, $\alpha = 0.05$.

Задание 26

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей распределение

$$f(x) = \frac{a^2 x}{\left(1 + a^2 x^2\right)^{3/2}}, \quad x >= 0 \qquad F(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 x^2}}.$$

Параметр *a* выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 11 интервалов разбиения, $\alpha = 0.05$.

Задание 27

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей распределение

$$f(x) = \frac{x}{a\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad x \in [0, a) \qquad F(x) = 1 - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

$$f(x) = 0, \qquad x \notin [0, a)$$

Параметр *a* выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, $\alpha = 0.05$.

Задание 28

Получить N = 1000 реализаций случайной величины X, имеющей распределение Вейбулла, $X \sim W(\lambda, k)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

$$F(x; k, \lambda) = 1 - e^{-(x/\lambda)^k}$$

$, x \ge 0$

$F(x;\ k;\ \lambda) = 0,\ x < 0$

Метод моделирования. Распределение Вейбулла может быть получено как функция от экспоненциального. Если x – реализация случайной величина X с экспоненциальным распределением Exp(λ) для параметра λ, то случайная величина $Y=X^{1/k}$, $k>0$, имеет распределение Вейбулла W($\lambda^{1/k}$, k).

Параметры λ, k выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, $\alpha = 0.05$.

5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каковы особенности равномерного в интервале [0,1) распределения вероятностей? Как они используются при моделировании?
2. Опишите основные свойства и особенности закона распределения вероятностей, используемого в Вашем задании.
3. Каким методом Вы пользовались при моделировании случайной величины? Каковы особенности этого метода?
4. Поясните структуру программы моделирования. Выделите в ней основные части, процедуры, блоки.
5. В чем заключается статистический контроль качества моделирования? Каковы особенности критерия согласия χ^2?
6. Охарактеризуйте закон распределения вероятностей содержимого счетчика $СЧ_k$.
7. Докажите, что случайная величина x_i, определяемая из соотношения (1), действительно описывается законом распределения с плотностью $f(x)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания «Моделирование случайных величин» посвящены рассмотрению методов и алгоритмов моделирования случайных величин с заданными законами распределения вероятностей.

Методические указания содержат рекомендации по организации статистического контроля качества получаемых реализаций случайных величин.

Логическим завершением методических указаний являются контрольные вопросы и индивидуальные задания для самостоятельной работы студентов.

Вопросы, имеющие практическое значение для студентов при выполнении лабораторной работы, освещены с необходимой для использования полнотой.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Советов, Б. Я. Моделирование систем : учебник для академического бакалавриата / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. — 7-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 343 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-3916-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/425228 (дата обращения: 30.08.2021).

2. Советов, Б. Я. Моделирование систем. Практикум : учебное пособие для бакалавров / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 295 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс).

Учебное издание

Симонова Елена Витальевна

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Методические указания

Редактор
Компьютерная верстка

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. .
Тираж экз. Заказ . Арт. С- / 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)

Изд-во Самарского университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.